

Modelação matemática da variação da temperatura no pé

David André Bento

Relatório Final do Trabalho de Projecto apresentado à
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

para obtenção do grau de Mestre em
Tecnologia Biomédica

Dezembro de 2011

Modelação matemática da variação da temperatura no pé

David André Bento

Relatório Final do Trabalho de Projecto apresentado à
Escola Superior de Tecnologia e de Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

para obtenção do grau de Mestre em
Tecnologia Biomédica

Orientadora:

Dr^a. Ana Isabel Pereira

Co-orientador

Dr. Fernando Monteiro

“Este Trabalho de Projecto inclui as críticas e sugestões feitas pelo Júri”.

Dezembro de 2011

Aos meus pais, irmã e avó.

Agradecimentos

À Professora Doutora Ana Isabel Pereira quero agradecer pela sugestão do tema, pela disponibilidade ao longo deste ano para o esclarecimento de dúvidas, pelas sugestões dadas e pela paciência em me ajudar nas dificuldades que foram surgindo durante a realização deste trabalho.

Ao Professor Doutor Fernando Monteiro, quero agradecer pelo empenho que demonstrou durante a aquisição de tecnologia necessária para poder realizar parte deste trabalho, e pela ajuda preciosa que me deu durante a fase de processamento de imagem através das ideias e das explicações das técnicas utilizadas.

Um agradecimento muito especial para os meus pais, irmã e avó, que sempre me ajudaram e me deram apoio. Quero agradecer aos meus pais todo o apoio e sacrifícios que fizeram para me dar sempre o melhor, sendo as pessoas a quem devo tudo o que sou.

A todos os meus amigos e amigas que sempre me incentivaram e me deram apoio.

A todos os voluntários que se disponibilizaram para a aquisição de dados e a todas as pessoas que, directa ou indirectamente, contribuíram para a realização desta Tese de Mestrado, um Muito Obrigado.

Resumo

Este trabalho tem como objectivo principal a modelação matemática da distribuição da temperatura em pés em pessoas saudáveis. Para tal, consideram-se imagens térmicas da planta dos pés de quinze voluntários entre os 21 e 43 anos.

As imagens obtidas através da câmara térmica FLIR 365, foram processadas utilizando duas técnicas de processamento de imagens distintas: a técnica de *Region Growing* e *Watershad*. Neste procedimento conclui-se que se obtinha melhores resultados usando a técnica de *Region Growing*, obtendo-se a matriz da distribuição da temperatura de cada pé.

Com a matriz obtida, usando a técnica descrita anteriormente, foram testadas cinco modelações diferentes combinadas com cinco técnicas de optimização não linear.

Dos resultados obtidos pode-se concluir que as melhores modelações são baseadas na soma de quadrados de funções trigonométricas.

Palavras chave: Optimização não linear, métodos de penalidade, termografia, processamento de imagem, segmentação.

Abstract

The main objective of this work is to find a mathematical model of temperature distribution in feet in healthy people. We consider feet thermal images of fifteen volunteers between 21 and 43 years.

The images obtained through the thermal camera FLIR 365, were processed using two different image processing techniques: the technique of Region Growing and Watershed. In this procedure, it was concluded that better results are obtained using the technique of Region Growing to obtain the matrix of temperature distribution of each foot.

With the temperature distribution matrix, obtained using the technique described above, were tested five different modeling combined with five nonlinear optimization techniques.

From our results, we can conclude that the best modeling is based on the sum of squares of trigonometric functions.

Keywords: Nonlinear optimization, penalty methods, thermography, image processing, segmentation.

Conteúdo

Índice de Tabelas	ix
Índice de Figuras	xi
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Estrutura do relatório	2
2 Termografia	5
2.1 História da termografia	5
2.2 Termografia	9
2.2.1 Transferência de calor	11
2.2.2 Radiação Infravermelha	12
2.3 Processamento de imagens	14
3 Introdução à otimização	17
3.1 Introdução à otimização contínua	17
3.2 Otimização linear	18
3.3 Otimização não linear	20
3.3.1 Método de Newton	20
3.3.2 Método de Quasi-Newton	21
3.3.3 Método SQP	22
4 Métodos de penalidade e função lagrangeana aumentada	23
4.1 Introdução	23

4.2	Funções de penalidade	25
4.2.1	Função de penalidade l_1	26
4.2.2	Função de penalidade quadrática	27
4.2.3	Função de penalidade hiperbólica	28
4.2.4	Função de penalidade exponencial	29
4.2.5	Função de penalidade dinâmica	30
4.3	Função lagrangeana aumentada	31
4.3.1	Função lagrangeana aumentada - restrições de igualdade	32
4.3.2	Função lagrangeana aumentada - restrições de desigualdade	33
5	Análise e discussão resultados	35
5.1	Análise dos métodos de otimização	35
5.2	Técnicas de processamento de imagens	38
5.3	Modelação Matemática	41
5.4	Resultados obtidos para um número reduzido de imagens	44
5.5	Resultados obtidos considerando todas as imagens	47
5.6	Discussão de resultados obtidos	56
6	Conclusões e trabalho futuro	59
6.1	Conclusões	59
6.2	Trabalho futuro	59
	Bibliografia	61
	Apêndices	61

Lista de Tabelas

2.1	Comprimento de onda das diferentes regiões do infravermelho (Adaptado de [35]) . . .	13
5.1	Parâmetros iniciais dos métodos de penalidade	36
5.2	Tabela resumo relativa aos métodos de penalidade	37
5.3	Resultados computacionais dos métodos de penalidade l_1 e Q	45
5.4	Resultados computacionais dos métodos de penalidade E e H	46
5.5	Resultados computacionais do método de penalidade D	46
5.6	Resultados da função f_1	48
5.7	Resultados da função f_1	49
5.8	Resultados da função f_1	50
5.9	Resultados da função f_4	51
5.10	Resultados da função f_4	52
5.11	Resultados da função f_4	53
5.12	Resultados da função f_5	54
5.13	Resultados da função f_5	55
5.14	Resultados da função f_5	56
5.15	Resultados finais	57
5.16	Percentagens de acerto das funções por regiões	58
1	Descrição do tipo de restrições e referencia de cada problema	66
2	Resultados da implementação dos métodos de penalidade l_1 e quadrática	67
3	Resultados da implementação do método de penalidade dinâmica	68
4	Resultados da implementação dos métodos de penalidade exponencial e hiperbólica	69

Lista de Figuras

2.1	Imagem térmica	10
2.2	Faixa de frequência do espectro electromagnético (Adaptado de [35])	12
5.1	Imagem original	39
5.2	Imagem térmica	39
5.3	Resultado do <i>Region Growing</i>	40
5.4	Resultado do <i>Watershed</i>	40
5.5	Divisão de cada pé em três regiões	41
5.6	Distribuição da temperatura máxima do pé do lado esquerdo	42
5.7	Distribuição da temperatura máxima do pé do lado direito	42
5.8	Média de temperatura no pé do lado esquerdo	43
5.9	Média de temperatura no pé do lado direito	43

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Úlceras nos pés diabéticos é uma das principais complicações em pessoas com a patologia de diabetes, afectando seriamente a sua vida. É necessário estabelecer métodos de prevenção e diagnóstico precoce para prevenir este tipo de situações [28].

As lesões no pé diabético resultam de uma combinação de vários factores de risco que actuam em simultâneo e pode ser desencadeada por neuropatia diabética periférica, doença vascular periférica e alterações biomecânicas [32].

As amputações de membros inferiores em diabéticos são resultado da ocorrência de úlceras, lesões de pele caracterizada pela perda do epitélio, que se estende até à derme ou passa e atinge os tecidos mais profundos, atingindo, em alguns casos, os ossos e músculos [31].

Estudos recentes, mostram a necessidade de avaliar os pés dos diabéticos para identificar factores de risco que possam ser modificados, reduzindo, assim, o risco de ulceração e amputação dos membros inferiores dos diabéticos [22].

A diminuição da função sensorial no pé e limitação da mobilidade articular, são alguns sinais precoces para o aparecimento de úlceras nos pés, o que significa a existência de alto risco de desenvolvimento de complicações. Estas mudanças podem ser avaliadas através de várias técnicas, podendo evitar o aparecimento de úlceras e reduzindo o risco de amputação do pé [12].

Recentes avanços na tecnologia, permite a utilização da termografia para identificar o risco de ocorrer ulceração nos pés de pessoas com diabetes. Assim com o aumento da temperatura numa

determinada região do pé, é indicativo de ocorrência de uma inflamação nessa zona, o que pode tornar possível a formação de ulcera nessa região [26].

A termografia permite observar a distribuição da temperatura de um corpo, através da detecção da radiação infravermelha emitida naturalmente por um corpo, com uma intensidade igual à temperatura, isto é, permite a obtenção de imagens térmicas e a medição da temperatura de um corpo em tempo real.

A termografia pode ser utilizada para estimar a circulação sanguínea e a permeabilidade vascular através da observação da distribuição da temperatura. Com isto, e porque é um método não invasivo, não requer um exame de contraste e com resultados em tempo real, tornam a termografia como um método ideal para avaliar o risco de ulceração do pé diabético [26].

Como objectivo deste trabalho propunha-se a identificação de um modelo matemático para a distribuição da temperatura do pé de pessoas saudáveis, através de dados obtidos de imagens térmicas dos pés, combinados com estratégias de optimização não linear.

1.2 Estrutura do relatório

Este relatório possui a seguinte estrutura. Inicialmente apresenta-se a motivação do trabalho e a estrutura do relatório.

No **Capítulo 2** aborda-se o que é a termografia. Apresenta-se um pouco da sua história, a sua utilidade e os conceitos básicos que estão na base do aparecimento da termografia. Neste capítulo são também referidas duas técnicas de processamento de imagens, usadas para a obtenção de dados, para a realização deste trabalho.

No **Capítulo 3** apresenta-se, de uma forma resumida, o que é a optimização. Neste capítulo estão presentes os tipos de optimização que existem na literatura, bem como algumas técnicas de optimização.

No **Capítulo 4** são descritas as técnicas de optimização não linear com restrições, havendo principal incidência nos métodos de penalidade e na função lagrangeana aumentada. Neste capítulo estão presentes, também, os algoritmos de penalidade combinados com as diferentes funções de penalidade.

No **Capítulo 5** são apresentados os resultados computacionais, obtidos pela implementação, em

Matlab, dos algoritmos presentes no Capítulo 4. Estão, também, presentes os resultados obtidos pela implementação, em Matlab, das técnicas de processamento de imagem referidas no Capítulo 2.

No **Capítulo 6** é descrita a conclusão, bem como, sugestões para trabalho futuro.

Capítulo 2

Termografia

2.1 História da termografia

Nos tempos mais remotos da história, os antigos filósofos e médicos gregos, como por exemplo Platão, Aristóteles e Galeno, fascinaram-se com o reconhecimento da relação entre o calor e a vida. Eles tentavam perceber os meios pelos quais o calor era libertado pelo corpo humano [35, 1].

A primeira medição de temperatura de um corpo foi documentada em aproximadamente 400 a. c. pelo médico grego Hipócrates. Ele verificou a variação da temperatura em diferentes zonas do corpo humano, considerando o aumento de calor em certas zonas do corpo humano, como sendo o principal diagnóstico de doenças. Considerado o pai da medicina, Hipócrates escreveu "em qualquer parte do corpo onde houver excesso de calor ou frio, a doença estará lá para ser descoberta". Para obter a confirmação científica da existência de diferentes temperaturas no corpo humano, ele cobria o corpo com lama e observava qual a zona onde a lama endurecia primeiro [35, 1, 13].

O físico italiano Galileu Galilei foi o pioneiro na história do termómetro pois em 1592 inventou um termoscópio utilizando um tubo de vidro fino com uma das extremidades introduzida em um bulbo fechado contendo líquido. A temperatura era avaliada pela ascensão ou queda de pequenos grânulos ou sementes dentro do fluído. O termoscópio apenas indicava a mudança brusca da temperatura, e não apresentava nenhuma escala de medida, e era bastante influenciado pela pressão atmosférica [35, 1].

Em 1664, Robert Hook, introduziu um pigmento vermelho no líquido, definindo uma escala com incrementos de $1/500$ do volume do líquido do termómetro. Esta escala dava para termómetros de diferentes dimensões, e o seu ponto fixo era o ponto de congelação da água. Mais tarde, Fahrenheit,

Celsius, Joule contribuíram para o desenvolvimento das escalas termométricas [8].

Em 1715, Gabriel Fahrenheit, verificou as enormes vantagens que o mercúrio apresentava como meio termométrico, pois o mercúrio apresentava uma expansão térmica acentuada e uniforme, não adería ao vidro, conservava-se no estado líquido para uma gama alargada de temperaturas e possuía uma aparência que facilitava a sua leitura. Considerou como zero da escala a posição do termómetro colocado numa mistura de cloreto de sódio, gelo e água. Obteve, ainda, mais pontos de escala, considerou a posição 30 à temperatura apresentada por uma mistura de gelo e água, e a posição 96 representava a temperatura da boca de um homem saudável. Posteriormente, ajustou-se a escala, cuja unidade era o Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) [8].

No entanto, em 1742, Anders Celsius, insatisfeito pela escala apresentada por Fahrenheit, apresentou uma nova escala, na qual o valor 100 correspondia ao ponto de fusão da água e o 0 ao ponto de ebulição. Três anos mais tarde, Carolus Linnaeus reformulou a escala apresentada por Celsius, em que o 0 era o ponto de fusão da água e o 100 era o ponto de ebulição da água [8].

A existência da radiação infravermelha não era sequer suspeitada. Só em 1800, com os trabalhos realizados por Frederick William Herschel, músico e astrónomo inglês de origem alemã, é que foi possível identificar a radiação infravermelha [16].

A descoberta aconteceu acidentalmente, durante a procura de um novo material óptico. Herschel estava à procura de um material que funcionaria como filtro óptico, para reduzir o brilho das imagens do sol, durante as suas observações efectuadas por telescópio. Enquanto testava diferentes amostras de vidros coloridos que deram reduções semelhantes no brilho, ficou intrigado ao descobrir que nalgumas amostras passava pouco calor, enquanto noutras amostras passava muito calor, com risco de danos oculares em apenas alguns segundos de observação [16].

Herschel ficou convencido que era necessário criar uma nova experiência, com o objectivo de encontrar um único material que daria a desejada redução do brilho, assim como a redução máxima do calor. Na sua experiência, Herschel observou o efeito do calor associado às diferentes faixas espectrais da radiação solar. Com auxílio de um prisma e três termómetros de mercúrio, com os bulbos pintados de preto, Herschel mediu a temperatura das várias componentes de cor da luz visível refractadas através do prisma [16].

Foi medindo as temperaturas ao longo do espectro, e os resultados mostraram um aumento constante da temperatura, desde o final do violeta até ao final do vermelho. Este não era um resultado totalmente inesperado, uma vez que um pesquisador italiano, Landini, numa experiência semelhante em 1777 havia observado o mesmo efeito. Herschel foi, contudo, quem em primeiro lugar reconheceu que deveria haver um ponto onde o efeito de aquecimento atinge o máximo, e que medidas restritas à porção visível do espectro não conseguiriam localizar esse ponto [16, 37].

Movendo o termómetro para a região escura, para além do extremo vermelho do espectro, Herschel confirmou que o aquecimento continuou a aumentar. O ponto máximo, quando foi encontrado, situava-se muito além do extremo vermelho - o que hoje é conhecido como comprimento de onda do infravermelho [16, 37].

Quando Herschel revelou a sua descoberta, deu o nome à região de Espectro Termométrico, e à radiação o nome de "Calor Negro". Décadas mais tarde, essa região do espectro electromagnético ficou conhecida como região do Infravermelho, e a radiação foi chamada de radiação infravermelha [16, 37].

Ao utilizar o prisma de vidro na sua experiência original, Herschel originou algumas controvérsias com os seus contemporâneos sobre a existência dos infravermelhos. Diferentes pesquisadores, na tentativa de confirmar o seu trabalho utilizaram vários tipos de vidro de forma indiscriminada, com diferentes transparências no infravermelho [16, 37].

Herschel, depois da suas experiências, ficou ciente das limitações que o vidro apresentava para a recém-descoberta radiação térmica, e foi forçado a concluir que a óptica para o infravermelhos, seria condenada à utilização de elementos reflexivos, isto é a utilização de espelhos curvos. Felizmente, isso provou ser verdade apenas até 1830, quando o investigador italiano Melloni, fez a sua grande descoberta, que ocorreu naturalmente, a utilização de sal (NaCl), que estava disponível em grandes cristais naturais, em quantidades suficientes para serem feitos lentes e prismas, e apresentava uma característica muito interessante, é extremamente transparente para os raios infravermelhos. O resultado foi que o sal se tornou no principal material óptico para os infravermelhos, até à década de 30, época em que houve o aparecimento dos cristais sintéticos [16, 37].

A utilização de termómetros como detectores de radiação, permaneceu incontestada até 1829, ano

em que Nobili inventou o termopar, que consistia num sensor de contacto formado pela junção de dois metais distintos e baseado no efeito termoelétrico, descoberto por Thomas Seebeck em 1821. Em seguida, Melloni permitiu um grande avanço, ao ligar um número de termopares em série, criando a primeira termopilha. O novo dispositivo era 40 vezes mais sensível do que o melhor termómetro [16, 37].

A primeira "imagem de calor" foi possível em 1840, e resultou do trabalho de Sir John Herschel, filho do descobridor dos raios infravermelhos. Com base na evaporação diferencial de uma fina película de óleo quando exposto a um foco de calor, a imagem térmica pode ser visto pelo reflexo da luz, onde os efeitos de interferência da película de óleo tornam a imagem visível a olho nu. Sir John também conseguiu obter um registo primitivo da imagem térmica em papel, e deu-lhe o nome de "termografia" [16, 37].

Entre os anos de 1900 e 1920, os investigadores do mundo "descobriram" o infravermelho. Muitas patentes foram emitidas para dispositivos que detectavam pessoas, artilharia, aviões, navios e até mesmo icebergs. Os primeiros sistemas operacionais começaram a ser desenvolvidos durante a guerra de 1914 – 1918, quando ambos os lados tinham programas de pesquisa dedicado à exploração militar dos infravermelhos. Estes programas incluíam sistemas experimentais de detecção de inimigos, detecção remota de temperatura, comunicações seguras, orientação aérea de torpedos. Um sistema de busca por infravermelhos testado durante este período foi capaz de detectar um avião a aproximar-se a uma distância de 1.5 km, e uma pessoa a mais de 300 metros de distância [37].

Os sistemas mais sensíveis, até este momento, têm como base a ideia do borómetro, é o período entre as duas guerras viu o desenvolvimento de duas novas técnicas revolucionárias para a detecção dos infravermelhos: conversor de imagens e o detector de fotões. Na primeira, o conversor de imagens recebeu a maior atenção por parte dos militares, porque permitiu a um observador, pela primeira vez na história, literalmente "ver no escuro". No entanto, a sensibilidade do conversor de imagem foi limitada pelo comprimento de onda dos infravermelhos e pelos alvos mais frequentes no ramo militar, a detecção de soldados inimigos. Isto porque, com o desenvolvimento dos conversores de imagens, envolvia o risco de doar a posição do observados a um observador inimigo igualmente equipado, por isso era compreensível que o interesse no conversos de imagem eventualmente diminuísse [35].

O primeiro diagnóstico médico utilizando a termografia foi realizado em 1956, Ray Lawson, descobriu que uma mama com cancro apresentava uma temperatura mais elevada do que a temperatura de uma mama normal. Com esta descoberta, os equipamentos foram evoluindo, desde os 15 minutos que inicialmente demorava a obter um termograma, até chegar às imagens em tempo real dos equipamentos actuais [35].

2.2 Termografia

A termografia é uma técnica não invasiva, que permite observar a distribuição da temperatura de um corpo, através da detecção da radiação infravermelha emitida naturalmente por um corpo, com uma intensidade igual à temperatura, isto é, permite a obtenção de imagens térmicas e a medição da temperatura de um corpo em tempo real [35, 43].

O corpo humano absorve radiação infravermelha, e emite parte dessa energia térmica sob a forma de radiação infravermelha. Este facto, torna possível determinar a distribuição da temperatura na superfície corporal, através da medição da radiação emitida pelo corpo a uma curta distância, dando a informação do estado micro-circulatório do paciente [35, 43].

Sendo uma técnica de imagem médica, a termografia permite a investigação e diagnóstico, partindo de uma análise das alterações da temperatura na superfície corporal. Num indivíduo que não apresente nenhuma patologia, a temperatura do corpo pode variar ao longo do tempo, no entanto, a distribuição da temperatura na superfície corporal apresenta traços característicos e uma simetria bilateral consistente. Com a termografia é possível visualizar esses padrões ou determinar eventuais desvios a esses padrões, que podem resultar de alterações patológicas. Em termos gerais, a termografia permite detectar patologias antes de qualquer outra técnica de diagnóstico, devido às perturbações que a existência de uma patologia provoca na distribuição normal da temperatura no local onde a patologia se situa [35].

Durante um exame de termografia, o dispositivo utilizado converte a energia térmica emitida pela superfície de um corpo, em impulsos eléctricos, que se tornam visíveis em tempo real, na forma de imagens coloridas, usando pseudo-cores, ou em tons de cinza [35]. Na imagem (2.1) está representada uma imagem térmica.

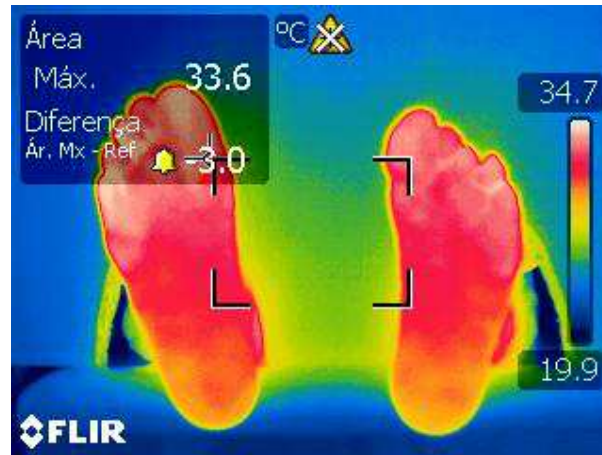


Figura 2.1: Imagem térmica

A termografia é um método de diagnóstico com um aumento de utilização devido, principalmente, às suas características, isto porque, é um exame que não utiliza radiação ionizante, é um exame onde não existe qualquer tipo de contacto entre o paciente e o equipamento e permite obter imagens em tempo real. No entanto, uma vez que apenas permite a obtenção da informação sobre os processos metabólicos e circulação, é necessário a utilização de exames complementares de diagnóstico, por exemplo uma radiografia, que permite complementar a informação obtida na termografia com informação sobre as estruturas anatómicas [35].

A termografia é maioritariamente aplicada para diagnóstico de patologias no sistema vascular, muscular, nervoso e esquelético. Pois permite definir a extensão das lesões que já tenham sido localizadas, identificar novas lesões mesmo aquelas que clinicamente ainda não eram evidentes, ajudar na monitorização do processo de cura de um paciente [35, 30].

Uma das possíveis utilizações da termografia é na identificação de regiões onde possa acontecer uma vascularização anormal, com a detecção de pontos quentes, para regiões onde existe um processo metabólico mais intenso, e para a detecção de pontos frios, regiões onde a vascularização pode ser insuficiente ou ocorre um processo de necrose. Isto significa que, numa região onde existe uma temperatura maior que o normal pode derivar de uma maior circulação sanguínea nesse local, que pode resultar de um processo inflamatório. Numa região onde a temperatura é mais baixa que o normal pode indicar um edema ou trombose vascular, por exemplo [35, 30].

Áreas médicas, tais como oncologia, cirurgia, reumatologia, neurologia, ginecologia, oftalmologia, pneumologia, medicina desportiva, entre outras, têm aumentado a utilização da termografia como uma importante técnica de auxílio ao diagnóstico clínico, permitindo avaliar diversas doenças [35, 43, 30].

A termografia é obtida através da utilização de câmaras térmicas, que são capazes de captar, por meio de uma rede de sensores, a radiação infravermelha, emitida por um corpo, e convertê-la em sinais eléctricos. Os sinais eléctricos são processados por um software e representados na forma de imagem, um termograma, onde cada pixel da imagem é associada a um valor de temperatura [35].

Para compreender o que é a termografia, é necessário entender conceitos importantes, tais como o que é a temperatura, os modos de transferência de calor, onde se encontra o conceito de radiação térmica.

2.2.1 Transferência de calor

A temperatura é um parâmetro físico que está associado às noções de frio e calor, bem como às transferências de energia térmica entre dois corpos. Pode-se definir temperatura como a quantidade de energia cinética associada ao movimento aleatório das partículas que compõem um determinado sistema físico, pode dizer que, quanto mais alta for a temperatura de um objecto mais energia os átomos desse objecto possuem [35, 14].

A temperatura deve-se à transferência de energia térmica entre dois ou mais objectos. Quando dois corpos apresentam a mesma temperatura, não existe transferência de calor entre eles, isto porque estão em equilíbrio térmico. No entanto, quando dois corpos apresentam temperaturas diferentes, vai ocorrer transferência de calor do corpo que apresenta temperatura mais elevada para o corpo com temperatura mais baixa, até ser atingido um equilíbrio térmico. A transferência de calor pode acontecer de três maneiras distintas, por condução, convecção ou radiação [35, 37, 14].

A transferência de calor por condução pode ser definida como o processo pelo qual a transferência de calor ocorre através da matéria sem ocorrer o transporte desta. Isto significa que, existe transferência de energia das partículas mais energéticas para as partículas com menos energia, de um objecto, devido à interacção entre ambas. A fonte de calor excita directamente as partículas mais próximas, que

transferem parte da energia recebida às partículas vizinhas, e essas por sua vez transferem para outras partículas. A Intensidade do fluxo de calor depende da condutividade térmica do material [35, 37, 14].

A convecção, é a forma típica de transporte de calor nos líquidos e gases, e consiste na transferência de calor por transporte de matéria. Isto é, a energia é transferida da porção mais quente para a porção mais fria de um fluido através da acção combinada de: condução de calor, armazenamento de energia, movimento da matéria [35, 37, 14].

A transferência de calor por radiação é efectuada por ondas electromagnéticas, principalmente os raios infravermelhos, que viajam na velocidade da luz. Neste processo de transferência não é necessário material para ocorrer a propagação do calor. Este método de propagação de calor é o fundamental para a medição da temperatura de um objecto utilizando a termografia, pois a termografia resulta da detecção da radiação infravermelha proveniente do objecto em análise [35, 37, 14].

2.2.2 Radiação Infravermelha

A luz visível ao olho humano caracteriza-se por um comprimento de onda compreendido desde aproximadamente 400nm (azul) até 700nm (vermelho), como pode ser observado na Figura 2.2.

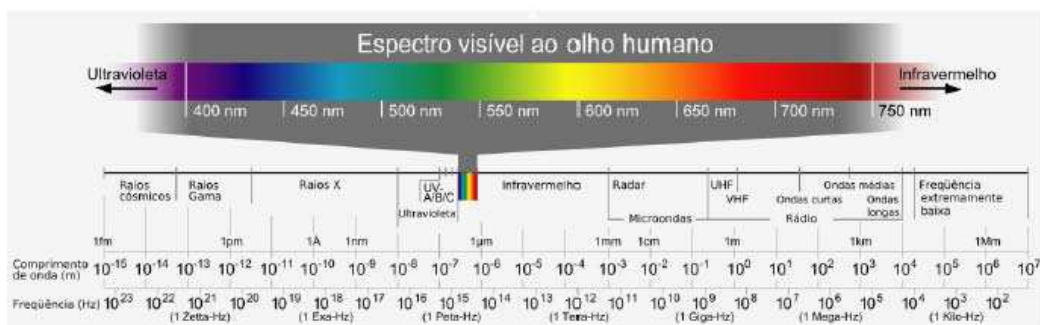


Figura 2.2: Faixa de frequência do espectro electromagnético (Adaptado de [35])

A radiação térmica pode ser emitida desde a faixa dos ultravioletas até à faixa da micro-ondas no espectro electromagnético. No entanto, a maior parte da radiação térmica emitida é sob a forma de radiação infravermelha, invisível ao olho humano, pois possui um comprimento de onda muito longo [35, 37].

No espectro electromagnético, o intervalo onde se encontra a radiação infravermelha situa-se logo

a seguir ao intervalo da luz visível, com o comprimento de onda a variar entre os $0.7\mu m$ a $1mm$ [35, 37].

A radiação infravermelha é emitida espontaneamente por todos os objectos que possuem uma temperatura superior ao zero absoluto ($0\text{ }^{\circ}K$) devido à agitação dos seus átomos e moléculas. Quanto maior for a temperatura do objecto, maior é a agitação das partículas o que provoca um aumento da radiação emitida por esse objecto [35, 37].

O espectro infravermelho pode ser dividido em sub-regiões, existindo várias propostas na literatura para essa divisão [35, 37, 3]. Uma dessas propostas, faz a divisão dos raios infravermelhos em 4 regiões, com base no comprimento de onda, como é possível ver na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Comprimento de onda das diferentes regiões do infravermelho (Adaptado de [35])

Tipo	comprimento de onda
Próximo (NIR - Near InfraRed)	$0.75\mu m$ a $3\mu m$
Médio (MIR - Middle InfraRed)	$3\mu m$ a $6\mu m$
Distante (FIR - Far InfraRed)	$6\mu m$ a $15\mu m$
Extremo (XIR - eXtreme InfraRed)	$15\mu m$ a $1000\mu m$

Para além da temperatura do objecto, a quantidade de radiação emitida por um objecto também depende da capacidade desse objecto em emitir radiação. A capacidade que um objecto apresente em emitir ou absorver radiação é conhecida por emissividade. Os valores de emissividade de um objecto variam entre 0 (reflectido por um espelho) até 1.0 (corpo negro, onde a energia é completamente absorvida). Muitos materiais orgânicos, revestidos ou com superfícies oxidadas apresentam valores de emissividade próximos de 0.95. A emissividade da pele é muito próxima de um corpo negro ideal, apresentando uma valor de emissividade de 0.98 [35, 14].

2.3 Processamento de imagens

O processamento de imagens tem como objectivo principal, desenvolver procedimentos para extrair informação de interesse da imagem em análise. A utilização de técnicas de processamento permite melhorar a qualidade das imagens, bem como, preparar as mesmas para a combinação das informações fornecidas pelas diferentes técnicas de observação e a realização de medidas quantitativas [2, 23].

A segmentação de imagens, é uma classe de métodos de processamento de imagens, que permite identificar ou extrair áreas de interesse que estão nas imagens. Após a aplicação de métodos de segmentação a uma imagem, resultam regiões em que os *pixels* que a constituem apresentam propriedades semelhantes [2, 23].

Na área das imagens médicas, a segmentação pode ser utilizada para a identificação da posição exacta do tumor, calcular o volume do tumor e identificar áreas de risco. Este conhecimento prévio permite um melhor planeamento do tipo de tratamento a usar, nos casos de tumor [21].

Os algoritmos existentes para a segmentação de imagens baseiam-se em duas ideias chave. Uma delas é identificar a descontinuidade numa imagem, o que permite encontrar os contornos da imagem; a outra ideia é o agrupamento de regiões através da similaridade de características apresentados pelos *pixels*, até que o objecto de interesse seja reconstruído [2, 23]. Para além disto, alguns algoritmos de segmentação usam uma abordagem semi-automática, o que faz com que necessitem de alguma interacção com o operador. Outros métodos são totalmente automáticos, e o técnico apenas tem um papel de verificar os resultados [2, 21].

Existem diversas técnicas de segmentação de imagens, mas não existe nenhum método único que possa ser aplicado a todos os tipos de imagens. Assim, são distintas as técnicas de segmentação, podendo dar como exemplo as baseadas em limiarização, crescimento de regiões (*Region Growing*), transformada de Fourier, *Watershed*, entre muitas outras. Neste trabalho apenas se utilizaram duas técnicas de segmentação, o *Region Growing* e o *Watershed* [2, 23].

Uma técnica de segmentação de imagem bastante conhecida é a segmentação por crescimento de região, conhecida por *Region Growing*. Neste método, a região é segmentada a partir de um pixel de partida (*seed*), que vai verificar os *pixels* vizinhos, analisando se as características desses *pixels* são semelhantes às características desejadas. Enquanto houver *pixels* que apresentem características

semelhantes, o algoritmo continua a adicionar *pixels* [27].

O método de *Watershed*, inicialmente proposto por Digabel e Lantuejoul, tem sido amplamente utilizado como método de segmentação de imagens. A metodologia base do *Watershed* como técnica de segmentação, tem sido desenvolvida e aperfeiçoada ao longo dos últimos anos [7].

Contudo, a técnica de *Watershed* não se limita a ser uma técnica de segmentação de imagem, também pode ser considerada como uma técnica de pre-processamento, para posteriores análises, usando outras técnicas de processamento de imagens [7].

A técnica de *Watershed* pode ser utilizada, principalmente para identificação dos contornos numa imagem. Para compreender o algoritmo do *Watershed*, considere-se a imagem inicial em níveis de cinza, como uma superfície topográfica. É efectuado um furo no mínimo de cada superfície por onde a água entra a uma taxa constante. Quando frentes de água distintas estão prestes a se encontrar, é construída uma barreira para evitar esse encontro. No final do algoritmo, apenas ficam visíveis as barreiras construídas, correspondendo aos contornos das regiões da imagem original [19].

Capítulo 3

Introdução à optimização

3.1 Introdução à optimização contínua

A optimização é uma ferramenta importante na ciência da decisão e na análise física dos sistemas. Para usá-la, deve-se em primeiro lugar identificar os objectivos do sistema e definir uma medida quantitativa do desempenho do sistema em estudo. Os objectivos podem ser de várias formas, por exemplo, o lucro, tempo, energia potencial ou qualquer quantidade ou combinação das quantidades que podem ser representadas por um número [20].

O objectivo da optimização é encontrar os valores das variáveis que optimizam, isto é, maximizam ou minimizam, dependendo das variáveis em análise, as funções objectivo. Estas funções podem estar sujeitas a restrições que limitam a selecção dos valores das variáveis. É possível observar problemas de optimização em diversas áreas, como por exemplo em ambiente empresarial com o objectivo de aumentar a taxa de lucros; na natureza onde os sistemas tendem para um estado mínimo de energia; na engenharia biomédica, para melhorar sistemas de saúde; entre outros[20, 33].

As técnicas de optimização são consideradas técnicas de análise quantitativa, pois estas apresentam resultados numéricos para aproximações da solução exacta do problema em análise.

Na área de optimização, o passo mais importante é a construção de um modelo adequado, definindo toda a informação necessária para a obtenção de bons resultados: identificação dos objectivos; variáveis e restrições que as variáveis estão sujeitas, contudo, se o problema for muito complexo pode-se tornar demasiado difícil de resolver.

Não existe um algoritmo de optimização universal, existe sim, um conjunto de algoritmos que se

adaptam um tipo específico de problemas de optimização. A escolha do algoritmo é da responsabilidade de quem o vai aplicar [29].

Tipicamente, um problema de optimização pode ser descrito da seguinte forma [29]:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) = 0, \quad i \in E \\ c_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde f é a função objectivo, c_i as restrições que a função objectivo está sujeita e o E e o I são os conjuntos de índices das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

O problema geral representado em (3.1) pode ser classificado de acordo com a natureza da função objectivo e das funções de restrições (lineares ou não-lineares), o número de variáveis e propriedades das funções envolvidas (diferenciáveis ou não). Provavelmente a distinção mais importante nos problemas de optimização é identificar se o problema possui restrições ou não [20].

Os problemas de optimização sem restrições resultam directamente de muitas aplicações práticas. Surgem, também, da aplicação de métodos de resolução de problemas de optimização com restrições, em que as restrições são substituídas por termos de penalização com o objectivo de diminuir a violação das restrições [20, 29].

Problemas de optimização com restrições surgem a partir de modelos que incluem restrições explícitas sobre as variáveis, podendo ser simples, lineares ou não lineares, de igualdade e/ou desigualdade [20, 29].

Para além desta classificação, é possível classificar os problemas de optimização como problemas de optimização linear ou problemas de optimização não linear. Este tipo de classificação depende do tipo de função objectivo e das funções de restrições. Se a função objectivos e as restrições forem lineares está-se perante um exemplo de problemas de optimização linear. Se a função objectivo ou as restrições forem funções não lineares então está-se perante um problema de optimização não linear [20, 29].

3.2 **Optimização linear**

A programação linear é uma área da optimização que estuda a resolução e características de problemas de optimização linear. Este tipo de problemas pode não ter restrições, ou possuir restrições

de igualdade ou desigualdade. Assim pode-se definir matematicamente um problema de optimização linear da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } Ax = b \\ cx \leq d \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde, f é a função objectivo, $x \in \mathbb{R}^n$ o vector das variáveis, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $d \in \mathbb{R}^p$.

Existem na literatura diversos métodos que resolvem os problemas de optimização linear, sendo o mais utilizado o método simplex. Além deste método, pode-se utilizar, também, o método de pontos interiores [29, 10].

O trabalho realizado por Dantzig, em 1947, permitiu o desenvolvimento do método de Simplex. A descoberta deste método coincidiu com o desenvolvimento dos primeiros computadores, que fez com que o método simplex tenha sido a primeira aplicação para esta nova tecnologia. Desde essa altura até aos dias de hoje, a implementação do método Simplex tem sido melhorada e refinada, resolvendo problemas oriundos das áreas da gestão, economia, finanças, engenharia, entre outras [42, 10].

Em termos geométricos, o método simplex consiste em percorrer os vértices de um poliedro criado pela representação gráfica da função objectivo e as restrições, até que seja encontrado o vértice "óptimo". Isto significa que, o método começa com uma solução básica admissível, x_0 , e vai determinando sucessivamente, novas soluções admissíveis, até encontrar aquela que corresponde ao melhor valor para a função objectivo [42, 10].

Pode-se dividir o método Simplex em três passos: teste de optimalidade, cálculo do passo e análise do pivot [42, 10].

Embora o método Simplex tenha um bom desempenho, em 1972 Klee e Minty, mostraram através de exemplos, que para certos programas lineares o método Simplex vai examinar cada vértice. Este estudo provou que, na pior das hipóteses, o método Simplex apresentaria um número de iterações exponencial ao tamanho do problema. Com estes resultados, muitos investigadores acreditam que um bom algoritmo seria um método cujo número de passos seria polinomial e não exponencial, em relação ao tamanho do problema apresentado [42, 10].

Em 1984, através dos trabalhos realizados por Karmarkar, apareceu um novo método de optimização linear, com o intuito de melhorar a eficácia do método simplex. Esse método designa-se por Método de Pontos Interiores [29, 10].

Ao contrário do Simplex, o algoritmo apresentado por Karmarkar, baseia-se em determinar pontos interiores da região admissível, e efectuar sucessivas transformações que levam à determinação da solução ideal [29, 10].

3.3 Optimização não linear

Designa-se por problema de optimização não linear ao problema onde a função objectivo ou as restrições são funções não lineares. Tipicamente um problema de optimização não linear é apresentado na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) = 0, \quad i \in E \\ c_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e E e I são os conjuntos de índices das funções de restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. São muitas a técnicas para a resolução de problemas de optimização não linear, que variam consoante o problema apresenta ou não restrições. Para problemas sem restrições são usados métodos como por exemplo o método de Newton, quasi-Newton, Nelder-Mead, entre outros [29, 9]. Para os problemas com restrições são utilizados os métodos de penalidade, o método SQP, entre outros [29, 9].

3.3.1 Método de Newton

O método de Newton procura encontrar a melhor solução através de um processo iterativo, isto é, dado um ponto inicial, x_0 , ele procura, passo a passo, pontos que diminuam o valor da função objectivo em relação ao ponto anterior [29, 9, 15]. Considere-se o seguinte problema de optimização sem restrições:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.4)$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não linear nas variáveis e duas vezes continuamente diferenciável. O método de Newton pretende determinar um ponto estacionário, ponto onde se anula o gradiente da função f . Se nesse ponto estacionário a matriz Hessiana for definida positiva então está encontrado um minimizante local.

Assim, o método de Newton começa por cálculo a direcção, p_k determinada pela resolução

seguinte sistema:

$$\nabla^2 f(x_k)p_k = -\nabla f(x_k) \quad (3.5)$$

onde $\nabla^2 f(x_k)$   a matriz Hessiana no ponto x_k , o $\nabla f(x_k)$   o vector gradiente da função $f(x_k)$ e k   o  ndice de iteração. Para o método de Newton convergir para a solução requer que a direcção p_k seja decrescente, isto só se verifica se a matriz Hessiana for definida positiva. O novo ponto x_{k+1} é obtido pela expressão:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (3.6)$$

onde α_k   o comprimento do passo.

A rápida convergência do método de Newton deve-se ao facto de ser uma convergência local e quadrática. No entanto, se a matriz Hessiana for singular pode fazer com que o método de Newton seja ineficaz, e que não determine a solução [29, 9].

Uma das grandes desvantagens do Método de Newton é a necessidade de calcular as segundas derivadas da função objectivo em todas as iterações do método.

3.3.2 Método de Quasi-Newton

Devido à limitação apresentada pelo método de Newton foi deduzido o Método quasi-Newton, pois substitui o cálculo da matriz Hessiana, verificado no método de Newton, por uma estimativa da matriz Hessiana inversa [29, 9]. Essa estimativa é dada por:

$$B_k \approx [\nabla^2 f(x_k)]^{-1}$$

Assim sendo, para o cálculo da direcção p_k , para o método quasi-Newton é dado da seguinte maneira:

$$p_k = -B_k \nabla f(x_k) \quad (3.7)$$

usando esta nova direcção para o cálculo de x_{k+1} , fica:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad (3.8)$$

onde α_k   o comprimento do passo. O valor de x_k pode ser determinado usando diversas técnicas de globalização. Algumas dessas técnicas são a condição de Armijo ou a técnica de *trust region* [29, 4].

3.3.3 Método SQP

Um dos métodos mais eficazes para a resolução de problemas de optimização com restrições é o SQP (do inglês "*Sequential Quadratic Programming*"). A ideia base deste método, consiste na criação e minimização de subproblemas quadráticos.

Este método, resultou de trabalhos realizados por Wilson em 1963, no entanto, apenas se tornou mais popular nos anos 70, com os trabalhos realizados por Han e Powell. Desde essa altura, muitas modificações e extensões têm sido publicadas sobre o método SQP [39, 17].

Considere-se o problema de optimização não linear (3.3). A ideia essencial do método SQP é modelar o problema de optimização em cada iteração, criando um subproblema quadrático, calculando o mínimo desse subproblema para definir o x_{k+1} .

Uma das derivações do método SQP é observado como uma aplicação do método de Newton às condições de optimização KKT para (3.3) [29, 39, 17].

Capítulo 4

Métodos de penalidade e função lagrangeana aumentada

4.1 Introdução

Os métodos de penalidade são uma importante classe de métodos para a obtenção da solução de problemas de otimização não linear com restrições. De uma forma geral, os métodos de penalidade transformam o problema original com restrições uma sequência de subproblemas sem restrições. Sob determinadas condições, a sucessão das soluções desses subproblemas vai convergir para a solução do problema original.

Os subproblemas criados pelos métodos de penalidade envolvem uma função de penalidade que incorpora a função objectivo e as restrições que o problema está sujeito. As várias técnicas de penalidade diferem na forma como a função auxiliar está definida. A função auxiliar inclui, também, um ou mais parâmetros de penalidade que determinam a importância relativa de cada restrição, ou conjunto de restrições, dependendo do método que está a ser utilizado. Quando estes parâmetros são alterados apropriadamente, são gerados sequências de problemas onde os efeitos das restrições tornam-se cada vez mais evidentes.

Pode-se dividir as técnicas de penalidade em dois grandes grupos: métodos de barreira, também conhecidos por métodos dos pontos interiores que obrigam as aproximações à solução ser admissíveis; e métodos de penalidade externa, que impõe uma penalidade para a violação das restrições, considerando que os pontos gerados podem ser, ou não, admissíveis [25].

Os **métodos de barreira** são métodos iterativos que, durante o processo iterativo, a aproximação

situa-se sempre no interior da região admissível. Neste método, existe a formação de uma barreira que permite manter o iterado afastado da fronteira da região não admissível. Para inicializar o algoritmo deste método é necessário que o ponto inicial pertença à região admissível. Isto permite que a sequência de subproblemas criados neste método convirjam para a solução do problema a partir do interior da região admissível. Por esta razão, este método exige que o interior da região admissível seja um conjunto não vazio havendo a dificuldade de identificar um ponto admissível, o que faz com que este método não seja apropriado para problemas com restrições de igualdade [36].

Os **métodos de penalidade exterior** são utilizados para a resolução de problemas com restrições de desigualdades e restrições de igualdades. Ao contrário dos métodos de barreira, estes resolvem sequências de problemas de optimização sem restrições, cuja solução é normalmente não admissível relativamente ao problema original com restrições. Neste métodos, existe um termo de penalidade que ao aumentar gradualmente, força os minimizantes na direcção da região admissível. No interior da região admissível, o termo de penalidade deve ser muito pequeno, permitindo assim, que o mínimo da função objectivo seja muito parecido com o mínimo da função penalidade. Uma das vantagens deste método, em comparação com o método de barreira, é permitir a inclusão de restrições de igualdade, isto porque a aproximação não precisa de se encontrar estritamente dentro da região admissível [36].

Considerando-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } x \in \Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde $f(x)$ é uma função contínua, e Ω é o conjunto formado pelas restrições de igualdade e/ou desigualdade, isto é, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : c_i = 0, i \in E \wedge c_i \leq 0, i \in I\}$. A ideia principal dos métodos de penalidade é substituir o problema inicial com restrições, numa sequência de problemas sem restrições. Assim, a função penalidade com um parâmetro de penalidade pode ser definida da seguinte maneira.

$$\phi(x, \mu) = f(x) + \mu\psi(x) \tag{4.2}$$

onde $\phi(x, \mu)$ é a função auxiliar de penalidade, μ é uma constante positiva, chamada de parâmetro de penalidade, e $\psi(x)$ é uma função onde se encontram as restrições de igualdade e/ou desigualdade. Os métodos de penalidade vão resolver uma sucessão de problemas sem restrições, minimizando a função auxiliar.

Assim, em cada iteração k , cada subproblema é definido por:

$$\min \phi(x, \mu_k) \quad (4.3)$$

Na função de penalidade (4.2), existe a função $\psi(x)$, que representa as restrições do problema (4.1). Esta função vai variar consoante o tipo de restrições que estão presentes no problema de optimização original [41]. Assim, podem-se definir três tipos de funções:

- Função para problemas com restrições de igualdade

$$\psi(x) = \sum_{i \in E} |c_i(x)|^q \quad q \in \mathbb{N} \quad (4.4)$$

- Função para problemas com restrições de desigualdade:

$$\psi(x) = \sum_{i \in I} (\max(0, c_i(x)))^q \quad q \in \mathbb{N} \quad (4.5)$$

- Função para problemas com restrições de igualdade e desigualdades:

$$\psi(x) = \sum_{i \in E} |c_i(x)|^q + \sum_{i \in I} (\max(0, c_i(x)))^q \quad q \in \mathbb{N} \quad (4.6)$$

4.2 Funções de penalidade

É possível classificar os métodos de penalidade em penalidade exacta e penalidade inexacta, onde a grande diferença neste métodos está no número de subproblemas criados para a obtenção da solução do problema original com restrições. Assim, nos métodos de penalidade exacta são criados um número finito subproblemas, que permitem a obtenção da solução do problema original, após um número finito de iterações [11].

Nos métodos de penalidade inexacta existe a resolução de uma sequência infinita de subproblemas sem restrições para o cálculo da solução do problema, determinando-se uma solução aproximada do problema. Exemplos de métodos de penalidade exacta conhecidos são o método de penalidade l_1 [29, 11].

Neste trabalho foram aplicados a penalidade l_1 , a penalidade quadrática, penalidade hiperbólica, penalidade exponencial e a penalidade dinâmica e a função Lagrangeana aumentada.

4.2.1 Função de penalidade l_1

Como já foi dito, existem métodos de penalidade que após uma sucessão finita de problemas sem restrições obtém-se a solução do problemas de original (4.1) [29].

O método de penalidade l_1 é um método de penalidade exacta de minimização local e permite resolver problemas de optimização não linear com restrições [29]. Este método resolve problemas de minimização com a seguinte função de penalidade:

$$\phi(x, \mu_k) = f(x) + \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in E} |c_i(x)| + \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in I} \max [c_i(x), 0] \quad (4.7)$$

Assume-se que todas as funções são continuamente diferenciáveis. Esta função é designada por função de penalidade l_1 porque o termo de penalidade é de norma l_1 . Embora seja contínua, a função de penalidade l_1 não é diferenciável em todos os pontos, o que faz com que a utilização de métodos que utilizem a informação da derivada para a resolução dos subproblemas (tais como o método de Newton) seja impossível. Esta característica é uma das grandes desvantagens que o método de penalidade l_1 apresenta [29].

O algoritmo generalizado para este problema pode ser:

Algoritmo: Método de penalidade com a função de penalidade l_1

- Passo 1. Dado μ_0 , uma aproximação inicial x_0 , $k = 0$ e $c < 1$
- Passo 2. Resolver

$$\min \phi(x, \mu_k) = f(x) + \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in E} |c_i(x)| + \frac{1}{\mu_k} \sum_{i \in I} \max [c_i(x), 0]$$

- Passo 3. Actualizar $\mu_{k+1} = c\mu_k$ e $k = k + 1$;
- Passo 4. Enquanto o critério de paragem não for satisfeito voltar para o Passo 2.

4.2.2 Função de penalidade quadrática

Entre os métodos mais utilizados para a resolução de problemas de otimização não linear com restrições está o método de penalidade quadrática. A função de penalidade quadrática é a função mais simples dos métodos de penalidade exterior, na qual o termo de penalidade mede o "nível" de violação das restrições [29]. Considerando-se o seguinte problema de otimização 4.1. Pode-se definir a função de penalidade quadrática da seguinte forma:

$$Q(x; \mu) = f(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in E} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in I} \max [c_i(x), 0]^2 \quad (4.8)$$

onde $\mu > 0$ é o parâmetro de penalidade que tende para zero, $f(x)$ é a função objectivo e o $c_i(x)$ são as restrições do problema original (4.1).

Na iteração k , é necessário resolver o subproblema definido por:

$$\min Q(x; \mu_k) \quad (4.9)$$

O parâmetro de penalidade, μ_k , é um parâmetro positivo e é actualizado a cada passo do algoritmo do método de penalidade. Este parâmetro tem como objectivo obrigar que a sucessão de problemas tendem para a região admissível do problema. A solução do problema não precisa de satisfazer as restrição, mas com a diminuição do parâmetro de penalidade obriga que a violação das restrições seja cada vez mais difícil [29].

A sequência do parâmetro de penalidade pode ser escolhido de forma adaptativa, baseado na dificuldade de minimizar a função de penalidade em cada iteração. Quando se verifica que a minimização de $Q(x; \mu_k)$ é difícil, pode-se escolher um μ_{k+1} que seja uma redução modesta de μ_k , assim, a actualização de μ_{k+1} ficaria: $\mu_{k+1} = 0.7\mu_k$. Se, pelo contrário, a minimização de $Q(x; \mu_k)$ é acessível, então pode-se aplicar uma redução de μ_k mais ambiciosa, ficando: $\mu_{k+1} = 0.1\mu_k$ [29].

O algoritmo generalizado deste método pode se definido como:

Algoritmo: Método de penalidade quadrática

- Passo 1. Dado μ_0 , uma aproximação inicial, x_0 , $k = 0$ e $c < 1$

- Passo 2. Resolver

$$\min Q(x; \mu_k) = f(x) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i \in E} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i \in I} \max [c_i(x), 0]^2$$

- Passo 3. Actualizar $\mu_{k+1} = c\mu_k$ e $k = k + 1$;
- Passo 4. Enquanto o critério de paragem não for satisfeito voltar ao Passo 2.

4.2.3 Função de penalidade hiperbólica

Os métodos anteriormente referidos, são dos métodos mais utilizados para a resolução de problemas de optimização com restrições. Recentemente foi desenvolvido um novo método de penalidade para a resolução de problemas com restrições de desigualdade [34, 44].

Assim, considere-se o seguinte problema de optimização:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (4.10)$$

Para a resolução deste tipo de problemas pode utilizar, para além dos métodos já referidos, o método de penalidade hiperbólica [34, 44]. A função hiperbólica é continuamente diferenciável e é dada por:

$$P(x, \lambda^k, \tau^k) = f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i c_i(x) + \sqrt{(\lambda_i^k)^2 [c_i(x)]^2 + (\tau_i^k)^2} \quad (4.11)$$

onde $\lambda_i^k \geq 0$ e $\tau_i^k \geq 0$ são os parâmetros de penalidade. Os parâmetros de penalidade são actualizados da seguinte forma:

$$\begin{cases} \lambda_i^{k+1} = r\lambda_i^k & \text{e } \tau_i^{k+1} = \tau_i^k & \text{se } \max c_i(x_k) > 0 \\ \tau_i^{k+1} = q\tau_i^k & \text{e } \lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.12)$$

Visto ser uma função continuamente diferenciável, a função de penalidade hiperbólica permite a utilização de métodos de optimização que utilizem a informação da derivada, como por exemplo o método quasi-Newton, para obter a solução do problema [34, 44].

O algoritmo generalizado para este método definido por:

Algoritmo: Método de penalidade hiperbólica

- Passo 1. Dados $\lambda^0 \geq 0$ e $\tau^0 \geq 0$, uma aproximação inicial, x_0 , $k = 0$, $r > 0$ e $0 < q < 1$

- Passo 2. Resolver

$$\min P(x, \lambda^k, \tau^k) = f(x) + \sum_{i \in I} \left(\lambda_i^k c_i(x) + \sqrt{(\lambda_i^k)^2 [c_i(x)]^2 + (\tau_i^k)^2} \right)$$

e obter x_k

- Passo 3. Actualizar λ_i^{k+1} e τ_i^{k+1} , que é dado por:

$$\begin{cases} \lambda_i^{k+1} = r \lambda_i^k & \text{e } \tau_i^{k+1} = \tau_i^k & \text{se } \max c_i(x_k) \geq 0 \\ \tau_i^{k+1} = q \tau_i^k & \text{e } \lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Passo 4. Enquanto o critério de paragem não for satisfeito voltar ao Passo 2.

4.2.4 Função de penalidade exponencial

Considerando-se problemas de optimização não linear com restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde as funções f e c_i são duas vezes continuamente diferenciáveis. A função exponencial associada a problemas de optimização não linear com restrições de desigualdade é:

$$E(x, \mu_k, \nu^k) = f(x) + \sum_{i \in I} \frac{1}{\mu_k} \nu_i^k \left[e^{\mu_k c_i(x)} - 1 \right] \quad (4.14)$$

sendo μ_k o parâmetro de penalidade e ν_i^k o multiplicador de Lagrange associado à restrição c_i . Se as funções f e c_i forem duas vezes continuamente diferenciáveis então a função penalidade exponencial também o é [24].

O algoritmo generalizado para este método é dado por:

Algoritmo: Método de penalidade exponencial

- Passo 1. Dados μ_0 e ν^0 , uma aproximação inicial, x_0 , $k = 0$ e $d > 0$
- Passo 2. Resolver

$$\min E(x, \mu_k, \nu^k) = f(x) + \sum_{i \in I} \frac{1}{\mu_k} \nu_i^k \left[e^{\mu_k c_i(x)} - 1 \right]$$

obter x_k

- Passo 3. Actualizar $\nu_i^{k+1} = \nu_i^k e^{\mu_k c_i(x_k)}$, $\mu_{k+1} = d\mu_k$ e $k = k + 1$;
- Passo 4. Enquanto o critério de paragem não for satisfeito voltar ao passo 2.

Com a actualização dos multiplicadores de Lagrange apresentados no Algoritmo anterior, se x_k for um minimizante de $E(x, \mu)$ e para $\mu_k > 1$ verifica-se que:

- Se x^k é um ponto admissível então $\nu_i^{k+1} < \nu_i^k$ [24];
- Se x^k é um ponto não admissível então $\nu_i^{k+1} > \nu_i^k$, fazendo com que aumente o peso da violação da restrição c_i , que permite a aproximação da região admissível de uma forma mais rápida [24].

4.2.5 Função de penalidade dinâmica

A grande diferença entre os métodos de penalidade dinâmica e os métodos já apresentados é que as restrições vão estar sujeitas a parâmetros de penalidade distintos. Isto é, o parâmetro de penalidade para as restrições de igualdade vai ser diferente e é actualizado de maneira distinta do parâmetro de penalidade para as restrições de desigualdade [11].

Considerando-se um problema de optimização não linear com restrições descrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) = 0, \quad i \in E \\ c_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (4.15)$$

A função de penalidade associada a este método é dado por:

$$L(x, \alpha^k, \beta^k) = f(x) + \sum_{i \in E} \alpha_i^k [c_i(x)]^2 + \sum_{i \in I} \beta_i^k (\max [c_i(x), 0])^2 \quad (4.16)$$

onde α_j e β_i são os parâmetros de penalidade das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente.

A actualização destes parâmetros, em cada iteração, é dado por:

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k + C |c_i(x)| \quad (4.17)$$

$$\beta_i^{k+1} = \beta_i^k + C (\max(0, c_i(x))) \quad (4.18)$$

onde C é uma constante positiva maior que zero [11]. O algoritmo generalizado para este método é dado por:

Algoritmo: Método de penalidade dinâmica

- Passo 1. Dados α^0 e β^0 , uma aproximação inicial, x_0 , $k = 0$ e $C > 0$
- Passo 2. Resolver

$$\min L(x, \alpha^k, \beta^k) = f(x) + \sum_{i \in E} \alpha_i^k [c_i(x)]^2 + \sum_{i \in I} \beta_i^k (\max [c_i(x), 0])^2$$

obter x_k

- Passo 3. Actualizar α_i^{k+1} , β_i^{k+1} e $k = k + 1$;

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k + C |c_i(x)|$$

$$\beta_i^{k+1} = \beta_i^k + C(\max(0, c_i(x)))$$

- Passo 4. Enquanto o critério de paragem não for satisfeito voltar ao passo 2.

4.3 Função lagrangeana aumentada

O método de penalidade lagrangeana deriva de métodos de penalidade. Também conhecido por método dos multiplicadores resulta do trabalho desenvolvido de uma forma independente por dois matemáticos, Hestenes e Powell [29, 36, 40].

Inicialmente, o método de penalidade lagrangeana foi desenvolvida para a resolução de problemas de optimização não lineares com restrições de igualdade. Rockafellar foi o primeiro matemático que propôs um algoritmo muito semelhante ao método de penalidade lagrangeana apresentado por Hestenes e Powell, mas aplicado a problemas de optimização com restrições de desigualdade [29].

O método de penalidade lagrangeana aumentada está muito relacionado com o algoritmo do método de penalidade quadrática. No entanto, este método reduz a possibilidade de mau condicionamento dos subproblemas que são gerados, através da introdução explícita de multiplicadores de Lagrange a cada passo [41].

4.3.1 Função lagrangeana aumentada - restrições de igualdade

Considere-se o seguinte problema de optimização não lineares com restrições de igualdade:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) = 0, \quad i \in E \end{aligned} \quad (4.19)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Combinação a função de penalidade quadrática, já apresentada, e a da função lagrangeana, é possível obter a função lagrangeana aumentada, que é dada na seguinte forma:

$$L_A(x, \lambda^k, \mu_k) = f(x) - \sum_{i \in E} \lambda_i^k c_i(x) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i \in E} c_i^2(x) \quad (4.20)$$

Neste método, o μ_k é o parâmetro de penalidade e λ^k é o vector de multiplicadores de Lagrange. É possível verificar que no método muda para cada valor de λ_i^k . Isto permite que, tanto a estimativa inicial para os multiplicadores de Lagrange como para o parâmetro de penalidade não necessitem de ser grandes para que ocorra uma boa aproximação à solução do problema inicial, facto que acontece nos métodos clássicos de penalidade [29].

É necessário, ao longo do algoritmo, que os multiplicadores de Lagrange sejam actualizados. A função que permite actualizar os multiplicadores resulta da derivação da função de penalidade lagrangeana aumentada, em relação à variável x com λ e o μ fixos, ficando:

$$\nabla_x L_A(x, \lambda, \mu) = \nabla f(x) - \sum_{i \in E} \left[\frac{\lambda_i - c_i(x)}{\mu} \right] \nabla c_i(x) \quad (4.21)$$

Igualando esta equação a 0, obtêm-se a equação de actualização de λ_i , representada da seguinte maneira:

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \frac{c_i(x)}{\mu_k} \quad (4.22)$$

Para mais detalhes podem ser consultados os trabalhos [29, 41, 36, 40] Assim sendo, pode-se aplicar o seguinte algoritmo para resolver os problemas de optimização não linear utilizando a função de penalidade lagrangeana aumentada:

Algoritmo: Método de penalidade lagrangeana aumentada

- Passo 1. Dados $\mu_0 > 0$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, uma aproximação inicial, x_0 , e $k = 0$

- Passo 2. Resolver

$$\min L_A(x_k, \lambda^k, \mu^k) = f(x) - \sum_{i \in E} \lambda_i^k c_i(x_k) + \frac{1}{2\mu^k} \sum_{i \in E} c_i^2(x_k)$$

e obter x_k

- Passo 3. Actualizar $\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k - \frac{c_i(x)}{\mu_k}$, $\mu_{k+1} = e\mu_k$ e $k = k + 1$
- Passo 4. Enquanto o critério de paragem não for satisfeito voltar ao Passo 2.

4.3.2 Função lagrangeana aumentada - restrições de desigualdade

Devido ao trabalho desenvolvido por Rockafellar, em 1974, é possível utilizar o método da função lagrangeana aumentada para problemas de optimização com restrições de desigualdade. Isto porque, é possível transformar uma restrição de desigualdade numa restrição de igualdade através da introdução de uma variável de folga, s_i , nas restrições de desigualdade [29]. Considerando o problema de optimização não linear com restrições de desigualdade:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$; e $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Transformando as restrições de desigualdade em igualdade adicionando a variável de folga fica:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.a } c_i(x) + s_i = 0, \quad i \in I \\ s_i \geq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Esta transformação faz com que o problema inicial apresente agora restrições de igualdade, bem como um limite simples, o que permite a aplicação do método de lagrangeana aumentada, ficando a equação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min L_A(x, \lambda, \mu_k) = f(x) - \sum_{i \in I} \lambda_i^k (c_i(x) + s_i) + \frac{1}{2\mu_k} \sum_{i \in I} (c_i + s_i)^2 \\ \text{s.a } s_i \geq 0 \quad \text{para } i \in I \end{aligned} \quad (4.25)$$

Calculando a derivada parcial do subproblema criado em função de s_i , obtêm-se a seguinte equação:

$$-\lambda_i^k + \frac{1}{\mu_k} (c_i(x) + s_i) = 0 \quad (4.26)$$

Partindo desta equação, pode-se calcular a variável de folga s_i , ficando:

$$s_i = \mu_k \lambda_i^k - c_i(x). \quad (4.27)$$

Uma das condições necessárias após a transformação das restrições de desigualdade para as restrições de igualdade é que a variável de folga seja $s_i \geq 0$ para $i \in I$ [29]. Então pode-se simplificar a equação da seguinte forma:

$$s_i = \max(\mu_k \lambda_i^k - c_i(x), 0), \quad \text{para } i \in I \quad (4.28)$$

Considere-se que:

$$\psi(\lambda_i^k, s_i, \mu_k) = \sum_{i \in I} \lambda_i^k (c_i(x) + s_i) + \frac{1}{2\mu_k} (c_i(x) + s_i)^2 \quad (4.29)$$

Substituindo o s_i na equação (4.29) pela equação (4.28), pode-se definir uma nova função de penalidade para as restrições de desigualdade:

$$\psi(x, \lambda_i^k, \mu_k) = \begin{cases} -\lambda_i^k c_i(x) + \frac{1}{2\mu_k} c_i(x)^2 & \text{se } \mu_k \lambda_i^k - c_i(x) \leq 0 \\ -\frac{1}{2} \mu_k (\lambda_i^k)^2 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.30)$$

Capítulo 5

Análise e discussão resultados

5.1 Análise dos métodos de optimização

Este trabalho pode-se dividir em três fases. Numa primeira fase, a implementação em Matlab dos métodos de penalidade e a verificação destes, utilizando problemas de optimização não linear já conhecidos.

Na segunda fase de trabalho foi efectuada a aquisição e processamento de imagens térmicas. Na terceira fase foram criados modelos matemáticos com o intuito de descobrir qual o que melhor representaria a distribuição da temperatura no pé, para tal foram aplicados os métodos de penalidade para a identificação do melhor modelo.

Numa primeira fase foram resolvidos 25 problemas de optimização não linear escolhidos numa forma aleatória em que 10 desses problemas eram problemas de optimização não linear com restrições de igualdade e/ou restrições de desigualdade; os restantes 15 problemas eram de optimização não linear apenas com restrições de desigualdade. O número de restrições que as funções objectivo estavam sujeitas eram variáveis. Todos os problemas resolvidos foram retirados de [38, 18]. Mais detalhes relativos aos problemas podem ser consultados em Anexo A.

Esta fase serviu, principalmente, para verificar se os métodos implementados conseguiam identificar a solução de problemas cuja solução já era conhecida. Assim, foi analisada a robustez e a precisão de cada método de penalidade codificado.

Também foi possível verificar, o comportamento que teriam os diferentes métodos em relação ao tipo de funções.

Os métodos de penalidade foram implementados de acordo com os algoritmos apresentados no Capítulo 4. Na tabela seguinte estão descritos os parâmetros iniciais dos diferentes métodos aplicados.

Tabela 5.1: Parâmetros iniciais dos métodos de penalidade

	l_1	Quadrática	Hiperbólica	Exponencial	Dinâmica	Lagrangeana
Parâmetros Iniciais	$\mu_0 = 1$ $c = 0.7$	$c = 0.7$ $\mu_0 = 1$	$\lambda^0 = [1, \dots, 1]$ $\tau^0 = [1, \dots, 1]$ $r = \sqrt{10}$ $q = 0.1$	$\mu_0 = 1$ $\nu^0 = [2, \dots, 2]$ $d = 1.2$	$\alpha = [2, \dots, 2]$ $\beta = [2, \dots, 2]$ $c = 20$	$e = 2$

Na Tabela 5.1 apresentam-se alguns parâmetros em forma de vector, que variavam de tamanho consoante o numero de variáveis do problema a executar. Nos resultados computacionais realizados, foi usado um Computador Intel Core i3, CPU M 300 2.13GHz, com 4.0 GB de RAM.

Um resumo dos resultados pode observar-se na Tabela 5.2, onde E.S. significa "Encontrou a Solução", N.E.S. significa que "Não Encontrou a Solução" e M.N.A, "Método Não Aplicado". Informações mais detalhadas sobre os resultados obtidos pelos métodos de penalidade em análise podem ser consultados no Anexo A.

Na Tabela 5.2 é possível verificar que, através dos cinco métodos implementados foi possível encontrar a solução da maioria dos problemas apresentados. Também se verificou que, a implementação da função lagrangeana aumentada, não possuía robustez suficiente para resolver os problemas propostos.

Dos métodos testados, aquele que apresenta um menor número de problemas foi o método de penalidade dinâmica. E, também verificou-se que para identificar a solução exacta necessitava de um maior número de iterações, o que tornava o modelo mais demoroso do que os restantes.

O método de penalidade l_1 foi o método menos satisfatório, pois não encontrou a solução num maior número de problemas. No entanto, nos problemas onde identificou a solução, este método conseguiu numa forma mais rápida, pois necessitou de um menor número de iterações para solucionar o problema.

O método de penalidade quadrática foi o algoritmo que apresentou um melhor comportamento,

Tabela 5.2: Tabela resumo relativa aos métodos de penalidade

Problema	Métodos de Penalidade				
	Quadrática	l_1	Dinâmica	Exponencial	Hiperbólica
1	E.S.	E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
2	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.
3	E.S.	E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
4	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.
5	E.S.	N.E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
6	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.
7	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.
8	N.E.S.	N.E.S.	N.E.S.	E.S.	N.E.S.
9	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.
10	E.S.	E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
11	E.S.	N.E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.
12	E.S.	N.E.S.	N.E.S.	M.N.A.	M.N.A.
13	E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.	E.S.
14	E.S.	E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
15	E.S.	N.E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
16	N.E.S.	N.E.S.	E.S.	N.E.S.	N.E.S.
17	E.S.	N.E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.
18	E.S.	N.E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
19	E.S.	N.E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.
20	E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.	E.S.
21	E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.	E.S.
22	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.	E.S.
23	E.S.	E.S.	E.S.	N.E.S.	N.E.S.
24	N.E.S.	E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.
25	E.S.	E.S.	E.S.	M.N.A.	M.N.A.

pois encontrou a solução na maior parte dos problemas testados, com um número de iterações bastante reduzidos, em comparação com o método de penalidade dinâmica. Isto permite ao método apresentar um tempo de processamento muito mais baixo do que o método de penalidade dinâmica.

Considerando que os métodos de penalidade hiperbólica e exponencial só resolvem problemas de otimização não linear com restrições de desigualdade, os resultados dos dois métodos são praticamente iguais entre si. Comparando os dois métodos, verifica-se que o método de penalidade hiperbólica, na maioria da vezes, necessita de um menor número de iterações para encontrar a solução, o que faz com que o tempo de processamento seja significativamente mais baixo. No entanto, em problemas que apresentam o mesmo número de iterações, é possível verificar que o método de penalidade exponencial apresenta um tempo de processamento significativamente mais rápido do que o método de penalidade hiperbólica.

Analisando os casos onde são aplicados os cinco métodos de penalidade, e observando o tempo necessário para encontrar a solução, verifica-se que o método de penalidade l_1 é o que apresenta, na maioria da vezes, o menor tempo de processamento.

5.2 Técnicas de processamento de imagens

Na fase de aquisição e processamento de imagens, foi aplicada a técnica de termografia para a aquisição de imagens térmicas. As imagens térmicas apresentam a distribuição de temperatura da planta dos pés.

Esta análise, foi efectuada em ambiente académico onde os voluntários seleccionados ao acaso eram pessoas saudáveis. O protocolo da aquisição de imagens foi simples. Foi pedido ao voluntário para se descalçar, e que estivesse com os pés descalços durante 10 minutos antes da aquisição da imagem, com o intuito de estabilizar a temperatura. A aquisição de imagens foi efectuada por uma câmara térmica FLIR que se encontrava a uma distância fixa de um metro dos pés do paciente. Foi necessário introduzir na câmara dados iniciais, como por exemplo a distância, a temperatura ambiente e emissividade da pele, para poder calcular a temperatura real. Foi colocada uma placa de espuma rígida sobre os tornozelos, com o intuito de isolar a temperatura dos pés do resto do corpo. A duração

da aquisição de imagens não excedeu os 15 minutos. Na Figura 5.1 é possível ver a posição dos pés durante a aquisição de imagens.



Figura 5.1: Imagem original

Um exemplo de imagem térmica obtida, pode ser analisada na Figura 5.2.



Figura 5.2: Imagem térmica

Como é possível observar na imagem térmica, existem regiões de interesse e regiões cujos valores não interessam para esta análise. Com isto foram efectuadas duas técnicas distintas de processamento de imagens para isolar os dados da temperatura dos pés. Essas técnicas foram o *Region Growing* e o *Watershed*. Esta análise foi efectuada em Matlab, obtendo-se os seguintes resultados.



Figura 5.3: Resultado do *Region Growing*

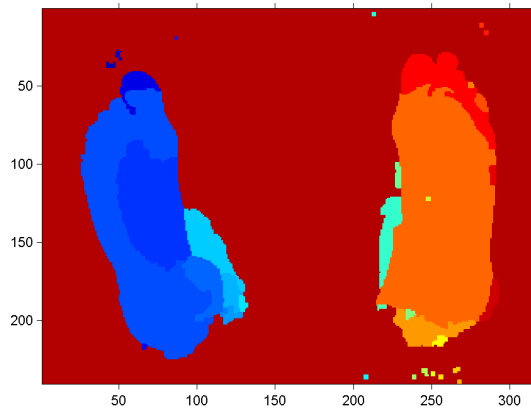


Figura 5.4: Resultado do *Watershed*

Como é possível observar nas Figuras 5.3 e 5.4 obtidas na aplicação dos métodos de processamento de imagens, as imagens obtidas através da técnica de *Region Growing* são as que apresentam melhores resultados, sendo possível isolar os dados da temperatura dos pés, enquanto que, nas ima-

gens de *Watershed* verifica-se que existem regiões distintas mesmo dentro do pé, bem como regiões muito pequenas no fundo da imagem.

Uma grande dificuldade presente na execução deste trabalho foi o facto de isolar totalmente a temperatura dos pés, quando era visíveis nas imagens, zonas das pernas dos voluntários cuja temperatura era igual ao dos pés. Este problema pode ser melhorado com uma melhor isolamento aquando da aquisição das imagens.

Dos resultados obtidos no processamento de imagens, foram escolhidos as imagens obtidas da técnica de *Region Growing* para efectuar a modelação matemática.

5.3 Modelação Matemática

Após a aquisição e processamento das imagens obtidas foram utilizados esses dados para encontrar um modelo matemático que melhor descreve a distribuição de temperatura da planta do pé.

Para uma melhor análise foram consideradas três regiões em cada pé, como é possível observar na Figura 5.5

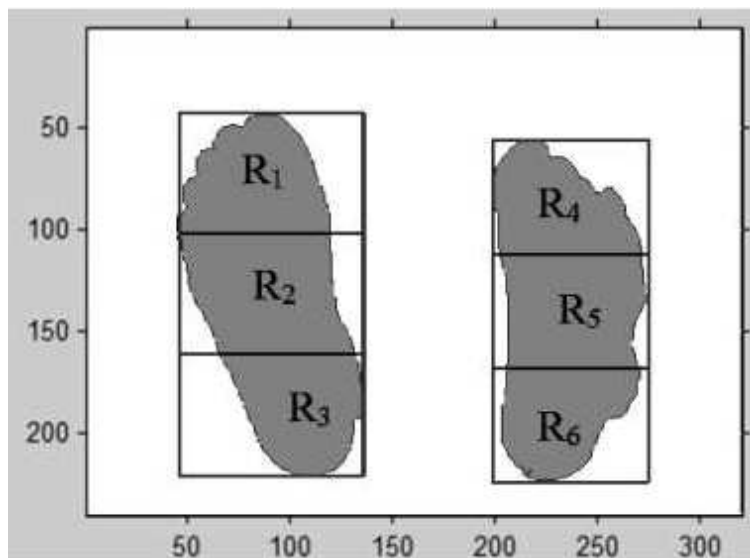


Figura 5.5: Divisão de cada pé em três regiões

Inicialmente, foi efectuada uma análise prévia relativa a cada região. Para isso, foram escolhidas algumas imagens, ao acaso. Foram considerados os valores da temperatura máxima, mínima, média e o desvio padrão em cada região.

Com os resultados da temperatura máxima e da média da temperatura em cada região, foi possível obter os seguintes gráficos.

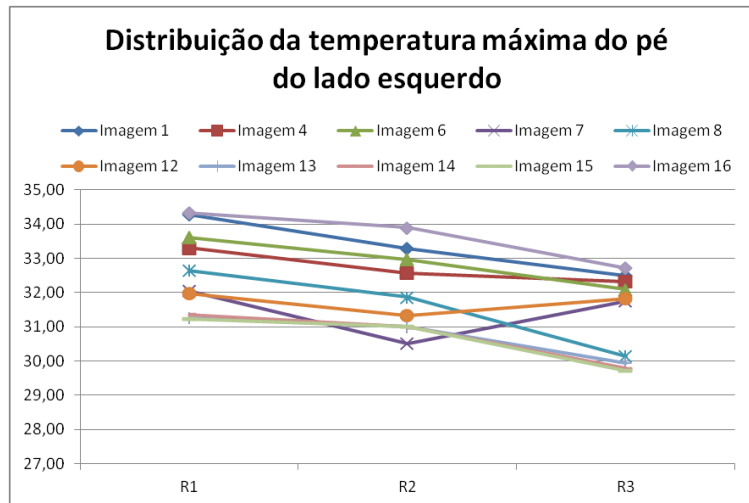


Figura 5.6: Distribuição da temperatura máxima do pé do lado esquerdo

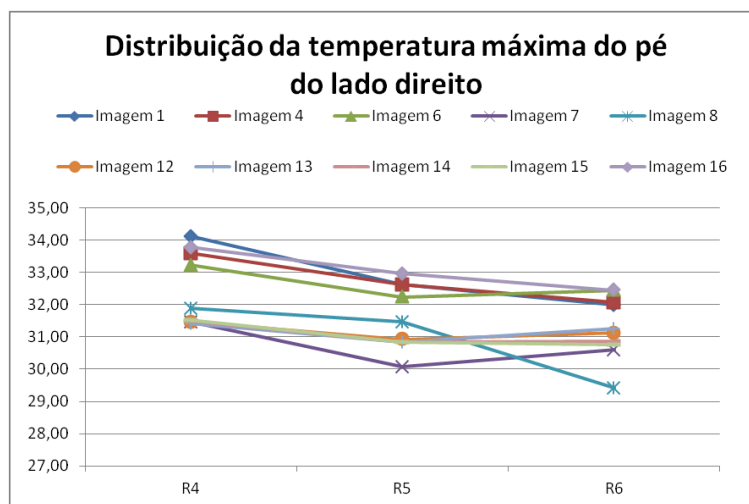


Figura 5.7: Distribuição da temperatura máxima do pé do lado direito

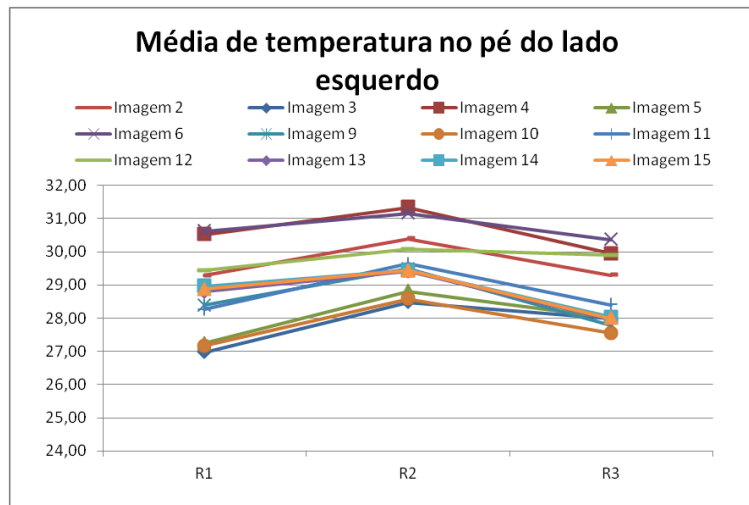


Figura 5.8: Média de temperatura no pé do lado esquerdo

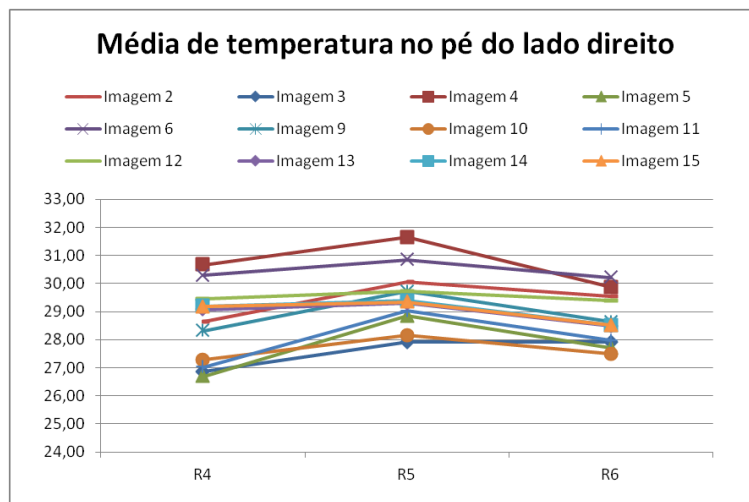


Figura 5.9: Média de temperatura no pé do lado direito

Nos gráficos das Figuras 5.6 e 5.7 é possível ver que a temperatura mais alta, das temperaturas máxima identificada em cada região, encontra-se, na maioria das vezes, na região superior de cada pé, isto é, nas regiões R_1 e R_4 . É possível observar que, a temperatura máxima vai diminuindo ao longo do pé, obtendo-se uma temperatura mais baixa nas regiões R_3 e R_6 .

Analisando a média de temperatura por região, foi possível verificar que, dos dados obtidos, a

média de temperatura mais alta se verifica nas regiões que se situam no meio do pé, isto é, nas regiões R_2 e R_5 . Como nas regiões R_1 e R_4 estão situados os dedos dos pés, e como são as regiões dos pés onde a temperatura é mais baixa, faz com que a média nessa região seja mais baixa que nas regiões R_2 e R_5 , embora seja nessas regiões que se encontre a temperatura mais elevada no pé. Em relação à temperatura mínima, esta apresenta-se constante ao longo do pé.

Após esta análise, foram criados cinco modelos matemáticos não lineares para descrever a distribuição da temperatura ao longo do pé. Para identificar qual dos modelos matemáticos que melhor aproximava a distribuição da temperatura do pé foram aplicados cinco métodos de penalidade, já referidos.

Foram considerados os seguintes modelos matemáticos:

$$f_1(x, i, j) = x_1 i^2 + x_2 ij + x_3 j^2 + x_5 i + x_6 j + x_7$$

$$f_2(x, i, j) = x_1 \sin(x_2 i + x_3) + x_4 \cos(x_5 j + x_6) + x_7$$

$$f_3(x, i, j) = x_1 \sin(x_2 i + x_3) + x_4 \sin(x_5 j + x_6) + x_7$$

$$f_4(x, i, j) = x_1 \sin^2(x_2 i) + x_3 \cos^2(x_4 j) + x_5$$

$$f_5(x, i, j) = x_1 \sin^2(x_2 i) + x_3 \sin^2(x_4 j) + x_5$$

Com estes modelos matemáticos, pretende-se identificar qual a função que melhor aproxima a temperatura do pé em cada região.

Para isso, foi necessário resolver o seguinte problema de optimização não linear.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} (t_{ij} - f_w(x, i, j))^2 \\ \text{s.a.} \quad & f_w(x, i, j) \leq 0, \quad \text{para } (i, j) \in R_k \end{aligned}$$

5.4 Resultados obtidos para um número reduzido de imagens

A este problema de optimização não linear criado, foram aplicados os seguintes métodos de penalidade: penalidade l_1 (l_1), quadrática (Q), hiperbólica (H), exponencial (E) e dinâmica (D).

Caso fossem aplicados todos os modelos matemáticos com todos os métodos de penalidade obtinham-se um elevado número de resultados. Por esse motivo, foram seleccionadas duas imagens, ao acaso, e

aplicados os cinco modelos e os cinco métodos de penalidade, para identificar qual o melhor método e quais os modelos matemáticos que melhor aproximavam a temperatura.

Considerou-se $x_0 = (1, 1, 1, \dots, 1)$ como aproximação inicial e obteve-se os resultados apresentados nas Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5.

Nas tabelas seguintes, DS (do inglês: *Did not Solve*) significa que o método de penalidade não consegue encontrar a solução do problema, e NF (do inglês: *Not Found*) quando o método de penalidade encontra uma solução não admissível.

Tabela 5.3: Resultados computacionais dos métodos de penalidade l_1 e Q

Imagem	Região	l_1					Q				
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
I_1	R_1	1.3E+6	3.3E+6	3.3E+6	1.5E+6	1.2E+6	1.3E+6	3.3E+6	4.4E+6	1.2E+6	1.2E+6
	R_2	2.3E+6	3.7E+6	3.2E+6	1.7E+6	1.7E+6	2.3E+6	3.7E+6	3.4E+5	1.7E+6	1.7E+6
	R_3	1.7E+6	2.5E+6	2.5E+6	1.5E+6	1.5E+6	1.7E+6	1.1E+6	2.5E+6	1.5E+6	1.5E+6
	R_4	1.3E+6	3.2E+6	3.2E+6	1.3E+6	2.0E+6	1.3E+6	3.2E+6	3.2E+6	1.4E+6	1.4E+6
	R_5	2.2E+6	4.0E+6	9.0E+5	1.7E+6	1.9E+6	2.2E+6	4.0E+6	4.0E+6	1.9E+6	1.9E+6
	R_6	1.8E+6	2.5E+6	2.5E+6	1.6E+6	1.6E+6	1.8E+6	DS	2.5E+6	1.5E+6	1.5E+6
I_2	R_1	1.2E+6	3.1E+6	1.9E+6	1.3E+6	1.4E+6	1.1E+6	1.3E+6	1.9E+6	1.2E+6	1.9E+6
	R_2	2.4E+6	1.4E+6	2.0E+6	2.1E+6	2.1E+6	2.4E+6	1.4E+6	2.1E+6	2.1E+6	2.1E+6
	R_3	2.6E+6	4.9E+6	2.0E+6	2.0E+6	2.0E+6	2.6E+6	4.9E+5	2.0E+6	2.0E+6	2.0E+6
	R_4	1.2E+6	3.2E+6	9.5E+5	9.5E+5	9.5E+5	1.2E+6	8.1E+5	1.7E+6	9.5E+5	8.3E+5
	R_5	2.0E+6	2.6E+6	1.7E+6	1.7E+6	1.7E+6	2.0E+6	3.6E+6	1.5E+6	1.6E+6	1.5E+6
	R_6	2.0E+6	2.8E+5	1.6E+6	1.6E+6	1.7E+6	2.0E+6	9.7E+5	1.6E+6	1.6E+6	1.6E+6

Como é possível ver nas tabelas apresentadas, os métodos de penalidade dinâmica e exponencial, para a função f_1 não conseguiu encontrar a solução para as imagens em estudo, nas restantes funções não conseguiram resolver o problema proposto.

Para o método de penalidade hiperbólica, apresentam-se muitos casos onde não foi possível determinar a solução, principalmente na função f_1 . Para os casos onde encontrou a solução, verifica-se que não conseguiram aproximar tanto como nos resultados obtidos pelos métodos de penalidade l_1 e quadrática.

Tabela 5.4: Resultados computacionais dos métodos de penalidade E e H

Imagem	Região	E					H				
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
I_1	R_1	DS	NF	NF	NF	NF	DS	NF	3.3E+6	1.2E+6	1.2E+6
	R_2	DS	NF	NF	NF	NF	DS	3.7E+6	3.6E+6	1.2E+6	1.6E+6
	R_3	DS	NF	NF	NF	NF	DS	2.5E+6	2.4E+6	1.5E+6	1.5E+6
	R_4	DS	NF	NF	NF	NF	DS	4.2E+5	3.2E+6	1.7E+6	DS
	R_5	DS	NF	NF	NF	NF	DS	4.0E+6	4.0E+6	1.4E+6	DS
	R_6	DS	NF	NF	NF	NF	DS	2.5E+6	3.1E+5	1.6E+6	1.4E+6
I_2	R_1	NF	NF	NF	NF	NF	DS	3.1E+6	1.1E+6	DS	DS
	R_2	NF	NF	NF	NF	NF	DS	3.7E+6	1.7E+6	DS	DS
	R_3	NF	NF	NF	NF	NF	DS	3.7E+6	1.4E+6	DS	DS
	R_4	NF	NF	NF	NF	NF	DS	8.2E+5	9.7E+5	9.5E+5	9.5E+5
	R_5	NF	NF	NF	NF	NF	DS	3.6E+6	1.5E+6	DS	DS
	R_6	NF	NF	NF	NF	NF	DS	9.1E+5	1.3E+6	DS	DS

Tabela 5.5: Resultados computacionais do método de penalidade D

Imagem	Região	D				
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
I_1	R_1	DS	NF	NF	NF	NF
	R_2	DS	NF	NF	NF	NF
	R_3	DS	NF	NF	NF	NF
	R_4	DS	NF	NF	NF	NF
	R_5	DS	NF	NF	NF	NF
	R_6	NF	NF	NF	NF	NF
I_2	R_1	DS	NF	NF	NF	NF
	R_2	DS	NF	NF	NF	NF
	R_3	DS	NF	NF	NF	NF
	R_4	DS	NF	NF	NF	NF
	R_5	DS	NF	NF	NF	NF
	R_6	NF	NF	NF	NF	NF

Os métodos de penalidade que apresentaram melhores resultados, nesta análise, foram os métodos de penalidade l_1 e quadrática, obtendo-se resultados praticamente iguais. Verificando os resultados

por funções, observa-se que as funções f_1 , f_4 e f_5 , são as que apresentam melhores resultados.

Comparando os resultados obtidos pelos métodos de penalidade ao aplicar estas funções, chegou-se à conclusão de que o método de penalidade quadrática apresentava, na maioria dos casos em análise, melhores resultados do que o l_1 .

5.5 Resultados obtidos considerando todas as imagens

Depois da análise efectuada na Secção 5.4 foram escolhidas as funções f_1 , f_4 e f_5 e o método de penalidade quadrática para serem aplicados a todas as imagens obtidas neste estudo. Para efectuar esta análise, foram utilizados duas aproximações iniciais, x_0 distintas, para verificar qual o x_0 que proporcionava a melhor aproximação. Foram considerados, para aproximação inicial, os pontos $(1, \dots, 1)$ e $(0, \dots, 0)$.

Nas tabelas seguintes, são apresentados os resultados obtidos, onde se mostra a imagem em análise, a região, o valor da função obtido (solução), o número de iterações, o tempo de processamento, em segundos, e o x_0 que foi utilizado para obter a melhor solução.

Tabela 5.6: Resultados da função f_1

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0375	R1	1.18824E+06	17	3.53186E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R2	2.35978E+06	20	4.89305E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	2.58906E+06	18	3.86499E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R4	1.21540E+06	18	2.64700E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R5	2.04558E+06	21	3.03586E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	1.98415E+06	20	3.30020E+02	(1 1 1 1 1 1)
Ir 0371	R1	9.15060E+05	14	3.04977E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R2	2.00230E+06	20	4.92742E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	2.25128E+06	18	4.41203E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R4	8.32157E+05	18	2.14675E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R5	1.54598E+06	18	2.48878E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	2.10609E+06	20	2.74055E+02	(1 1 1 1 1 1)
Ir 0369	R1	7.36902E+05	19	2.95818E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R2	1.43034E+06	20	3.02016E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	1.80283E+06	16	2.73706E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	6.21407E+05	18	1.46709E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.13250E+06	18	1.43230E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	1.32693E+06	21	1.80521E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0367	R1	8.17802E+05	17	1.83807E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	1.67786E+06	15	1.73483E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	1.64669E+06	16	1.63189E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	8.36255E+05	19	1.80422E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.54813E+06	20	1.89831E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	1.31912E+06	19	1.63074E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0365	R1	5.16664E+05	20	1.72204E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	1.18195E+06	19	1.94771E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	1.32774E+06	16	1.51992E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	3.75669E+05	18	1.09032E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R5	1.08303E+06	19	1.30043E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	1.15663E+06	21	1.37051E+02	(0 0 0 0 0 0)

Na Tabela 5.6 a melhor aproximação aconteceu, na maioria das vezes na região R_1 e R_4 . É possível ver que, na imagem Ir 0365 foi onde se verificaram os melhores resultados.

Na Tabela 5.7 observa-se que na imagem Ir 0359 ocorreram as melhores aproximações. Em contra

Tabela 5.7: Resultados da função f_1

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0363	R1	9.03804E+05	17	2.60128E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	2.00079E+06	20	2.79373E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	2.03863E+06	19	2.46612E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	8.28761E+05	18	2.06784E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.75410E+06	20	2.09155E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	1.74618E+06	18	1.89843E+02	(1 1 1 1 1 1)
Ir 0359	R1	7.60070E+05	19	1.89596E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R2	1.08680E+06	20	1.86755E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	1.50112E+06	18	1.70296E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R4	6.66679E+05	18	1.20530E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.10065E+06	22	1.33983E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	1.10880E+06	20	1.10880E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0357	R1	1.27429E+06	17	3.14791E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R2	2.30166E+06	17	2.91878E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	1.74717E+06	19	3.42748E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	1.30977E+06	18	4.05788E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	2.23087E+06	19	4.36564E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	1.79885E+06	18	4.03687E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0355	R1	8.63759E+05	20	3.33668E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	1.47986E+06	19	3.79195E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	1.82654E+06	18	3.31523E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	8.59620E+05	17	2.33684E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.42171E+06	18	2.38393E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	1.57117E+06	21	2.70825E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0351	R1	8.49439E+05	19	8.49439E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	1.59558E+06	17	2.12612E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	1.62975E+06	16	2.15523E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	8.96274E+05	18	5.31530E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.75585E+06	18	5.54672E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	2.05628E+06	16	4.71113E+02	(0 0 0 0 0 0)

partida, na imagem Ir 0357 foi onde a aproximação não foi tão satisfatória. Verifica-se, também, que nas regiões R_1 e R_4 é onde se localizam as melhores aproximações.

Na Tabela 5.8, verifica-se que nas regiões R_1 e R_4 apresentam as melhores aproximações. É

Tabela 5.8: Resultados da função f_1

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0335	R1	6.59901E+05	20	1.75518E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R2	1.36473E+06	18	1.63302E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	1.51048E+06	19	1.60487E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	7.28589E+05	19	2.05293E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.36762E+06	18	2.08107E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	1.29549E+06	19	2.08205E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0128	R1	1.04228E+06	17	3.96444E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	2.13914E+06	19	4.47582E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	2.20260E+06	21	4.90874E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R4	1.15374E+06	20	4.16886E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R5	2.04211E+06	19	3.74383E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	2.43491E+06	21	4.01058E+02	(0 0 0 0 0 0)
Ir 0126	R1	1.01026E+06	21	4.12792E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	1.96990E+06	19	3.53144E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	1.96263E+06	17	2.94217E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R4	1.15715E+06	19	4.24193E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	2.09488E+06	20	4.09074E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	2.28960E+06	19	3.74742E+02	(1 1 1 1 1 1)
Ir 0124	R1	1.02249E+06	19	3.83945E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	2.05238E+06	20	3.92101E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R3	1.95741E+06	17	3.73947E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	1.18684E+06	19	4.39908E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R5	2.15024E+06	19	4.35515E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R6	2.38156E+06	17	3.78815E+02	(1 1 1 1 1 1)
Ir 0122	R1	1.39993E+06	20	3.59125E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R2	2.42205E+06	20	3.50394E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R3	2.10468E+06	22	3.94946E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R4	1.09624E+06	21	2.84647E+02	(0 0 0 0 0 0)
	R5	1.95790E+06	19	2.37978E+02	(1 1 1 1 1 1)
	R6	1.96493E+06	19	2.30019E+02	(0 0 0 0 0 0)

possível ver que na Tabela 5.8, para o mesmo modelo matemático, apresenta resultados mais altos do as Tabelas 5.6 e 5.7.

Na Tabela 5.9 observa-se que a imagem Ir 0365 apresenta a melhor aproximação para todas as

Tabela 5.9: Resultados da função f_4

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0375	R1	1.16156E+06	19	4.08437E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	2.09094E+06	18	3.78064E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	2.01340E+06	18	3.04438E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	8.28387E+03	17	2.19658E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.54387E+06	22	2.79025E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.38655E+06	18	1.94471E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0371	R1	1.46362E+06	19	3.72871E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.69005E+06	18	3.86479E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.47256E+06	17	3.24772E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.26477E+06	18	1.64908E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.42044E+06	17	1.98469E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.40614E+06	23	2.63616E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0369	R1	1.09147E+06	22	2.84517E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.25192E+06	17	1.97141E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.00883E+06	23	2.47543E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	5.05668E+05	17	1.03178E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	8.39605E+05	20	1.40785E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	9.28144E+05	20	1.44816E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0367	R1	7.12053E+05	18	1.97838E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.17734E+06	21	2.09617E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.03170E+06	23	2.20315E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.24754E+06	18	1.45992E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.23442E+06	19	1.33759E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	9.69750E+05	18	1.37633E+02	(1 1 1 1 1)
Ir 0365	R1	4.42672E+05	17	1.14605E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.03788E+06	19	1.41844E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	7.95623E+05	26	2.05199E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	3.35330E+05	16	7.77856E+01	(1 1 1 1 1)
	R5	7.27368E+05	18	1.23728E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	7.98391E+05	22	1.25303E+02	(1 1 1 1 1)

regiões. Verifica-se que, nas regiões R_1 e R_4 se encontram as melhores aproximações, para todas as imagens.

Na Tabela 5.10 pode-se observar que na imagem Ir 0359 se encontram as melhores aproximações

Tabela 5.10: Resultados da função f_4

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0363	R1	9.39055E+05	15	1.73258E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.53570E+06	22	2.78748E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.24852E+06	19	2.45388E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	5.99645E+05	18	1.99178E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.31823E+06	19	1.97360E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.21467E+06	132	9.49779E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0359	R1	8.56848E+05	20	1.72631E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.05406E+06	22	2.36151E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	9.32368E+05	18	1.40290E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	5.35544E+05	17	1.01030E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	8.03796E+05	20	1.32241E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	7.01216E+05	23	1.38626E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0357	R1	1.03148E+06	17	2.49409E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.72681E+06	23	3.59869E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.48955E+06	19	2.89626E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.00817E+06	19	3.49018E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.76002E+06	22	4.62558E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.51244E+06	21	5.49492E+02	(1 1 1 1 1)
Ir 0355	R1	1.20547E+06	20	4.37351E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.43066E+06	21	3.42509E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.10663E+06	17	2.58271E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	6.73075E+05	21	2.66082E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.30207E+06	18	2.41654E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.15604E+06	19	2.43977E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0351	R1	7.80508E+05	19	2.45537E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.34603E+06	18	1.86592E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.20133E+06	20	2.22995E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.38098E+06	20	6.24404E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.62134E+06	23	5.80272E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.52501E+06	23	4.61913E+02	(1 1 1 1 1)

para todas as regiões. Verifica-se, também, que nas regiões R_1 e R_4 são obtidas as melhores aproximações para todas as imagens.

Na Tabela 5.11 é possível ver que para a imagem Ir 0335 obtém-se as melhores aproximações.

Tabela 5.11: Resultados da função f_4

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0335	R1	5.83870E+05	21	1.64271E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.02910E+06	24	2.06855E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.10470E+06	25	2.09194E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	7.44861E+05	20	1.65959E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.15350E+06	20	1.88299E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.09997E+06	21	2.04688E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0128	R1	1.09038E+06	17	3.14644E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.61317E+06	22	3.93796E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.51042E+06	27	4.97884E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.05689E+06	26	4.76340E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.56687E+06	18	3.15104E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.31990E+06	19	3.35268E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0126	R1	7.80239E+06	19	2.46972E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.56035E+06	21	3.18223E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.33137E+06	18	3.38997E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	8.42971E+05	18	3.89601E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.71184E+06	18	3.21406E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.59298E+06	21	3.92620E+02	(1 1 1 1 1)
Ir 0124	R1	8.32948E+05	17	2.94166E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.52423E+06	20	3.05528E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.58988E+06	18	3.67678E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	8.70166E+05	18	3.22901E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.93619E+06	19	3.48478E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.31604E+06	17	3.32975E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0122	R1	1.21901E+06	17	3.19316E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.95507E+06	22	3.44402E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.68828E+06	19	2.85907E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	8.58703E+05	21	2.40877E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.55534E+06	20	2.13950E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.43013E+06	20	2.27199E+02	(1 1 1 1 1)

Observa-se que, nas regiões R_1 e R_4 encontram-se as melhores aproximações.

Na Tabela 5.12 observa-se que para a imagem Ir 0365 obtém-se as melhores aproximações.

Verifica-se, também que, nas regiões R_1 e R_4 encontram-se as melhores aproximações.

Tabela 5.12: Resultados da função f_5

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0375	R1	1.35420E+06	21	4.12499E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.99576E+06	21	4.43725E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	2.01340E+06	24	6.67134E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	8.28387E+05	17	1.96626E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.54387E+06	17	2.38689E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.38655E+06	24	3.31000E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0371	R1	1.16729E+06	20	3.88581E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.76717E+06	22	4.28178E+06	(0 0 0 0 0)
	R3	1.66735E+06	25	4.60037E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	7.20497E+05	20	1.97963E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.21386E+06	24	3.03815E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.29915E+06	20	2.21588E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0369	R1	7.61919E+05	20	2.25971E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.25192E+06	25	3.64927E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.00883E+06	29	3.09218E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	5.04176E+05	18	1.18410E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	9.64641E+05	24	2.10407E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	9.89840E+05	22	2.19073E+02	(1 1 1 1 1)
Ir 0367	R1	7.80072E+05	22	1.73609E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.17734E+06	23	2.38562E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.27067E+06	25	2.51720E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	5.80516E+05	18	1.51287E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.10896E+06	22	2.04088E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.02768E+06	20	1.02768E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0365	R1	5.59940E+05	23	1.85271E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	9.13930E+06	24	1.75474E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	7.95623E+05	22	1.77477E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	3.35330E+05	22	1.46005E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	7.27368E+05	21	1.34988E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	6.51697E+05	22	1.54901E+02	(0 0 0 0 0)

Na Tabela 5.13 é possível ver que para a imagem Ir 0359 obtém-se as melhores aproximações.

Observa-se que, nas regiões R_1 e R_4 encontram-se as melhores aproximações.

Tabela 5.13: Resultados da função f_5

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0363	R1	7.50299E+05	20	2.46285E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.65769E+06	21	2.46585E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.54064E+06	25	3.42613E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	6.30872E+05	20	2.10549E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.10903E+06	25	2.67288E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.21471E+06	22	2.29818E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0359	R1	8.61459E+05	21	1.87176E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.18293E+06	21	1.84847E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	9.86892E+05	22	1.68132E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	5.45048E+05	18	1.04541E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	8.08719E+05	20	1.26112E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	7.01216E+05	34	1.88693E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0357	R1	1.03148E+06	17	2.75302E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.72735E+06	53	6.89585E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.48996E+06	24	4.10854E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.35832E+06	14	3.10032E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.76002E+06	19	4.37884E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.51203E+06	21	7.96634E+02	(1 1 1 1 1)
Ir 0355	R1	1.29537E+06	22	3.51255E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.47087E+06	22	3.43443E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.15208E+06	21	5.58751E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.16221E+06	19	2.19360E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.30207E+06	21	2.60332E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.15604E+06	21	2.70838E+02	(1 1 1 1 1)
Ir 0351	R1	1.26915E+06	20	2.20006E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.26871E+06	22	2.61707E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	9.63583E+05	24	2.42070E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.14013E+06	20	4.68359E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.98101E+06	18	4.92965E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.39384E+06	24	5.65901E+02	(0 0 0 0 0)

Na Tabela 5.14 as melhores aproximações acontecem nas regiões R_1 e R_4 . Na imagem Ir 0335 apresenta os melhores resultados em todas as regiões em análise.

Tabela 5.14: Resultados da função f_5

Imagem	Região	Solução	Nº Iterações	Tempo [s]	x_0
Ir 0335	R1	5.51015E+05	262	3.20930E+05	(0 0 0 0 0)
	R2	1.02949E+06	26	1.96456E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.15735E+06	20	1.59068E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	7.49541E+05	19	1.72154E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.04695E+06	22	1.76337E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.12570E+06	20	1.57916E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0128	R1	1.09038E+06	23	3.62784E+02	(1 1 1 1 1)
	R2	1.61323E+06	23	4.78795E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.51042E+06	19	3.92932E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	1.05689E+06	22	4.07302E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.68486E+06	22	3.61569E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.71004E+06	22	3.21116E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0126	R1	9.42091E+06	19	2.50137E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.40356E+06	18	2.32573E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.50479E+06	24	3.83967E+02	(1 1 1 1 1)
	R4	1.06820E+06	19	3.22618E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.85323E+06	20	3.41079E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.70947E+06	27	4.62176E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0124	R1	1.61794E+06	19	3.10987E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.52423E+06	25	4.58543E+02	(0 0 0 0 0)
	R3	1.49413E+06	25	3.84722E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	8.70166E+05	20	3.38301E+02	(0 0 0 0 0)
	R5	1.34129E+06	23	4.40011E+02	(0 0 0 0 0)
	R6	1.34129E+06	19	3.71826E+02	(0 0 0 0 0)
Ir 0122	R1	1.14248E+06	21	2.98061E+02	(0 0 0 0 0)
	R2	1.88231E+06	22	3.29243E+02	(1 1 1 1 1)
	R3	1.68828E+06	24	3.60642E+02	(0 0 0 0 0)
	R4	7.49531E+05	311	2.33894E+02	(1 1 1 1 1)
	R5	1.38483E+06	20	2.33894E+02	(1 1 1 1 1)
	R6	1.33753E+06	19	1.33753E+02	(0 0 0 0 0)

5.6 Discussão de resultados obtidos

Para melhor compreender os resultados obtidos, foi elaborada a Tabela 5.15, que mostra a média e o desvio padrão dos resultados obtidos, por região.

Tabela 5.15: Resultados finais

	f_1		f_4		f_5	
	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão	Média	Desvio padrão
R_1	9.30725E+05	234213.7	9.46078E+05	269975.5	1.01167E+06	305612.7
R_2	1.80434E+06	432305.6	1.46822E+06	324625.2	1.46197E+06	312930.0
R_3	1.87324E+06	333923.2	1.30168E+06	326112.4	1.34960E+06	334782.6
R_4	9.17636E+05	262646.2	8.50180E+05	300974.6	8.19987E+05	286965.2
R_5	1.68208E+06	400118.0	1.36633E+06	363104.0	1.34644E+06	392377.0
R_6	1.76938E+06	450710.8	1.22382E+06	274696.3	1.23712E+06	310349.6
tempo max. (s)	5.54672E+02		9.49779E+02		3.98195E+03	
tempo min. (s)	1.09032E+02		7.77856E+01		1.04541E+02	

Como é possível ver na tabela, nas regiões R_1 , e R_4 são onde se verificam uma melhor aproximação em todos os modelos apresentados. O modelo matemático f_1 é dos modelos analisados, o modelo que apresenta os resultados mais elevados, na maior parte dos resultados, apresentando, também, um desvio padrão muito elevado em algumas regiões. No modelo f_1 , verificou-se que tanto para o $x_0 = (0, 0, 0, \dots, 0)$ como para o $x_0 = (1, 1, 1, \dots, 1)$ foi encontrada a mesma solução, variando apenas o número de iterações, bem como o tempo de processamento.

Nos modelos f_4 e f_5 , verifica-se que variando os x_0 era encontrada uma nova solução. Sendo, no entanto, os modelos que melhor aproximações fizeram nesta análise, como é possível comprovar na tabela, apresentando, também, um desvio padrão mais pequeno, em comparação com os desvios padrão apresentados pelo modelo f_1 .

Com o intuito de compreender melhor o comportamento dos modelos matemáticos por regiões em análise, foi criada a Tabela 5.16 que indica em percentagem as vezes que cada modelo apresentou os melhores resultados por cada região.

Na Tabela 5.16, verifica-se que, para o modelo f_1 apenas apresentou bons resultados para aproximações efectuadas nas regiões R_1 e R_4 , enquanto que nas restantes regiões este modelo apresentava resultados piores dos que os apresentados pelos outros modelos. Pode-se observar, também, que os modelo f_4 apresentou melhores resultados do que o modelo f_5 na maioria dos casos em análise, exceptuando a região R_5 onde a diferença de resultados é quase igual, sendo, no entanto, o modelo

Tabela 5.16: Percentagens de acerto das funções por regiões

	f_1	f_4	f_5
R_1	33%	47%	20%
R_2	0%	67%	33%
R_3	0%	73%	27%
R_4	13%	47%	40%
R_5	0%	47%	53%
R_6	0%	60%	40%

f_5 a apresentar melhores resultados. Através desta tabela, pode-se dizer o modelo que apresentou melhores resultados foi o modelo f_4 , pois obteve melhores resultados em todas as regiões.

Alguns destes resultados foram publicados em conferências internacionais [6, 5].

Capítulo 6

Conclusões e trabalho futuro

6.1 Conclusões

Neste trabalho foi proposto a identificação de um modelo matemático para a distribuição da temperatura da planta do pé em pessoas saudáveis. Para isso, foram recolhidas imagens térmicas da planta do pé de voluntários saudáveis, e, através de técnicas de processamento de imagem foi possível isolar as regiões de interesse. Foram aplicadas duas técnicas de segmentação: a técnica de *Region Growing* e *Watershad*. Neste processo foi possível concluir que, os melhores resultados obtiveram-se da aplicação da técnica de *Region Growing*.

Após a aplicação da técnica de processamento de imagem, obteve-se a matriz da temperatura da planta do pé. Com esta matriz, foram efectuados testes com cinco modelos matemáticos distintos, combinados com cinco técnicas de optimização não linear. Destes testes conclui-se que, a técnica de optimização não linear que apresentou melhores resultados foi a função de penalidade quadrática, pois apresentou melhores aproximações para os modelos em análise.

Dos modelos matemáticos testados, pode-se concluir que, os modelos baseados na soma se quadrados de funções trigonométricas são aqueles que permitem obter as melhores aproximações da distribuição da temperatura na planta do pé.

6.2 Trabalho futuro

Para trabalho futuro são propostas as seguintes ideias. Testar diferentes pontos iniciais aleatórios, e verificar qual o ponto inicial que melhor aproxima os modelos matemáticos.

Visto que, através das funções de penalidade utilizadas apenas permitem uma optimização local, utilizar os resultados obtidos no processamento de imagem para efectuar uma optimização global e verificar se existem outros mínimos que sejam melhores do que os encontrados por estas técnicas.

Estender este estudo a pessoas com diabetes, e comparar com os resultados obtidos para pessoas sem diabetes.

Elaborar estudos semelhantes para outro tipo de doenças relacionadas com patologias associadas à planta do pé.

Bibliografia

- [1] J. Afonso, *Termografia: teoria, procedimento e vantagens*, Instalações Técnicas Especiais, 2010.
- [2] M. P. Albuquerque and M. P. Albuquerque, *Processamento de imagens: métodos e análises*, vol. 1, Revista de Ciência e Tecnologia, ISSN 1519-8022, 2000.
- [3] R. C. Alvares, *Diagnóstico de falhas em pára-raios utilizando termografia*, Dissertação de Mestrado da Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.
- [4] R. Behling, *Minimização de quadráticas convexas em caixas sobre variedades afins, um sub-problema de pqs*, Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.
- [5] D. Bento, F. Monteiro, and A. I. Pereira, *Mathematical model of feet temperature*, International conference on numerical analysis and applied mathematics (2011), 787–790.
- [6] ———, *Monitoring feet temperature using thermography*, Computational vision and medical image processing, VIPIMAGE (2011), 189–191.
- [7] M. Bhagwat, R. K. Krishna, and V. E. Pise, *Image segmentation by improved watershed transformation in programming environment matlab*, International Journal of computer science e Communication **1** (2010), 171–174.
- [8] M. L. Brioschi, *A história da termografia*, Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.
- [9] R.L. Burder and J. D. Faires, *Numerical analysis*, Books/ Cole, 2001.
- [10] D. M. Cardoso, *Optimização linear*, (2005).

-
- [11] A. Correia, J. Matias, and C. Serôdio, *Método de penalidade exacta para resolução de problemas de otimização não linear*, *Investigação Operacional* **28** (2008), 17–30.
- [12] R. Dahmen, R. Haspels, B. Koomen, and A. F. Hoeksma, *Therapeutic footwear for the neuropathic foot*, (2001).
- [13] N. A. Diakides and J. D. Bronzino, *Medical infrared imaging*, CRC Press, 2008.
- [14] B. Dinis, *Termografia aplicada a física das construções*, Monografia da Universidade Fernando Pessoa, 2009.
- [15] E. M. G. P. Fernandes, *Computação numérica*, Universidade do Minho, 1998.
- [16] FLIR, *Thermacam researcher professional, user's manual*, 2010.
- [17] P. E. Gill and E. Wong, *Sequential quadratic programming methods*, Mixed Integer Nonlinear Programming, The IMA Volumes in Mathematics and its Applications **154** (2010).
- [18] A. R. Hedar, *Global optimization test problems*, 2011.
- [19] B. Klava, *Segmentação interativa de imagens via transformação watershed*, Tese de Mestrado Universidade de São Paulo, 2009.
- [20] D. G. Leunberger and Y. Ye, *Linear and nonlinear programming*, Third Edition, Springer, 2008.
- [21] M. Mancas, B. Gosselin, and B. Macq, *Segmentation using a region growing thresholding*, Proc. of the Electronic Imaging Conference of the International Society for Optical Imaging (2005).
- [22] J. A. Mayfield, G. E. Reiber, L. J., Sanders D. Janisse, and L. M. Pogach, *Preventive foot care in people with diabetes.*, (1998).
- [23] D. R. Medaglia and I. H. Manssour, *Segmentação de imagens médicas baseada no uso das bibliotecas itk e vtk*, SIBGRAPI- Simpósio Brasileiro de Computação Gráfica e Processamento de Imagens, 2006.

- [24] J. F. P. Meira, *Implementação de funções de penalidade e esquemas de regulação na resolução de problemas de otimização com restrições de complementaridade em ambiente matlab*, Tese de Mestrado da Universidade do Minho, 2008.
- [25] A. M. T. Mota, *Um método de redução para programação semi-infinita não linear baseada numa técnica de penalidade exacta*, Tese de Doutoramento Universidade do Minho, 2010.
- [26] T. Nagase, H. Sanada, K. Takehara, M. Oe, S. Iizaka, Y. Ohashi, M. Oba, G. Nakagami, and T. Kadowaki, *Yumiko ohashi, aritions of plantar thermographic patterns in normal controls and non-ulcer diabetic patients: novel classification using angiosome concept*, (2011).
- [27] G. H. Neto, G. C. Ribeiro, and F. V. Valeri, *Processamento e segmentação de imagens colposcópicas digitais*, IX Congresso Brasileiro de Informática em Saúde, 2004.
- [28] K. Nishide, T. Nagase, M. Oba, M. Oe, Y. Ohashi, S. Iizaka, G. Nakagami, T. Kadowaki, and H. Sanada, *Ultrasonographic and thermographic sreening for latent inflammation in diabetic foot callus*, (2009).
- [29] J. Nocedal and S. Wright, *Numerical optimization*, Springer Series in Operations Research, Springer, 1999.
- [30] L. A. O. Nunes, A. C. C. Andrade Filho, and J. L. Sartori, *Câmara termográfica nacional*, Pratica Hospitalar **49** (2007), 18–21.
- [31] R. E. Pecoraro, G. E. Reiber, and E. M. Burgués, *Pathways to diabetic lim amputation*, (1990).
- [32] H. C. Pedrosa, E. S. Nery, and F. V. Sena et al., *O desafio do projeto salvando o pé diabético*, (1998).
- [33] A. A. Pereira, *O método da função lagrangiana barreira modificada/penalidade*, Tese de Mestrado da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2007.
- [34] A. I. Pereira and E. M. G. P. Fernandes, *A hyperbolic penalty filter method for semi-infinitte programming*, Numerical Analysis and Applied Mathematics: In International Conference on

- Numerical Analysis and Applied Mathematics AIP Conference Proceedings **1048** (2008), 269–273.
- [35] I. J. Sanches, *Sobreposição de imagens de termografia e ressonância magnética: uma nova modalidade de imagem médica tridimensional*, Tese de Mestrado da Universidade de tecnologia federal do Paraná, 2009.
- [36] D. C. Sant’Ana, *Uma nova proposta utilizando métodos de lagrangeano aumentado com penalidades modernas na resolução de problemas de contato*, Tese de Mestrado da Universidade Federal do Paraná, 2005.
- [37] L. Santos, *Termografia infravermelha em subestações de alta tensão desabrigadas*, Tese de Mestrado da Universidade Federal de Itajubá, 2006.
- [38] K. Schittkowski, *More test examples for nonlinear programming codes*, Springer-Verlag, 1987.
- [39] K. Schittkowski and Y. Yuan, *Sequential quadratic programming methods*, (2011).
- [40] M. L. Schuverdt, *Método de lagrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante*, Tese de Mestrado da Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [41] I. C. R. Silva, *Estudo e implementação dos métodos da lagrangeana aumentada e da barreira modificada*, Tese de Mestrado da Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 2008.
- [42] J. Soares, *Teoria de otimização: Otimização linear*, Universidade de Coimbra, 2007.
- [43] S. G. Tavares, *Desenvolvimento de uma metodologia para aplicação de ensaios térmicos não destrutivos na avaliação da integridade de obras de arte*, Tese de Mestrado da Universidade Federal de Minas Gerais, 2006.
- [44] A. Xavier, *Hyperbolic penalty: a new method for nonlinear programming with inequalities*, International Transactions in Operarional Research **8** (2001), 659–671.

Apêndice A

Funções teste

Tabela 1: Descrição do tipo de restrições e referencia de cada problema

Problema	Tipo de restrições	Referencia
1	Restrições de igualdade	[38]
2	Restrições de desigualdade	[38]
3	Restrições de desigualdade e igualdade	[38]
4	Restrições de desigualdade	[38]
5	Restrições de igualdade	[38]
6	Restrições de desigualdade	[38]
7	Restrições de desigualdade	[38]
8	Restrições de desigualdade	[38]
9	Restrições de desigualdade	[38]
10	Restrições de igualdade	[38]
11	Restrições de desigualdade	[38]
12	Restrições de desigualdade e igualdade	[38]
13	Restrições de desigualdade	[38]
14	Restrições de igualdade	[38]
15	Restrições de igualdade	[38]
16	Restrições de desigualdade	[18]
17	Restrições de desigualdade	[18]
18	Restrições de desigualdade e igualdade	[18]
19	Restrições de desigualdade	[18]
20	Restrições de desigualdade	[18]
21	Restrições de desigualdade	[18]
22	Restrições de desigualdade	[18]
23	Restrições de desigualdade	[18]
24	Restrições de igualdade	[18]
25	Restrições de igualdade	[18]

Tabela 2: Resultados da implementação dos métodos de penalidade l_1 e quadrática

Problema	Função	Penalidade quadrática			Penalidade l_1		
		Função	Iterações	Tempo	Função	Iterações	Tempo
1	4.093	4.090	33	1.991	4.094	15	1.094
2	-0.8	-0.8	8	3.225E-01	-0.8	5	1.828E-01
3	3.791	3.791	9	8.188E-02	3.791	5	3.993E-02
4	-79.808	-80.395	8	6.473E-02	-80.395	5	3.938E-02
5	-7.206	-7.206	14	1.685E-01	inf		
6	1	1.0	12	6.002E-02	1.0	3	2.372E-02
7	-0.8	-0.8	14	1.395E-01	-0.8	4	4.173E-02
8	-3300	inf			inf		
9	0	8.173E-10	3	1.397E-02	8.173E-10	3	1.285E-02
10	0.033	0.033	12	1.720E-01	0.033	4	6.098E-02
11	-6961.81	-6961.81	17	1.720E-01	inf		
12	-37.413	-37.413	10	6.060	inf		
13	13390.1	13392.0	21	1.656	15926.42	46	3.925
14	13390.1	13390.1	16	1.304	13792.6	53	5.586
15	-47.761	-47.698	26	5.867	inf		
16	-15	-5.228	217	2.008E+01	inf		
17	-30665.539	-30665.50	19	7.175E-01	inf		
18	5126.498	5126.497	24	8.097E-01	inf		
19	-6961.814	-6961.810	14	1.279E-01	inf		
20	24.306	24.376	13	1.162	24.327	16	1.578
21	0.096	0.096	3	1.894E-02	0.096	3	1.357E-02
22	680.630	680.630	12	5.327E-01	680.631	6	4.248E-01
23	7049.331	8682.50	26	3.277	10857.3	47	5.208
24	0.75	9.998E-01	9	3.892E-02	7.499E-01	5	4.003E-02
25	0.054	0.054	12	3.290E-01	0.057	17	7.021E-01

Tabela 3: Resultados da implementação do método de penalidade dinâmica

		Penalidade dinâmica		
Problema	Função	Função	Iterações	Tempo
1	4.093	3.994	543	3.366E+01
2	-0.8	-0.8	10000	1.155E+02
3	3.791	3.763	48	3.253E-01
4	-79.808	-80.396	10000	7.304E+01
5	-7.206	-7.234	312	3.274
6	1	0.999	10000	3.328E+01
7	-0.8	-0.802	4103	3.367E+01
8	-3300	inf		
9	0	8.173E-10	3	2.167E-02
10	0.033	0.033	4	4.737E-02
11	-6961.81	-7049.858	10000	7.979E+01
12	-37.4130	inf		
13	13390.1	13384.5	10000	2.709E+02
14	13390.1	13382.0	4799	2.709E+02
15	-47.761	-47.913	10000	2.143E+03
16	-15	-13.968	154	1.634E+01
17	-30665.539	-30755.94	1569	5.524E+01
18	5126.4981	5126.445	4231	1.578E+02
19	-6961.81388	-7049.975	10000	8.483E+01
20	24.306	24.301	10000	6.748E+02
21	0.096	0.096	3	2.233E-02
22	680.630	680.629	10000	3.805E+02
23	7049.331	6298.159	10000	1.721E+03
24	0.75	0.742	210	1.352
25	0.054	0.054	95	2.343

Tabela 4: Resultados da implementação dos métodos de penalidade exponencial e hiperbólica

		Penalidade exponencial			Penalidade Hiperbólica		
Problema	Função	Função	Iterações	Tempo	Função	Iterações	Tempo
2	-0.8	-0.8	14	4.809E-01	-0.8	8	3.016E-01
4	-79.8078	-80.395	8	4.710E-02	-80.395	8	5.938E-02
6	1	1.0	8	4.227E-02	1.0	8	5.134E-02
7	-0.8	-0.8	51	3.157E-01	-0.8	14	1.166E-01
8	-3300	-3299.99	16	2.148E-01	inf		
9	0	3.416E-10	7	4.377E-02	6.489E-11	6	3.987E-02
11	-6961.81	-6961.77	41	2.984E-01	inf		
13	13390.1	66061.81	10000	1.108E+03	13805.66	30	3.407
16	-15	-4.636E+02	10000	3.347E+03	-11.257	15	3.407
17	-30665.539	-37142.75	3	2.121E-01	inf		
19	-6961.814	-6961.782	17	1.253E-01	inf		
20	24.306	38.662	3	2.966E-01	24.455	12	1.355
21	0.094	0.026	22	1.404E-01	0.096	8	4.430E-02
22	680.630	680.630	18	6.435E-01	680.638	12	7.021E-01
23	7049.3307	15145.73	10000	1.581E+03	10607.59	17	3.934

