

Luis Manuel Leitão Canotilho

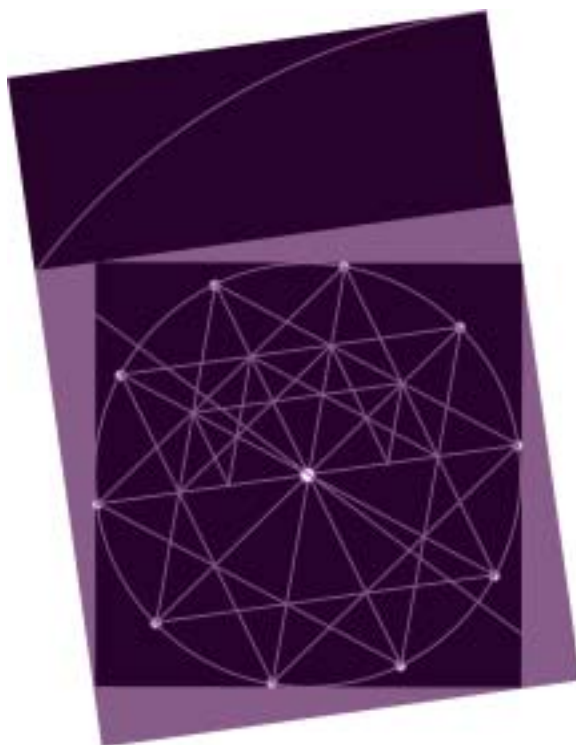
# Perspectiva pictórica



75

Luís Manuel Leitão Canotilho

# Perspectiva pictórica



SÉRIE

*Estudos*

EDIÇÃO DO INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA

---

Título: Perspectiva pictórica

Autor: Luís Manuel Leitão Canotilho

Edição: Instituto Politécnico de Bragança · 2005

Apartado 1038 · 5301-854 Bragança · Portugal

Tel. 273 331 570 · 273 303 000 · Fax 273 325 405 · <http://www.ipb.pt>

Execução: Serviços de Imagem do Instituto Politécnico de Bragança

(grafismo, Atilano Suarez; paginação, Luís Ribeiro;

montagem e impressão, António Cruz; acabamento, Isaura Magalhães)

Tiragem: 200 exemplares

Depósito legal n° 228746/05

ISBN 972-745-083-0

Aceite para publicação em 2002

---

## Algumas notas sobre o autor

---

Luís Manuel Leitão Canotilho nasceu em 12/04/57, na Freguesia de Vila da Ponte, Concelho de Sernancelhe.

É licenciado em Artes Plásticas / Pintura pela Escola Superior de Belas Artes do Porto.

É Doutor em Filosofia e Ciências da Educação, pela Faculdade de Filosofia e Ciências da Educação, da Universidade de Salamanca.

Exerce as funções de Professor Coordenador do Departamento de Artes Visuais da Escola Superior de Educação de Bragança.

No campo artístico tem realizado várias exposições de pintura e de escultura.



Telemóvel: + 351 969622963 | Email: [luiscano@ipb.pt](mailto:luiscano@ipb.pt) |  
Página pessoal: <http://www.ipb.pt/~luiscano/>



# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introdução</b> _____                                  | <b>9</b>  |
| <b>Aspectos históricos</b> _____                         | <b>13</b> |
| 1 · Origens da geometria _____                           | 13        |
| 2 · Origens da perspectiva _____                         | 18        |
| <b>Projecções</b> _____                                  | <b>39</b> |
| 1 · Projecções cónicas ou cilíndricas _____              | 40        |
| 2 · Representação das projecções ortogonais _____        | 42        |
| <b>Classificação das perspectivas</b> _____              | <b>47</b> |
| 1 · Tipos de perspectivas _____                          | 47        |
| 2 · Família das perspectivas _____                       | 51        |
| <b>Noções básicas de perspectiva</b> _____               | <b>53</b> |
| 1 · Elementos da linguagem da perspectiva linear _____   | 53        |
| 2 · Posição dos elementos na perspectiva _____           | 69        |
| 3 · Posição correcta para determinar a perspectiva _____ | 73        |
| <b>Perspectiva linear</b> _____                          | <b>77</b> |
| 1 · Definições e teoremas _____                          | 77        |
| 2 · Perspectiva do ponto e da recta _____                | 86        |

|   |            |
|---|------------|
| 3 · Perspectiva de figuras geométricas _____  | 91         |
| 4 · Os três casos de perspectiva _____  | 102        |
| 5 · Perspectiva de sólidos geométricos _____  | 106        |
| <b>Sombras _____</b>  | <b>123</b> |
| 1 · Sombra do ponto e da recta _____  | 123        |
| 2 · Os quatro casos de luz _____  | 127        |
| 3 · Sombra da recta nos quatro casos de luz _____   | 130        |
| 4 · Sombra de figuras geométricas nos quatro casos de luz   | 135        |
| 5 · Situações específicas da sombra projectada de um<br>segmento de recta _____                           | 140        |
| 6 · Sombra de sólidos geométricos nos quatro casos de luz   | 151        |
| 7 · Situações específicas da sombra projectada de<br>sólidos geométricos _____                            | 161        |
| 8 · Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um<br>plano oblíquo _____                             | 165        |
| 9 · Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um<br>plano curvo _____                               | 168        |
| 10 · Sombra de um conjunto de cinco sólidos geométricos<br>com o sol lateral _____                        | 169        |
| 11 · Sombra de um conjunto de dois sólidos geométricos<br>com o sol no nadir ou atrás do observador _____ | 171        |
| <b>Reflexos _____</b>   | <b>173</b> |
| 1 · Reflexo do ponto, segmento de recta e figura geométrica<br>num espelho vertical _____                 | 175        |
| 2 · Reflexo do segmento de recta e do sólido geométrico<br>num espelho horizontal _____                   | 182        |
| 3 · Reflexo do segmento de recta e do sólido geométrico<br>num espelho inclinado _____                    | 184        |
| <b>Bibliografia _____</b>   | <b>189</b> |

# Introdução

---

*“O olho humano tem tanta prática que, da observação simples, sem ângulos, linhas ou distâncias, é capaz de conduzir a mão para a representação das formas... mas não de outra forma que em perspectiva.”*

Miguel Ângelo

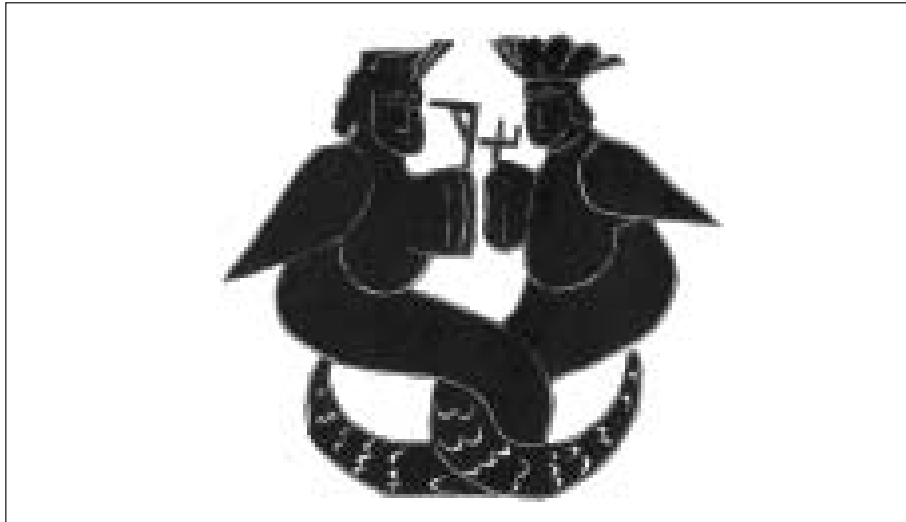
A perspectiva, designação correcta de desenho em três dimensões, é a forma mais rigorosa de representar as formas num espaço bidimensional.

No entanto, este método de representação da realidade formal, não deixa de ser uma ilusão ou equívoco, não no sentido depreciativo do termo.

Poder-se-á mesmo considerar os que utilizam este método de representação, artistas, arquitectos, engenheiros ou desenhadores, como ilusionistas. Pretendem recriar no espaço bidimensional a ilusão de profundidade.

E se para alguns, a perspectiva não tem cabimento na arte contemporânea, é porque demonstram desconhecimento da evolução histórica da arte e são possuidores de uma cultura demasiadamente balizada.

Em toda a actividade artística, a imagem será sempre um



*Figura 2 - O casal Fou-hi e Niu-Koua com o esquadro e o compasso. Baixo-relevo chinês da época Han | século III a.C. – século III d.C. Mesmo na mitologia chinesa, a criação deve-se aos deuses arquitectos.*

produto executado com determinadas intenções e não um equivalente ao real. No entanto, em criação, não bastam atributos como a expressividade e a criatividade.

Como em qualquer actividade humana, o rigor, a objectividade, o conhecimento técnico-científico e a investigação, são e serão sempre, a base de toda a construção criativa.

A perspectiva, utilizada de início apenas pelos artistas, principalmente os renascentistas, transformar-se-ia em técnica e posteriormente em ciência. Daí que hoje em dia, é de uma forma comum designada de geometria projectiva.

A presente publicação destina-se prioritariamente a estudantes de arte, artistas e docentes de artes visuais.

Julgo com este trabalho ajudar a resolver uma lacuna, num campo exíguo de publicações actualizadas e práticas. Pretende-se que o leitor entenda “geometria” como “organização da forma”. Poderá assim, identificar as formas geométricas no seu envolvimento natural e humanizado.

A compreensão histórica, da geometria projectiva, mais correctamente designada de “geometria descritiva”, sendo fundamental, para a compreensão das actuais regras aplicadas à perspectiva, será a matéria a referir no início desta publicação. Desde as suas origens, que remontam à geometria euclidiana, passando pelo Egipto, Grécia, Roma, Oriente e Japão, clássicos e séculos XIX e XX.

Terminada a abordagem dos aspectos históricos, o leitor

será elucidado das noções básicas e empíricas de perspectiva. Será abordado então o vocabulário fundamental, para a compreensão da perspectiva.

Entra-se então no capítulo técnico por excelência: Projeções ortogonais. Com a necessária brevidade, como é natural, por não ser o tema central. O mesmo acontecerá com os tipos de perspectiva utilizados no campo técnico.

Após as abordagens citadas, serão referidos os capítulos que justificam esta publicação. Refiro-me à fundamentação da perspectiva artística, desde as formas mais básicas às mais complexas:

Construção e divisão de espaços; Determinação da perspectiva de figuras e sólidos geométricos; Sombras; Reflexos.



# Aspectos históricos

---

## 1 · Origens da geometria

A geometria como ramo da matemática tem no seu sentido prático, uma aplicação dominante em todos os ramos da actividade humana.

Começando pelos aspectos pedagógicos, permite desenvolver o verdadeiro raciocínio lógico. Arquitectos, engenheiros, etc., todos projectam os espaços humanizados, onde são desenvolvidas as diferentes actividades. Sem dúvida que o homem está profundamente dependente da geometria descritiva, para sobreviver socialmente. No entanto, conduzir um veleiro, um avião, uma moto ou um jipe pelo deserto, ou mesmo uma nave espacial, é também e apenas privilégio, de quem domina conceitos de geometria.

A geometria é a base de todos os tipos de navegação. E que dizer da actividade militar, com especial realce para a artilharia?

Sendo desconhecida a data em que pela primeira vez teria sido aplicada ou estudada, julga-se que a sua utilização, teria começado já no período pré-histórico. Deste facto, e através de escavações, foram reveladas áreas de cultivo perfeitamente divididas.

Outros historiadores preferem identificar uma forma rudimentar de aplicação, apenas por volta de 3.000 a.C., na China.



*Figura 3 - “O ancião dos dias”.*  
 Aguarela de William Blake (23,3 x 16,8 cm) | 1794. Novamente, Deus é representado como o grande arquitecto do universo.

Ao mesmo tempo, os índios americanos, também já possuíam conhecimentos elementares.

Contudo, bastante mais evoluídos, os chineses já conheciam os principais instrumentos de rigor (compasso, régua e esquadro).

Com certeza, os templos egípcios e as pirâmides, são o testemunho verdadeiro, de conhecimentos rigorosos no campo da geometria, na antiguidade. Em 1.500 a.C., o povo egípcio, na pessoa dos seus arquitectos, já conheciam muitas propriedades geométricas, que permitiam, entre outras faculdades, conseguir dividir de novo e com rigor as terras após as enchentes anuais do rio Nilo. Os egípcios, já eram conhecedores da área do triângulo isósceles.

Posteriormente, o povo da Babilónia, mas agora por intermédio dos seus astrólogos, aperfeiçoaram os conhecimentos egípcios. Refira-se que a medição actual dos ângulos, é feita da mesma maneira que os babilónios, há milhares de anos, (círculo em 360 graus, um grau em sessenta minutos e um minuto em sessenta segundos). Contudo, numa ciência de rigor como a geometria, estava nestes povos, sujeita a crenças religiosas ligadas à astrologia.



*Figura 4 - “A Escola de Atenas”. Fresco existente no Vaticano em Roma, encomendado pelo Papa Júlio II. Rafael | 1509 – 1510.*

*Rafael foi profundamente influenciado por Miguel Ângelo. Este trabalho é bem representativo do espírito clássico do Renascimento italiano. Representa no centro da composição, as figuras de Platão e Aristóteles, rodeadas por um grupo de filósofos. Estas duas personagens seriam as que mais influenciariam o pensamento ocidental. O ancião Platão aponta para o céu, gesto que representa a “teoria das formas” (abstracta e intangível), ao mesmo tempo o jovem Aristóteles, seu discípulo, aponta para a terra, gesto que pretende representar a “percepção dos sentidos”, que seria a base da sua teoria do conhecimento. Nesta composição de extremo rigor geométrico, a perspectiva é factor predominante.*

Considere-se apenas, que a geometria era um conteúdo prático. A racionalização dos conhecimentos geométricos seria trabalho do povo grego (século VII a.C.)

O desenvolvimento do raciocínio lógico, necessário para demonstrar a verdade das proporções matemáticas, permitiu a racionalização e ordenação da geometria e da aritmética.

Thales de Mileto (cerca de 640 - 546 A.C.) foi o iniciador do estudo das rectas e triângulos. A este autor devem-se as seguintes descobertas: Os ângulos verticalmente opostos são iguais entre si; Os

ângulos adjacentes à base de um triângulo isósceles são iguais; Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual e os ângulos adjacentes iguais; O diâmetro de uma circunferência divide-se em duas partes iguais; Dois triângulos que têm ângulos iguais são semelhantes (Teorema que não existe a certeza de ter sido descoberto por este autor).

Outra figura importante, foi Pitágoras (cerca de 580 - 500 a.C.), tendo sido célebre pelo seu teorema. No entanto também lhe são atribuídas as seguintes demonstrações: A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos rectos; A diagonal de um quadrado não se pode exprimir no lado por uma relação em que entrem só números inteiros ou fraccionários; A construção de um paralelogramo é equivalente a um dado triângulo.

Quanto ao célebre Teorema de Pitágoras, existem diversos autores que consideram este, uma descoberta do povo chinês. A sua demonstração, apesar de tudo, só seria demonstrada por Euclides (300 a.C.).

Platão (427? - 347 a.C.) foi quem desenvolveu o método de demonstração.

Aristóteles (384 - 322 a.C.) distinguiria a diferença entre postulado e axioma.

A organização da geometria, como um sistema lógico único, seria autoria de Euclides (300 a.C.)

O seu livro "*Os Elementos*" permanece, ainda hoje, como obra fundamental para o estudo da geometria e matemática. Constituído por treze livros, cinco tratam da geometria plana, três de geometria no espaço e os restantes cinco, são formados por interpretações geométricas da matemática, hoje estudadas na álgebra. A virtualidade dos seus estudos baseou-se muito na organização dos conhecimentos adquiridos até à época. Daí que, ao apoiar-se nas proposições reconhecidas como verdadeiras, deduziu muitas das propriedades da matemática.

Arquimedes (287? - 212 a.C.), para muitos autores, é considerado como o maior matemático e físico da antiguidade. A ele se deve a determinação das áreas e volumes, através dos métodos utilizados nos nossos dias, desenvolvendo a geometria elementar. Natural de Siracusa (Sicília), este autor desenvolveu estudos sobre o círculo, a esfera e o cilindro.

No entanto, aos matemáticos gregos, ao estabelecerem estas demonstrações através de compassos e régua graduada, tomou impossível a construção de algumas figuras. Foi o caso da duplicação do cubo ou da trissecção de um ângulo (divisão de um ângulo em três partes iguais).

Posteriormente, seria verificado que certas construções estavam longe de ser apenas determinadas com apenas régua e compasso. Este tipo de insucesso relativo, seria contrariado com o estudo de curvas complexas como a parábola e a hipérbole.

O avanço no campo da geometria seria definitivamente dado, pelo matemático francês René Descartes. Autor do primeiro livro de geometria analítica (1637) estabeleceu a relação entre equações algébricas e figuras geométricas.

Posteriormente, o suíço Euler (1707-1783) publicaria vários trabalhos de matemática. Seguem-se personagens como Karl Friedrich Lobatchevsky, responsáveis pelo estudo do postulado das paralelas de Euclides. Finalmente, Albert Einstein, referindo apenas a sua teoria da relatividade.

Termino esta cronologia meramente descritiva, afirmando que foi o *Grande Arquitecto do Universo*, quem estabeleceu as regras geométricas pelas quais se rege o universo, e que o homem ainda hoje procura entender.



Figura 5 - Gravura da publicação “*Les symboles de la table d’Or*”. Frankfurt / 1617.

“*Fac ex maré et foemina circulum, inde quadrangulum, hinc triangulum, fac circulum et habebis Lapidem Philosophorum.*”

“*Do homem e da mulher faz um círculo, em seguida um quadrado, disso faz um triângulo, depois um círculo e terá a Pedra dos Filósofos*”.

*Novamente a geometria é símbolo da Criação e do Saber.*

## 2 • Origens da perspectiva

Tal como o verdadeiro desconhecimento das origens da geometria, a sua aplicação prática, denominada de geometria descritiva, perde-se nos tempos mais remotos.

Partindo inicialmente de uma prática pouco racional a perspectiva passaria a técnica pictórica, caracterizada ao longo dos séculos, pela grande variedade de sistemas diferentes de construção espacial.



*Figura 6 - Paleta do Rei egípcio Narmer. Realizada em ardósia com 64 cm de altura. Museu do Cairo. 3.000 a.C.*

*A arte egípcia era profundamente figurativa e caracterizava-se pela sua lateralidade e estaticidade. A representação da perspectiva é realizada da forma mais elementar e primária, apesar de intencional. As personagens adquirem diferentes dimensões, dependentes sempre do seu grau de importância e distância em relação ao horizonte.*

O princípio, como é natural, começaria por um método empírico, baseado na observação directa. Com a sua racionalização, acompanhada da aplicação do método científico, permitiria os primeiros desenhos precisos.

Embora o tema preferido pelos egípcios e mesopotâmios, fosse a figura humana, observa-se apesar de tudo, no seu realismo paralisante, que as figuras assumem sempre uma pose lateral e bidimensional. Daí que, somos geralmente levados a concluir a perspectiva como uma técnica desconhecida pelos artistas desse período.

A primeira referência ocidental aparece através do arquitecto Vitruvius (século I a.C.). Vitruvius, através do seu “Tratado de Arquitectura”, que teria sido escrito por volta de 46 a.C., menciona pela primeira vez, a perspectiva no parágrafo que vou passar a mencionar:

*“Uma vez determinado um ponto central, as linhas devem coincidir, como acontece na natureza, no ponto de encontro dos raios visuais, de modo que algumas partes parecem retroceder para o fundo e outras avançam para a frente.”*

#### **Vitruvius (46 a.C.)**

Este autor dá-nos também a indicação que um tal Agatharchus, pintor de Atenas, teria sido o primeiro artista a simular a perspectiva. Em princípio, Agatharchus teria sido um artista, executante de cenários em perspectiva arquitectónica para o teatro, a pedido de Esquilo. Agatharchus, possivelmente autor de um tratado escrito, teria influenciado Anaxagoras, para definir o processo primitivo de construção da perspectiva.

Posteriormente, tem-se como referência, a escola de Pamphilus, fundada por Eupomus, onde os primeiros passos do ensino da geometria descritiva eram dados. Pamphilus, conhecedor da geometria, promoveu mesmo a divulgação, desta então considerada “ciência/arte”. A prova desta divulgação está nas personagens que seguiram os seus passos: Apelles, Melanthus, Protogenes e Euphranor.

Pode-se considerar por intermédio de Vitruvius, com o primeiro testemunho escrito da técnica em que as linhas paralelas coincidem num ponto, que foram os gregos quem descobriu a perspectiva actual.

Esta observação credível, é provada pelos frescos romanos, que pretendem criar a ilusão de perspectiva. Estes frescos, como se sabe, limitaram-se à cópia da técnica desenvolvida pelos gregos.

O primeiro tratado sobre óptica, foi publicado pelo matemático Euclides (250 a.C.). Euclides é a personagem, quem pela primeira vez, referencia em teoria, o processo racional de observação. Como anteriormente, já havia sido referido por Vitruvius, Euclides acreditava no chamado “cone visual”, cujo vértice saía dos nossos olhos. O cone visual era constituído por um número infinito de raios visuais que intersectavam as formas visualizadas, determinando o seu contorno e

formas salientes. Observe o esquema da figura 8. A demonstração, empírica concluía, que as formas iam diminuindo de tamanho, quanto mais se afastavam.

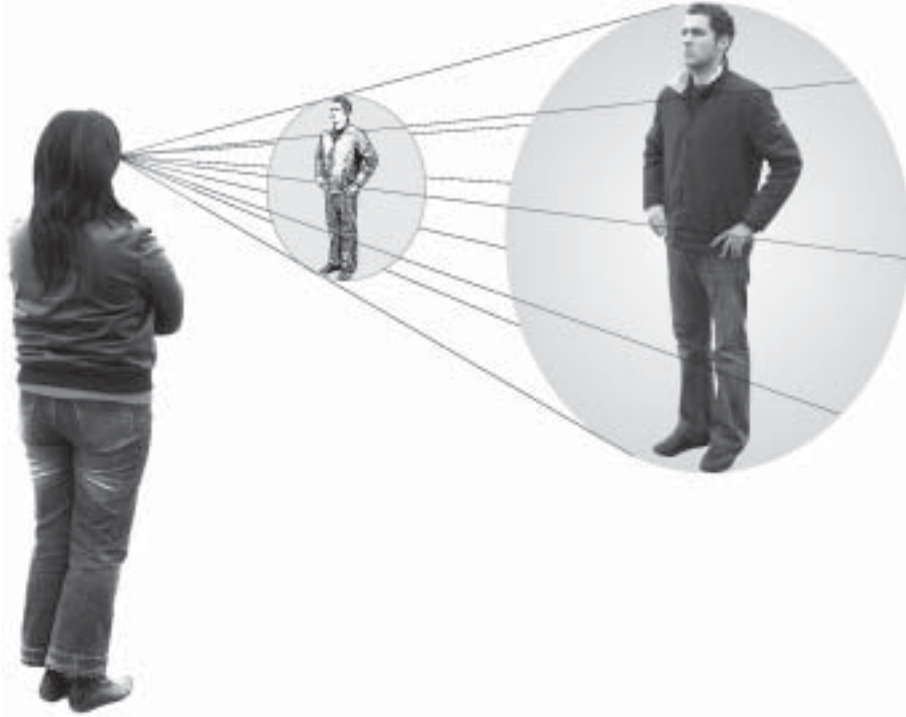
Com o fim da civilização grega, Roma nada mais faria, no campo artístico, do que simplesmente copiar os frescos das casas



*Figura 7 - Casa dos Vetti, em Pompeia | 63 – 79 a.C.*

*A pintura na civilização romana tinha apenas uma intenção decorativa. As paredes das salas das casas senhoriais eram completamente pintadas com temas figurativos rodeados de simulações pictóricas de volumes e colunas clássicas. Este tipo de decoração a simular volumes foi muito utilizado nas igrejas do período barroco.*

*A pintura, utilizada como decoração de paredes interiores pelos gregos, não teria qualquer evolução durante o período romano. Gregos e romanos, chegavam mesmo a pintar as esculturas.*



*Figura 8 - O cone óptico do matemático Euclides | 250 a.C. Ideia constituída a partir da teorização de Vitruvius.*

gregas. Portanto, a perspectiva, integrada desde o princípio na geometria, nascia na Grécia, parecendo ter morrido com essa civilização.

O desinteresse e a ignorância dessa técnica permaneceriam até ao fim da Idade Média. Conhecedores que somos, do período tão difícil que foi a Idade Média na Europa, sabemos que a temática pretendia ter muito pouco de real, sendo profundamente idealista, intemporal e simbólica.

A Arte medieval caracteriza-se pela negação da procura da simulação do espaço real. A pintura baseia-se em alçados laterais e a planta, do conjunto a representar. Todo o virtuosismo da profundidade sugerida pela técnica da perspectiva seria ignorado pelos artistas medievais.

O mesmo aconteceria com a riquíssima herança cultural doada pelos gregos e romanos.

Sabemos com rigor, o desenvolvimento da cultura medieval, num espaço sócio-económico adulterado por medos, guerras, poder indefinido, etc.

Esta cultura da profundidade (perspectiva) havia que esperar cerca de 1.000 anos para poder voltar a ressurgir.



*Figura 9 - Frontal de Soriguerola | Finais do século XIII. Museu de Arte da Catalunha. Barcelona.*

*Observe-se a construção da composição pelo artista medieval. Intencionalmente não utiliza a simulação da perspectiva. A composição limita-se aos alçados e às plantas dos diferentes elementos.*

*Começando pelas figuras humanas, estão representadas bidimensionalmente, estando os elementos principais de frente e os secundários em posição lateral. A profundidade é simulada, tal como na arte egípcia, pela diminuição do tamanho das figuras humanas.*

*Observe-se a mesa. O tampo e os pratos estão representados em planta, ou seja, vistos de cima. Os cálices estão representados em alçado lateral.*

Não ignoremos um pormenor importante. A perspectiva, acima de tudo é, profundidade do conhecimento, visão, abertura do espaço infinito, ausência de limites e limitações culturais. Este é que é o verdadeiro simbolismo da perspectiva. Daí que, a explosão técnica da perspectiva, coincide com o período mais fecundo da nossa civilização ocidental, designado de Renascimento.

E agora, perdoem-me os meus colegas matemáticos, quando querem fundamentar a perspectiva

Para o seu domínio. Se a perspectiva começou apenas por simular edifícios, nos cenários teatrais gregos e no Renascimento, o seu desenvolvimento, deve-se exclusivamente ao labor dos pintores e arquitectos italianos da época.

Assinale-se os arquitectos Filippo Brunelleschi (1377-1446) e Leon Battista Alberti (1404-1472), e o pintor Piero della Francesca (1418-1492).

A perspectiva renascentista começaria em período anterior a Giotto. Giotto foi o artista que iniciaria a negação da abstracção bizantina, ao introduzir a profundidade nas suas obras.

Embora de forma intuitiva, Giotto, é o primeiro artista a simular volume nas figuras que constrói, ao mesmo tempo que as coloca em sobreposição.

Do mesmo período, Ambrogio Lorenzetti (1319-1347), também intuitivamente, estabeleceu várias perspectivas empíricas no



*Figura 10 - “A Natividade” | 1302. Fresco da Capela de Arena, em Pádua. Giotto (1267 – 1337).*

*Repare-se na contradição das perspectivas existentes. O telhado da cobertura está numa perspectiva diferente do resto da composição. As formas humanas ainda não possuem a modelação volumétrica do Renascimento.*

mesmo trabalho, numa tentativa de descrever na totalidade, as diferentes vistas.

A perspectiva “científica” (rigorosa) esperaria depois de Giotto, um século, ao ser traduzida do campo teórico para o prático, pelo arquitecto florentino Filippo Brunelleschi (1377-1446). Embora não existam as demonstrações do arquitecto Brunelleschi, a “*Vida de Brunelleschi*”, escrita por Giorgio Vasari, identifica com precisão a existência de uma perspectiva baseada em planos, intersecções e elevações.

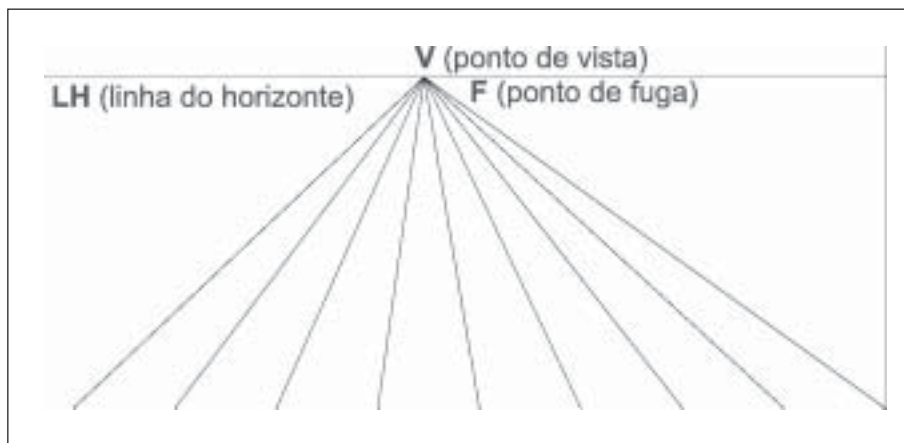


Figura 11 - Brunelleschi (1377-1446), foi o descobridor da designada perspectiva paralela. Esta perspectiva caracteriza-se pela existência de um ponto de fuga central situado sobre a linha do horizonte.

Leon Battista Alberti (1404-1472) é um dos outros arquitectos da perspectiva, que em 1436, escreveu o seu “*Trattato della Pittura*”. Esta publicação referênciava Brunelleschi, como o descobridor dos pontos de distância (D) e (D’). Brunelleschi, é considerado pelos seus biógrafos, como o unificador dos conhecimentos científicos constituídos, a saber: Linha do horizonte (LH); Pontos de distância (D) e (D’); Ponto de fuga (F).

Brunelleschi foi talvez, quem descobriu verdadeiramente, a perspectiva paralela com um ponto de fuga (F) a coincidir com o ponto de vista (V), de onde saíam os raios paralelos (figura 11). Situava também o ponto de fuga (F), sobre uma linha existente, a linha do horizonte (LH). O arquitecto Brunelleschi, também identificou a planta, o perfil e o alçado, como elementos fundamentais, para o desenho da forma em perspectiva.

Contudo, os verdadeiros tradutores da linguagem de Brunelleschi, no sentido prático, seriam Masaccio (1401-1429) e Donatello (1386-1466). Consta-se que Masaccio, quando pintava “*La Trinidad*”, da Igreja de Santa Maria Novella de Florença, teria

eventualmente sido ajudado por Brunelleschi, a desenhar o quadro em perspectiva paralela, com um ponto de fuga. O desenho, num espaço pictórico com cerca de 10 metros de altura, foi elaborado em 25 sessões (figura 12).



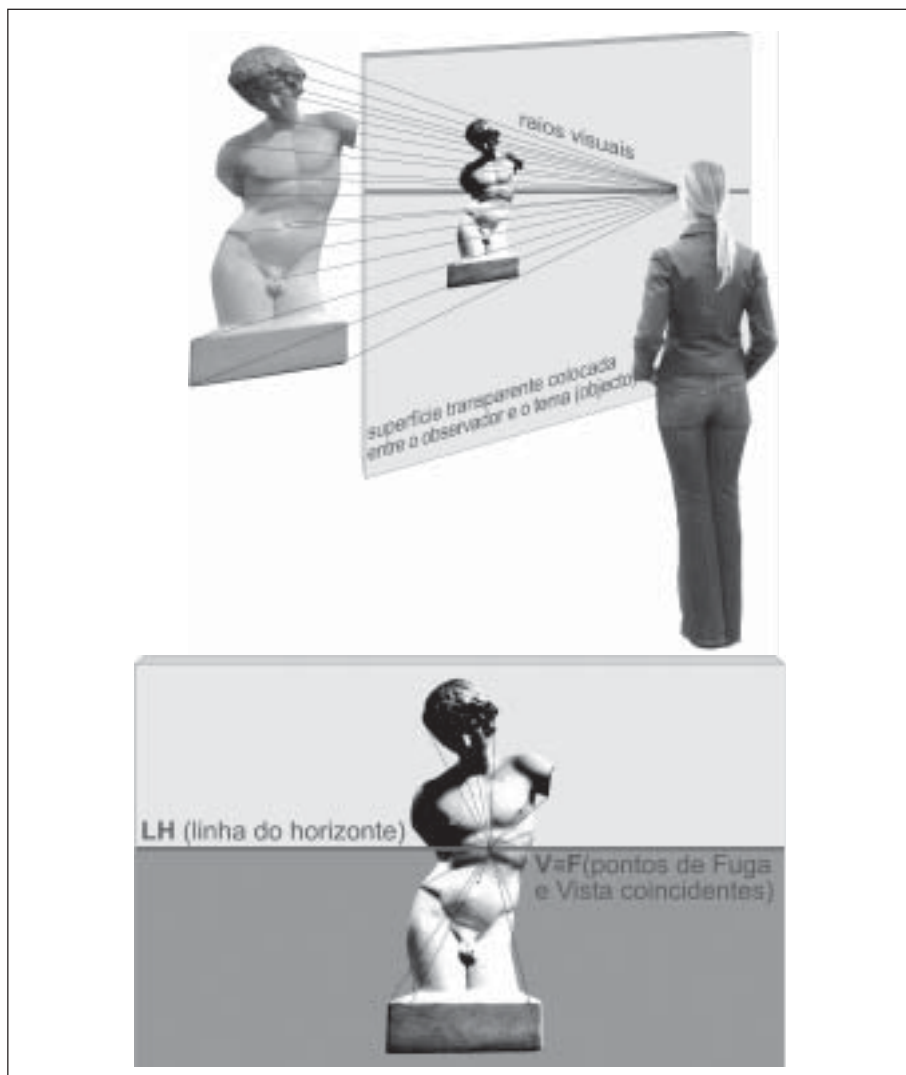
*Figura 12 - “A Santíssima Trindade com a Nossa Senhora e o S. João” | 667 x 317 cm. Basílica de Santa Maria Novella, de Florença. Masaccio, também conhecido como Tommaso di Giovanni (San Giovanni Valdarno 1401 | Rome 1428).*

A Brunelleschi, em importância, sucede cronologicamente Leon Battista Alberti (1404-1472). Este arquitecto renascentista traria mais um elemento fundamental para o traçado da perspectiva (o plano

do quadro). Alberti, entendia que desenhar em perspectiva, era como que observar através de uma superfície transparente, colocada entre o observador e o tema.

Cada ponto das formas do tema a representar enviaria, segundo Alberti, um raio dirigido aos nossos olhos. Naturalmente que este raio intersectaria a superfície transparente, representando aí as formas da composição em perspectiva.

Observe-se a evolução desde Brunelleschi até Alberti, através dos esquemas das figuras 13 e 14. A Alberti deve-se também a primeira quadrícula desenhada em perspectiva rigorosa.



Figuras 13 e 14.

Evolução nos termos, desde Brunelleschi a Alberti. A Brunelleschi, podemos atribuir verdadeiramente, a descoberta da designada perspectiva paralela (perspectiva a partir de um ponto de fuga) com os seguintes elementos: Linha do Horizonte (LH); Ponto de Vista (V); Ponto de Fuga (F), sendo estes dois últimos coincidentes.

Alberti, referia a necessidade da existência de uma superfície transparente (Quadro), entre o tema e o observador. Verificou que a forma a representar, enviaria uma espécie de raios invisíveis dirigidos aos nossos olhos. Estes “raios visuais”, ao intersectarem a superfície transparente, faziam com que a forma a representar diminuísse de tamanho.

Do conhecimento adquirido por Brunelleschi (ponto de fuga, ponto de vista e linha do horizonte), Alberti desenhou a linha do horizonte e a linha de terra. Marcando sobre a primeira, o ponto de fuga (figura 15). A linha de terra, foi subdividida em espaços iguais,

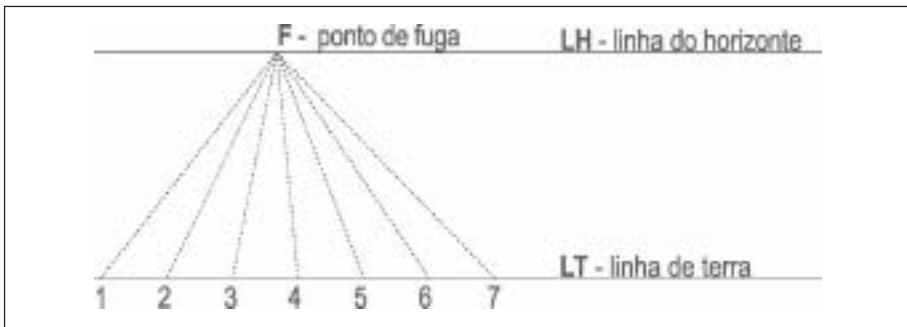


Figura 15 - Construção da primeira quadrícula, identificando com rigor o Ponto de Fuga (F), a Linha do Horizonte (LH) e a Linha de Terra (LT), segundo Brunelleschi.

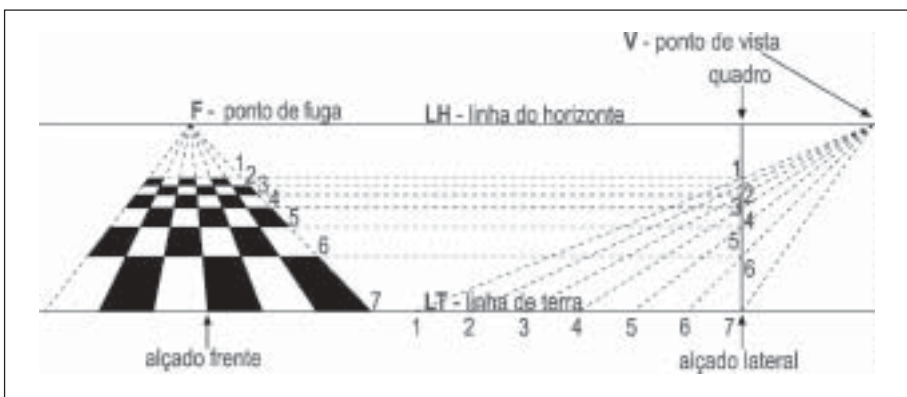
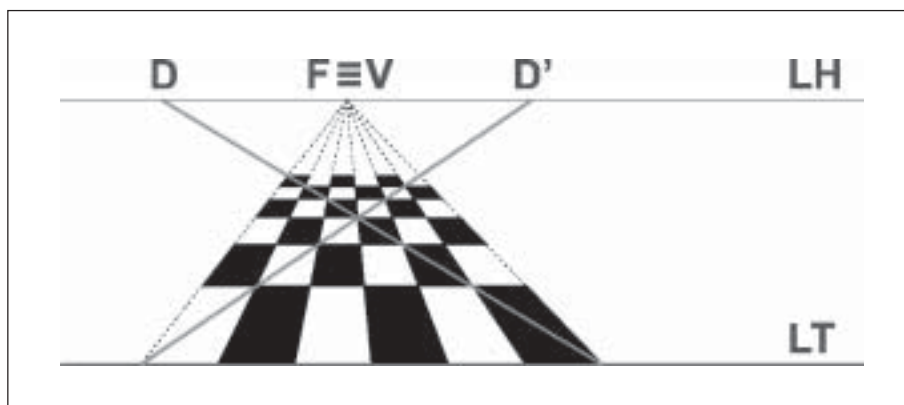


Figura 16 - Processo de localização das linhas horizontais no espaço da perspectiva. Através da construção do perfil lateral e da planta da quadrícula, segundo Brunelleschi.

correspondendo à largura dos quadrados. Desenhou então raios visuais que partiram do ponto de fuga até às distâncias marcadas sobre a linha de terra.

De seguida, habilmente, resolveu o problema da situação das linhas horizontais, que embora paralelas entre si diminuam de distância à medida que se afastavam no horizonte (figura 16). Simplesmente desenhou a quadrícula de perfil e em planta, obtendo as distâncias com rigor. Se Alberti resolveu muito no plano teórico, no plano prático revolucionou quase tudo. Ao estabelecer uma quadrícula indeterminada numa composição, criava o ponto de partida para os pintores desenharem e colocarem as formas proporcionadas no quadro.

Alberti quase que descobriu os pontos de distância ( $D$ ) e ( $D'$ ), se prolongasse as diagonais dos quadrados traçados em perspectiva até à linha do horizonte ( $LH$ ) (figura 17).



*Figura 17 - Processo elementar de localização das diagonais de uma quadrícula, através da determinação dos pontos de distância ( $D$ ) e ( $D'$ ). Alberti quase que chegaria a descobri-los.*

Os estudos de Alberti foram fundamentais para o desenvolvimento da perspectiva. A sua publicação, já referida neste trabalho “*Trattato della Pittura*” (1436), tratou-se da primeira publicação sobre perspectiva. Alberti ao estudar e desenvolver campos como a física, a matemática, a pintura, a música, a comédia e a literatura, foi a personagem renascentista característica.

O Renascimento traduziria ao nível da composição pictórica, uma verdadeira obsessão pela perspectiva, de que são exemplos, Mantegna e Bellini.

Paolo Ucello (1397-1475) seria o artista que mais obsessão demonstraria pela representação das composições em perspectiva.

Vasari chegaria a comentar o seguinte, em relação a Paolo



*Figura 18 - "The Lamentation over the Dead Christ" | 1490. Tempera sobre tela (68 x 81 cm)  
Pinacoteca de Brera, Milão. Andrea Mantegna | 1431, Isola di Cartura | 1506, Mantova.*



*Figura 19 - Alegoria | 73 x 119cm (óleo sobre madeira).  
Giovanni Bellini (1430?-1516)*

Ucello: *“Devia antes ter perdido mais tempo, a pintar figuras humanas e animais, do que a resolver problemas de perspectiva”*.

Ucello havia sido formado no estilo gótico da pintura, tendo-se convertido em 1430 à perspectiva.

O seu trabalho representa uma perspectiva que pretende produzir efeitos perturbadores e fantásticos, parecendo que a superfície e espaço, estabelecem entre si mais uma luta mais titânica, do que entre os cavaleiros. Apesar da crítica negativista de Vasari, Paolo Ucello, representa um dos expoentes do renascimento italiano.



*Figura 20 - The Battle of San Romano | 1435. Têmpera sobre Madeira. 182 x 220 cm. Galleria degli Uffizi, Florence. Paolo Ucello. Paolo Di Donno (1397-1475)*

O terceiro elemento, considerado por muitos, como também um dos pais da perspectiva, a par de Filippo Brunelleschi e Leon Battista Alberti, é Piero della Francesca (1406-1492). Este pintor renascentista está bem representado na Igreja de S. Francisco em Florença. A virtualidade e inovação deste artista em relação à técnica, é demonstrada pelo início do uso das projecções ortogonais, o que permitiu construir as figuras no espaço pictórico, sem necessidade de recorrer às quadrículas de Alberti. Piero della Francesca utilizava o ponto de fuga nas suas construções.

O contributo de Leonardo da Vinci (1452-1519), também foi fundamental, na investigação desta técnica. Leonardo é o autor da publicação *“Trattato della Pittura”* (1615), onde define a perspectiva como *“a visão de um corpo que se encontra por detrás de um vidro onde se reflecte”*. Este seu tratado, reúne todos os conhecimentos



*Figura 21 - “A Flagelação”. Óleo sobre tela (58,4 x 81,5 cm). Galleria Nazionale delle Marche, Urbino. Piero della Francesca (1420? – 1492).*



*Figura 22 - Igreja de S.Andrea em Mantua (1470). Alberti (1404-1472)*

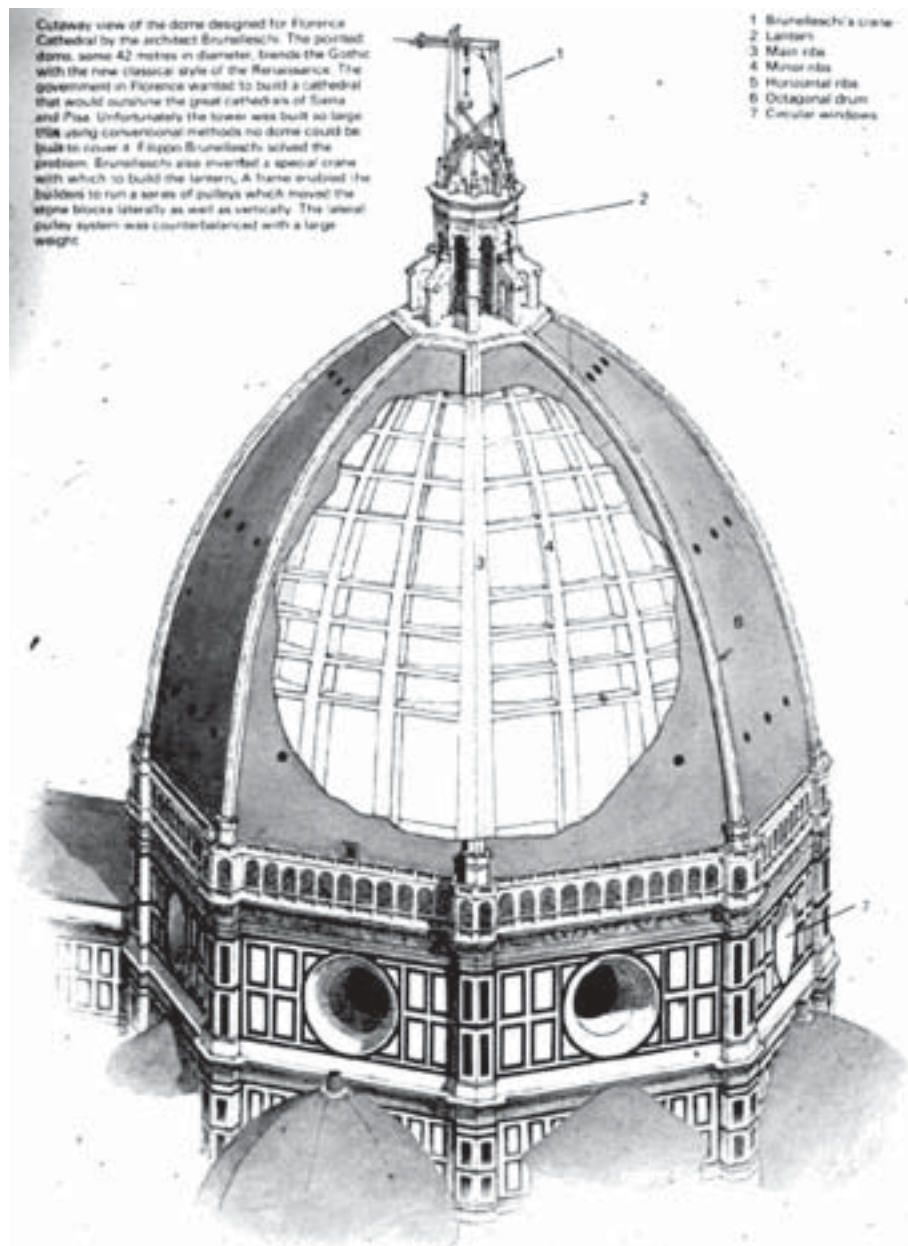
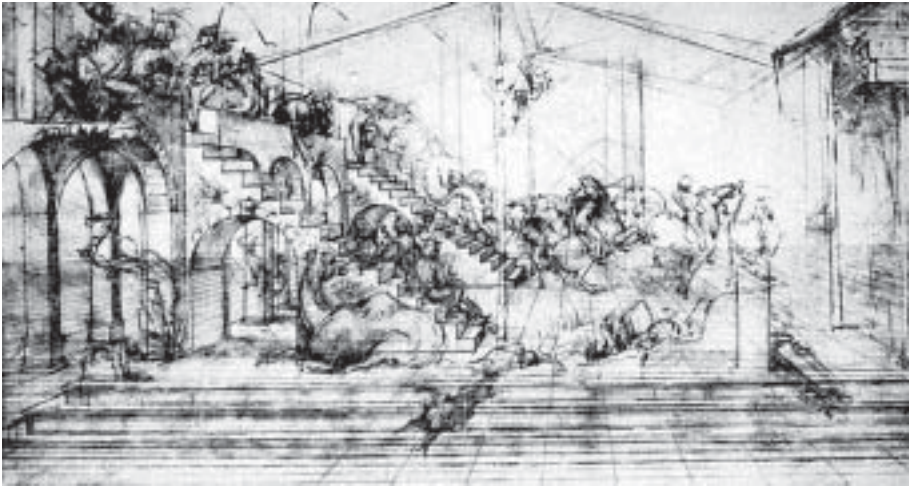


Figura 23 - Catedral de Florença (1414 – 1436). Brunelleschi (Florence 1377 – 1446).

As figuras 21, 22 e 23 são representativas do trio considerado como os pais da perspetiva: Piero della Francesca, Alberti e Brunelleschi.

obtidos, considerando-se portanto como um estudo sobre a temática da perspectiva. Leonardo nunca revelou um interesse doentio pela perspectiva. Aconselhava mesmo que o artista não se devia absorver tanto pela perspectiva, mas mais pela sua sensibilidade.

A contribuição de Leonardo para a perspectiva é enorme, já que foi ele quem inventou a perspectiva atmosférica. O melhor exemplo é representado no trabalho “*A Virgem dos Rochedos*”, datado de 1508 e executado na técnica de óleo sobre madeira. A perspectiva atmosférica define-se desta maneira: quanto mais nos afastamos, menos noção há das formas. As formas dos montes devem ser difusas, contrastando com os tons definidos pelas formas do primeiro plano. A par desta descoberta, Leonardo foi o artista que melhor definiu o conceito de perspectiva com um ponto de fuga. Esta perspectiva, hoje em dia, designada de perspectiva paralela, seria seguida pelos outros artistas renascentistas com Miguel Ângelo (1475-1564) e Rafael (1483-1520).



*Figura 24 - Estudo para a “Adoração dos Magos”. Papel e tinta | 1481. Galeria degli Uffizi. Florença.*

*A importância deste estudo demonstra que um dos princípios utilizados pelos artistas da época para determinar a perspectiva, era através da subdivisão do espaço (quadro geométral) em quadrículas. Contudo, Leonardo, através dos seus relatos escritos, demonstra que a perspectiva não devia sobrepor-se à composição. Leonardo da Vinci (1452 – 1519).*

O período posterior ao Renascimento encontrou em Dürer, através do seu tratado de perspectiva e projecção, os fundamentos da perspectiva do norte da Europa. Dürer estava totalmente absorvido pelo estudo das distorções das formas, colocadas a diferentes alturas. A sua perspectiva era definida por um só ponto de fuga.



*Figura 25 - S. Jerónimo na sua cela | 1514.  
O preciosismo e o rigor a todos os níveis está bem expresso na obra de Dürer,  
onde os estudos da perspectiva determinam toda a composição.  
Albrecht Dürer (1471 – 1528)*

Esta teorização foi demonstrada no seu tratado “*Viático do Aprendiz de Pintor*”. Através das gravuras existentes no seu tratado, facilmente é visualizado o processo da perspectiva. O artista colocava entre si e a composição a representar, um vidro transparente, dividido em quadrados. De seguida, o artista desenhava igual quadrícula, no seu papel de desenho. Para não alterar a posição de observação, o artista observava a composição a partir de um ponto de apoio fixo.

Com o aparecimento do Maneirismo, no século XVI, a perspectiva tomava-se perfeita. Observam-se composições forçadas, perspectivas extremas e iluminações falsas, e a criação de espaços cheios de ambiguidade. Parecia já o prelúdio do Surrealismo na pintura. Esta nova obsessão pela perspectiva seria causada em parte, pelos vários tratados sobre o tema então publicados.

É o caso do tratado escrito por Jean Pelerin Viator. Viator, autor do tratado “*De Artificialis Perspective*”, permitia o aparecimento da perspectiva oblíqua, com dois pontos de fuga. O observador, não necessitava de estar em posição paralela em relação à composição que pretendia representar. Viator negou em parte a perspectiva

paralela, de um ponto de fuga, tão desenvolvida pelos renascentistas, promovendo ao mesmo tempo, a perspectiva oblíqua com dois pontos de fuga. Esta produzia sem dúvida, uma maior sensação de realidade.

Viator definiu com precisão a linha do horizonte (LH), o ponto de fuga central (ponto principal P) e os dois pontos de fuga das diagonais (pontos de distância D e D').

Outro teórico importante da perspectiva, do século XVI, foi Guidobaldo del Monte da Pesara. Este autor demonstrou que era possível a projecção ortográfica de uma forma, através da respectiva planta.

Com o aparecimento dos artistas barrocos, o exagero no campo da perspectiva e da composição, atingiria objectivos extremos. Desenhos arquitectónicos com alturas grandiosas, profundidades imensas e tectos muito trabalhados, fizeram com que esta técnica permitisse a construção de espaços infinitos.

Contudo, quem mais do que Giovanni Piranesi (1720-1778), conseguiria até à época, estabelecer tão bem a sensação de infinito? Este tão bem designado "*arquitecto da pintura*", estabeleceria o prelúdio do Romantismo na pintura. O seu espaço pictórico é identificado por elementos arquitectónicos medievais, ruínas e muita fantasia.

Piranesi parecia um surrealista, através da criação de espaços de sonho, de pesadelo, prisões, escadas infinitas, espaços vertiginosos, susceptíveis de produzir no observador uma angústia onírica.

A perspectiva do século XIX deve em parte, muito ao invento da fotografia. Com o invento do Daguerrotipo por Louis Daguerre, artistas como Courbet e Delacroix, tiveram o privilégio de aperfeiçoar os estudos sobre o nu.

"O artista que usa o daguerrotipo devidamente, elevará a sua arte a níveis extraordinários".

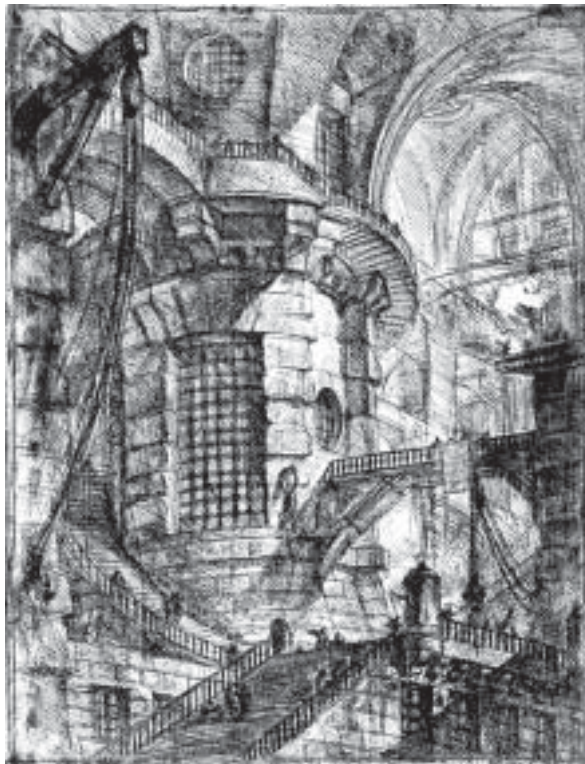
Delacroix

A mesma influência da perspectiva, traduzida pela fotografia, influenciaria o movimento impressionista.

O melhor exemplo é-nos dado por Degas, não se devendo, no entanto, deixar secundarizar a importância de artistas como Manet, Monet e Pissarro.

Com o aparecimento do Pós-impressionismo, de que refiro Van Gogh, Gauguin e Cézanne, a perspectiva passou a ser utilizada de forma interpretativa. Esta opção, não está alheia à preocupação dos artistas pela expressividade provocando perspectivas muito acentuadas.

O caso de Cézanne representa a anulação da perspectiva rigorosa e a definição formal. Inspirado nas culturas primitivas, ao mesmo tempo negando todo o passado da cultura ocidental, executava composições com formas sobrepostas, onde termos como volume e profundidade, são intencionalmente negados.



*Figura 26 - Prisão imaginária (1749) | Papel. Giovanni Battista Piranesi (1720-1778)*

Com o nascimento do século XX, o movimento Surrealista, ressuscitaria a perspectiva, para a recriar. Perspectivas impossíveis, em ambientes irrealis e com vários pontos de fuga, foram recriados por artistas surrealistas como Chirico, Salvador Dalí, Magritte, Carrá, Escher, etc.

Hoje, como é sabido, a perspectiva é ensinada nas escolas secundárias e superiores. De ciência/técnica secreta, passou a conhecimento geral fundamental.



*Figura 27 - “Mistério e melancolia de uma rua” / 1914. Óleo sobre tela (85 x 69 cm). Giorgio de Chirico (1888-1978)*



# Projecções

---

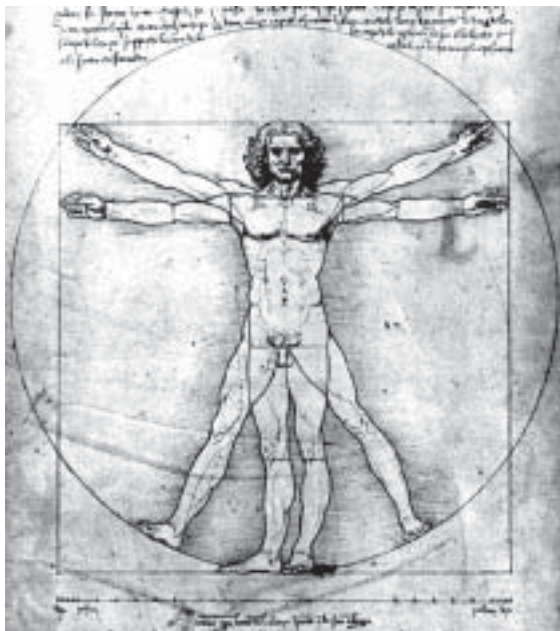
Dando continuidade ao relato histórico que tenho vindo a fazer, abordar o problema específico das projecções, é abordar um dos aspectos mais relevantes estudados por Albrecht Dürer (1471 - 1528).

Como acabei de relatar, foi o gravador alemão Albrecht Dürer, que no seu tratado “*Perspectiva e Proporção*”, começou por identificar as distorções existentes na perspectiva. No século XVI, outro estudioso das projecções, de nome François Frézier (1682 – 1773), foi quem seguiu os passos de Albrecht Dürer, ao demonstrar preocupação por esta temática.

No entanto, seria Gaspard Monge (1746 – 1818), quem sistematizaria com rigor, a geometria descritiva, através do seu tratado “*Géométrie Descriptive. Leçons donnés aux Écoles Normales, l’an 3 de Ia Republique (1794 – 1795), Paris, l’an VII (1789 – 1799)*”.

No fundo, sobrepôs-se a solução prática para a resolução dos problemas, produzindo a necessidade de representar num plano, figuras do espaço. Considerado que está por todos, hoje em dia, como banal, um projecto de arquitectura, de uma peça, ou de uma viatura, o mesmo não aconteceu até ao século XVIII.

A linguagem da leitura de um projecto, fácil de entender nos nossos dias, não existiu até ao período anterior ao século XVIII. Imagine-se portanto, a dificuldade que os arquitectos da antiguidade tiveram em fazer entender e calcular os seus arrojados planos arquitectónicos.



*Figura 28 - “As proporções do corpo humano”. Desenho à pena (34,3 x 24,5 cm) | 1492. Academia de Veneza.*

*Da autoria de Leonardo da Vinci, baseado nos estudos de Marcus Vitruvius Pollio. Leonardo da Vinci estabelece as proporções harmónicas do corpo humano ideal, [a altura do homem a dividir pela distância desde o chão até ao umbigo seria igual ao “número de ouro”].*

Existem dois sistemas de projecções, considerados também no capítulo seguinte: A Central ou Cónica e a Paralela ou Cilíndrica. Se a primeira é baseada na projecção de figuras situadas no espaço, desde um ponto, na segunda, é um número infinito de pontos projectados paralelamente. Qualquer uma delas projecta-se sobre o designado “Plano do Quadro”.

A Geometria Descritiva tem como missão estudar a relação entre o espaço e o plano do quadro, relacionando, as três dimensões do espaço com as duas dimensões do quadro. Os elementos gráficos identificados são geométricos: Pontos; Linhas rectas; Linhas curvas, etc.

## **1 • Projecções cónicas ou cilíndricas**

A projecção de uma figura qualquer resulta ser a figura formada pelas projecções dos diferentes pontos da figura dada.

Na figura 29, o triângulo [A,B,C] está projectado sobre o plano [a]. Se partirem de [V] raios visuais que passem pelos vértices

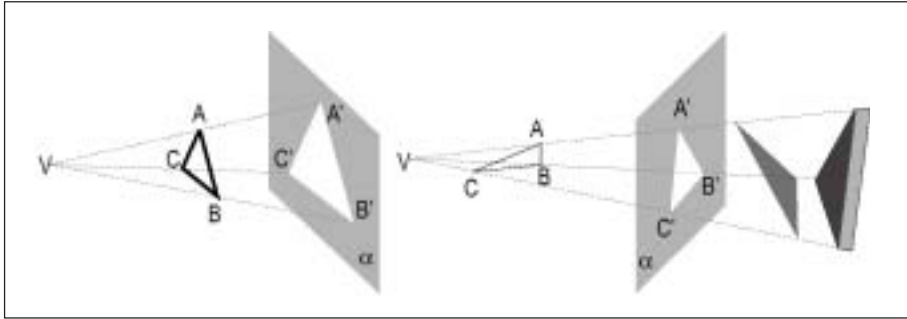


Figura 29 - Projecção central ou cónica de uma figura triangular

Figura 30 - Deficiência da projecção central ou cónica

do triângulo descrito, obtêm-se os pontos [A'], [B'] e [C'] que definem o novo triângulo, que resulta ser a projecção do primeiro.

Observe agora a figura 30. Definindo o ponto [V], como ponto de vista, o plano [a], identifica-se como quadro ou plano de projecção. Conforme é observável, a projecção resulta ser de dimensão diferente. Também se observa que a projecção do triângulo [A,B,C], poderia ser representada nas três formas acima descritas, bem diferentes da figura inicial. Este tipo de projecção é comum ao mundo artístico, mais propriamente à linguagem da perspectiva linear, onde o centro de projecção é designado ponto de vista. Impraticável, portanto, no mundo real onde as referências formais (planta, alçados e cortes) têm de ter um rigor extremo.

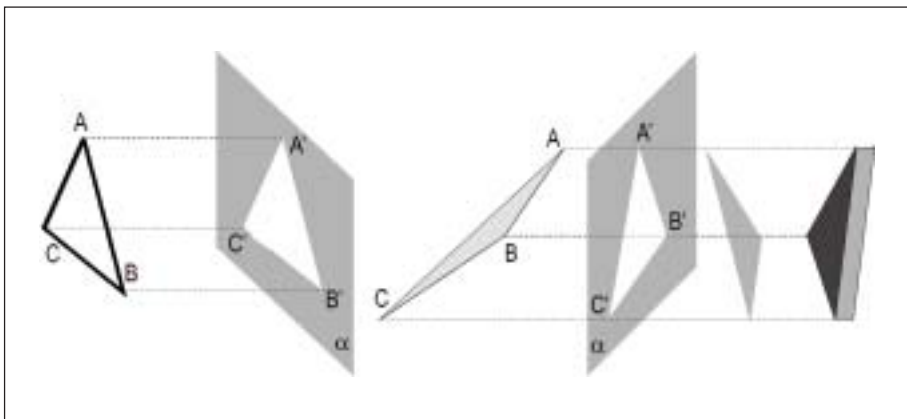


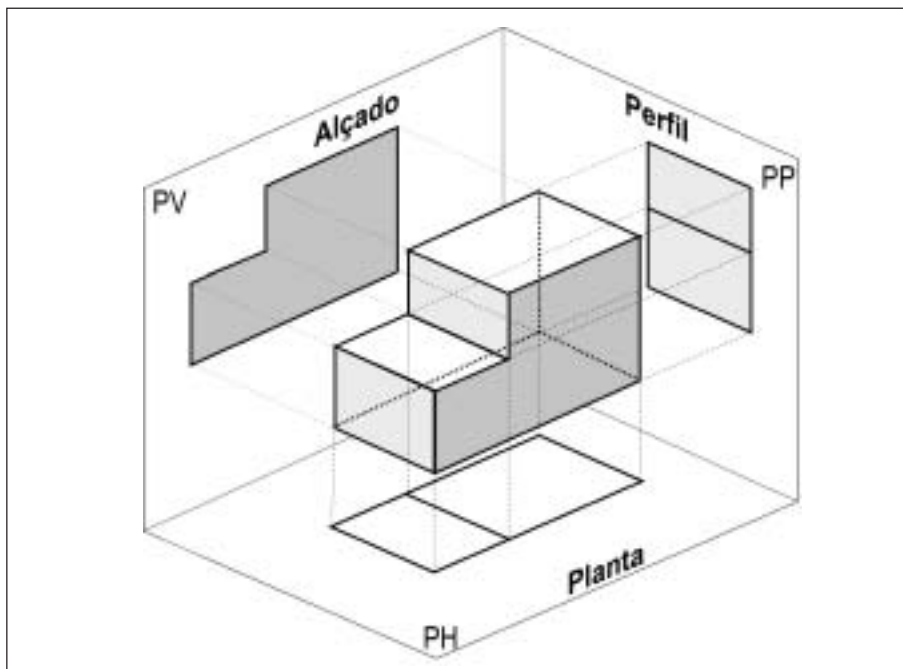
Figura 31 - Projecção paralela ou cilíndrica de uma figura triangular

Figura 32 - Deficiência da projecção paralela ou cilíndrica

Considerando agora, que o centro de projecção [V] se encontra no infinito, os raios visuais passam a ser paralelos. O triângulo [A,B,C], da figura 31, está sujeito às condições descritas. A sua projecção [A',B',C'], respeita formalmente o primeiro triângulo [A,B,C], em dimensões e posição. As dimensões da projecção são sempre iguais às do triângulo, pelo que estamos perante uma projecção paralela ou cilíndrica.

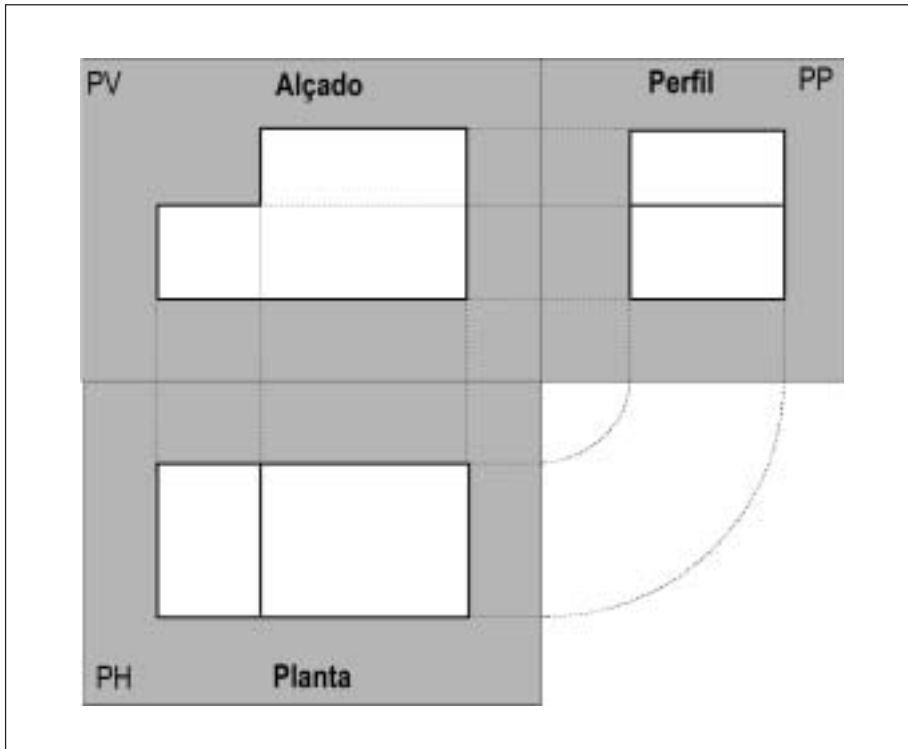
Novamente, também este tipo de projecção, pode permitir deficiências na forma. A figura 32 demonstra que o triângulo [A,B,C] pode ser representado nas três formas que observamos, ou em outras. Concluimos que, ao pretender-se estabelecer uma linguagem de rigor, tanto a projecção central ou cónica como a paralela ou cilíndrica são insuficientes.

## 2 · Representação das projecções ortogonais



*Figura 33 - Projecção ortogonal de uma forma tridimensional sobre três planos.*

Perante a ineficácia da projecção de uma forma, seja bidimensional ou tridimensional, observada relativamente às projecções central ou cónica e paralela ou cilíndrica, houve que recorrer a novo processo.



*Figura 34 - Projecção ortogonal de uma forma, através da sua planificação e identificada com o alçado, a planta e o perfil.*

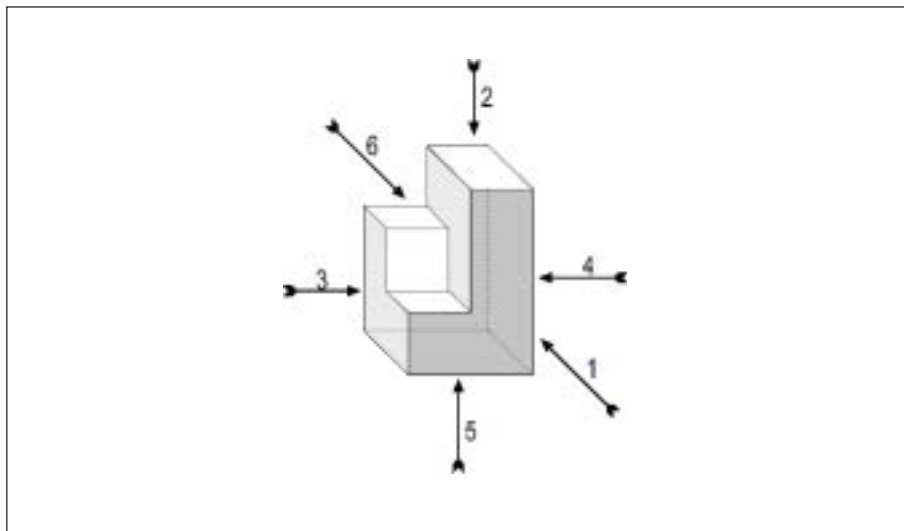
Trata-se das designadas projecções ortogonais, que embora sendo projecções paralelas ou cilíndricas, identificam a forma a partir de mais que uma vista e sobre vários planos. A representação das projecções ortogonais, também designada de desenho industrial, surgiu da necessidade de representar os objectos tridimensionalmente numa superfície plana.

Desde já, chamo a especial atenção para este capítulo, já que é fundamental para a determinação da perspectiva. Tendo em conta o processo utilizado para a projecção paralela ou cilíndrica, observe-se as projecções ortogonais da forma, na figura 33, sobre três planos que são perpendiculares entre si. A cada uma das projecções vamos designar de vistas. Até aqui, trabalhou-se com apenas um plano vertical [PV]. Para identificarmos a forma necessitamos de recorrer a um outro plano vertical, mas agora em perfil [PP], e outro horizontal [PH].

À projecção da forma da figura 33, sobre o plano vertical [PV], designamos de ALÇADO. a projecção da forma sobre o plano

lateral [PP] designa-se de PERFIL. A projecção da forma sobre o plano horizontal [PH] designa-se de PLANTA.

A figura 34 identifica as três projecções ortogonais da forma: Projecção vertical ou ALÇADO (vista principal da peça, devendo ser a que dá melhor ideia da forma); Projecção horizontal ou PLANTA; Projecção de perfil ou PERFIL.



*Figura 35 - Vistas necessárias para a identificação de uma forma, pelo método das projecções ortogonais.*

Muitas vezes, a forma a representar, por ser muito complicada, necessita de ser observada em mais vistas, referenciada por símbolos, secções e legendas explicativas (figura 35).

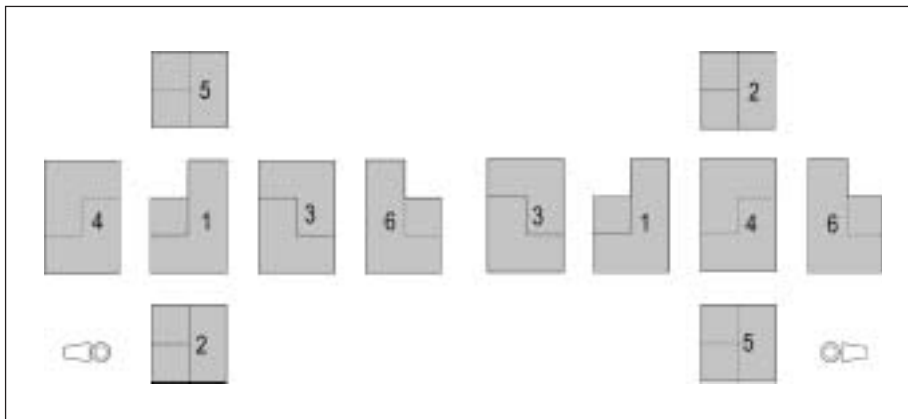
O executante do plano da forma, deve detalhá-la o mais possível, elegendo para alçado, a vista com maior número de detalhes e que melhor ideia dê da forma.

Designação das vistas:

- (1) - Vista de frente ou alçado;
- (2) - Vista de cima ou planta superior;
- (3) - Vista da esquerda ou perfil esquerdo;
- (4) - Vista da direita ou perfil direito;
- (5) - Vista de baixo ou planta inferior;
- (6) - Vista de trás ou alçado posterior.

Para esta representação, a colocação das vistas está regida por convenções internacionais, designadas de sistemas, existindo dois: O sistema que considera a peça no primeiro diedro é designado

de “Sistema Europeu”; O sistema que considera a peça no terceiro diedro é designado de “Sistema Americano.” (figura 36).



*Figura 36 - Representação de uma forma nos métodos europeu e americano.*



# Classificação das perspectivas

---

## 1 · Tipos de perspectivas

Com este capítulo entra-se definitivamente na perspectiva. Familiarizados com a linguagem básica, aplicada à perspectiva, vou entrar na sua classificação.

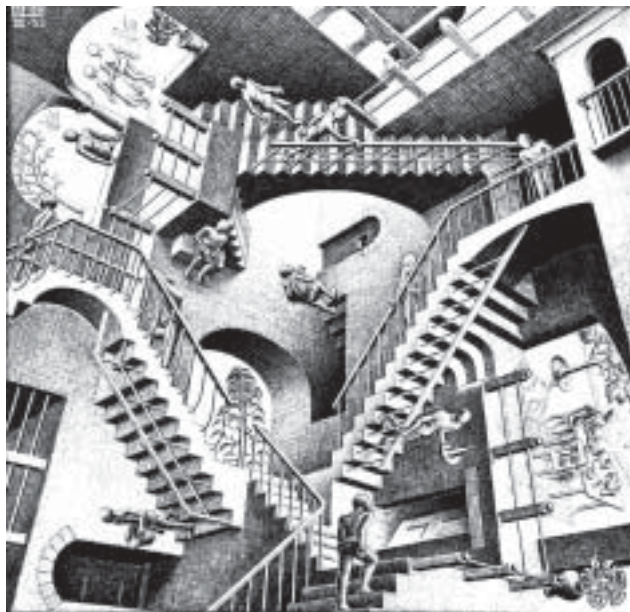
A figura 38 é bastante elucidativa quanto à temática das projecções.

Sob o ponto de vista do rigor, só as projecções ortogonais permitem definir correctamente a forma que se pretende dar a representar. Contudo, no campo artístico, a ilusão da realidade, nunca poderia ser simulada por este processo demasiadamente objectivo.

A representação que melhor sugere esta realidade artística é a fotografia.

Abordado que foi o método da dupla projecção ortogonal e embora determinasse com exactidão a forma e dimensões do objecto a representar, verificou-se que seria de leitura difícil, principalmente para aqueles que não estão familiarizados com o desenho de perspectivas técnicas. Necessita-se portanto, de exemplos mais exaustivos.

A necessidade de rapidamente identificar uma qualquer forma projectada, que se pretende dar a representar, nunca poderia apenas recorrer ao método da dupla projecção ortogonal. Tanto nos campos artístico como técnico, é necessário o recurso à representação das formas através da linguagem da perspectiva.



*Figura 37 - Relatividade (litografia) | 1953. M. C. Escher (1898 – 1970)*  
*A característica fundamental de esta litografia é a sua perspectiva ambígua: A sala pode rodar à volta do centro e pode conter até três linhas de horizonte. As figuras deambulam: umas sobem e outras descem numa determinada direcção sem parecer ser influenciadas pela força da gravidade.*

Referindo novamente, não será a fotografia, o processo mecânico, que melhor sugere a realidade? A perspectiva assemelha-se à realidade fotográfica, embora esta tenha apenas sido verdadeiramente descoberta no passado século XIX.

Por outro lado, enquanto que o método das projecções ortogonais se baseia na projecção de uma forma em dois planos, os métodos utilizados em perspectiva rigorosa, quer seja artística (linear) ou técnica (axonométrica e cavaleira), utilizam a projecção num só plano. Dado que o objecto desta publicação, é a perspectiva artística, as perspectivas técnicas serão abordadas sumariamente.

Talvez, por culpa da minha formação artística, manifesto uma certa insensibilidade aos aspectos mais técnicos. Portanto, em qualquer abordagem anteriormente feita, o leitor observou o tratamento sumário das projecções ortogonais. O mesmo irá agora acontecer com as perspectivas axonométricas e cavaleira. Ou seja, com todas as projecções paralelas ou cilíndricas.

Os próximos capítulos irão abordar exclusivamente os vários métodos utilizados na perspectiva rigorosa (central ou cónica). E neste campo, da perspectiva cónica, também designada de perspec-

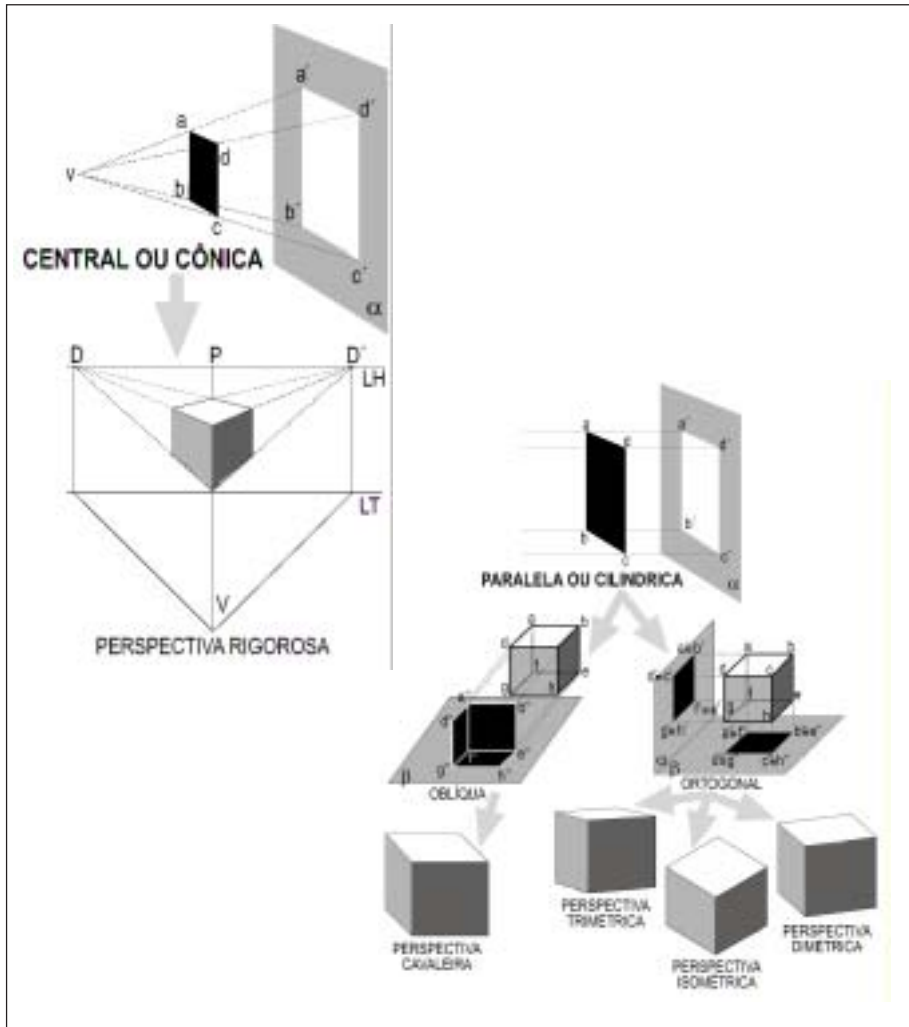


Figura 38 - O Campo Específico da GEOMETRIA DESCRITIVA. A figura indica os dois tipos fundamentais de projecções: a Central ou Cónica e a Paralelo ou Cilíndrica. O primeiro caso identifica a perspectiva rigorosa, com os pontos de fuga. A projecção Central ou Cónica pode ser Ortogonal ou Oblíqua. A Projecção Ortogonal pode ser executada através do Método de Monge, sobre dois planos, ou utilizando a perspectiva técnica, designada de Axonométrica. Esta designação deve-se aos três eixos de representação que determinam o objecto. A perspectiva Axonométrica pode ser representada através de três designações estabelecidas internacionalmente: Perspectiva Axonométrica Trimétrica; Perspectiva Axonométrica Dimétrica; Perspectiva Axonométrica Isométrica. No caso da projecção Oblíqua, ela é, representada através da Perspectiva Cavaleira, salvo excepção.

tiva linear, será exaustivamente estudada através de inúmeros exemplos de construção de formas, sombras e reflexos. A publicação terminará com a abordagem ao método de perspectiva, utilizado no campo artístico. Embora seja considerada uma perspectiva rigorosa, muitas vezes ultrapassa os requisitos do rigor geométrico, para permitir composições bem mais criativas e expressivas.

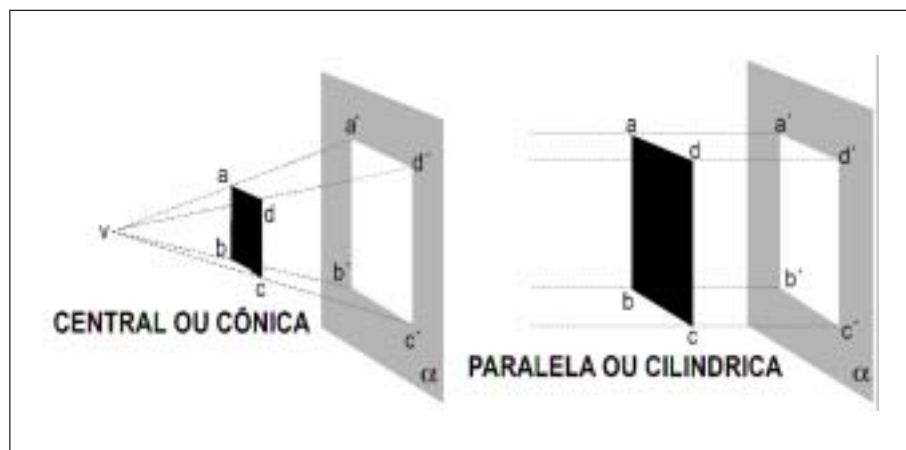


Figura 39.

Basicamente existem dois tipos de projecções: A **projecção central ou cônica** e a **projecção paralela ou cilíndrica**.

A primeira, conforme o esquema da figura 39 indica, é obtida pelos raios visuais que partem de um único ponto de vista [V]. No caso do quadrado [a,b,c,d], os raios visuais tangentes aos seus vértices, que partem do ponto [V], estabelecem a sua projecção através dos pontos [a'], [b'], [c'] e [d'] no plano [α].

Este tipo de projecção é quase exclusivamente aplicada ao campo artístico. Embora raramente, também é utilizada nos campos da arquitectura e da engenharia. As suas características impedem uma leitura rigorosa, pelo que é evitada no campo técnico.

A projecção paralela ou cilíndrica é a que permite uma leitura rigorosa da forma que se pretende dar a representar. Esta projecção não é utilizada no campo artístico, já que as formas não diminuem proporcionalmente, conforme o seu afastamento.

Observe-se novamente a figura 39, mas agora a segunda imagem. Neste caso, não existe um ponto de onde saem os raios visuais. Eles são paralelos. Este aspecto é extremamente importante para o técnico, pois pretende ler uma determinada forma com rigor, através da sua perspectiva. É evidente que o seu aspecto é deformado aos olhos do artista e não só.

## 2 · Família das perspectivas

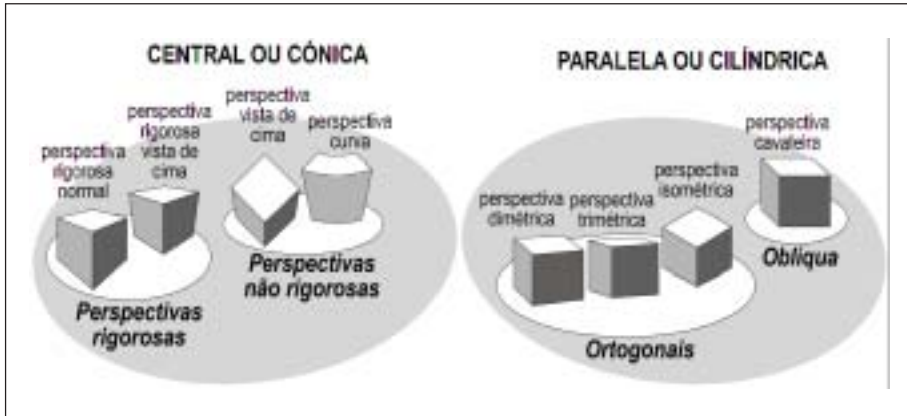


Figura 40 - Os oito tipos de perspectiva.

A utilização de qualquer tipo de perspectiva, referenciada na figura 38, depende da finalidade pretendida. As perspectivas centrais ou cónicas são empregues no trabalho artístico e no trabalho arquitectónico.

A perspectiva rigorosa normal cónica é determinada por um ou dois pontos de fuga (paralela e oblíqua). É o campo específico do mundo artístico, por excelência. Refira-se, no entanto, que a sua impossibilidade prática, de realização numa tela ou num suporte de grandes dimensões, faz com que os artistas a executem, não cumprindo todas as suas regras. Este aspecto permite adoptar a perspectiva à composição pretendida pelo artista.

A perspectiva rigorosa vista de cima, implica uma grande morosidade e dificuldade na determinação. Geralmente é empregue no mundo da arquitectura e da engenharia, para divulgar e publicitar publicamente grandes projectos. Este tipo de perspectiva é geralmente, hoje em dia, determinado por processos informáticos.

As perspectivas curva e vista de cima têm pouca aplicação, tanto no mundo técnico como no artístico. No entanto a perspectiva curva, é algumas vezes empregue em composições fantásticas por artistas como M. C. Escher.

O campo das perspectivas paralela ou cilíndrica é de aplicação exclusiva do mundo técnico. O “método de Monge” será o mais conhecido por todos nós. No entanto a sua deficiência quanto ao reconhecimento de todas as faces de uma dada forma, faz com que seja pouco empregue.

A perspectiva dimétrica é a que mais se assemelha visualmente, à perspectiva rigorosa cónica. Dentro das ortogonais é uma das mais representadas.

A perspectiva trimétrica é a menos utilizada das ortogonais, por ter três escalas diferentes, sendo morosa e de difícil leitura, embora seja uma das que mais se assemelha à perspectiva rigorosa.

A perspectiva isométrica, é sem dúvida, a que melhor referencia as características formais das três faces de uma peça qualquer, embora o seu aspecto visual não seja o mais agradável.

Finalmente, a perspectiva cavaleira, oblíqua, é a que melhor referencia uma face preponderante a representar. É o caso da representação rigorosa de formas redondas circulares.

Na figura 40, podem observar-se as duas grandes famílias de projecções, que fazem parte do campo específico da geometria descritiva.

A primeira família é a das projecções cónicas. Todas as projecções de uma forma constituem-se através de raios concêntricos num ponto e que identificam a forma nos seus pontos fundamentais. Neste caso, a forma constitui-se numa projecção de proporção diferente. Cabem aqui todas as perspectivas rigorosas.

A segunda grande família é a das projecções paralelas. As projecções de uma dada forma, constituem a partir de raios paralelos, que são tangentes à forma nos seus pontos fundamentais. A forma constitui-se numa projecção idêntica à inicial, pelo que a sua leitura é simples. As projecções paralelas podem ser ortogonais ou oblíquas.

No caso das projecções oblíquas, apenas é empregue a perspectiva cavaleira. As projecções ortogonais podem também ser axonométricas. Neste caso das axonometrias, por terem três eixos de projecção, utilizam-se as perspectivas axonométrica trimétrica, axonométrica dimétrica e axonométrica isométrica.

O “método de Monge” é o que mais corresponde à definição de projecção ortogonal. A sistematização de todos estes processos, que hoje são matéria da geometria descritiva, deve a Albrecht Dürer, a Amédée François Frézier e principalmente a Gaspar Monge.

# Noções básicas de perspectiva

---

## 1 • Elementos da linguagem da perspectiva linear

Desde a sua infância, o homem tem demonstrado curiosidade em relação à visão que tem, das linhas de caminho de ferro. Embora sejam paralelas, parecem juntar-se no local a que denominamos de horizonte. Na realidade, as formas observam-se desde o nosso ponto de vista e segundo as regras que criámos.



*Figura 41 - Gravura da publicação sobre perspectiva de Dürer "Viático do Aprendiz de Pintor". Albrecht Dürer (1471 – 1528)*

Também, qualquer forma, quanto mais afastada se encontra de nós, menos é o seu tamanho, dentro de uma coerência provocada pela distância. De qualquer modo, é a única maneira de reconhecer as formas reais que visualizamos.

Tanto a criança como o adulto, que não tenham uma educação visual básica, são incapazes de transmitir este tipo de informação visual através da sua escrita num espaço bidimensional. Ao contrário da escultura, que possui volume (tridimensional), o Quadro ou o desenho artístico ou técnico, tem de transmitir através da mensagem visual, a ilusão da 3.<sup>a</sup> dimensão. A terceira dimensão ou profundidade é transmitida pelo artista ao público, através de regras geométricas da linguagem das projecções cónicas. O artista, conhecedor destes “truques” de geometria descritiva, torna-se basicamente um “ilusionista”, ao simular uma terceira dimensão (profundidade), num espaço que tem apenas duas dimensões, como o papel ou a tela.

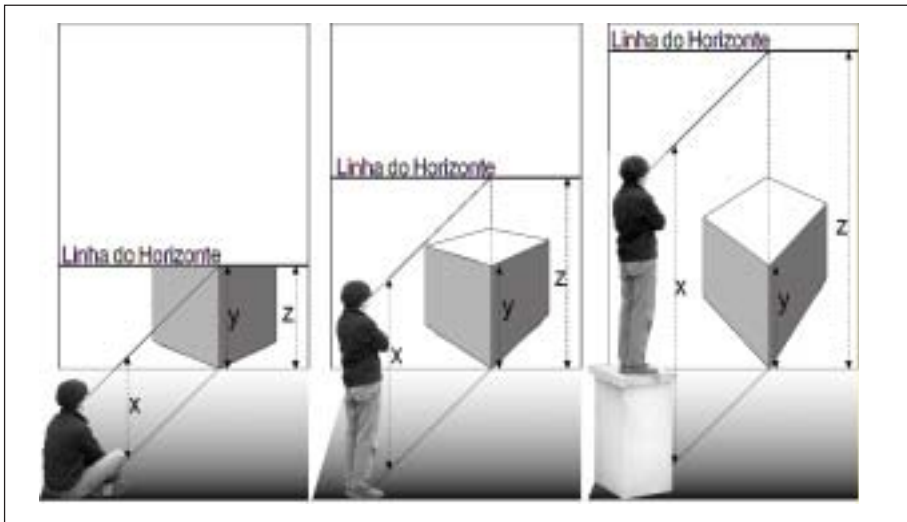
Evidentemente que, estou a falar da perspectiva cónica rigorosa, também designada de perspectiva linear.



*Figura 42 - As três fotografias pretendem registar a “Domus” de Bragança. A distância entre fotografias é de cerca de 500 metros, havendo uma diferença de 200 metros de altura entre a primeira e a terceira. Quanto mais alto está o ponto de vista do Observador, maior será o seu campo de visão (horizonte).*

Esta abordagem inicial. Como se irá observar, coloca os aspectos de rigor em segundo plano, como é evidente. Pretende-se apenas, que o leitor tome consciência, dos aspectos primários ligados ao processo de observação, para que após a sua familiarização, compreenda com normalidade as regras e linguagem da geometria inerentes ao processo.

Para a familiarização com a perspectiva, vou dar como exemplo a cidade de Bragança. Ao situar-se o Observador, em três alturas diferentes, o seu campo de visão é alterado em termos de espaço. Diminui a partir do momento em que a Linha do Horizonte baixa em altura. Como a Linha do Horizonte está sempre situada à altura dos olhos do Observador, podemos concluir que o espaço de visão é maior, quando a altura aumenta, diminuindo quando baixamos a posição da nossa altura (figura 42).



*Figura 43 - Em qualquer uma das três imagens, verifica-se que a altura da Linha do Horizonte, corresponde sempre à altura a que se encontram os olhos do Observador, sendo  $X = Y$ . Em todas as imagens, o ângulo de visão do Observador, a posição do cubo e a distância do Observador ao objecto, não foram alteradas. A altura [Y] permanece igual nos três exemplos.*

*Apenas a posição em altura do Observador foi modificada. O Observador começa por estar sentado a uma altura inferior à do cubo, pelo que não pode observar a sua face superior. Ao mesmo tempo, o seu campo de visão do horizonte (distância Z), é muito reduzido. Aumentando a altura do ponto de vista do Observador (distância X), o horizonte torna-se mais vasto em profundidade, ao mesmo tempo que o Observador, por estar situado a uma altura que já consegue observar a sua face superior do cubo. No último caso, a profundidade do horizonte [Y], consequência da altura a que se encontra o Observador, é bem evidente.*

Um rapaz pequeno, possui uma Linha do Horizonte bastante mais baixa que um jogador de basquetebol.

Observe a figura 43. Um dado importante a reter, é a correspondência entre a altura dos olhos do Observador e a Linha do Horizonte. A altura a que se encontra o Observador é igual à altura da Linha do Horizonte. Outra característica importante é a sua situação em relação ao plano onde está o Observador. A Linha do Horizonte é sempre paralela ao plano da terra.

Sob o ponto de vista do emprego da Linha do Horizonte na composição, a realização de uma vista panorâmica, necessita de uma Linha do Horizonte mais elevada. Quando se diminui excessivamente a altura da Linha do Horizonte, produzimos uma composição com aspecto dramático. No caso das figuras humanas, parecerão ameaçadoras.

Pode-se então concluir que, a posição do Observador, é determinante para o aspecto da perspectiva. A Linha do Horizonte é, portanto, uma linha imaginária que parece acompanhar os nossos olhos. A Linha do Horizonte quanto mais alta se situar, maior é o nosso espaço de visão.

Para executamos o desenho em perspectiva, temos de reconhecer perfeitamente conceitos como LINHA DO HORIZONTE, PLANO GEOMETRAL, PONTO DE OBSERVAÇÃO, QUADRO, LINHA DE TERRA, PONTO PRINCIPAL, PONTOS DE DISTÂNCIA, PONTO DE FUGA, ALTURA DO OBSERVADOR e DISTÂNCIA DO OBSERVADOR AO QUADRO.

Vou começar por identificar estes conceitos.

### 1.1 · Linha de horizonte

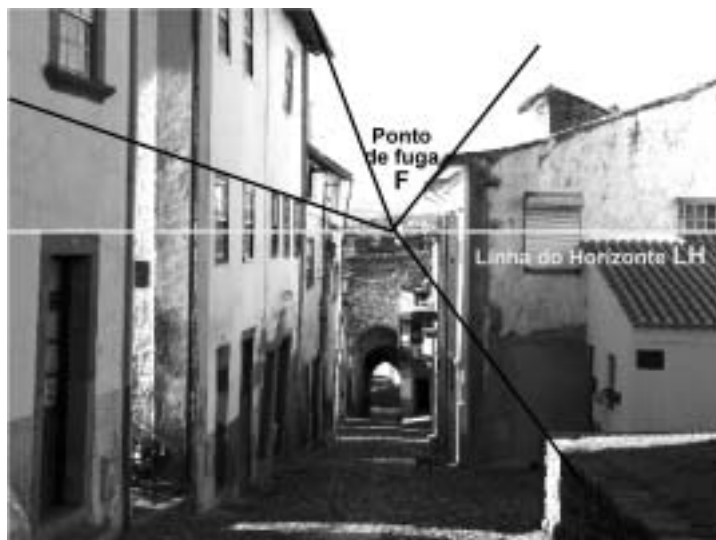


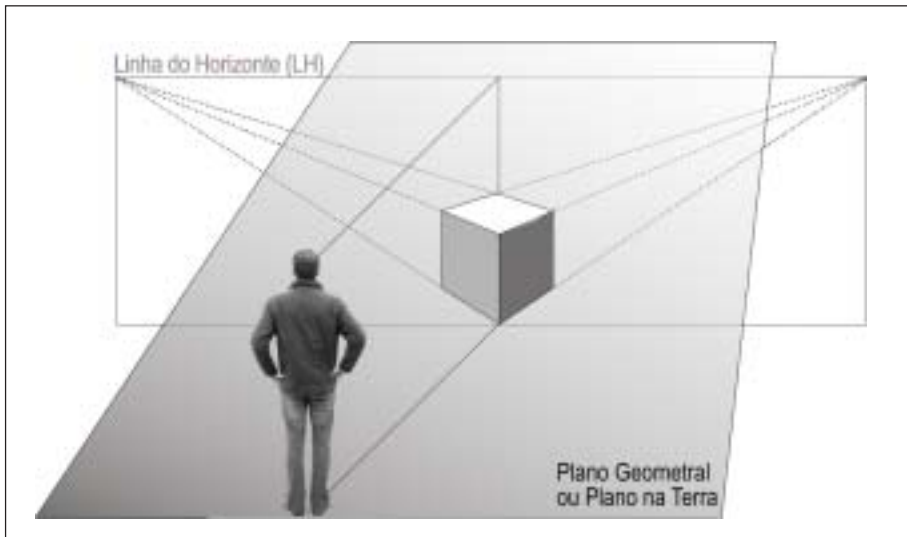
Figura 44.

Regressando ao exemplo da linha de caminho de ferro, observando ao mesmo tempo a figura 44, verificamos mais facilmente, através da fotografia, que as linhas rectas que se afastam para o horizonte, parecem concentrar-se num ponto (Ponto de Fuga) sobre uma linha. Esta linha pode ser regular ou irregular, dependendo apenas do tipo de paisagem.

No cimo de uma serra, o termo horizonte é, em princípio, irregular, identificado geralmente por uma série de montes mais afastados. O presente caso identifica a irregularidade através do perfil mais alto do casario de uma cidade. No entanto, é quando estamos à beira-mar que temos a perfeita noção de Linha do Horizonte, ou seja, a linha horizontal onde parece terminar o mar.

Se reparar, a Linha do Horizonte, não tem dimensão, sendo apenas delimitada pelo nosso campo de visão. Outra característica reside no facto de se encontrar sempre à altura dos olhos do Observador. Poderíamos assim definir, embora empiricamente, que a Linha do Horizonte é uma recta horizontal que passa pelos nossos olhos e que delimita o espaço de visão a Linha do Horizonte é o primeiro elemento da linguagem projectiva.

## 1.2 · Plano geometral ou plano da terra



*Figura 45 - O Plano Geometral, também designado de Plano da Terra, é a superfície onde estão colocados todos os intervenientes da perspectiva.*

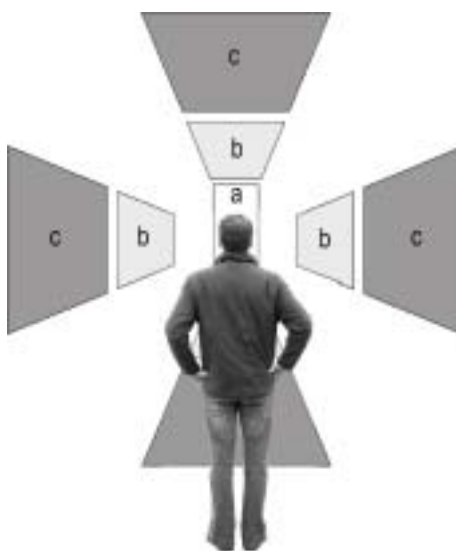
Entendido que está o conceito de Linha do Horizonte, e a sua importância na determinação da perspectiva, vamos agora definir o primeiro dos planos fundamentais. Começamos pela identificação do Plano Geometral, também designado por plano da terra (figura 45).

Trata-se somente, do plano onde está assente o Observador e as formas que ele pretende representar.

Este Plano Geometral ou plano da terra, na realidade, tanto pode ser uma superfície uniforme, um espaço com mosaicos ou irregular. A sua dimensão é infinita, embora quando da representação no papel, seja limitada pelos seus lados. A distância que vai do Plano Geometral à Linha do Horizonte é designada de altura do Observador.

A altura do Observador é um dos dados de maior importância para a determinação da perspectiva. Não esquecer que a altura do Observador, corresponde à distância dos seus olhos ao Plano Geometral. Este dado significa que não corresponde à sua altura física. Voltando a observar a figura 43, a distância designada pela letra [X], é a altura do Observador. Varia portanto, com o afastamento que o Observador tem, na direcção vertical, em relação ao Plano Geometral.

### 1.3 • Ponto de observação ou ponto de vista



*Figura 46 - Alteração do Ponto de Observação. Conforme se verifica, a alteração do Ponto de Observação, provocado pela rotação no sentido vertical ou horizontal da cabeça, provoca a mudança de direcção do cone visual, dando ao Observador, uma perspectiva diferente. O rectângulo central [A] é igual ao [B] e ao [C]. No entanto parecem diferentes, dada a posição que ocupam em relação ao Observador.*

*O cone óptico varia de animal para animal, sendo o do peixe, aquele que maior ângulo possui, podendo observar a sua cauda. O cone óptico do homem está calculado em aproximadamente 60° graus, embora o nosso ângulo de visão seja de 180°. Contudo, apenas consegue-se focar com rigor, as formas existentes num ângulo de 60°. Na representação das formas, quando se emprega um ângulo maior de 60°, a imagem fica com um aspecto distorcido. Este aspecto pode ser perfeitamente realçado e explorado, no campo artístico. No campo da fotografia, consegue-se facilmente, imagens distorcidas, através do emprego de objectivas “grande angular” e “olho de peixe”.*

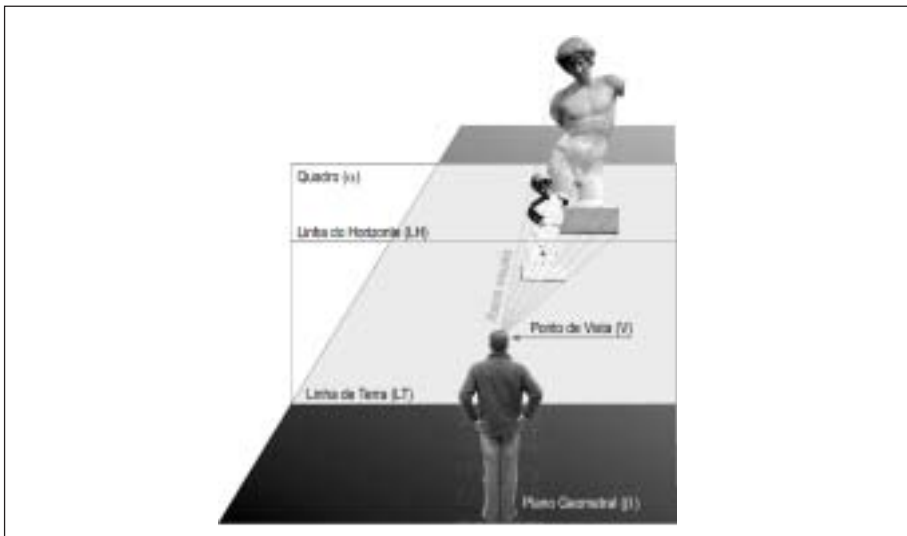
O processo de observação, já há muito identificado pelos artistas antigos, apoia-se num feixe de raios visuais invisíveis e cónicos, que têm como centro, o olho do Observador. Este feixe designado de cone óptico ou pirâmide visual, é tangente à forma a representar. Era este o entendimento, e o sentido que os antigos pretendiam dar, como noção básica de observação. Embora seja uma noção empírica, a sua actualidade permanece, dentro do contexto.

Recorde-se o leitor, da imagem que dei de Dürer a trabalhar, quando da abordagem histórica da perspectiva. Ele observa as formas de um ponto fixo, ponto de onde partem todos os raios visuais.

Dürer, ao optar por um único Ponto de Observação, evitava um dos erros comuns, a quem desconhece as regras básicas da representação formal. Quando se desenha, o Ponto de Observação tem de permanecer sempre fixo, para não haver deformações de representação da forma pretendida. Este erro, comum à criança, surge geralmente quando ela está a executar o desenho à vista. Acontece no retrato. O cansaço produz constantes alterações de posição, provocando vários pontos de observação. O resultado é um retrato com visões de frente, laterais, parte inferior e superior (Observar figura 46).

Concluindo, o Ponto de Observação, está no centro do olho, devendo ser sempre fixo, durante a observação, para não se produzirem deformações.

#### 1.4 • Quadro



*Figura 47 - Por uma questão prática, o Ponto de Observação é sempre representado pela letra [V]. Acontecendo o mesmo com os termos: Linha do Horizonte pelas letras [LH], Linha de Terra pelas letras [LT], Plano Geométral pela letra [a] e Quadro pela letra [a].*

Observe agora a figura 47. Imagine que se coloca entre o Observador e a forma escultórica, um vidro transparente. Este vidro, poderia ser o Quadro. Conforme o nome indica, é o espaço onde vai ser representada a forma pretendida. O Quadro está sempre situado entre a forma a representar e o Observador. Tanto o Quadro, como o Plano Geometral, são dois planos. Na linguagem da geometria, os planos identificam-se por letras gregas. Assim sendo, o Plano Geometral é identificado pela letra [b] enquanto que o Quadro tem a letra [a].

Já estamos familiarizados com conceitos como Quadro, Linha do Horizonte, Plano Geometral e ponto de vista ou Ponto de Observação. O Observador visualiza a forma escultórica através do cone de raios visuais identificados pelas linhas a tracejado. A intersecção dos raios visuais no Quadro [a] produz a perspectiva da forma escultórica. A Linha do Horizonte [LH] e o ponto de vista [V] estão situados a igual altura em relação ao Plano Geometral [b]. É no Quadro que se representam as formas em perspectiva, assim como todas as linhas auxiliares necessárias para a construção.

### 1.5 • Linha de terra

Designou-se de Quadro [a], ao plano ou à superfície situada verticalmente em relação ao Plano Geometral [b]. Também o Plano Geometral [b], foi identificado como uma superfície horizontal, onde se situam todos os elementos, desde o Observador à forma a representar. A linha de intersecção do plano vertical [Quadro a] com o plano horizontal ou Plano Geometral [b] é designada de Linha de Terra [LT] (figura 47). A Linha de Terra é determinante para a construção da perspectiva. A sua identificação é assinalada pelas iniciais maiúsculas [LT]. A sua posição é sempre paralela em relação à Linha do Horizonte [LH], determinando que a altura a que se encontra o Observador, seja sempre a distância da Linha de Terra [LT] à Linha do Horizonte [LH].

### 1.6 • Pontos situados sobre a linha do horizonte

Vou agora identificar os pontos invisíveis, fundamentais para a determinação da perspectiva rigorosa. Embora o seu significado, seja compreendido através do exercício prático, é no entanto necessário dar continuidade à identificação dos elementos fundamentais da linguagem da perspectiva (figura 48).

Ponto Principal designado pela letra [P], Pontos de Fuga designados pela letra [F1, F2, F3,...] e Pontos de Distância designados pelas letras [D] e [D'], são os elementos de que vamos falar neste momento e que têm em comum, a característica de estarem colocados sobre a Linha do Horizonte. Contudo, em alguns casos, os Pontos de Fuga, poderão não estar situados sobre a Linha do Horizonte. São casos particulares como o caso das perspectivas das lombas das estradas.

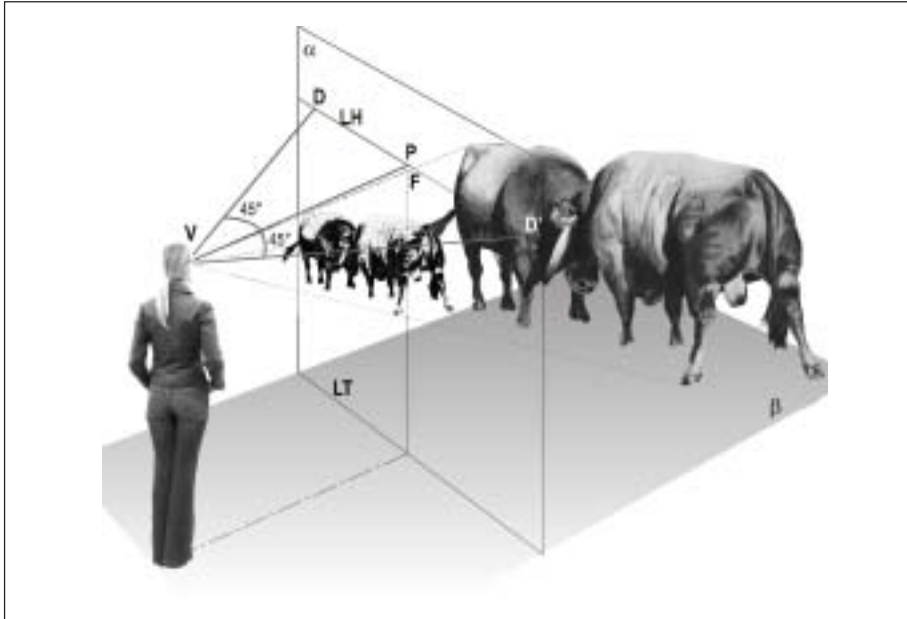


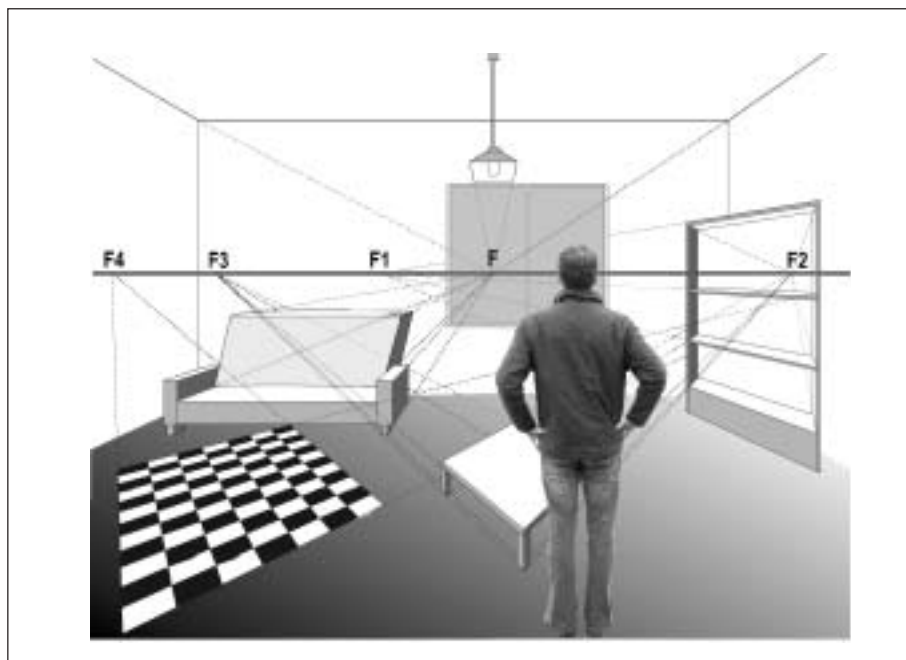
Figura 48 - Os pontos situados sobre a Linha do Horizonte [LH]: Ponto Principal [P]; Ponto (s) de Fuga (s) [F, F1, F2, F3, ...]; Pontos de Distância [D] e [D'].

- PONTO PRINCIPAL [P]

Já falei do feixe de raios visuais, concêntricos no olho do Observador, que identificam os pontos definidores da forma observada, para compreendermos o Ponto Principal [P]. Neste feixe (cone óptico), com características cónicas, tem um raio que é perpendicular ao Quadro [a] e intersecta a Linha do Horizonte [LH]. Esta intersecção resulta num ponto sobre a Linha do Horizonte, designado de Ponto Principal [P].

- PONTO (S) DE FUGA [F]

Relembrando a imagem da linha de caminho de ferro, a noção de perspectiva era dada pelas linhas que se dirigiam na direcção do horizonte e pareciam concentrar-se num único ponto. No entanto, foi dito que esta característica, era também comum a planos laterais oblíquos a 45° dirigidos ao horizonte, como é o caso das faces laterais das habitações. Estes pontos de concentração, geralmente situados sobre a Linha do Horizonte, são designados de pontos de fuga [F].



*Figura 49.*

A composição do interior de uma casa, a título de exemplo, pode ter vários pontos de fuga, devido ao ângulo posicional dos diversos objectos (figura 49). A localização do(s) Ponto(s) de Fuga, é determinada pela posição das formas em relação ao Observador.

O melhor processo, para nos apercebermos da realidade da perspectiva, é executar um estudo directo sobre diversas fotografias. No que respeita à escolha, o melhor tema para estudo é a fotografia urbana, por ter formas semelhantes aos sólidos geométricos conhecidos.

Observe as figuras 50 e 51. Seguindo o desafio, o exercício inicia-se por tentar, com a ajuda de uma régua, encontrar o ponto ou pontos de fuga.

Verificamos então, que em qualquer dos casos, os Ponto(s) de Fuga estão situados sobre uma linha horizontal designada de Linha do Horizonte [LH].

Poderá haver casos em que um ou mais pontos não estão situados sobre a Linha do Horizonte [LH]. São no entanto casos particulares para estudo mais adiante.

Depois de descobertos os Ponto(s) de Fuga, é fácil reconhecer que todas as linhas e planos dirigidos para o horizonte, são os pontos encontrados. As fotos, possuem a designada perspectiva fotográfica, que coincide com a perspectiva rigorosa determinada pelo homem.

No entanto, não esquecer que antes de se ter descoberto a fotografia, já os artistas realizavam a perspectiva rigorosa.



Figura 50 - Perspectiva com um ponto de fuga: PERSPECTIVA PARALELA



Figura 51 - Perspectiva com dois pontos de fuga: PERSPECTIVA OBLÍQUA

A questão que nesta fase se coloca, a quem inicia o estudo da perspectiva, relaciona-se com a colocação do(s) Ponto(s) de Fuga, assim como o seu número, situados sobre a Linha do Horizonte [LH]. Embora sejam possíveis vários tipos de perspectivas rigorosas, que no

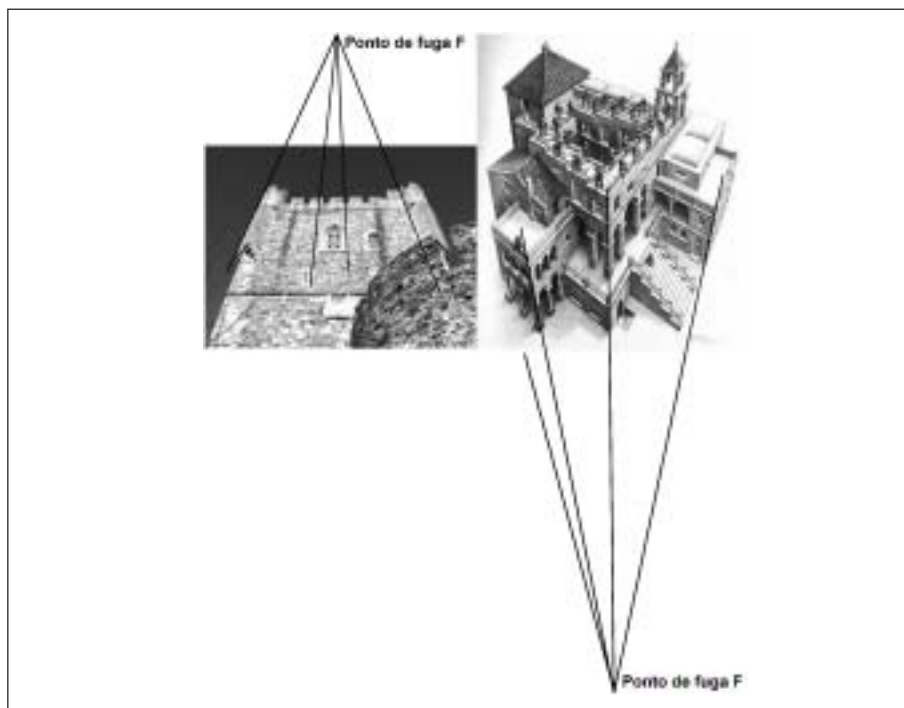
fundo não deixam de ser variantes das que consideraremos, existem três tipos, de perspectivas. Vamos portanto descrever cada uma e as suas características básicas.

No primeiro caso, exemplificado nas figuras 50 e 54, **Perspectiva Paralela**. Verifica-se que a forma observada, neste caso o cubo tem as suas faces em posição ortogonal em relação ao Observador. Portanto, só pode existir um Ponto de Fuga, porque rectas e planos dirigem-se unicamente, para um ponto existente no horizonte.

O segundo caso (figuras 51 e 54) revela a **Perspectiva Oblíqua**. As suas faces estão em posição oblíqua, dirigindo-se para dois Pontos de Fuga.

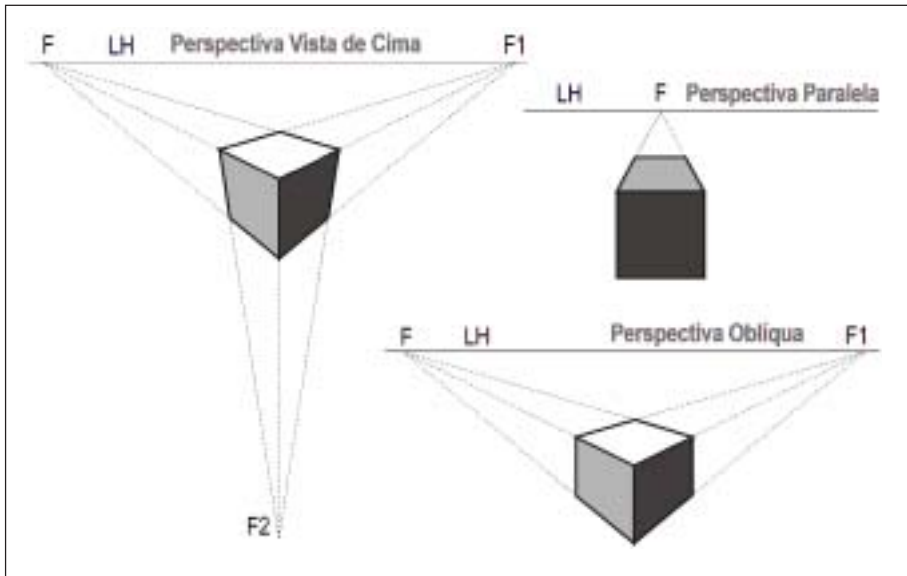
Existe um terceiro caso, observado nas figuras 52, 53 e 54, designado de **Perspectiva Vista de Cima ou de Baixo**. Possui geralmente três Pontos de Fuga, sendo o terceiro colocado abaixo ou acima, e fora da Linha do Horizonte. Caso particular de perspectiva, pouco utilizado, que no entanto poderia ter apenas dois pontos de fuga, caso fosse associado com a perspectiva paralela.

Neste e em qualquer caso, para determinar os Ponto(s) de Fuga, simplesmente temos de fazer intersectar os dois raios visuais extremos com a Linha do Horizonte, de maneira que formem entre si um ângulo de  $90^\circ$  e sejam paralelos às faces da forma a representar.



Figuras 52 e 53.

## 1.7 · Perspectiva vista de cima e perspectiva vista de baixo



Figuras 54 - Perspectivas Vista de Cima, Paralela e Oblíqua.

### -PONTOS DE DISTÂNCIA D e D'

Além do Ponto Principal [P] e dos Pontos de Fuga [F], existem também dois pontos fundamentais para a construção da perspectiva, que são os Pontos de Distância.

Volte a observar a figura 48. Os Pontos de Distância [D] e [D'], são os pontos situados na Linha do Horizonte, de tal maneira que [V,P = P,D = P,D'].

Serão portanto, os raios visuais extremos do campo óptico, perpendiculares ao Quadro [a] e que formam com o Raio Visual principal [V,P], ângulos de 45°.

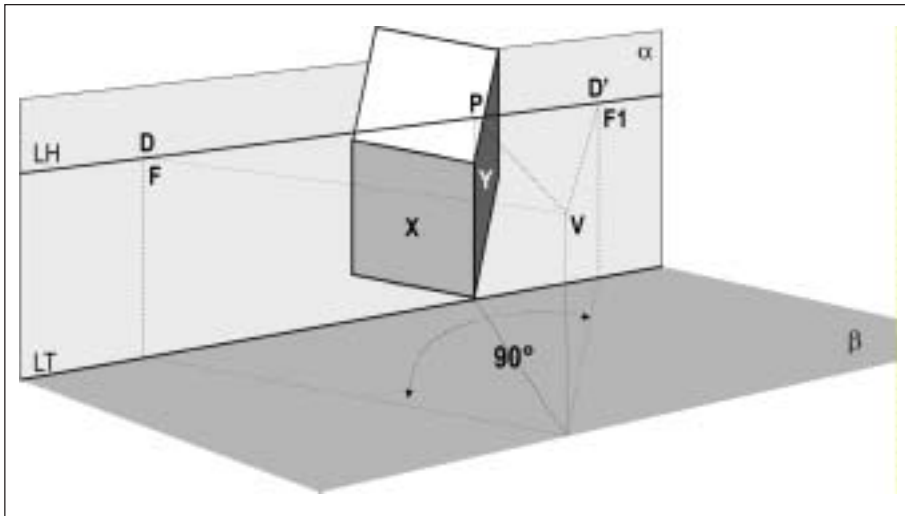
Estes dois pontos são fundamentais, como se verificará nos exercícios práticos, tendo maior incidência na construção da designação perspectiva artística, já que nos resolve a divisão do espaço numa quadrícula.

As perspectivas PARALELA e OBLÍQUA são os dois casos que geralmente se colocam a quem pretende estabelecer a perspectiva, principalmente no campo artístico. Abordando a posição angular da forma a representar em relação ao Observador, a perspectiva paralela existe quando o objecto está colocado num ângulo 0° em relação ao Observador, determinando portanto a existência de um único Ponto de Fuga. A colocação do objecto em ângulo diferente de 0° determina portanto a existência de dois Pontos de Fuga, ou seja, a perspectiva oblíqua.

Contudo, a realidade da posição das formas é bem diferente do aspecto teórico. A título de exemplo, não podemos conceber na prática, uma sala com todas as formas paralelas entre si, para que o Observador execute a perspectiva Oblíqua ou Paralela. A realidade demonstra a existência das duas perspectivas simultaneamente em coexistência, no mesmo espaço (figura 49).

E se utilizando as duas perspectivas, pode existir apenas um Ponto de Fuga para a perspectiva paralela, o mesmo não acontece com a perspectiva oblíqua. Na mesma composição podem existir inúmeras perspectivas oblíquas. Para tal, basta que os objectos colocados obliquamente em relação ao Observador, não se posicionem no mesmo ângulo. Tudo isto irá com certeza, provocar a existência de inúmeros Pontos de Fuga na Linha do Horizonte. A figura 49 estabelece uma composição simples, de um interior com diversos Pontos de Fuga, situados sobre a Linha do Horizonte, consequência da posição angular das formas em relação ao Observador.

Determinação da posição dos Ponto(s) de Fuga:

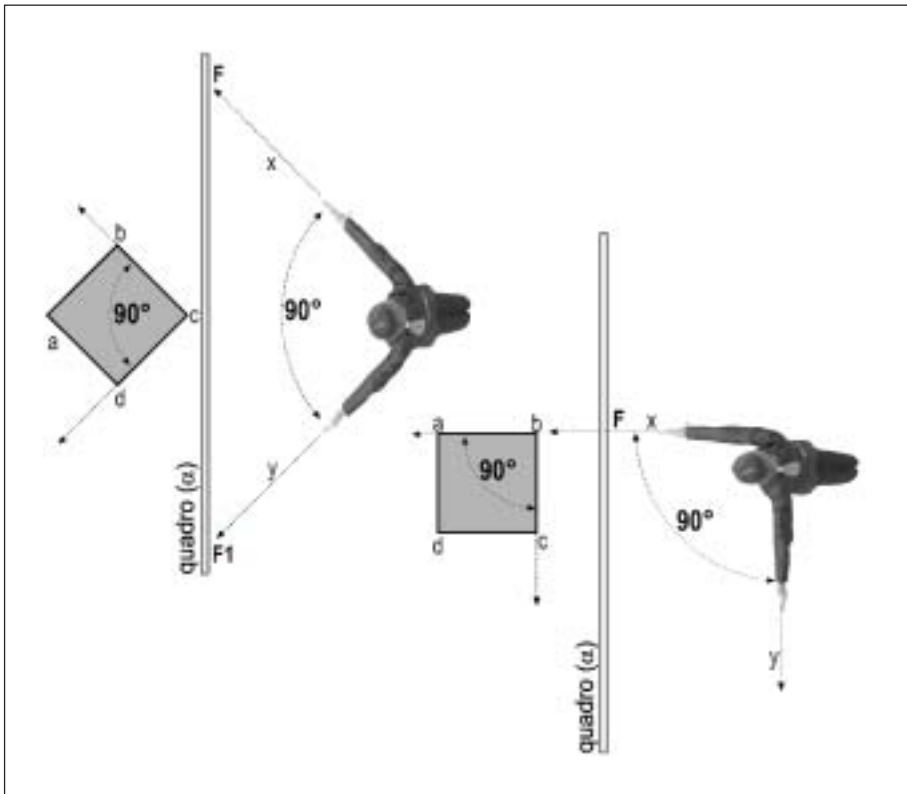


*Figura 55 - Determinação dos Pontos de Fuga. É necessário determinar em primeiro lugar o ângulo que a forma faz com o Observador. Representamos então os dois raios visuais extremos [D] e [D'], que formam sempre entre si um ângulo de 90°, tendo estes que ser paralelos às faces da forma a representar.*

Para determinar os Ponto(s) de Fuga de uma forma, é necessário medir o ângulo que as suas faces fazem em relação ao Observador.

Observe a figura 55. Recorda-se quando da identificação do ângulo máximo de visão? Disse que, o cone óptico do homem está

calculado em aproximadamente  $60^\circ$ . Embora o nosso ângulo de visão nítida seja de  $60^\circ$ , em perspectiva, define-se como abertura de visão máxima o ângulo de  $90^\circ$ . Este dado não deve ser esquecido, porque é fundamental para a determinação de qualquer tipo de perspectiva. Portanto, os segmentos de recta [V,F] e [V,F1], intersectam-se no ponto [V], formando entre si um ângulo de  $90^\circ$ . A forma representada é um cubo, pelo que as suas faces são perpendiculares entre si, formando ângulos de  $90^\circ$ . A face [X] é paralela a [F,V], sendo a face [Y] paralela a [V,F1].



*Figura 56 - Determinação técnica dos Ponto(s) de Fuga, respectivamente nas Perspectivas OBLÍQUA e PARALELA.*

Na figura 56, o Observador coloca os braços em paralelismo com as faces do objecto [a,b,c,d]. As direcções que tomam, dadas pelas letras [X] e [Y], intersectam o Quadro no(s) Ponto(s) de Fuga [F] e [F1].

No primeiro caso (PERSPECTIVA OBLÍQUA), a face [b,c] é paralela à direcção [X], tal como a face [d,c] é paralela à

direcção [Y]. A abertura dos braços do Observador forma um ângulo de  $90^\circ$ , que é igual ao da forma a representar. Estamos portanto, perante um caso de perspectiva oblíqua com dois pontos de fuga.

Repetindo o processo no segundo caso (PERSPECTIVA PARALELA), o Observador coloca-se na posição de maneira que fique com os braços em paralelismo com as faces do objecto [a,b,c,d]. Contudo, como é visível, a direcção [Y] que tem de ser paralela à face [b,c] da forma, por mais que se prolongue, nunca intersecta o Quadro. Como se verifica apenas a direcção [X], que é paralela à face [a,b] da forma, intersecta o Quadro no ponto de fuga [F]. Novamente, a abertura dos braços do Observador que é de  $90^\circ$ , é igual ao ângulo que formam as faces da forma. Existe portanto um único ponto de fuga, pelo que se denomina esta perspectiva de paralela.

No fundo está a referenciar-se a posição da forma que se pretende representar. Sabe-se perfeitamente, que qualquer forma que está à nossa frente, apenas pode estar em duas posições: obliquamente ou ortogonalmente. A partir daqui, associa-se a perspectiva paralela às ortogonais e a perspectiva oblíqua às oblíquas.

### **Definições:**

Vou agora estabelecer as definições, para cada elemento da linguagem da perspectiva já descrito, acompanhando a figura 48.

**Quadro [a]** – Plano perpendicular colocado entre o Observador e a Forma. É o espaço bidimensional onde se representam as formas em perspectiva.

**Plano Geometral [b]** – Plano onde se situa a forma a representar. É também designado de Plano de Terra.

**Ponto de Observação [V]** – Ponto onde se situam os olhos do Observador. É também designado de Ponto de Vista.

**Linha de Terra [LT]** – Linha formada pela intersecção do Quadro com o Plano Geometral.

**Ponto Principal [P]** – Ponto onde a perpendicular ao Quadro que passa pelo Ponto de Observação encontra esse Quadro.

**Raio Principal** – Raio que coincide com o Ponto de Observação e o Ponto Principal.

**Raio Visual** – É qualquer recta que une o Ponto de Observação a qualquer ponto da forma que se quer representar.

**Linha do Horizonte [LH]** – Linha paralela à Linha de Terra e que se situa à altura do Observador. A Linha do Horizonte forma-se da intersecção de um plano horizontal perpendicular ao Quadro e que passa pelo Ponto de Observação e pelo Ponto Principal.

**Pontos de Distância [D] e [D']** – Pontos situados na Linha do Horizonte de tal maneira que as distâncias do Ponto Principal ao Ponto de Observação, e aos Pontos de Distância [D] e [D'] são iguais [V,P = P,D = P,D'].

***Distância do Observador ao Quadro*** – Distância do Ponto de Observação ao Ponto Principal.

***Altura do Observador*** – Distância compreendida entre a Linha de Terra e a Linha do Horizonte.

***Ponto de Fuga [F]*** – Ponto situado sobre a Linha do Horizonte, em concordância com as linhas e planos de topo.

***Perspectivas*** – Pontos formados pelos raios visuais no Quadro, quando da sua intersecção.

## 2 • Posição dos elementos na perspectiva

Quando da abordagem, neste capítulo, dos elementos da linguagem da perspectiva cónica ou linear, verificámos sucintamente que a mudança da posição do Observador, alteraria a perspectiva da forma. Através do exemplo simplificado do cubo, vamos fazer o estudo dos resultados obtidos, quando se alteram as posições do Observador, Quadro e forma a representar.

Para facilitar o estudo, todas as demonstrações são executadas com uma forma simples e familiar: o cubo.

Estes exemplos são muito importantes para quem pretende determinar a perspectiva já que, com o seu conhecimento, a composição do trabalho estará substancialmente facilitada. Assim sendo, o desenhador não tem que, em dado momento, chegar à conclusão, que aquela Altura do Observador, o ângulo de observação ou a distância, não eram a melhor para favorecer a forma a representar.

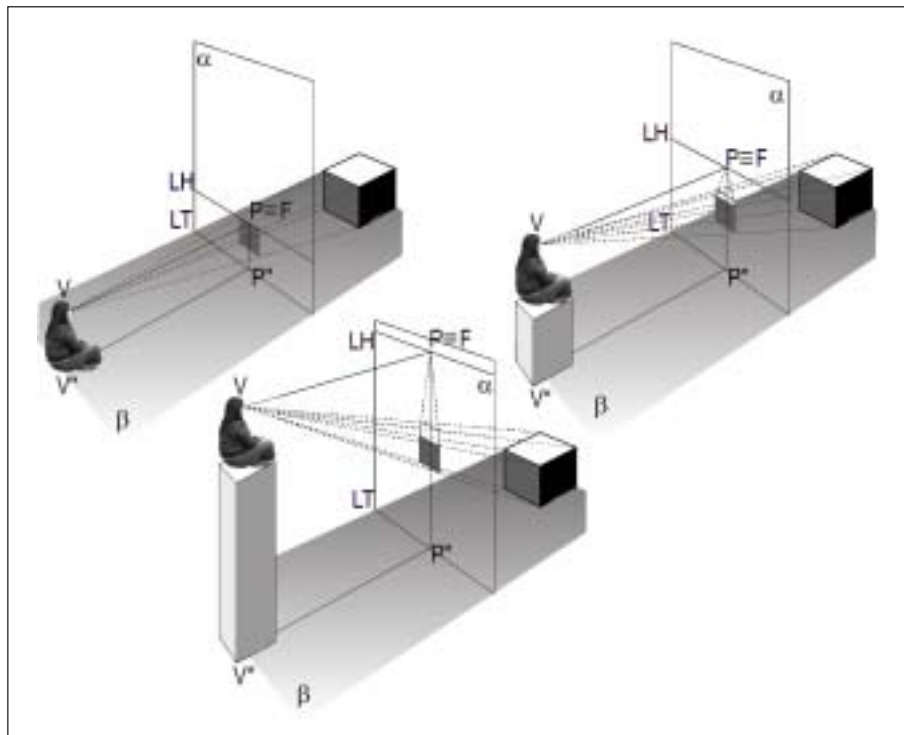
### - ALTERAÇÃO DA ALTURA DO OBSERVADOR

Observem-se as três imagens da figura 57. Em qualquer dos casos, a distância  $[V,P]$ , Observador ao Quadro foi mantida. O mesmo acontecendo com o cubo, em relação ao Quadro. Como se verifica, apenas a Altura do Observador  $[V,V'']$ , sofre modificação de imagem para imagem, aumentando no sentido vertical. Sabido que está, a Altura do Observador  $[V,V'']$ , coincide com a altura da Linha do Horizonte  $[P,P'']$ , que é a distância da Linha de Terra à Linha do Horizonte. Facilmente se verifica, quanto maior é a Altura do Observador, melhor se visualiza a face superior do cubo. Na primeira imagem não se vê a face superior do cubo, porque o Observador está à altura precisa da face superior.

***Conclusão: A alteração da posição vertical do Observador faz com que a perspectiva mude de forma.***

### - ALTERAÇÃO DA POSIÇÃO LATERAL DO OBSERVADOR

Observem-se agora as imagens da figura 58. A distância do Observador ao Quadro  $[V,P]$  é mantida nos dois casos. O mesmo



*Figura 57 - Perspectiva Paralela de um cubo. Em qualquer das figuras apenas é alterada a Altura do Observador. No primeiro caso, o Observador está colocado à altura da face superior do cubo, podendo apenas observar a face vertical de frente. O segundo caso com o Observador colocado ao dobro da altura da forma, já permite a observação da face superior. O terceiro, o aumento da Altura do Observador permite observar melhor a face superior. O mesmo sucederia se o exemplo fosse em Perspectiva Oblíqua.*

acontece em relação à Altura do Observador  $[V, V'']$  e à sua distância em relação ao objecto (Cubo).

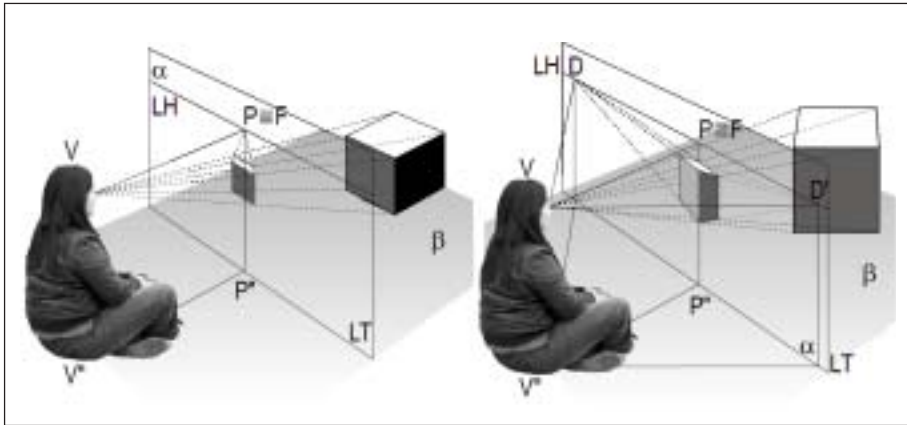
A única alteração existente foi a mudança lateral da posição do Observador. Verifica-se que basta a mudança horizontal da posição do Observador, para que a perspectiva seja alterada.

No caso com o Observador em posição paralela em relação ao objecto, só consegue observar as faces de frente e superior.

Na segunda imagem, o Observador, vai fazer com que as faces do cubo fiquem em posição oblíqua em relação a ele. Consegue agora visualizar duas das faces verticais do cubo.

O presente caso provoca a alteração do tipo de perspectiva, da paralela para oblíqua.

**Conclusão: A alteração da posição do Observador obriga a perspectiva a mudar de forma e de tipo.**



*Figura 58 - A alteração da posição do Observador obriga a perspectiva a mudar de tipo e de forma.*

#### - ALTERAÇÃO DA POSIÇÃO DO OBJECTO

A situação agora estudada nas três imagens da figura 59 tem a ver com a alteração da posição do objecto (cubo), no sentido de aproximação e afastamento em relação ao Observador.

Em qualquer dos casos, Observador e Quadro mantêm a mesma posição relativa. O objecto não executa qualquer rotação ou mudança de posição lateral ou em altura. Apenas se vai afastando do Observador nos exemplos, através de três posições diferentes.

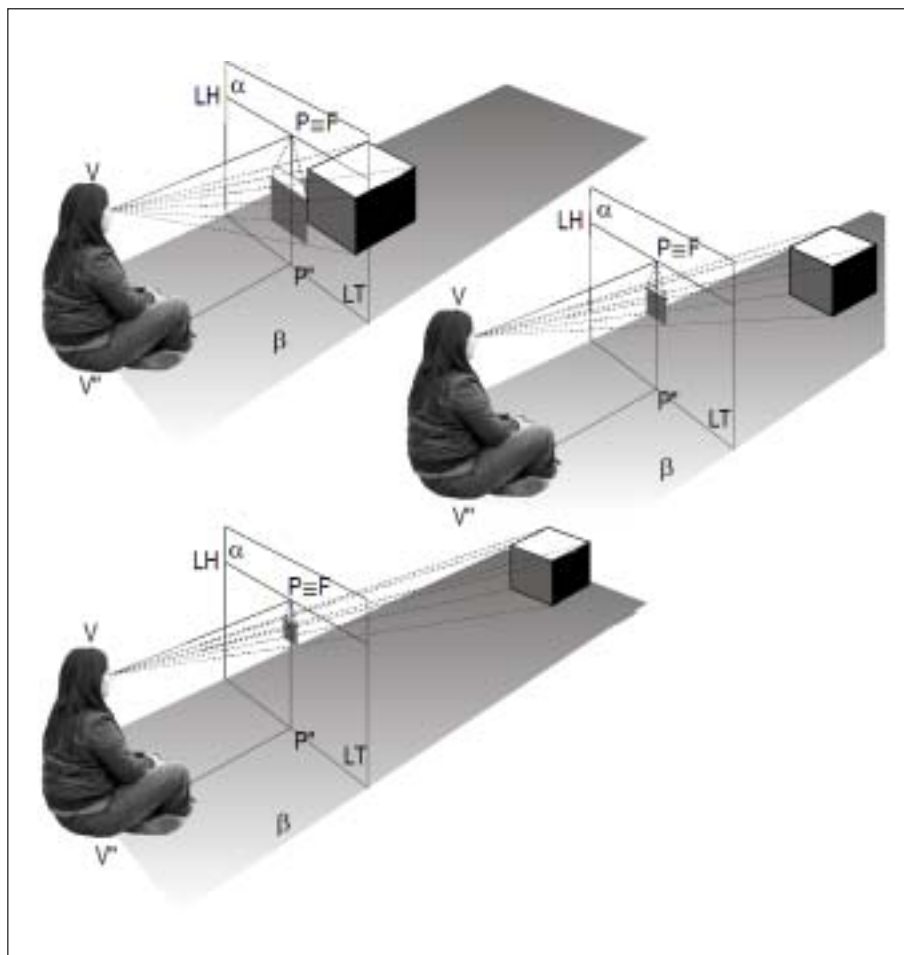
Conforme se verifica, a perspectiva obtida do objecto é cada vez mais pequena, quanto maior for o seu afastamento em relação ao Observador. Outro aspecto interessante é que, embora a perspectiva diminua, não muda de forma e diminui proporcionalmente em tamanho.

**Conclusão: Quanto maior for a distância do Observador ao objecto, menor será a sua perspectiva.**

#### - ALTERAÇÃO DA POSIÇÃO DO QUADRO

Na hipótese agora estudada nas três imagens da figura 60, não existe qualquer alteração na posição do Observador e do objecto. Só o Quadro é que altera a sua posição, afastando-se em três fases do Observador, na direcção do objecto.

Quanto mais afastado está o Quadro do Observador, menor é a perspectiva do objecto. Conclui-se também que não existe alteração da forma da perspectiva, mas apenas no tamanho.



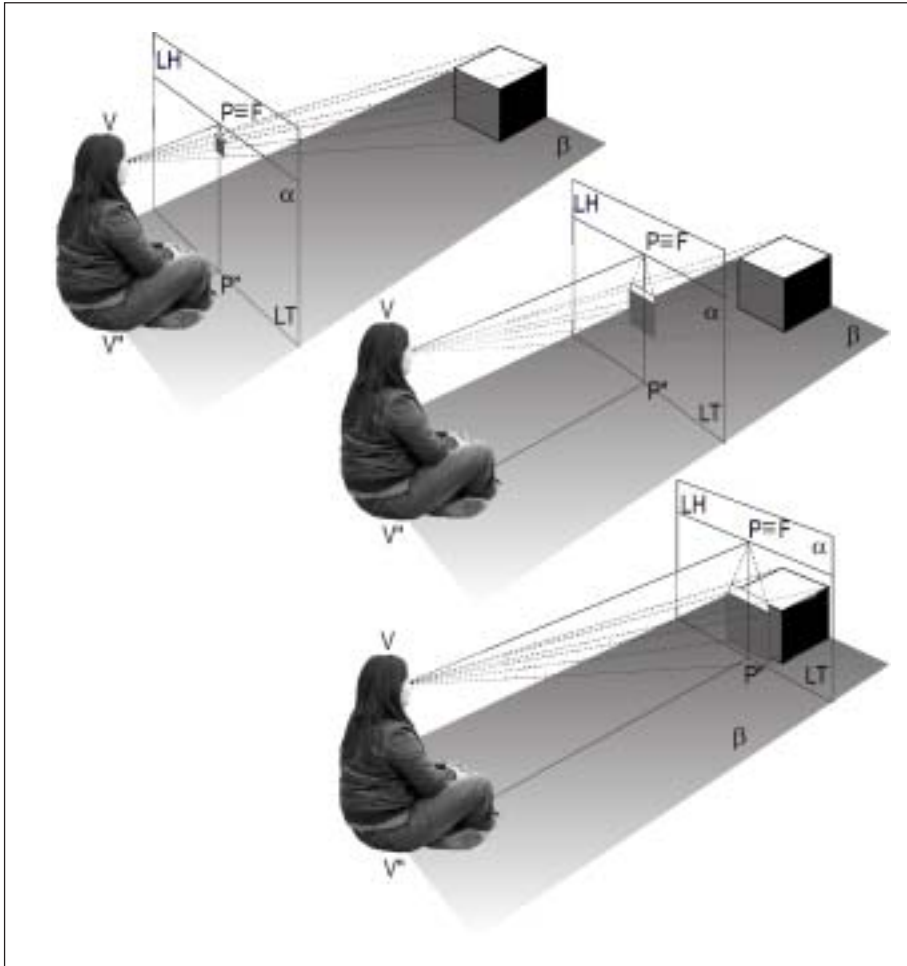
*Figura 59 - A alteração da distância entre o Observador e o objecto vai fazer com que a perspectiva aumente ou diminua de tamanho, mas não modifica a sua forma e tipo.*

**Conclusão: A posição do Quadro não altera a perspectiva do objecto. Apenas a diminui ou aumenta.**

Conclusão geral nos quatro exemplos dados:

Só existe modificação na perspectiva quando o Observador muda de posição.

Só existe alteração no tamanho da perspectiva quando alteradas as distâncias do Quadro e do objecto em relação ao Observador.



*Figura 60 - A alteração da distância entre o Observador e o Quadro vai fazer com que a perspectiva aumente ou diminua sem que altere a forma e o tipo.*

### 3 · Posição correcta para determinar a perspectiva

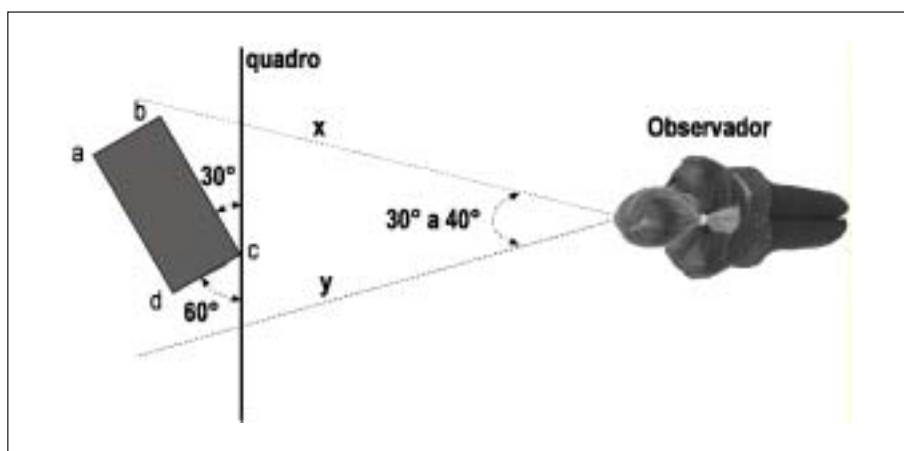
Descrita a linguagem fundamental para determinar a perspectiva e observada a influência da posição na forma da perspectiva, vou agora estabelecer os princípios fundamentais para determinar correctamente a perspectiva.

Quem desenha em perspectiva, acima de tudo, tem a intenção de esclarecer o Observador, independentemente de ser um desenho técnico ou uma composição pictórica. Até porque, em pintura, o

artista utiliza a composição, e neste caso, a perspectiva para melhor transmitir a mensagem visual e personalizada. Tem de optar entre a melhor altura a que se deve situar o Observador, a distância ao Quadro e o ângulo de observação.

Geralmente, na representação de formas redondas e quando se pretende dar uma maior sensação de profundidade, utiliza-se a Perspectiva Paralela. Esta perspectiva, também é a indicada para a construção de espaços fechados, como interiores das casas. A perspectiva oblíqua, utiliza-se quase sempre na representação de espaços exteriores ou grandes espaços, qualquer que seja a temática. Finalmente, a perspectiva vista de cima ou de baixo, é a que melhor resultado dá na representação de formas muito altas, como arranha-céus observados de cima ou de baixo, e vistas de avião.

Contudo, o mais importante, é saber qual o afastamento do Ponto de Observação [V]. Esta distância vai determinar um aspecto mais ou menos deformante da perspectiva. Quanto mais aumentamos o afastamento do Ponto de Observação [V] do Quadro, mais distantes ficam os Pontos de Fuga do Ponto Principal [P]. Utilizando esta alternativa, a perspectiva perde profundidade.

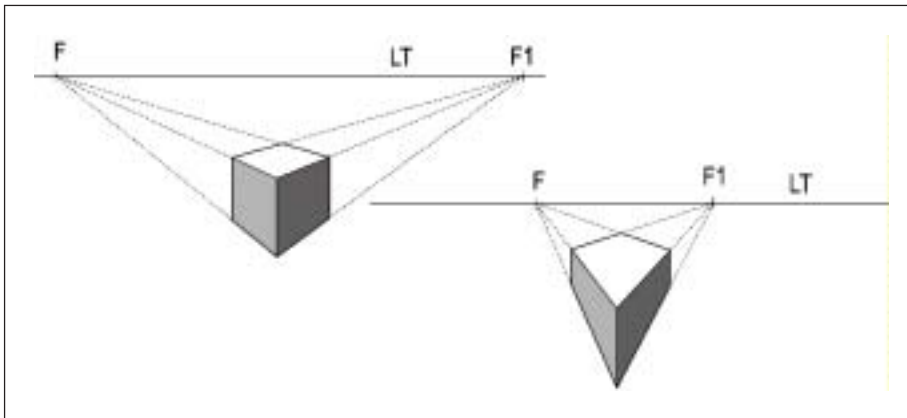


*Figura 61 - Posição ideal para determinar a perspectiva. Objecto colocado com as faces a 30° / 60° em relação ao Observador, a uma distância do Observador entre 2,5 a três vezes a sua dimensão e num ângulo de observação entre 30° a 40°.*

A posição do objecto na figura 61, em princípio, deve ter as duas direcções principais (horizontais), a fazerem com o plano do Quadro ângulos de 30° e 60°.

A distância do ponto de vista [V] ao Quadro, deve ser tal, que o ângulo máximo dos seus raios visuais, façam entre si um ângulo de 30° a 40°, e o Ponto de Vista [V], deve estar afastado do Quadro

duas e meia a três vezes, a maior dimensão do objecto a representar. A figura 61 é um esquema em planta de um possível traçado ideal da perspectiva. O Observador está distante do Quadro, 2,5 a 3 vezes a maior dimensão do objecto, que neste caso é o lado [a,b] ou o [d,c]. O objecto está colocado no ângulo ideal em relação ao Observador, fazendo os lados com o Quadro ângulos de 30° e 60°. O ângulo de abertura dos raios visuais (raios X e Y na figura) deve estar compreendido entre 30° a 40°. O último aspecto, que volto a referir, tem a ver com a colocação dos pontos de fuga. Sem exagerar, devem estar bem distanciados, para permitir uma perspectiva da forma ampla e não comprimida (ver figura 62).



*Figura 62 - No primeiro caso os pontos de fuga estão razoavelmente afastados entre si o que permite realizar uma perspectiva equilibrada. No segundo caso, a exagerada aproximação dos pontos de fuga provoca uma deformação acentuada da perspectiva.*

- Determinação da dimensão da perspectiva

Observe-se a figura 63. Em perspectiva, é possível previamente calcular a dimensão do desenho final, com rigor. Evitam-se assim tentativas frustrantes de conseguir a imagem ideal.

Basicamente apenas necessitamos de saber três das seguintes dimensões, para determinar a perspectiva: Altura do objecto [A,B]; Altura do objecto em perspectiva [a,b]; Distância do Observador ao objecto [D]; Distância do Observador ao Quadro [d].

Tendo três das dimensões acima descritas, basta utilizar a seguinte fórmula:

(altura do objecto / altura da perspectiva) = (distância do Observador ao objecto / Distância do Observador ao Quadro).

Observando a figura  $(AB / ab) = (D / d)$

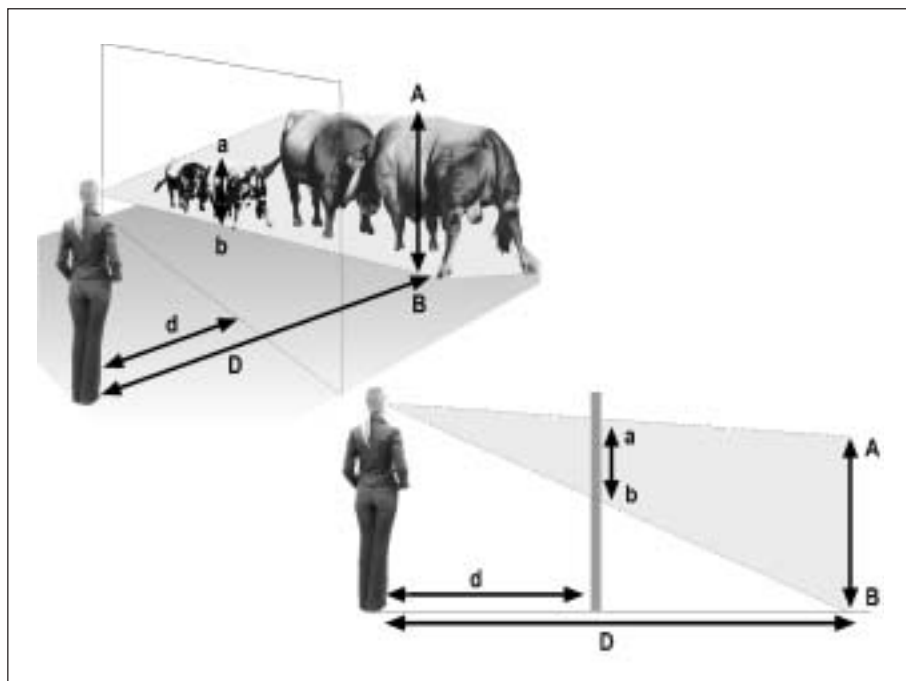


Figura 63 - Determinação das dimensões na perspectiva.

# Perspectiva linear

---

## 1 • Definições e teoremas

Começo por chamar a atenção do leitor, que embora a linguagem específica sobre a perspectiva não seja de difícil compreensão, para entender este e próximos capítulos, deve estar bem familiarizado com as noções do capítulo desta publicação: “*NOÇÕES BÁSICAS DE PERSPECTIVA*”.

É portanto fundamental compreender termos como: quadro [a]; plano geometral [b]; ponto de observação ou de vista [V]; linha de terra [LT]; linha do horizonte [LH]; ponto principal [P]; pontos de distância [D] e [D’]; ponto de fuga [F]; distância do observador ao quadro; altura do observador; ângulo de observação; raios visuais.

Este capítulo sobre perspectiva linear, irá abordar a determinação da perspectiva do ponto, recta, figuras geométricas e sólidos geométricos. Em qualquer dos casos, será exposto o processo através de exemplos práticos nas perspectivas paralela (um ponto de fuga) e oblíqua (dois pontos de fuga).

A designação de perspectiva linear, para este tipo, é pessoal. Todas as perspectivas rigorosas são cónicas ou lineares.



Figura 64 - Tapeçaria da sala de actos do Governo Civil de Bragança (800 cm x 800 cm). Luís Canotilho | 2000.

A geometria é também aplicada ao simbolismo humano. No presente caso as formas geométricas identificam a temática da Maçonaria Regular Universal associadas ao simbolismo da cultura universalista de Portugal.

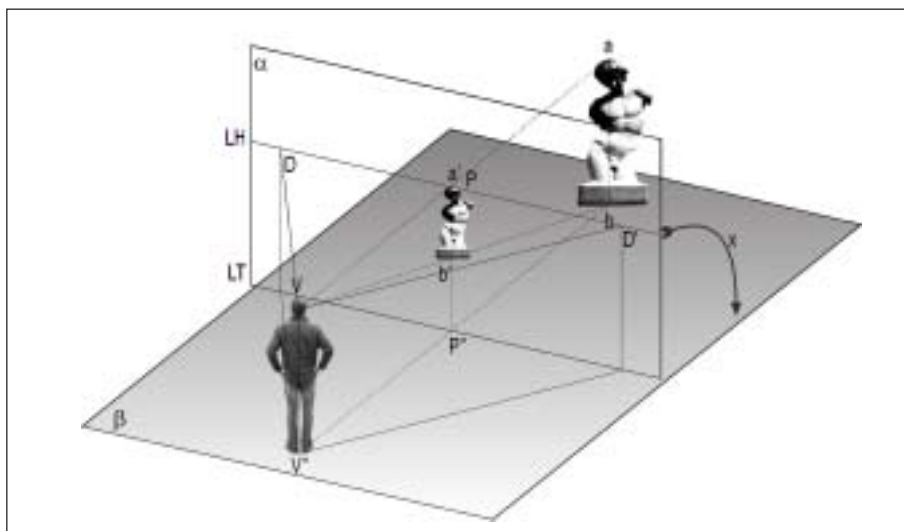


Figura 65 - Os elementos da linguagem da perspectiva linear: quadro [a]; plano geometral [b]; ponto de observação ou de vista [V]; linha de terra [LT]; linha do horizonte [LH]; ponto principal [P]; pontos de distância [D] e [D']; ponto de fuga [F]; distância do observador ao quadro; altura do observador; ângulo de observação; raios visuais.

A figura 65 identifica o meio em que se vai proceder o traçado da perspectiva, nomeando os elementos da sua linguagem. A distância em altura  $[V, V'']$  corresponde à posição em que se encontra o observador, sendo  $[V]$  o ponto de observação. Observam-se também, três raios visuais fundamentais para determinar a perspectiva:  $[V, D]$ ,  $[V, D']$  e  $[V, P]$ . Os dois primeiros intersectam a linha do horizonte  $[LH]$ , encontrando os pontos de distância  $[D]$  e  $[D']$ , enquanto que o terceiro determina, na sua intersecção com  $[LH]$ , o ponto principal  $[P]$ .

Com vértice em  $[V]$ , formam-se dois ângulos de  $45^\circ$  entre as rectas  $[V, D]$  e  $[V, P]$ , assim como também entre  $[V, P]$  e  $[V, D']$ , de tal maneira que  $[D, P = P, D' = V, P]$ . Os raios visuais  $[V, a]$  e  $[V, b]$  definem a forma do objecto, ao intersectarem o quadro  $[a]$  nos pontos  $[a']$  e  $[b']$ , dão a perspectiva da forma que, neste caso, é exemplificada por uma forma escultórica.

Este é o processo básico para determinar a perspectiva. No entanto, como se observa, foi determinada num espaço tridimensional, constituído por dois planos perpendiculares entre si,  $[a]$  e  $[b]$ , que se intersectam e formam uma recta designada de linha de terra  $[LT]$ .

Como estamos limitados ao espaço bidimensional da nossa folha de papel, é necessário rever o esquema apresentado. Para tal, vamos fazer rodar o plano  $[a]$  num eixo que é a linha de terra  $[LT]$ , sobre o plano geometral  $[b]$  (observe a indicação do movimento letra X). O resultado obtido é dado na figura 66. Representa o esquema que nos serviremos sempre, para determinar qualquer tipo de perspectiva.

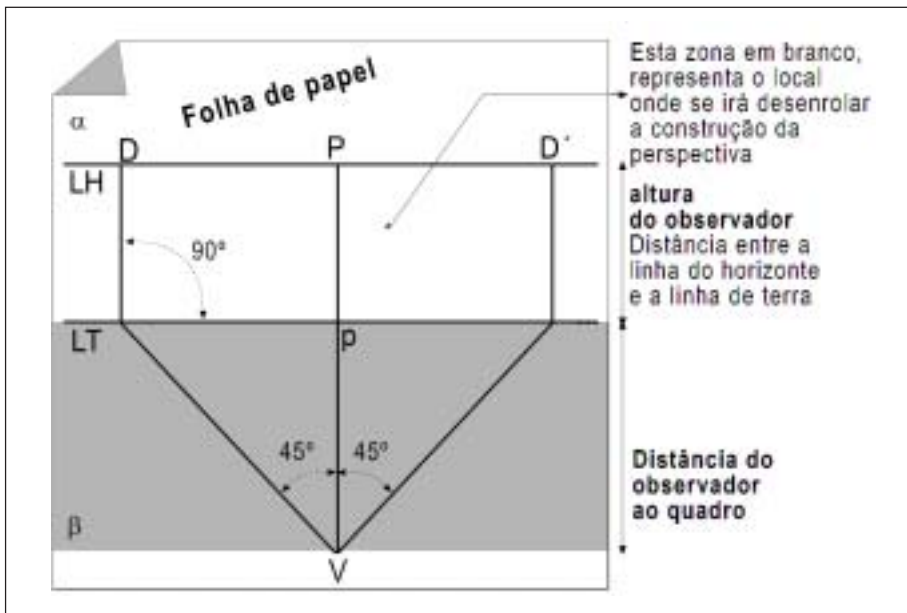


Figura 66 - Planificação do quadro e do plano geometral para a determinação da perspectiva.

O comprimento  $[V,P]$  corresponde à distância  $a$  que o observador  $[V]$  se encontra do quadro  $[a]$ .

O comprimento  $[P,p]$  corresponde à altura  $a$  que o observador se encontra. Trata-se da distância entre a linha de terra  $[LT]$  e a linha do horizonte  $[LH]$ . Seguidamente vou explicar o processo da determinação da perspectiva de uma recta (figura 67).

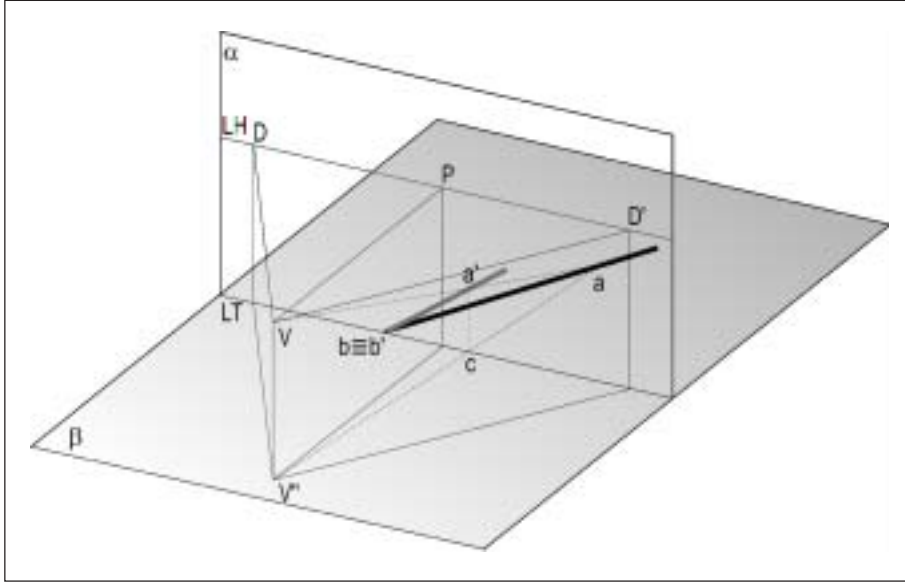


Figura 67 - Determinação da perspectiva de uma recta.

Uma recta não tem princípio nem fim, pelo que a sua identificação será dada através de dois pontos nela situados. No presente caso e seguintes, a recta  $[a,b]$  é identificada por esses dois pontos. Em todos os exemplos dados na demonstração dos teoremas, identifica-se a recta através dos pontos  $[b]$  que fica na intersecção da recta com a linha de terra e o ponto  $[a]$  qualquer.

O ponto de observação está situado em  $[V]$ , sendo  $[V,V'']$ , a altura do observador. Pretende-se determinar a perspectiva da recta  $[a,b]$  assente no plano geometral  $[b]$ . Tendo em conta que de qualquer ponto, recta, ou plano que coincida com o quadro  $[a]$  resultará a sua perspectiva em dimensão e forma real. O ponto  $[b]$  ao intersecar o quadro  $[a]$  coincide com a sua perspectiva que será identificada pelo ponto  $[b']$ .

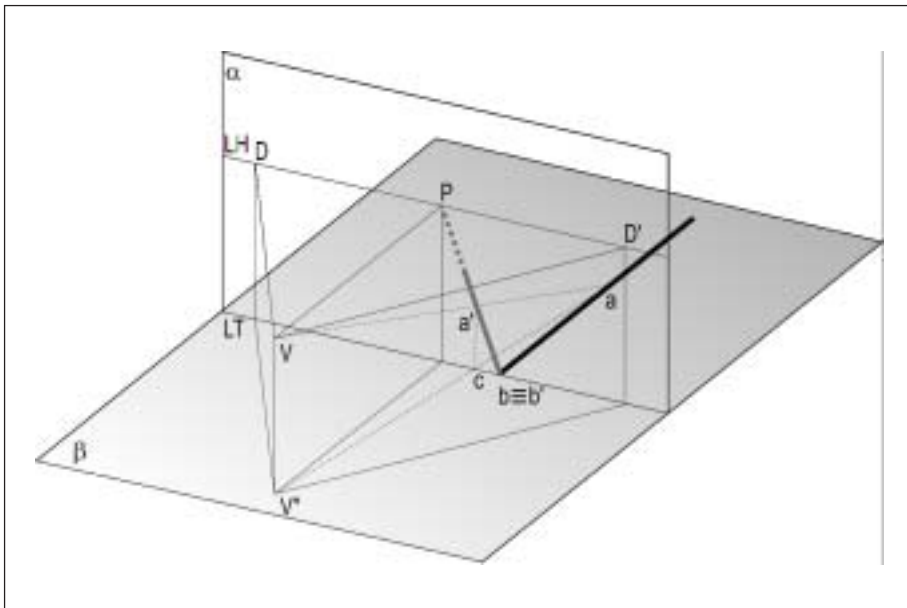
Determinação da perspectiva da recta  $[a,b]$ :

O ponto  $[b]$  já está em perspectiva, por estar situado sobre o plano do quadro. Do ponto de vista  $[V]$  traçamos um raio visual que intersece o ponto  $[a]$  da recta  $[a,b]$ . Da projecção do ponto de vista  $[V']$  sobre o plano geometral, traçamos uma projecção do raio visual

que intersecte também o ponto [a] da recta [a,b]. O raio [V'',a] vai intersectar o quadro [a] no ponto [c] situado sobre a linha de terra [LT]. A partir do ponto [c] e no sentido vertical, traçamos um segmento de recta até intersectar em [a'] o raio visual [V,a]. [a'] é a perspectiva do ponto [a]. Fazendo passar uma recta pelos pontos [a'] e [b'] obtemos a perspectiva da recta [a,b].

A compreensão da perspectiva passa pelo entendimento da posição da recta no espaço. Vamos então proceder ao estudo e compreensão prática de alguns teoremas relacionados com a posição espacial da recta.

**1.1 · Perspectiva de uma recta de topo (recta perpendicular ao quadro)**



*Figura 68 - Determinação da perspectiva de uma recta de topo (Perpendicular em relação ao quadro).*

Observe-se a figura 68. Trata-se da perspectiva de uma recta de topo [a,b], que intersecta o quadro [a] no ponto [b] situado sobre a linha de terra. Existe coincidência do ponto [b] com a respectiva perspectiva [b']. Trata-se de um ponto situado sobre o quadro pelo que corresponde à perspectiva em verdadeira grandeza.

Determinação da perspectiva da recta [a,b]:

O ponto [b] já está em perspectiva, por estar situado sobre

o plano do quadro. Do ponto de vista [V] traçamos um raio visual que intersecte o ponto [a] da recta [a,b]. Da projecção do ponto de vista [V''] sobre o plano geometral, traçamos uma projecção do raio visual que intersecte também o ponto [a] da recta [a,b]. O raio [V'',a] vai intersectar o quadro [a] no ponto [c] situado sobre a linha de terra [LT]. A partir do ponto [c] e no sentido vertical, traçamos um segmento de recta até intersectar em [a'] o raio visual [V,a]. [a'] é a perspectiva do ponto [a]. Fazendo passar uma recta pelos pontos [a'] e [b'] obtemos a perspectiva da recta [a,b].

Prolongando a perspectiva da recta [a',b'], verifica-se que se dirige para um ponto específico situado sobre a linha do horizonte [LH]: O ponto principal [P].

TEOREMA: O PONTO DE FUGA DE UMA RECTA DE TOPO É O PONTO PRINCIPAL [P].

### 1.2 · Perspectiva de uma recta de fuga [recta oblíqua ao quadro]

Observe-se agora a figura 69. Trata-se da perspectiva de uma recta de fuga [a,b], que intersecta o quadro [a] no ponto [b] situado sobre a linha de terra. Existe coincidência do ponto [b] com a respectiva perspectiva [b']. Trata-se de um ponto situado sobre o quadro pelo que corresponde à perspectiva em verdadeira grandeza. O processo de determinação da perspectiva da recta [a,b] já foi demonstrado em exemplo anterior (perspectiva de uma recta). Depois de se ter determinado a perspectiva, prolongando a recta [a',b'], verifica-se que se dirige para um ponto qualquer sobre a linha do horizonte [LH].

TEOREMA: O PONTO DE FUGA DE UMA RECTA DE FUGA É UM PONTO SITUADO SOBRE A LINHA DO HORIZONTE [LH].

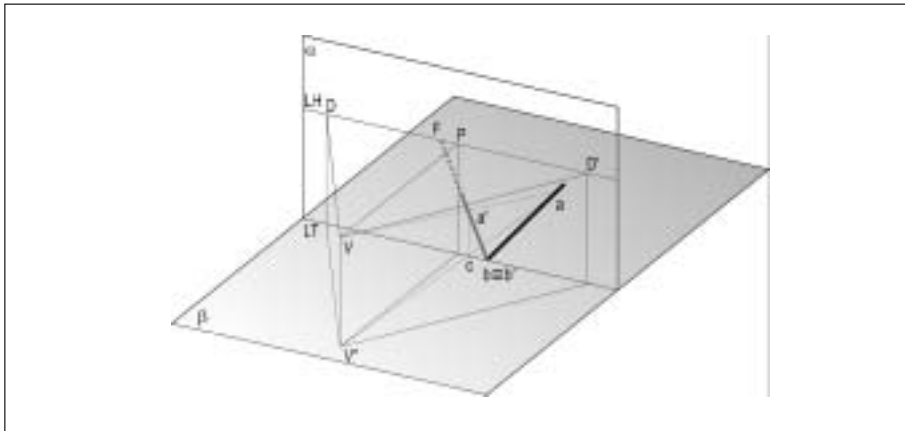
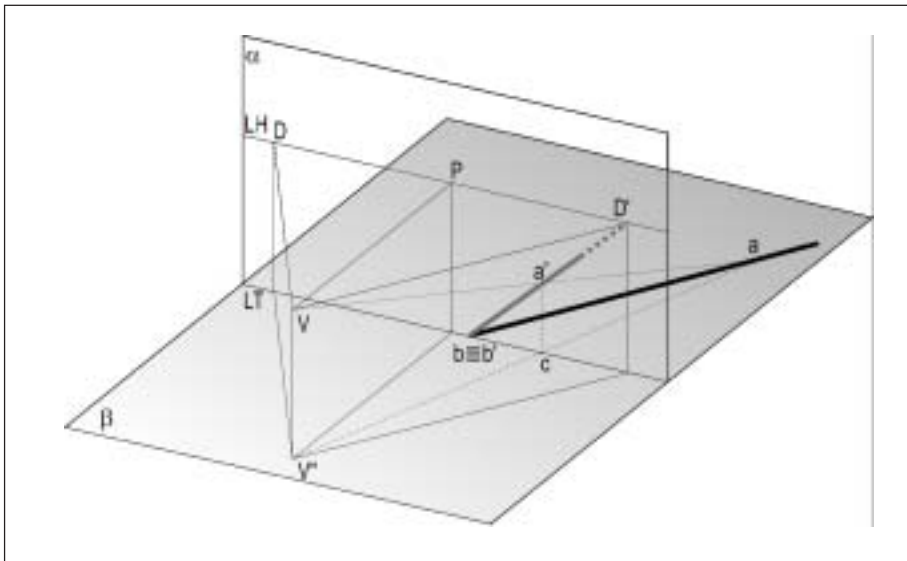


Figura 69 - Determinação da perspectiva de uma recta de fuga (oblíqua em relação ao quadro).

**1.3 · Perspectiva de uma recta de fuga a 45° (recta oblíqua ao quadro a 45°)**

Observe-se agora a figura 70. Trata-se da perspectiva de uma recta de fuga [a,b], que intersecta o quadro [a] no ponto [b] situado sobre a linha de terra. Existe coincidência do ponto [b] com a respectiva perspectiva [b’]. Trata-se de um ponto situado sobre o quadro pelo que corresponde à perspectiva em verdadeira grandeza. O processo de determinação da perspectiva da recta [a,b] já foi demonstrado em exemplo anterior (perspectiva de uma recta). Depois de se ter determinado a perspectiva, prolongando a recta [a’,b’], verifica-se que se dirige para um ponto específico situado sobre a linha do horizonte [LH]: O ponto de distância [D’]. Se a recta [a,b] fizesse o ângulo de 45° para o lado esquerdo, o seu ponto de fuga seria o ponto de distância [D’].

**TEOREMA: O PONTO DE FUGA DE UMA RECTA DE FUGA A 45° É UM DOS PONTOS DE DISTÂNCIA [D] OU [D’].**



*Figura 70 - Determinação da perspectiva de uma recta de fuga a 45° (oblíqua a 45° em relação ao quadro).*

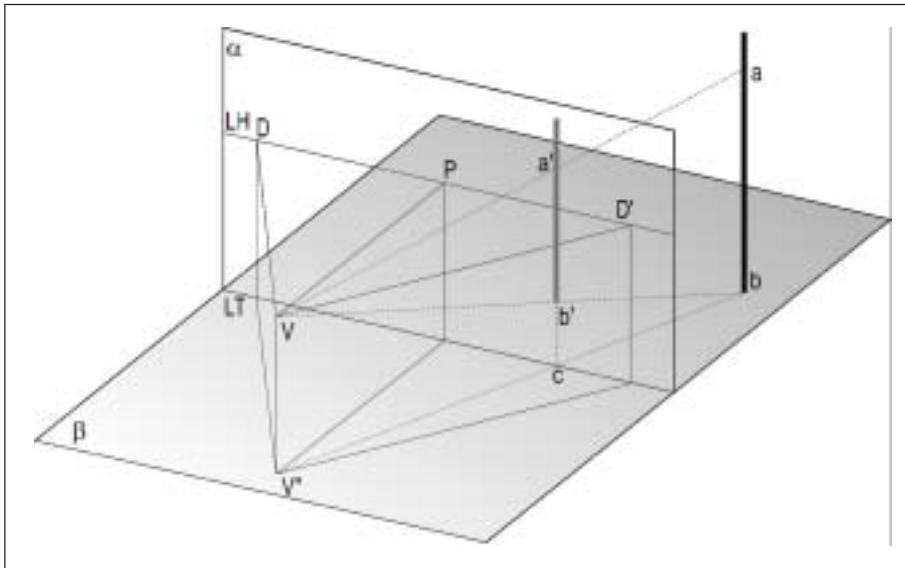
**1.4 · Perspectiva de uma recta de frente (recta paralela ao quadro)**

Observe-se agora as figuras 71 e 72. Trata-se da perspectiva de uma recta de frente [a,b]. No primeiro caso é uma recta de frente

vertical. O segundo caso é uma recta de frente horizontal. Ambas as rectas estão assentes no plano geometral. O processo de determinação da perspectiva da recta [a,b] já foi demonstrado em exemplo anterior (perspectiva de uma recta). Depois de se ter determinado a perspectiva, prolongando a recta [a',b'], verifica-se que não se dirige para a linha do horizonte [LH]. A sua perspectiva [a',b'] é uma recta paralela à própria recta [a,b].

Os exemplos dados nas figuras 71 e 72 são as perspectivas de duas rectas de frente, uma vertical de frente e a outra horizontal de frente.

**TEOREMA: A RECTA DE FRENTE NÃO TÊM PONTO DE FUGA, SENDO A SUA PERSPECTIVA UMA RECTA PARALELA À PRÓPRIA RECTA.**



*Figura 71 - Determinação da perspectiva de uma recta vertical de frente (paralela em relação ao quadro).*

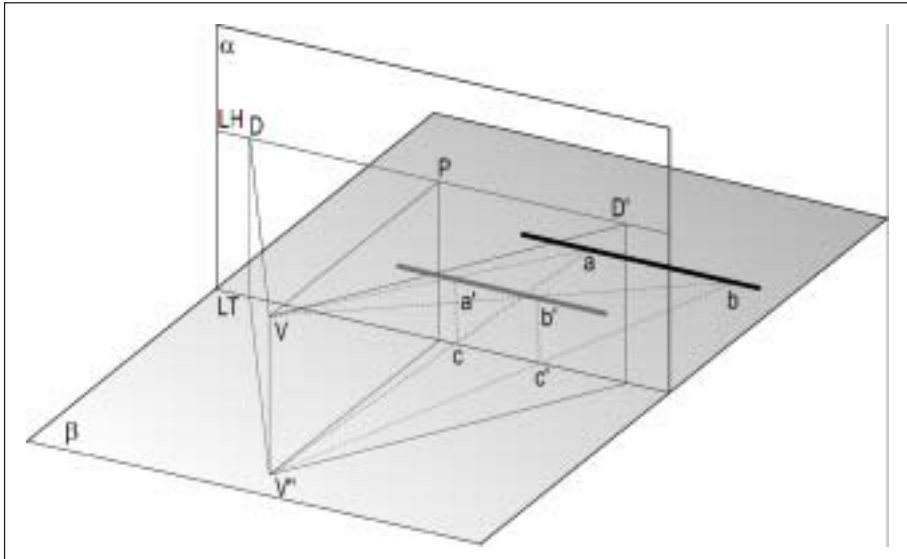


Figura 72 - Determinação da perspectiva de uma recta horizontal de frente (paralela em relação ao quadro).

### 1.5 • Perspectiva de uma recta não assente no plano geometral

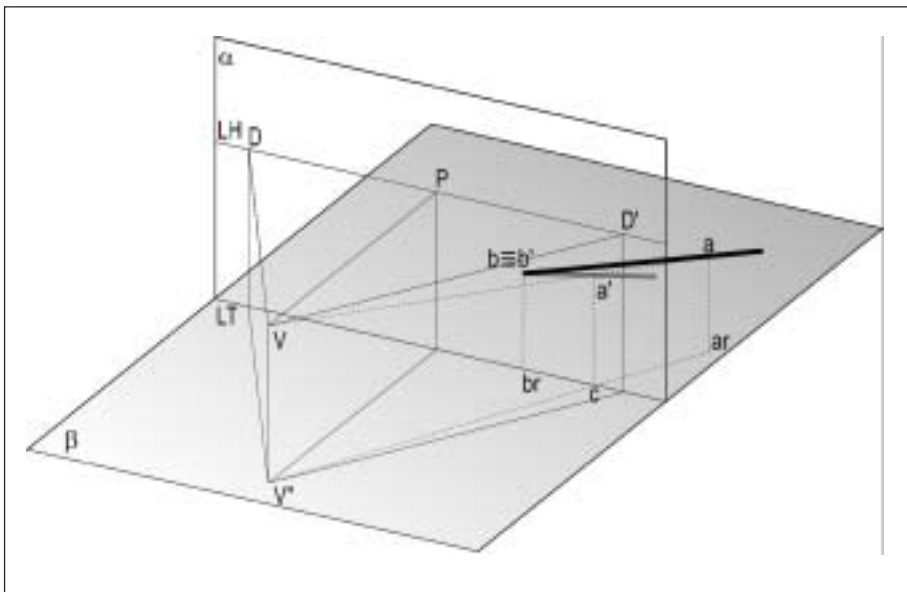


Figura 73 - Determinação da perspectiva de uma recta não assente no plano geometral.

Observe-se a figura 73. Trata-se da perspectiva da recta [a,b] não assente no plano geometral [b], que intersecta o quadro [a] no ponto [b] não situado sobre a linha de terra.

Quando uma recta não está assente sobre o plano geometral [b], é necessário determinar em primeiro lugar a sua projecção no referido plano. A recta [a,b] tem como projecção no plano geometral [b], os pontos [ar] e [br].

Novamente, existe coincidência do ponto [b] com a respectiva perspectiva [b']. Trata-se de um ponto situado sobre o quadro pelo que corresponde à perspectiva em verdadeira grandeza.

Determinação da perspectiva da recta [a,b]:

O ponto [b] já está em perspectiva, por estar situado sobre o plano do quadro. Do ponto de vista [V] traçamos um raio visual que intersecte o ponto [a] da recta [a,b]. Da projecção do ponto de vista [V''] sobre o plano geometral, traçamos uma projecção do raio visual que intersecte também o ponto [ar] que é a projecção do ponto [a] sobre o plano geometral [b]. O raio [V'',ar] vai intersectar o quadro [a] no ponto [c] situado sobre a linha de terra [LT]. A partir do ponto [c] e no sentido vertical, traçamos um segmento de recta até intersectar em [a'] o raio visual [V,a]. [a'] é a perspectiva do ponto [a]. Fazendo passar uma recta pelos pontos [a'] e [b'] obtemos a perspectiva da recta [a,b].

## 2 · Perspectiva do ponto e da recta

### 2.1 · Perspectiva do ponto

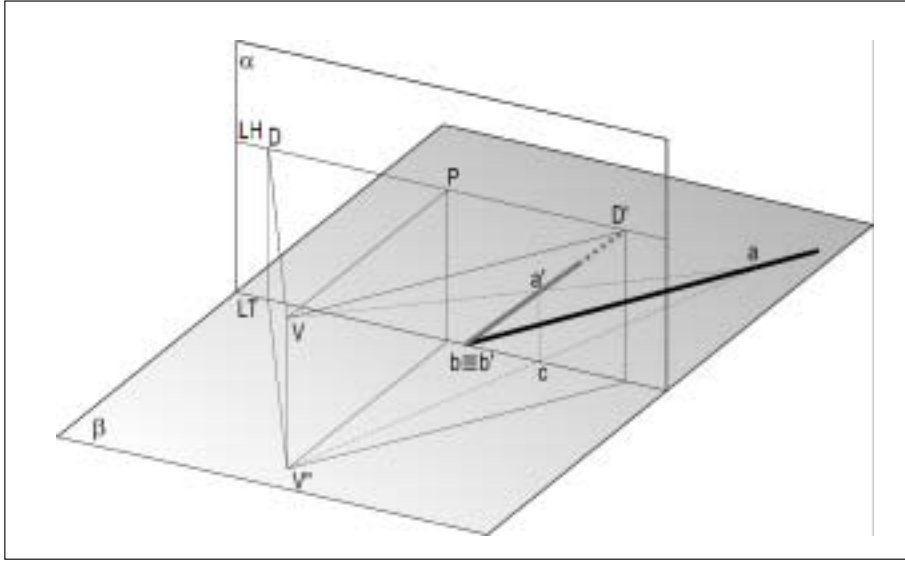
Vou iniciar agora, a determinação rigorosa da perspectiva, começando como é natural, pelo ponto. Tendo em conta as demonstrações e definições relacionadas com a recta e a sua perspectiva, abordados na figura 68, vou tentar fazer compreender o traçado rigoroso da perspectiva.

A figura 74 representa a determinação da perspectiva de uma recta de topo (perpendicular em relação ao quadro), cuja demonstração concluía através do teorema: *O PONTO DE FUGA DE UMA RÉCTA DE TOPO É O PONTO PRINCIPAL [P]*.

A figura 75 representa a determinação da perspectiva da mesma recta de topo, agora com o quadro [a] rebatido sobre o plano geometral [b] a partir do eixo da linha de terra [LT]. Estamos agora perante a determinação da perspectiva num plano bidimensional.



A figura 76 representa a determinação da perspectiva de uma recta de fuga a  $45^\circ$  (oblíqua a  $45^\circ$  em relação ao quadro), cuja demonstração concluiu através do teorema: *O PONTO DE FUGA DE UMA RECTA DE FUGA A  $45^\circ$  É UM DOS PONTOS DE DISTÂNCIA [D] OU [D']*.



*Figura 76 - Determinação da perspectiva de uma recta de fuga a  $45^\circ$  (oblíqua a  $45^\circ$  em relação ao quadro).*

A figura 77 representa a determinação da perspectiva da mesma recta de fuga a  $45^\circ$ , agora com o quadro [a] rebatido sobre o plano geometral [b] a partir do eixo da linha de terra [LT]. Estamos agora perante a determinação da perspectiva num plano bidimensional.

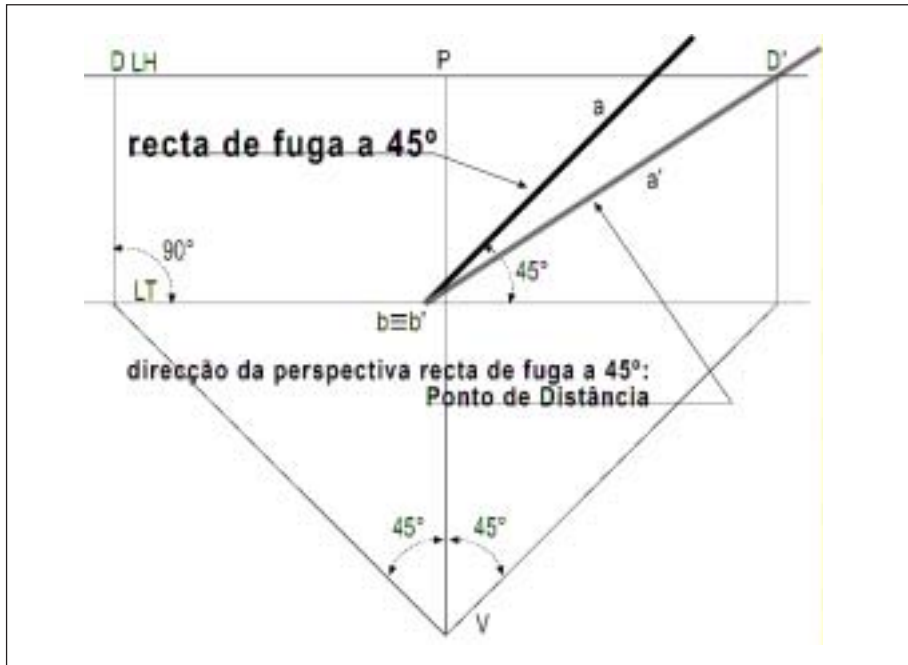


Figura 77 - Determinação da perspectiva de uma recta de fuga a 45° (obliqua a 45° em relação ao quadro) num espaço bidimensional.

A figura 78 representa a determinação da perspectiva do ponto.

Pretende-se determinar o ponto [X]. Tendo em conta os teoremas relativos à perspectiva das rectas de topo e de fuga a 45°, procedemos da seguinte maneira:

- Pelo ponto [X] fazemos passar a recta de topo [a] que intersecta o quadro [a] em [1], tendo como perspectiva o ponto principal [P];

- De seguida, fazemos agora passar pelo ponto [X] uma recta de fuga a 45° [b] que intersecta o quadro [a] em [2], tendo como perspectiva o ponto de distância [D];

- Da intersecção das perspectivas das rectas de topo e de fuga a 45° obtém-se o ponto [X'] que é a perspectiva do ponto [X].

Resumindo, tendo em conta que a definição de ponto corresponde à intersecção de duas rectas, limitámo-nos a intersectar uma recta de topo com uma recta de fuga a 45°, sabendo através dos teoremas estudados que têm como perspectiva respectivamente, o ponto principal [P] e um dos pontos de distância [D] ou [D'].





Para a determinação da perspectiva, existem, desde já, dois aspectos determinantes para um exercício correcto: elevado nível de concentração e rigor. No que respeita à concentração, alguns exercícios, não podem ser abandonados a meio, por qualquer motivo. Resulta que a perda de concentração e de seguimento de raciocínio, implicará a observação posterior de todas as fases iniciais, para que o desenhador se situe na fase em que parou.

### 3.1 · Perspectiva paralela de um quadrado assente no plano geometral

O quadrado [a,b,c,d] representado na figura 80 está em perspectiva paralela (as faces não fazem qualquer ângulo com o observador, ou seja, o ângulo de observação é de  $0^\circ$ ). Neste tipo de perspectiva o ponto principal [P] coincide com único ponto de fuga [F].

A distância entre a linha do horizonte [LH] e a linha de terra [LT] corresponde à altura a que se encontra o observador [V]. O observador [V] está situado a uma distância do quadro [a] que corresponde no gráfico à distância que vai desde a linha de terra [LT] ao ponto de vista ou observador [V]. O ponto principal [P] corresponde à intersecção do raio visual principal que sai do observador [V] e intersecta a linha do horizonte [LH]. O exercício inicia-se representando o gráfico onde estão os elementos acima descritos em dimensão real. Inclui-se então os pontos de distância [D] e [D'] que se obtêm a partir de dois raios visuais que saem do observador [V] fazendo ângulos de  $45^\circ$  (para a direita e esquerda) e intersectam a linha de terra [LT]. Os mesmos raios visuais dirigem-se então verticalmente para a linha do horizonte [LH].

Resolução:

Inicia-se o exercício representando sempre a planta da forma [a,b,c,d] em dimensão real e a traço ponto (no gráfico está a cinzento claro).

O lado [d,c] por coincidir com o quadro [a] tem uma perspectiva igual à sua dimensão real [d',c'], já que os pontos [d''ad'] e [c''ac']. Lembro que qualquer ponto, recta ou plano que coincida com o quadro [a], tem como perspectiva o ponto, a recta ou plano de igual dimensão.

Falta determinar a perspectiva dos pontos [a] e [b]. Por cada um dos pontos fazemos passar uma recta de topo que tem como direcção da sua perspectiva o ponto principal [P] e uma recta de fuga a  $45^\circ$  que terá como direcção da sua perspectiva o ponto de distância [D]. A intersecção destas duas rectas de topo e de fuga a  $45^\circ$  permite obter respectivamente os pontos [a'] e [b'].

Da união dos pontos obtidos em perspectiva [a'], [b'], [c'] e [d'] obtemos a perspectiva [a',b',c',d'].

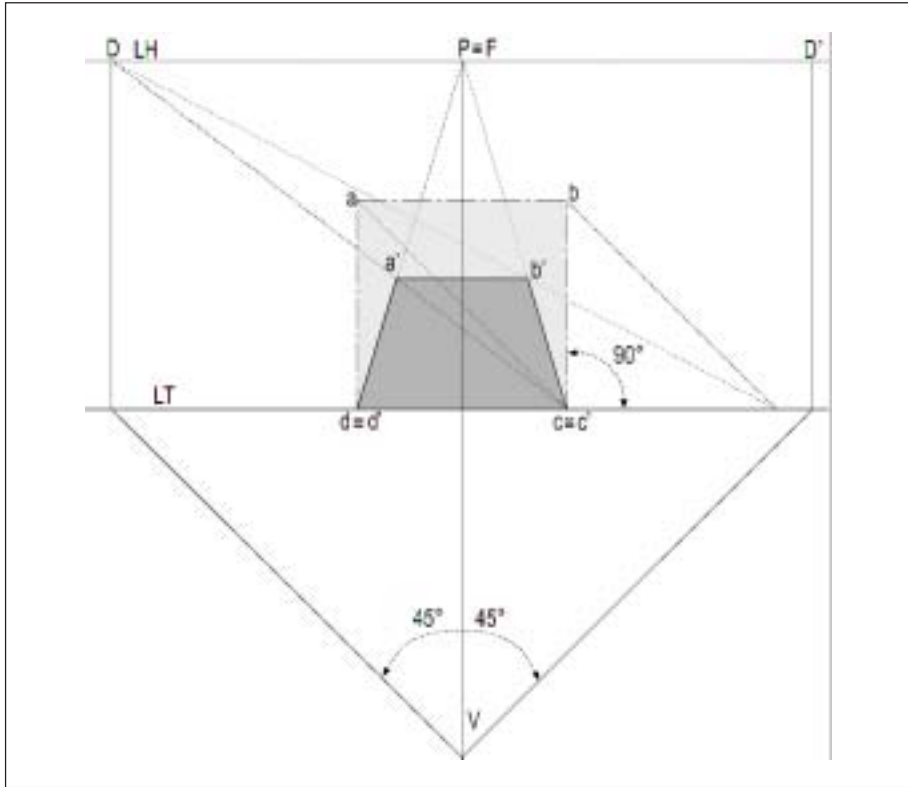


Figura 80 - Determinação da perspectiva paralela do quadrado [a,b,c,d].

A figura 81 representa o mesmo exercício.

Tendo o perfeito conhecimento e entendimento dos teoremas anteriormente descritos, o exercício torna-se bastante simples, evita-se a confusão de inúmeras linhas (no caso da perspectiva de várias formas) e ganha-se em rapidez de execução.

Teoremas a ter em conta no traçado da perspectiva:

- O PONTO DE FUGA DE UMA RECTA DE TOPO É O PONTO PRINCIPAL [P].

- O PONTO DE FUGA DE UMA RECTA DE FUGA A 45° É UM DOS PONTOS DE DISTÂNCIA [D] OU [D'].

- A RECTA DE FRENTE NÃO TEM PONTO DE FUGA, SENDO A SUA PERSPECTIVA UMA RECTA PARALELA À PRÓPRIA RECTA.

Resolução do exercício:

Os pontos [d''ad'] e [c''ac'] por estarem situados sobre o quadro [a].

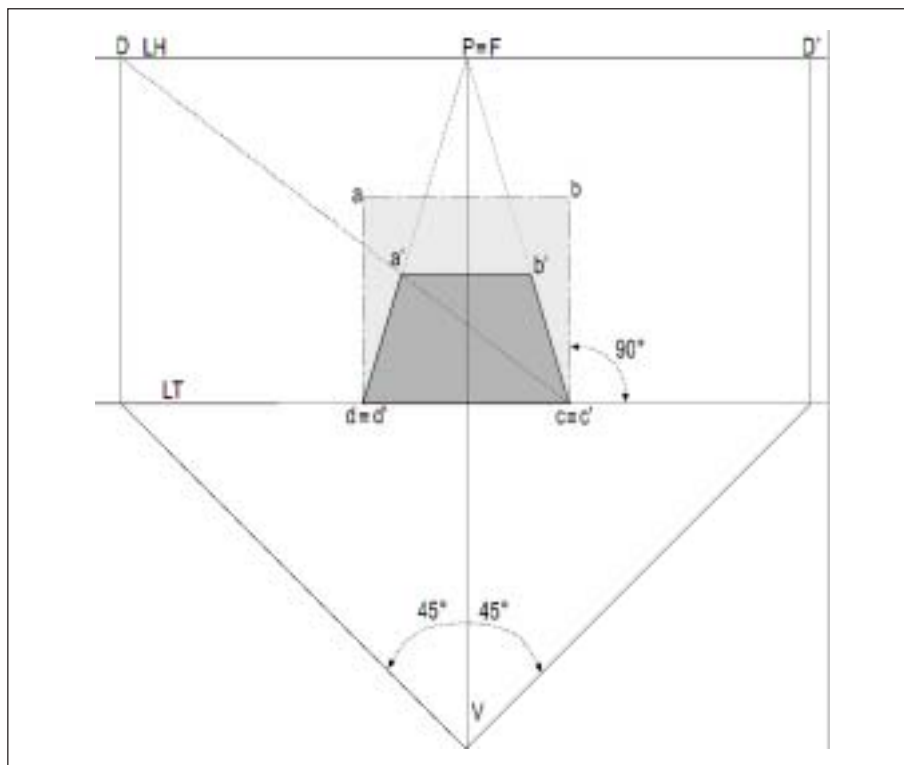


Figura 81 - Determinação da perspectiva paralela do quadrado  $[a,b,c,d]$  recorrendo aos teoremas.

Os lados  $[a,d]$  e  $[b,c]$  do quadro  $[a,b,c,d]$  representado na figura 81, por estarem em posição vertical em relação ao quadro  $[a]$ , são segmentos de recta de topo, pelo que a sua perspectiva é o ponto principal  $[P]$ . Podemos então traçar as direcções dos lados  $[a,d]$  e  $[b,c]$  unindo o ponto principal  $[P]$  aos vértices em perspectiva  $[d']$  e  $[c']$ .

Necessitamos agora de determinar os vértices  $[a]$  e  $[b]$  em perspectiva. Dado que a figura geométrica é um quadrado  $[a,b,c,d]$  cuja posição em relação ao observador  $[V]$  é paralela, as suas diagonais são segmentos de rectas de fuga a  $45^\circ$ . Recorrendo ao teorema, sabemos que as rectas de fuga a  $45^\circ$  têm como perspectiva os pontos de distância  $[D]$  ou  $[D']$ . No presente caso, basta unir um dos vértices do quadrado em perspectiva  $[c']$  ou  $[d']$  respectivamente com um dos pontos de distância  $[D]$  ou  $[D']$ . No presente caso uniu-se o vértice  $[c']$  em perspectiva com o ponto de distância  $[D]$ . Ao intersectar o segmento de recta  $[d',P]$  obtém-se o vértice em perspectiva  $[a']$ .

Falta determinar a perspectiva do ponto  $[b]$ . Recorrendo novamente a um teorema e sabendo que os lados  $[a,b]$  e  $[c,d]$  do

quadrado  $[a,b,c,d]$  são segmentos de rectas de frente, basta fazer passar pelo vértice em perspectiva  $[a']$ , uma recta de frente que intersecte o segmento de recta  $[c',P]$ . Obtemos assim o vértice em perspectiva  $[b']$ .

Termina o exercício unindo os vértices em perspectiva obtidos  $[a']$ ,  $[b']$ ,  $[c']$  e  $[d']$ .

### 3.2 · Perspectiva paralela de um quadrado não assente no plano geométral

Resolução do exercício (figura 82):

O exercício tem início com a construção da grelha para determinar a perspectiva do quadrado  $[a,b,c,d]$ . Desenham-se as linhas de terra  $[LT]$  e do horizonte  $[LH]$  cuja distância entre si corresponde à altura  $a$  que se encontra o observador  $[V]$ . Traça-se o raio visual principal  $[V,P]$  cuja distância entre a linha de terra  $[LT]$  e o ponto de observação  $[V]$  corresponde à distância do observador  $[V]$

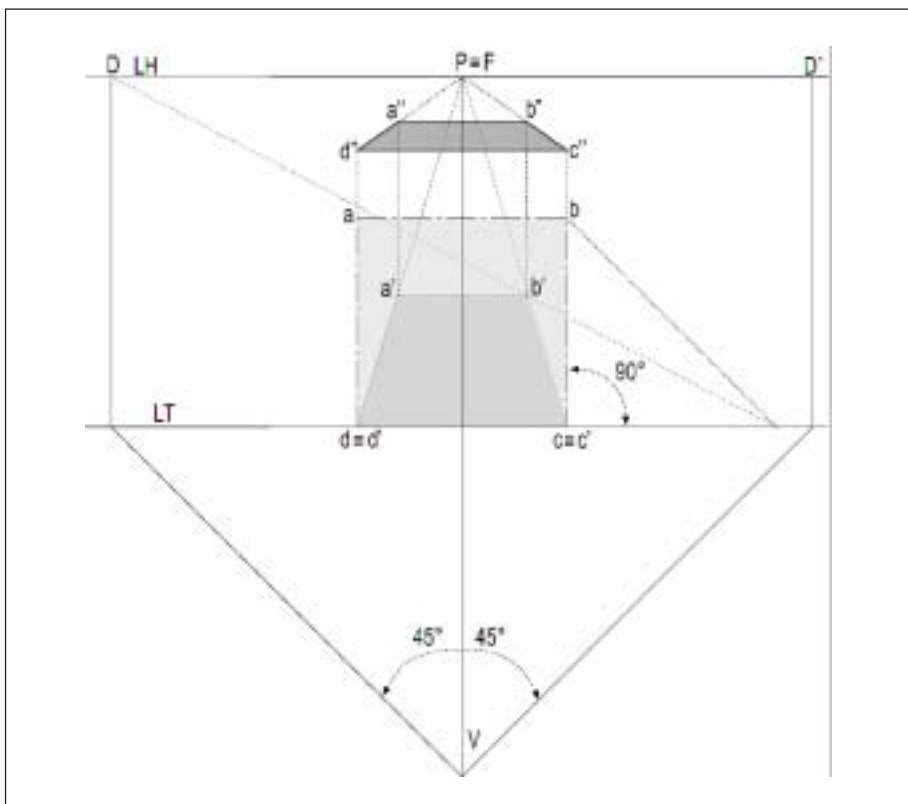


Figura 82 - Determinação da perspectiva paralela do quadrado  $[a,b,c,d]$  não assente no plano geométral.

ao quadro [a]. Sendo o ângulo de observação igual a  $0^\circ$ , estamos perante um caso de perspectiva paralela. Neste tipo de perspectiva o ponto principal [P] coincide com único ponto de fuga [F].

Iniciamos o exercício no momento em que se determinou a perspectiva [a',b',c',d'] do quadrado como se estivesse assente no plano geometral [b]. Se houver alguma dúvida quanto ao procedimento, estudar o processo anteriormente descrito.

Traçamos as distâncias [d',d''] e [c',c''] a partir dos pontos em perspectiva do lado [d',c']. Estas distâncias traçadas correspondem à verdadeira altura a que se pretende determinar o quadrado (lembro que a perspectiva de um ponto, recta ou figura situado sobre o quadro [a] corresponde a uma perspectiva em igual grandeza). Obtemos o lado [d'',c''].

Unindo os vértices [d''] e [c''] ao ponto principal [P] obtemos as direcções das arestas superiores de topo do quadrado. Traçando duas rectas verticais a partir dos pontos [a'] e [b'] até intersectarem os segmentos de recta [d'',P] e [c'',P], obtêm-se os vértices em perspectiva [a''] e [b''].

A união dos vértices [a''], [b''], [c''] e [d''] permite obter a perspectiva do quadrado não assente no plano geometral [b].

### **3.3 • Perspectiva oblíqua de um quadrado a $45^\circ$ em relação ao observador e assente no plano geometral**

O quadrado [a,b,c,d] representado na figura 83 está em perspectiva oblíqua a  $45^\circ$  (as faces fazem um ângulo de  $45^\circ$  com o observador). Neste tipo de perspectiva oblíqua a  $45^\circ$ , o ponto de distância [D] coincide com o 1.º ponto de fuga [F], o ponto de distância [D'] coincide com o 2.º ponto de fuga [F1].

Repetindo os necessários procedimentos anteriores, A distância entre a linha do horizonte [LH] e a linha de terra [LT] corresponde à altura a que se encontra o observador [V]. O observador [V] está situado a uma distância do quadro [a] que corresponde no gráfico à distância que vai desde a linha de terra [LT] ao ponto de vista ou observador [V]. O ponto principal [P] corresponde à intersecção do raio visual principal que sai do observador [V] e intersecta a linha do horizonte [LH]. O exercício inicia-se representando o gráfico onde estão os elementos acima descritos em dimensão real. Inclui-se então os pontos de distância [D] e [D'] que se obtêm a partir de dois raios visuais que saem do observador [V] fazendo ângulos de  $45^\circ$  (para a direita e esquerda) e intersectam a linha de terra [LT]. Os mesmos raios visuais dirigem-se então verticalmente para a linha do horizonte [LH].

Resolução:

Inicia-se o exercício representando sempre a planta da forma [a,b,c,d] em dimensão real e a traço ponto (no gráfico está a cinzento claro), fazendo o ângulo de  $45^\circ$  com o observador [V].

O vértice [c] por coincidir com o quadro [a] tem uma perspectiva igual à sua dimensão real [c'].

Falta determinar a perspectiva dos pontos [a] [b] e [d]. Quando numa forma já possuímos um ponto em perspectiva, devemos eleger o ponto oposto para determinar a sua perspectiva, como método e para facilitar a construção. No presente caso vamos determinar a perspectiva do ponto [a]. Pelo ponto [a] fazemos passar uma recta de topo que tem como direcção da sua perspectiva o ponto principal [P] e uma recta de fuga a 45° que terá como direcção da sua perspectiva o ponto de distância [D]. A intersecção destas duas rectas de topo e de fuga a 45° permite obter o ponto [a'].

Sabendo que o quadrado [a,b,c,d] está a 45° em relação ao observador [V], os seus lados são rectas de fuga a 45°. Através do teorema, sabemos que os lados do quadrado têm como perspectiva os pontos de distância [D] e [D'].

Traçamos então e em primeiro lugar dois segmentos de recta dirigidos ao ponto em perspectiva [c'] a partir dos dois pontos de distância [D] e [D'], obtendo assim as direcções dos lados em

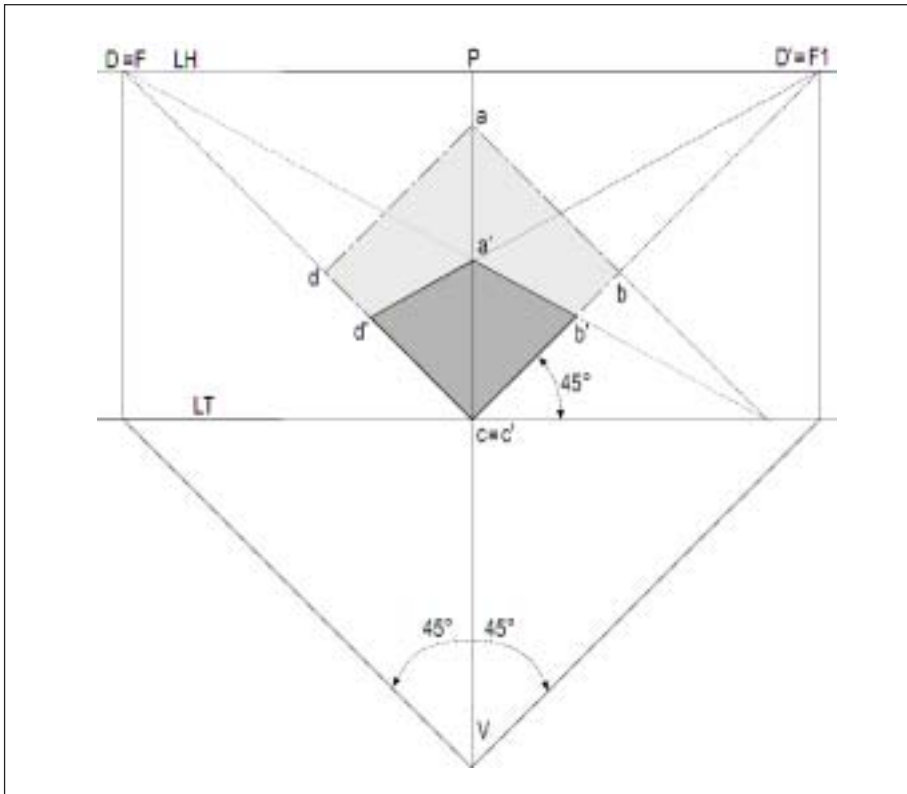


Figura 83 - Determinação da perspectiva oblíqua a 45° do quadrado [a,b,c,d] assente no plano geométral.

perspectiva  $[c',d']$  e  $[c',b']$ . Novamente e a partir dos pontos de distância  $[D]$  e  $[D']$  traçamos dois segmentos de recta que passarão pelo ponto  $[a']$  e intersectarão os segmentos de recta  $[D,c']$  e  $[D',c']$  obtendo-se os vértices em perspectiva  $[d']$  e  $[b']$ .

Da união dos pontos obtidos em perspectiva  $[a']$ ,  $[b']$ ,  $[c']$  e  $[d']$  obtemos a perspectiva do quadrado  $[a',b',c',d']$ .

### **3.4 · Perspectiva obliqua de um quadrado em ângulo diferente de 45° em relação ao observador e assente no plano geométral**

O quadrado  $[a,b,c,d]$  representado na figura 84 está em perspectiva oblíqua, mas agora num ângulo diferente de 45°. No exemplo dado têm um ângulo de observação de 40° (as faces fazem um ângulo de 40° com o observador). Neste tipo de perspectiva oblíqua, quando o ângulo de observação é diferente de 45°, os pontos de distância  $[D]$  e  $[D']$  não coincidem com os pontos de fuga  $[F]$  e  $[F1]$ .

Inicia-se novamente o exercício através da construção da linha do horizonte  $[LH]$ , linha de terra  $[LT]$ , posição do observador  $[V]$  e o ponto principal  $[P]$ . Traçam-se os pontos de distância  $[D]$  e  $[D']$  que se obtêm a partir de dois raios visuais que saem do observador  $[V]$  fazendo ângulos de 45° (para a direita e esquerda) e intersectam a linha de terra  $[LT]$ . Os mesmos raios visuais dirigirem-se então verticalmente para a linha do horizonte  $[LH]$ .

Contudo, agora estamos perante um novo caso, o sólido geométrica não está em relação ao observador a 45°, os pontos de distância  $[D]$  e  $[D']$  não coincidem com os pontos de fuga  $[F]$  e  $[F1]$ . Assim sendo, traçam-se os pontos de fuga  $[F]$  e  $[F1]$  que se obtêm a partir de dois raios visuais que saem do observador  $[V]$  fazendo entre si um ângulo de 90° e de 40° com o observador (para a direita e esquerda) e intersectam a linha de terra  $[LT]$ . Os mesmos raios visuais dirigirem-se então verticalmente para a linha do horizonte  $[LH]$ . Observar com atenção a figura 84. Resolução:

Inicia-se o exercício representando sempre a planta da forma  $[a,b,c,d]$  em dimensão real e a traço ponto (no gráfico está a cinzento claro), fazendo o ângulo de 40° com o observador  $[V]$ .

O vértice  $[c]$  por coincidir com o quadro  $[a]$  tem uma perspectiva igual à sua dimensão real  $[c']$ .

Falta determinar a perspectiva dos pontos  $[a]$   $[b]$  e  $[d]$ . Quando numa forma já possuímos um ponto em perspectiva, devemos eleger o ponto oposto para determinar a sua perspectiva, como método e para facilitar a construção. No presente caso vamos determinar a perspectiva do ponto  $[a]$ . Pelo ponto  $[a]$  fazemos passar uma recta de topo que tem como direcção da sua perspectiva o ponto principal  $[P]$  e uma recta de fuga a 45° que terá como direcção da sua perspectiva o ponto de distância  $[D]$ . A intersecção destas duas rectas de topo e de fuga a 45° permite obter o ponto  $[a']$ .

Sabendo que o quadrado  $[a,b,c,d]$  está a 40° em relação ao observador  $[V]$ , os seus lados embora sejam rectas de fuga, não estão

a  $45^\circ$  pelo que o teorema não tem aplicação aos pontos de distância [D] e [D']. No entanto, o problema Já foi resolvido ao colocarmos os pontos de fuga [F] e [F1] a fazerem entre si um ângulo de  $90^\circ$  e de  $40^\circ$  com o observador [V].

Traçamos então e em primeiro lugar dois segmentos de recta dirigidos ao ponto em perspectiva [c'] a partir dos dois pontos de fuga [F] e [F1], obtendo assim as direcções dos lados em perspectiva [c',d'] e [c',b']. Novamente e a partir dos pontos de fuga [F] e [F1] traçamos dois segmentos de recta que passarão pelo ponto [a'] e intersectarão os segmentos de recta [F,c'] e [F1,c'] obtendo-se os vértices em perspectiva [d'] e [b'].

Da união dos pontos obtidos em perspectiva [a'], [b'], [c'] e [d'] obtemos a perspectiva do cubo [a',b',c',d'].

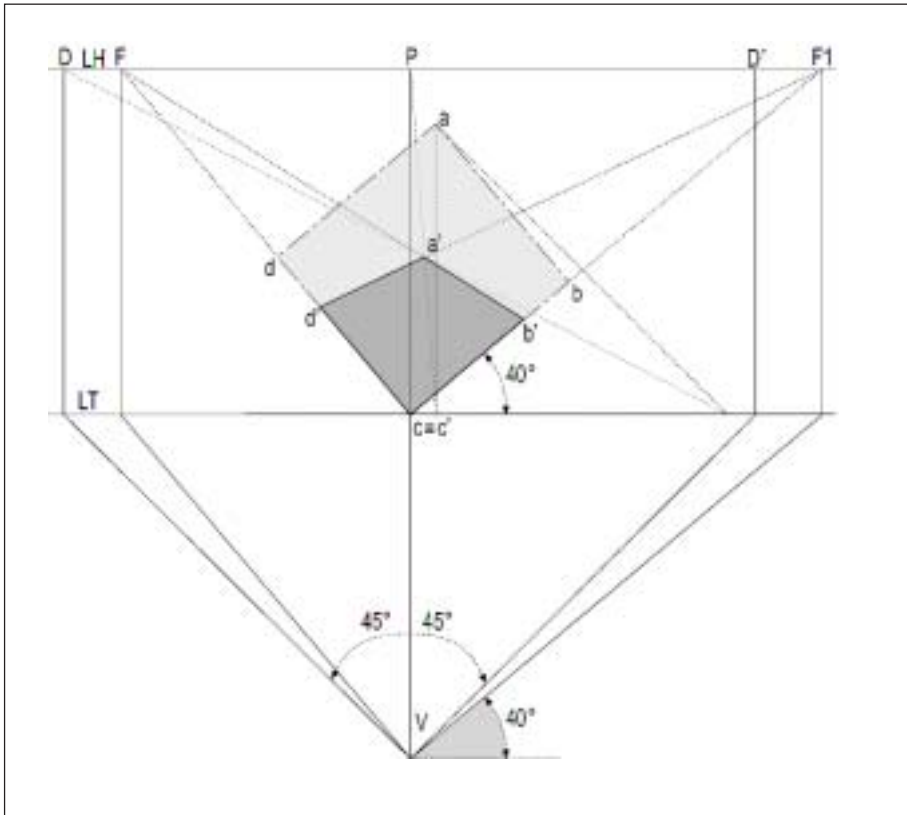


Figura 84 - Determinação da perspectiva oblíqua do quadrado [a,b,c,d] a  $40^\circ$  assente no plano geometral.

### 3.4 • Perspectiva paralela de uma circunferência assente no plano geometral

Estamos pela primeira vez perante uma figura geométrica cujos lados não são segmentos de recta. A circunferência, como qualquer outra figura ou sólido geométrico com lados ou faces curvas, obriga para determinar a sua perspectiva a inseri-lo numa figura ou sólido geométrico com lados ou faces planas. A circunferência representa um bom exemplo, já que para a determinação da sua perspectiva, tem de ser inserida num quadrado cujas diagonais e medianas permitem identificar os pontos necessários à perspectiva.

Vamos identificar, em todos os exercícios desta publicação, as formas redondas através de números. A circunferência [1,2,3,4,5,6,7,8] foi inserida no quadrado [a,b,c,d] representado na figura 85 em perspectiva paralela. Traçam-se as diagonais e as

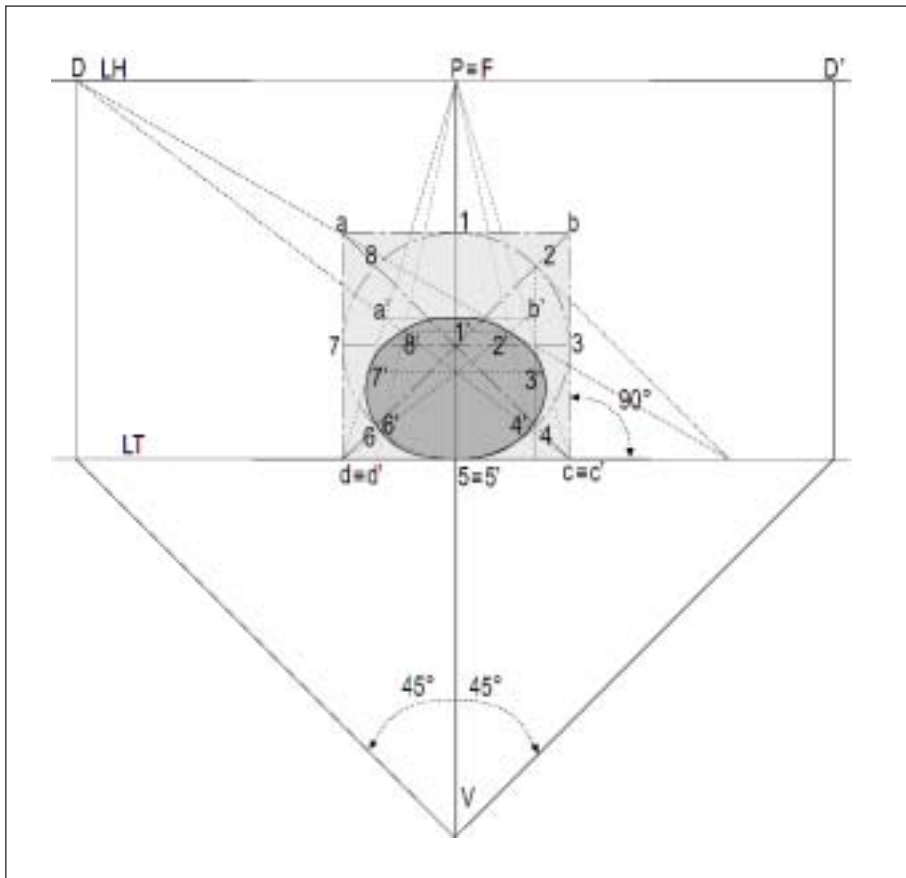


Figura 85 - Determinação da perspectiva paralela da circunferência assente no plano geometral.

medianas do quadrado, obtendo-se assim os oito pontos necessários para a construção da perspectiva da circunferência. Neste tipo de perspectiva o ponto principal [P] coincide com o ponto de fuga [F].

Inicia-se novamente o exercício através da construção da grelha. Lembra que estas fases já foram repetidas por várias vezes nos exercícios anteriores.

Após a determinação da perspectiva do quadrado  $[a', b', c', d']$ , traçam-se as medianas e diagonais respectivas. Traçadas as medianas obtêm-se os pontos em perspectiva da circunferência  $[1']$ ,  $[3']$ ,  $[5']$  e  $[7']$ , faltando determinar os restantes pontos em perspectiva  $[2']$ ,  $[4']$ ,  $[6']$  e  $[8']$ . Quatro pontos não chegam para determinar a perspectiva de uma circunferência já que o rigor é muito reduzido.

Pelo ponto  $[2]$  fazemos passar uma recta de topo que tem como direcção da sua perspectiva o ponto principal [P] e uma recta de fuga a  $45^\circ$  que terá como direcção da sua perspectiva o ponto de distância [D]. A intersecção destas duas rectas de topo e de fuga a  $45^\circ$  permite obter o ponto  $[2']$ . Obtido o ponto  $[2']$ , traçamos um segmento de recta de frente na direcção esquerda que ao intersectar a diagonal  $[a', c']$  permite encontrar o ponto em perspectiva  $[8']$ . Pelos pontos em perspectiva  $[8']$  e  $[2']$ , fazemos passar dois segmentos de recta a partir do ponto principal [P] que ao intersectarem respectivamente as diagonais do quadrado  $[b', d']$  e  $[a', c']$  permitem obter os pontos  $[6']$  e  $[4']$ .

Da união rigorosa dos pontos obtidos em perspectiva  $[1']$ ,  $[2']$ ,  $[3']$ ,  $[4']$ ,  $[5']$ ,  $[6']$ ,  $[7']$  e  $[8']$  obtemos a perspectiva da circunferência.

### 3.5 · Perspectiva oblíqua de uma circunferência em ângulo diferente de $45^\circ$ em relação ao observador e assente no plano geometral

O quadrado  $[a, b, c, d]$  onde está inserida a circunferência  $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ , representado na figura 86, está em perspectiva oblíqua, mas agora num ângulo diferente de  $45^\circ$ . No exemplo dado têm um ângulo de observação de  $40^\circ$  (as faces fazem um ângulo de  $40^\circ$  com o observador). Neste tipo de perspectiva oblíqua, quando o ângulo de observação é diferente de  $45^\circ$ , os pontos de distância [D] e  $[D']$  não coincidem com os pontos de fuga [F] e  $[F1]$ .

Após a determinação da perspectiva do quadrado  $[a', b', c', d']$ , traçam-se as medianas e diagonais respectivas. Traçadas as medianas obtêm-se os pontos em perspectiva da circunferência  $[1']$ ,  $[3']$ ,  $[5']$  e  $[7']$ , faltando determinar os restantes pontos em perspectiva  $[2']$ ,  $[4']$ ,  $[6']$  e  $[8']$ . Elegemos o ponto  $[4]$  pelo qual fazemos passar uma recta de topo que tem como direcção da sua perspectiva o ponto principal [P] e uma recta de fuga a  $45^\circ$  que terá como direcção da sua perspectiva o ponto de distância [D]. A intersecção destas duas rectas de topo e de fuga a  $45^\circ$  permite obter o ponto  $[4']$ . Obtido o ponto  $[4']$  fazemos passar por ele dois segmentos de recta desde [F] e  $[F1]$  que ao intersectarem a diagonal em perspectiva  $[b', d']$  permitem encontrar

respectivamente os pontos em perspectiva [2'] e [6']. Traçando um novo segmento de recta desde [F] até [6'] intersectamos a diagonal do quadrado em perspectiva [a',c'] encontrando assim o ponto em falta [8'].

Da união cuidadosa dos pontos obtidos em perspectiva [1'], [2'], [3'], [4'], [5'], [6'], [7'] e [8'] obtemos a perspectiva da circunferência.

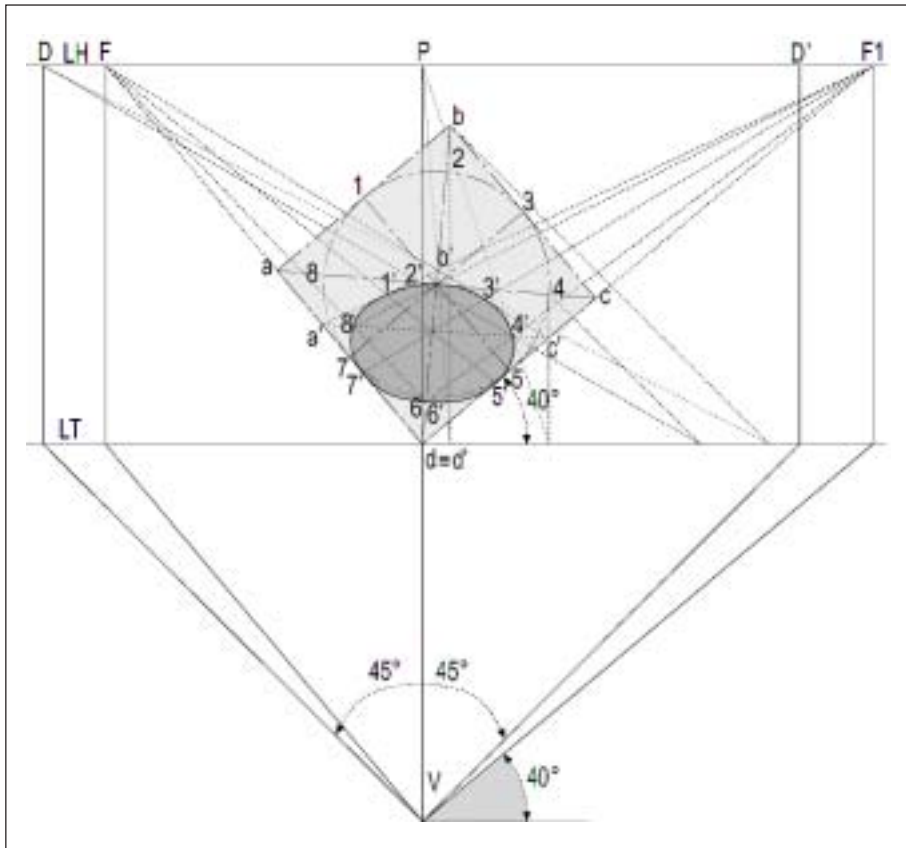


Figura 86 - Determinação da perspectiva oblíqua da circunferência a 40° no plano geometral.

#### 4 • Os três casos de perspectiva

Agora que aprendemos a determinar a perspectiva do ponto, da recta e de figuras geométricas podemos concluir que existem três casos diferentes de perspectiva, também comuns à construção de sólidos geométricos que vamos passar a identificar:

**Perspectiva paralela;**  
**Perspectiva oblíqua a 45°;**  
**Perspectiva oblíqua em ângulo diferente de 45°.**

**4.1 • Perspectiva paralela**

Observe-se a figura 87 cujas faces fazem um ângulo de 0° com o observador. O observador [V] estabelece uma abertura de 90° entre os seus braços e um paralelismo com as faces da figura geométrica.

O braço esquerdo está em paralelismo com os lados [a,d] e [b,c] do quadrado apontando sem dúvida alguma para o único ponto de fuga [F] que coincide com o ponto principal [P].

O braço direito está em paralelismo com os lados [a,b] e [d,c] apontado para a direita. Jamais intersectará a linha de terra [LT] pelo que não é possível encontrar outro ponto de fuga.

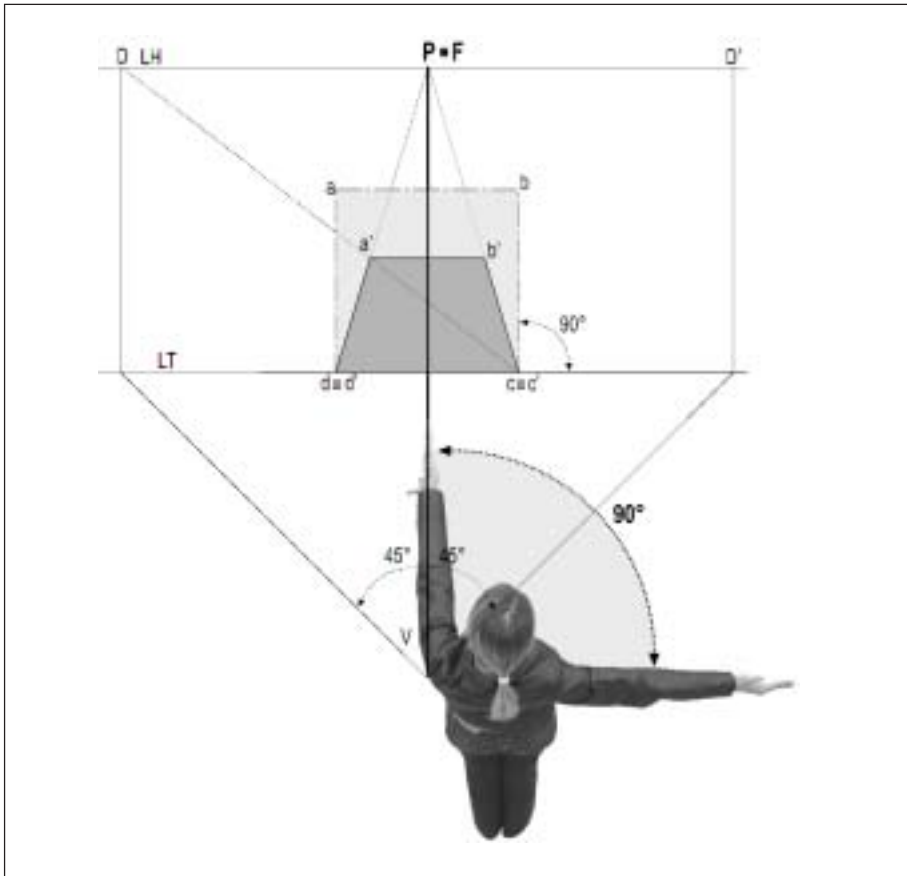


Figura 87 - Perspectiva paralela.

A perspectiva Paralela tem um Ponto de Fuga [F] que é coincidente com o Ponto Principal [P].

### 4.2 · Perspectiva oblíqua a 45°

Observe-se a figura 88 cujas faces fazem um ângulo de 45° com o observador. O observador [V] estabelece uma abertura de 90° entre os seus braços e um paralelismo com as faces da figura geométrica.

O braço esquerdo está em paralelismo com os lados [d,c] e [a,b] do quadrado apontando sem dúvida alguma para o ponto de fuga [F] que coincide com o ponto de distância [D].

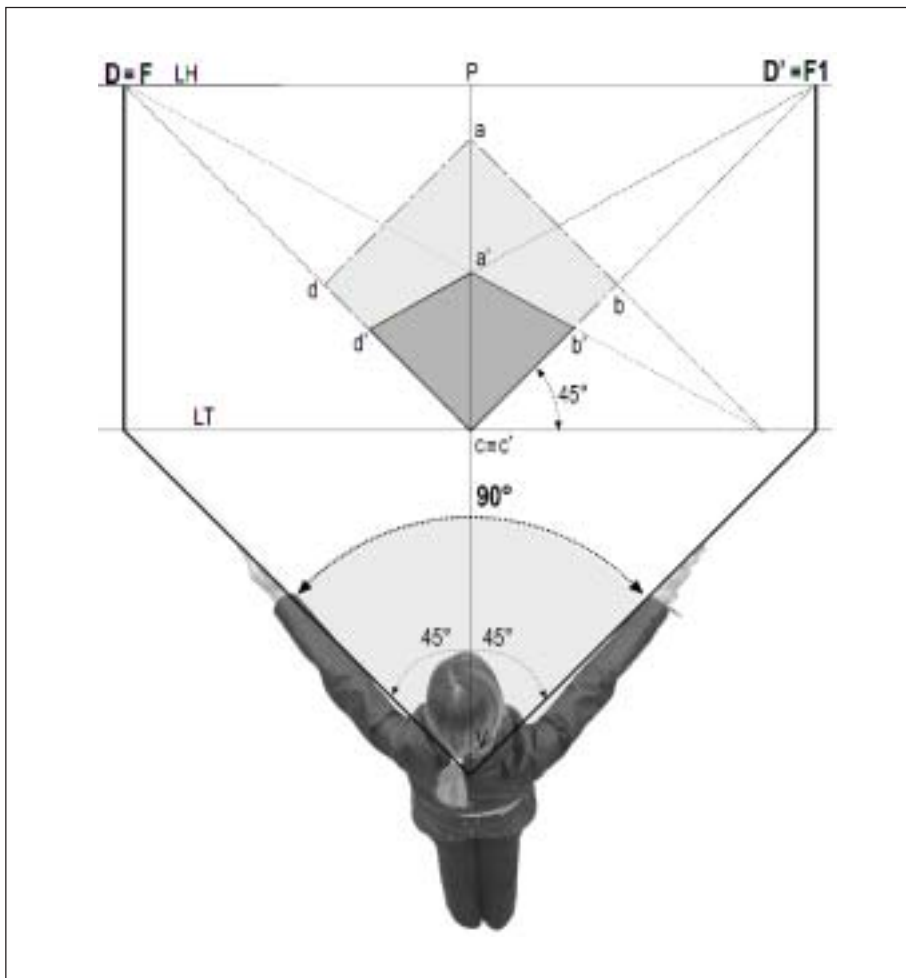


Figura 88 - Perspectiva oblíqua a 45°.

O braço direito está em paralelismo com os lados [d,a] e [c,b] do quadrado apontando sem dúvida alguma para o ponto de fuga [F1] que coincide com o ponto de distância [D'].

A perspectiva Oblíqua a 45° tem dois Pontos de Fuga [F] e [F1] que coincidem respectivamente com os Pontos de Distância [D] e [D'].

**4.3 · Perspectiva oblíqua em ângulo diferente de 45°**

Observe-se a figura 89 cujas faces fazem um ângulo diferente de 45° com o observador (o exemplo apresenta um ângulo de 40°). O observador [V] estabelece uma abertura de 90° entre os seus braços e um paralelismo com as faces da figura geométrica.

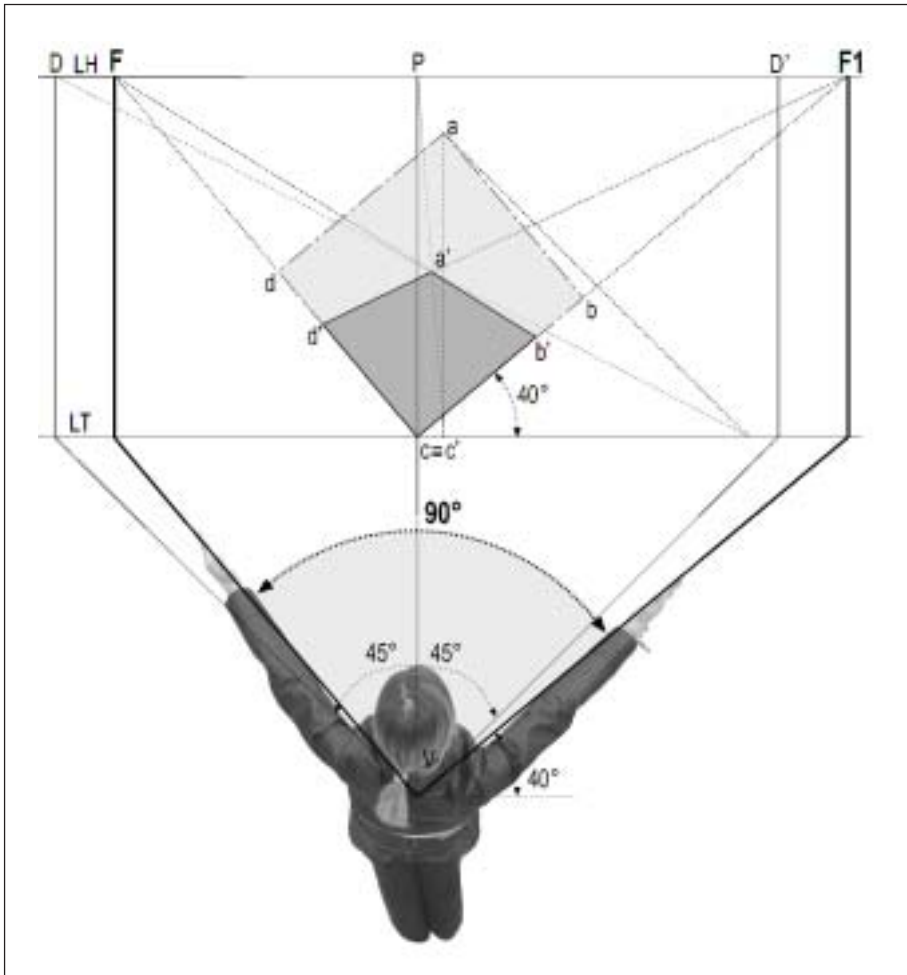


Figura 89 - Perspectiva oblíqua em ângulo diferente de 45°.

O braço esquerdo está em paralelismo com os lados [d,c] e [a,b] do quadrado apontando sem dúvida alguma para o ponto de fuga [F].

O braço direito está em paralelismo com os lados [d,a] e [c,b] do quadrado apontando sem dúvida alguma para o ponto de fuga [F1].

A perspectiva Oblíqua em ângulo diferente de 45° tem dois Pontos de Fuga [F] e [F1] que não coincidem com os Pontos de Distância [D] e [D'].

## 5 • Perspectiva de sólidos geométricos

Terminada a abordagem aos casos específicos da perspectiva de figuras geométricas, o presente capítulo irá esclarecer o processo, relativamente aos sólidos geométricos conhecidos (cubo, pirâmide, cilindro, cone e esfera).

O conhecimento do processo de construção em perspectiva, destes sólidos geométricos, permitirá resolver qualquer situação particular, embora haja casos que não evitarão um raciocínio mais profundo. Não esquecer que a construção de qualquer forma conhecida, seja animal, vegetal ou mineral, tem sempre, como base, o seu envolvimento num sólido geométrico, revelando-se este como o princípio único.

As figuras 90 e 91 estabelecem respectivamente, a representação das projecções ortogonais de um cubo, através do método europeu de representação. Observam-se os seus alçados, a planta e a vista por baixo. Contudo, conforme se verifica, o recurso a este tipo de representação para o caso do cubo é desnecessário. Todos sabemos que o cubo é um sólido geométrico com seis faces quadradas e iguais. O mesmo conhecimento do cubo possui em relação à definição física dos outros sólidos. Portanto, o recurso a este tipo de projecção tão completa, apenas é útil para o caso de formas em que as faces são diferentes.

| n° | designação                 | posição em relação ao alçado principal |
|----|----------------------------|--|
| 1  | alçado frente ou principal |  |
| 2  | planta                     | por baixo                              |
| 3  | alçado lateral esquerdo    | à direita                              |
| 4  | alçado lateral direito     | à esquerda                             |
| 5  | vista por baixo            | por cima                               |
| 6  | vista por detrás           | à direita                              |

Figura 91 - Posição das faces em relação ao alçado principal.

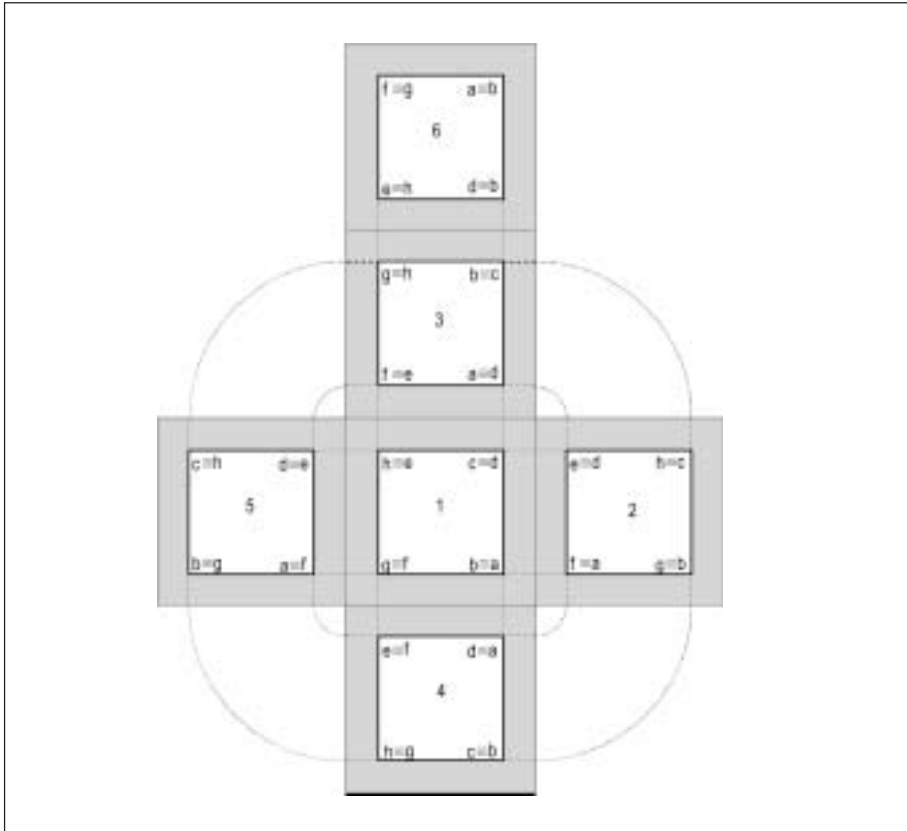


Figura 90 - Projeções ortogonais das faces do cubo.

### 5.1 • Perspectiva paralela

O primeiro caso, de perspectiva paralela, tem a ver com a colocação das faces ou arestas da forma em relação ao observador. Sabemos que, qualquer plano vertical ou recta, em posição de topo, em relação ao observador [V], tem como perspectiva o ponto principal [P]. Também os planos verticais ou rectas de frente, que estão numa posição de paralelismo com o quadro, não têm ponto de fuga. Têm como perspectiva planos e rectas paralelas ao próprio plano e recta.

Nos casos que se seguem, os sólidos geométricos têm de estar com as faces paralelas ou de topo em relação ao quadro. Existe portanto, um único ponto de fuga [F] que coincide com o ponto principal [P]. O cubo é o sólido mais elucidativo, para a aprendizagem da representação de volumes geométricos.

### 5.1.1 • Perspectiva paraçca do cubo assente no plano geometral

Resolução do exercício (figura 92):

O exercício tem início com a construção da grelha para determinar a perspectiva do cubo. Desenham-se a linha de terra [LT] e a linha do horizonte [LH] cuja distância entre si corresponde à altura a que se encontra o observador [V]. Traça-se o raio visual principal [V,P] cuja distância entre a linha de terra [LT] e o ponto de observação [V] corresponde à distância do observador [V] ao quadro [a]. Sendo o ângulo de observação igual a  $0^\circ$ , estamos perante um caso de perspectiva paralela. Neste tipo de perspectiva o ponto principal [P] coincide com único ponto de fuga [F].

Após a representação da planta do cubo [a,b,c,d] é determinada a sua perspectiva [a',b',c',d'].

Iniciamos o exercício no momento em que se determinou a perspectiva [a',b',c',d'] do cubo como se estivesse assente no plano geometral [b]. Se houver alguma dúvida quanto ao procedimento, estudar o processo já anteriormente descrito.

Traçamos as distâncias [d',d''] e [c',c''] a partir dos pontos em perspectiva do lado [d',c']. Estas distâncias traçadas correspondem à verdadeira altura a que se pretende determinar a face de frente do cubo (lembro que a perspectiva de um ponto, recta, figura ou forma situado sobre o quadro [a] corresponde a uma perspectiva em igual grandeza).

Unindo os vértices [d''] e [c''] ao ponto principal [P] obtemos as direcções das arestas superiores de topo do cubo. Traçan-

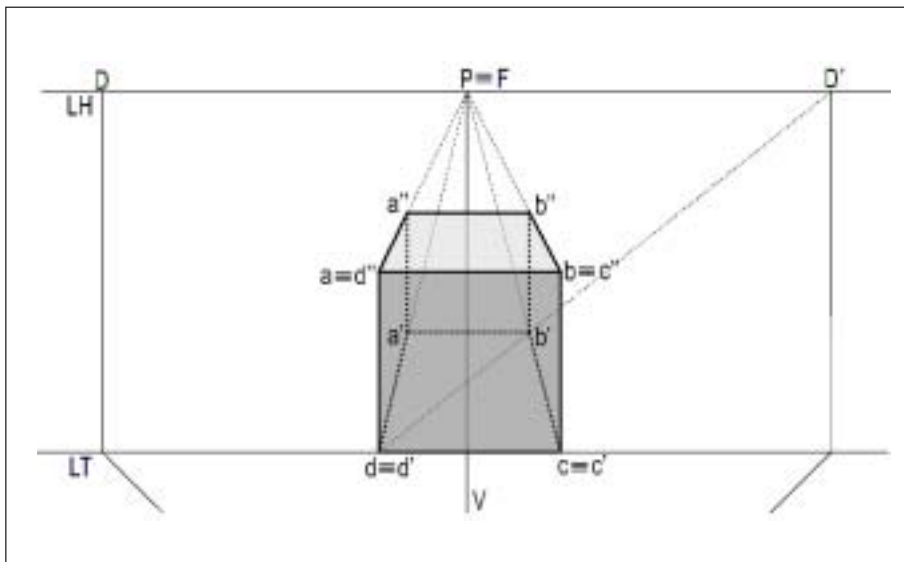


Figura 92 - Perspectiva paralela de um cubo assente no plano geometral.

do duas rectas verticais a partir dos pontos  $[a']$  e  $[b']$  até intersectarem os segmentos de recta  $[d'',P]$  e  $[c'',P]$ , obtêm-se os vértices em perspectiva  $[a'']$  e  $[b'']$  que faltavam determinar.

Nota: O cubo deveria ser identificado pelos seus oito vértices  $[a,b,c,d,e,f,g,h]$ . No entanto e intencionalmente, os vértices da face superior em posição horizontal de topo são identificados através de letras que correspondem às projecções das perspectivas dos vértices  $[a',b',c',d']$ . Pretendo com isto identificar que a construção de um sólido, não deixa de ser igual à construção de uma figura não assente no plano geometral, conforme se verificou.

### 5.1.2 · Perspectiva paralela da pirâmide assente no plano geometral

Resolução do exercício (figura 93):

O exercício tem início com a construção da grelha para determinar a perspectiva da pirâmide. Desenham-se as linha de terra  $[LT]$  e a linha do horizonte  $[LH]$  cuja distância entre si corresponde à altura  $a$  que se encontra o observador  $[V]$ . Traça-se o raio visual principal  $[V,P]$  cuja distância entre a linha de terra  $[LT]$  e o ponto de observação  $[V]$  corresponde à distância do observador  $[V]$  ao quadro  $[a]$ . Sendo o ângulo de observação igual a  $0f$ , estamos perante um caso de perspectiva paralela. Neste tipo de perspectiva o ponto principal  $[P]$  coincide com único ponto de fuga  $[F]$ .

Após a representação da planta da pirâmide  $[a,b,c,d]$  é determinada a sua perspectiva  $[a',b',c',d']$ .

Iniciamos o exercício no momento em que se determinou a perspectiva  $[a',b',c',d']$  da base da pirâmide como se estivesse assente no plano geometral  $[b]$ . Se houver alguma dúvida quanto ao procedimento, estudar o processo já anteriormente descrito.

Passamos à determinação do vértice superior  $[e']$  da pirâmide. Determina-se em primeiro lugar o centro da base da pirâmide, identificada pelo ponto  $[e]$ , traçando as suas diagonais na perspectiva  $[a',b',c',d']$ .

A partir do ponto  $[d']$ , traça-se a distância  $[d',y]$  que corresponde à altura real da pirâmide. Dirigem-se de seguida segmentos de recta dos pontos  $[d]$  e  $[y]$  ao ponto de distância  $[D']$ . Encontrou-se uma escala de alturas, ou seja, o segmento de recta  $[d,y]$  ao longo do percurso entre os segmentos de recta  $[y,D']$  e  $[d,D']$ , possui sempre a mesma altura. Significa que se traçarmos um segmento de recta vertical desde o ponto  $[e]$  até intersectar o segmento de recta  $[y,D']$ , encontra-se o ponto  $[e']$  que é o vértice superior da pirâmide em perspectiva.

Unindo os vértices  $[a']$ ,  $[b']$ ,  $[c']$  e  $[d']$  com  $[e']$  obtém-se a perspectiva da pirâmide  $[a',b',c',d',e']$ .

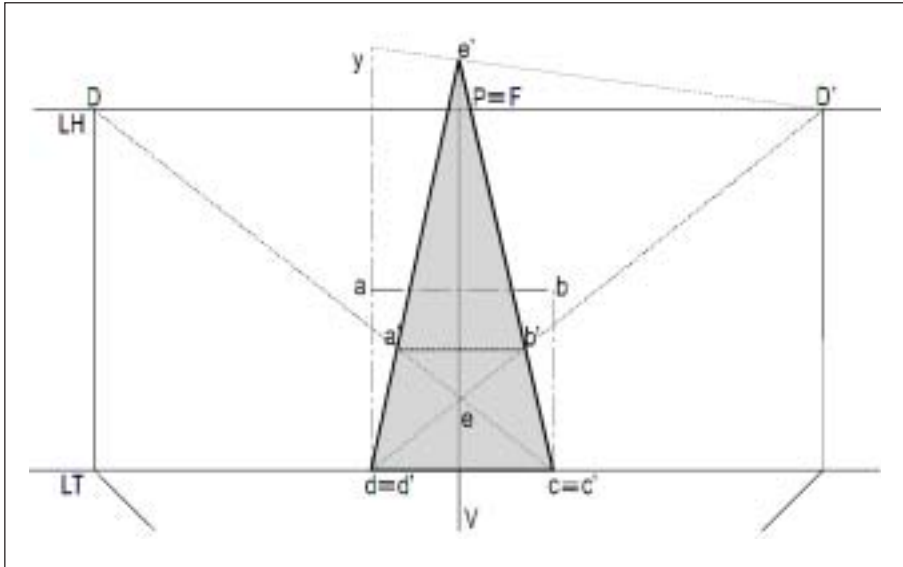


Figura 93 - Perspectiva paralela de uma pirâmide cubo assente no plano geometral.

### 5.1.3 · Perspectiva paralela do cilindro assente no plano geometral

Resolução do exercício (figura 94):

Após a representação da planta do cilindro [1,2,3,4,5,6,7,8] inserida no quadrado [a,b,c,d] é determinada a respectiva perspectiva da base inferior do cilindro [1',2',3',4',5',6',7',8']. Caso haja dúvida quanto ao procedimento, consultar o processo de determinação da perspectiva da circunferência.

Passamos à determinação da perspectiva da base superior do cilindro [1'',2'',3'',4'',5'',6'',7'',8''], inserida no quadrado em perspectiva [a'',b'',c'',d'']. A partir do ponto [d'], traça-se a distância [d',d''], realizando igual procedimento relativamente à altura [c',c'']. Obtidos os pontos [d''] e [c''], unindo-os através dos segmentos de recta [d'',P] e [c'',P] obtemos as direcções dos lados [d'',a''] e [c'',b''], cujos pontos [a''] e [b''] são obtidos através da intersecção com os segmentos de recta verticais que partem de [a'] e [b']. Construído o quadrado [a'',b'',c'',d''] onde está inserida a base superior do cilindro, determinam-se as respectivas diagonais e medianas. Da intersecção dos oito segmentos de recta verticais que partem dos pontos em perspectiva da base do cilindro [1',2',3',4',5',6',7',8'] com as diagonais e medianas da base superior do cilindro são encontrados os pontos [1'',2'',3'',4'',5'',6'',7'',8''] da base superior do sólido.

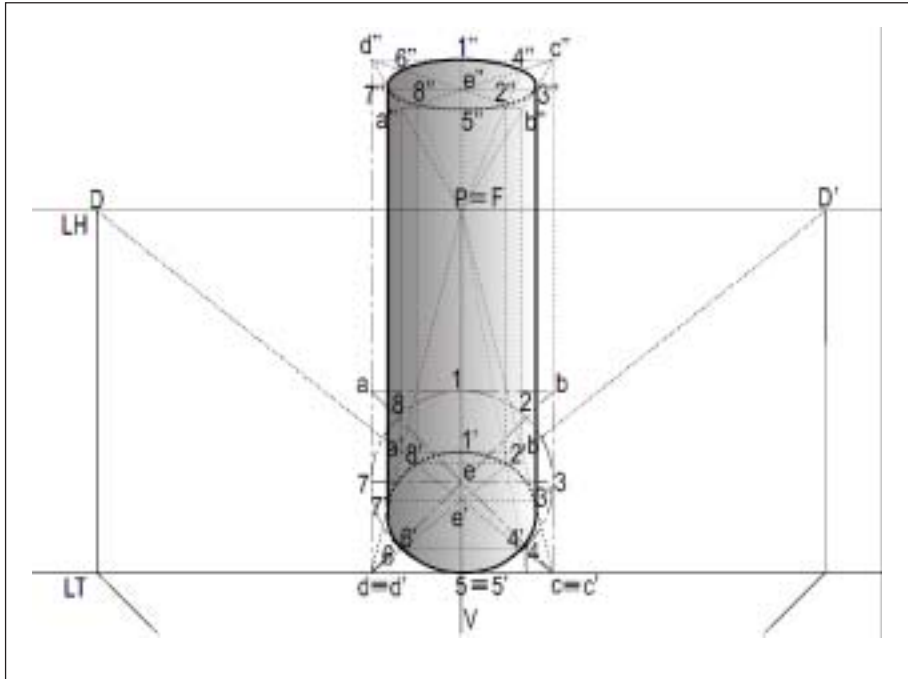


Figura 94 - Perspectiva paralela de um cilindro assente no plano geometral.

**5.1.4 • Perspectiva paralela do cone assente no plano geometral**

Resolução do exercício (figura 95):

Este exercício tem um procedimento igual ao anterior. No entanto, a determinação do vértice superior do cone [e''] pode realizar-se traçando o segmento de recta [d',d''] que corresponde à altura real por se sobrepor sobre o quadro [a]. Traça-se o segmento de recta [d'',D'] que será intersectado pelo segmento de recta vertical que parte de [e'], obtendo-se assim o ponto [e''].

Outro processo consistirá em traçar os dois segmentos de recta verticais [d',d''] e [c',c''] que corresponderão à altura em verdadeira grandeza do cone. Traçam-se de seguida os segmentos de recta [d'',D'] e [c'',D], cuja intersecção permite obter o vértice do cone [e''].

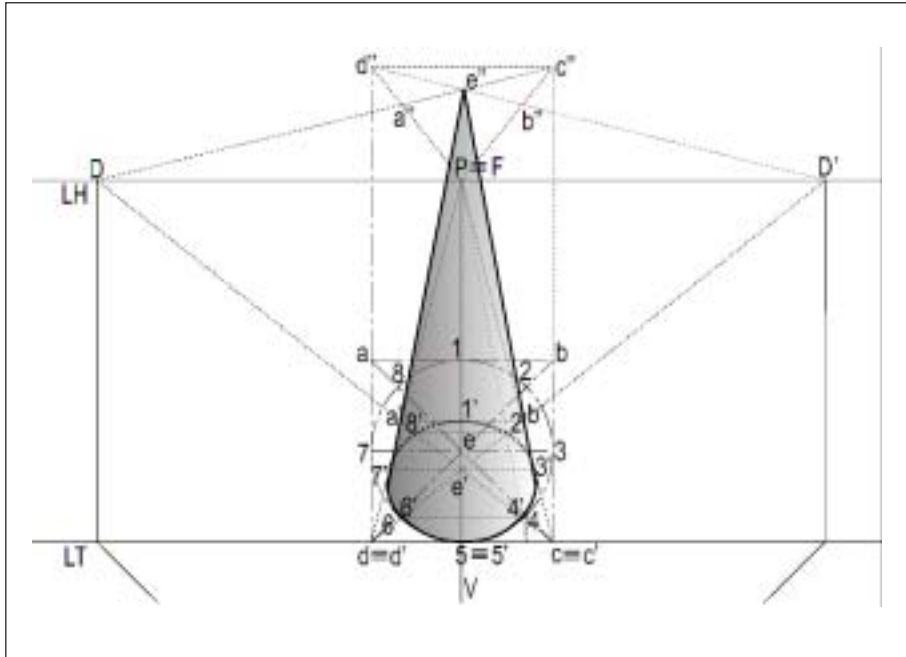


Figura 95 - Perspectiva paralela de um cone assente no plano geometral.

### 5.1.5 · Perspectiva paralela da esfera assente no plano geometral

Resolução do exercício (figura 96):

Seja qual for a posição do observador [V], a perspectiva da esfera será sempre uma circunferência. Será necessário no entanto, determinar o ponto que corresponde ao centro da esfera para se traçar a circunferência.

O presente exercício começa por simplesmente determinar a perspectiva de um cubo (onde está inserida a esfera) cuja aresta tem a dimensão do diâmetro da esfera.

Traçado o cubo em perspectiva, determinam-se as suas medianas [1], [2], [3] e [4] a partir do ponto em perspectiva [e'], obtido através da intersecção das diagonais da face inferior do cubo.

A união dos vértices do quadrado [1,2,3,4] que corresponde às respectivas diagonais permite determinar o ponto [e''] que constitui o centro da circunferência pretendida que será tangente aos lados do quadrado [1,2,3,4].

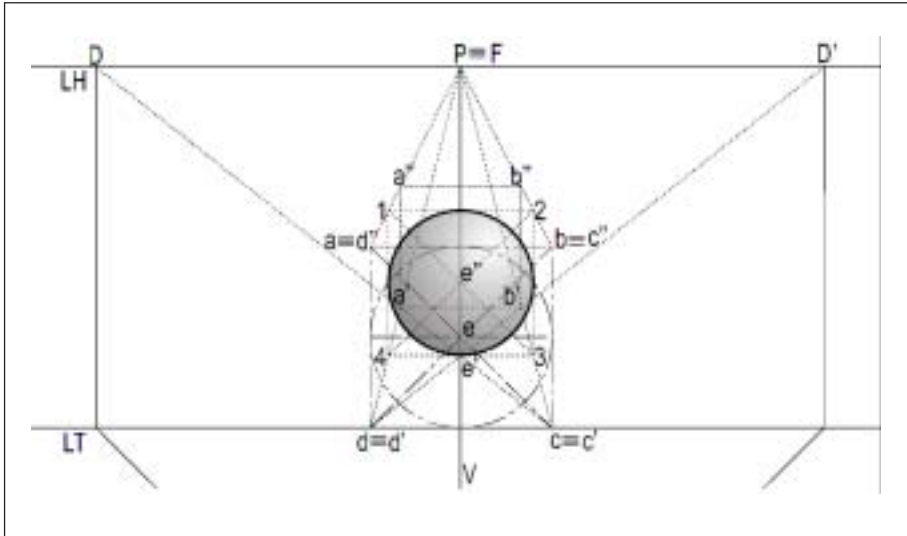


Figura 96 - Perspectiva paralela de uma esfera assente no plano geometral.

## 5.2 · Perspectiva oblíqua

### 5.2.1 · Perspectiva oblíqua do cubo assente no plano geometral

O quadrado [a,b,c,d] representado na figura 97, representa a planta do cubo cuja perspectiva se pretende determinar. Está em perspectiva oblíqua, mas agora num ângulo diferente de 45°. No exemplo dado têm um ângulo de observação de 40° (as faces fazem um ângulo de 40° com o observador). Neste tipo de perspectiva oblíqua, quando o ângulo de observação é diferente de 45°, os pontos de distância [D] e [D'] não coincidem com os pontos de fuga [F] e [F1].

Inicia-se novamente o exercício através da construção da linha do horizonte [LH], linha de terra [LT], posição do observador [V] e o ponto principal [P]. Traçam-se os pontos de distância [D] e [D'] que se obtêm a partir de dois raios visuais que saem do observador [V] fazendo ângulos de 45° (para a direita e esquerda) e intersectam a linha de terra [LT]. Os mesmos raios visuais dirigem-se então verticalmente para a linha do horizonte [LH].

Contudo, agora estamos perante um novo caso. Como o sólido geométrica não está em relação ao observador a 45°, os pontos de distância [D] e [D'] não coincidem com os pontos de fuga [F] e [F1]. Assim sendo, traçam-se os pontos de fuga [F] e [F1] que se obtêm a partir de dois raios visuais que saem do observador [V] fazendo entre si um ângulo de 90°, e de 40° com o observador (para a direita e esquerda) e intersectam a linha de terra [LT]. Os mesmos raios visuais dirigem-se então verticalmente para a linha do horizonte [LH].  
Resolução:

Inicia-se o exercício representando sempre a planta da forma [a,b,c,d] em dimensão real e a traço ponto, fazendo o ângulo de  $40^\circ$  com o observador [V].

O vértice [c] por coincidir com o quadro [a] tem uma perspectiva igual à sua dimensão real [c']. Lembra que qualquer ponto, recta ou face que coincida com o quadro [a], tem como perspectiva o ponto, a recta ou a face de igual dimensão.

Falta determinar a perspectiva dos pontos [a] [b] e [d]. Quando numa forma já possuímos um ponto em perspectiva, devemos eleger o ponto oposto para determinar a sua perspectiva, como método para facilitar a construção. No presente caso vamos determinar a perspectiva do ponto [a]. Pelo ponto [a] fazemos passar uma recta de topo que tem como direcção da sua perspectiva o ponto principal [P] e uma recta de fuga a  $45^\circ$  que terá como direcção da sua perspectiva o ponto de distância [D]. A intersecção destas duas rectas de topo e de fuga a  $45^\circ$  permite obter o ponto [a'].

Sabendo que o quadrado [a,b,c,d] está a  $40^\circ$  em relação ao observador [V], os seus lados embora sejam rectas de fuga, não estão a  $45^\circ$  pelo que o teorema não tem aplicação aos pontos de distância [D] e [D']. No entanto, o problema já foi resolvido ao colocarmos os pontos de fuga [F] e [F1] a fazerem entre si um ângulo de  $90^\circ$  e de  $40^\circ$  com o observador [V].

Traçamos então e em primeiro lugar dois segmentos de recta dirigidos ao ponto em perspectiva [c'] a partir dos dois pontos de fuga [F] e [F1], obtendo assim as direcções dos lados em perspectiva [c',d'] e [c',b']. Novamente e a partir dos pontos de fuga [F] e [F1] traçamos dois segmentos de recta que passarão pelo ponto [a'] e intersecarão

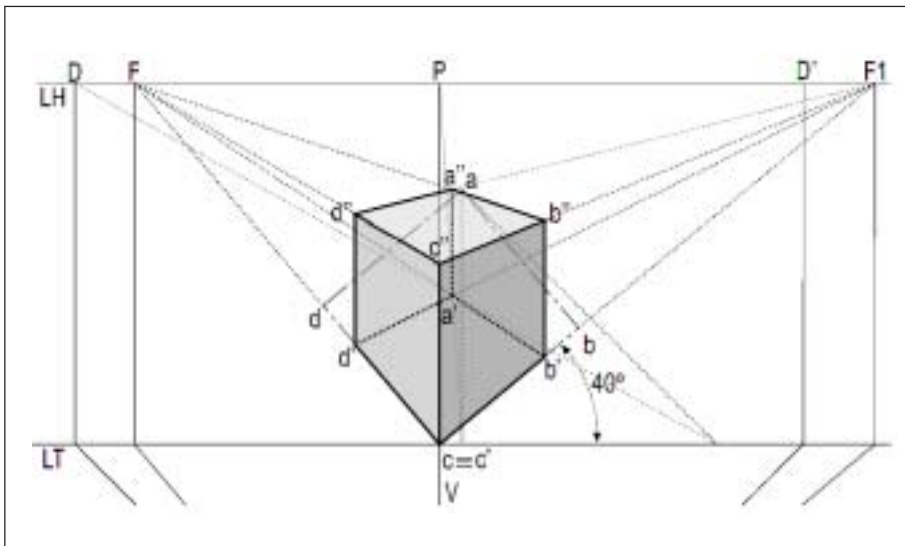


Figura 97 - Perspectiva oblíqua de um cubo assente no plano geométral.

os segmentos de recta  $[F,c']$  e  $[F1,c']$  obtendo-se os vértices em perspectiva  $[d']$  e  $[b']$ .

Da união dos pontos obtidos em perspectiva  $[a']$ ,  $[b']$ ,  $[c']$  e  $[d']$  obtemos a perspectiva  $[a',b',c',d']$ .

A segunda fase consiste em determinar a perspectiva da face superior do cubo  $[a'',b'',c'',d'']$ .

O segmento de recta vertical  $[c',c'']$  tem a dimensão real da aresta do cubo, por coincidir com o quadro  $[a]$ . Obtido o ponto  $[c'']$  fazemos passar por ele dois segmentos de recta  $[F,c'']$  e  $[F1,c'']$  cuja intersecção com os segmentos de recta verticais traçados a partir dos pontos  $[d']$  e  $[b']$ , permitem determinar os vértices em perspectiva  $[d'']$  e  $[b'']$ . A intersecção dos segmentos de recta  $[F,b'']$  e  $[F1,d'']$  permite determinar em perspectiva o vértice que faltava determinar  $[a'']$ .

Os exercícios que se seguem abordam a determinação da perspectiva da pirâmide, do cilindro e do cone, cujos exercícios são semelhantes aos já repetidamente explicados anteriormente.

### 5.2.2 · Perspectiva oblíqua da pirâmide assente no plano geometral

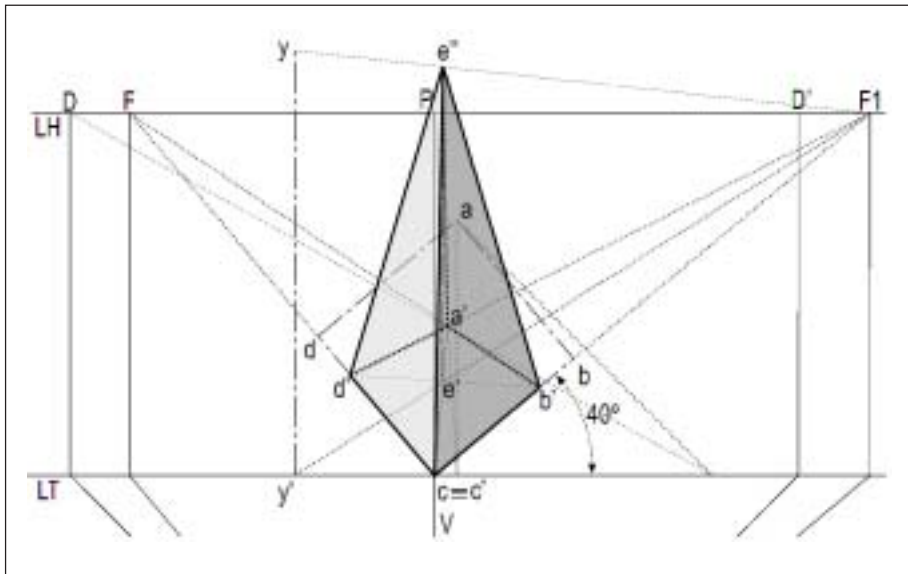


Figura 98 - Perspectiva oblíqua de um cone assente no plano geometral.

### 5.2.3 · Perspectiva oblíqua do cilindro assente no plano geometral

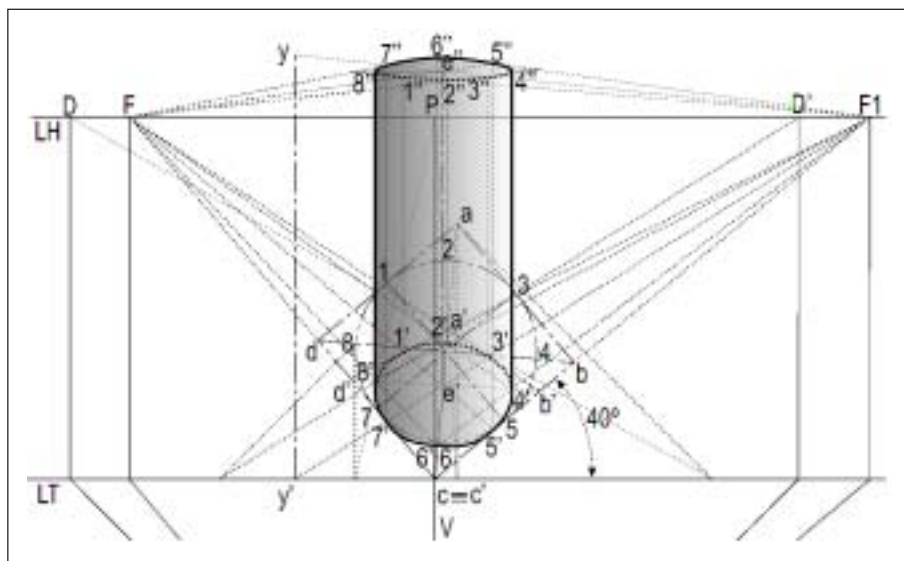


Figura 99 - Perspectiva oblíqua de um cilindro assente no plano geometral.

### 5.2.4 · Perspectiva oblíqua do cone assente no plano geometral

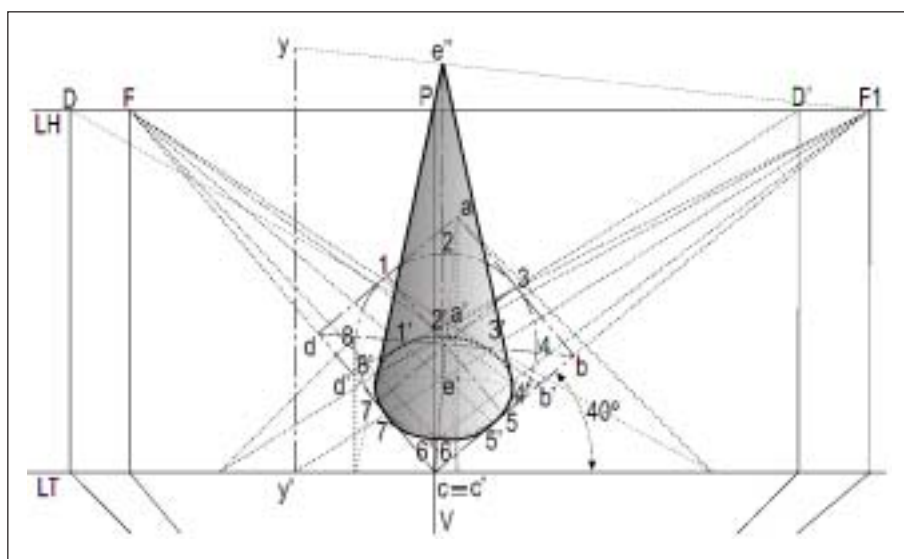


Figura 100 - Perspectiva oblíqua de um cone assente no plano geometral.

### 5.3 • Perspectiva de um sólido não assente no plano geometral

#### 5.3.1 • Perspectiva oblíqua do cubo não assente no plano geometral

A resolução do caso da figura 101 passa por cumprir as seguintes fases:

- Construção da grelha com as linha de terra [LT], linha do horizonte [LH], pontos de vista [V], de distância [D] e [D'], de fuga [F] e [F1] e de vista [V].

- Determinação da perspectiva da planta do cubo [a,b,c,d] cujo ângulo com o observador é de 40°.

- Segue-se a construção da escala de alturas [c',a'''] que tem as dimensões: [c',a''] que é a altura real a que se encontra o cubo do plano geometral [b]; [a'',a'''] que é a dimensão real da aresta do cubo.

- Traçando segmentos de recta a partir dos pontos [F] e [F1] até aos pontos [a''] e [a'''] permitem determinar os outros vértices em perspectiva do cubo.

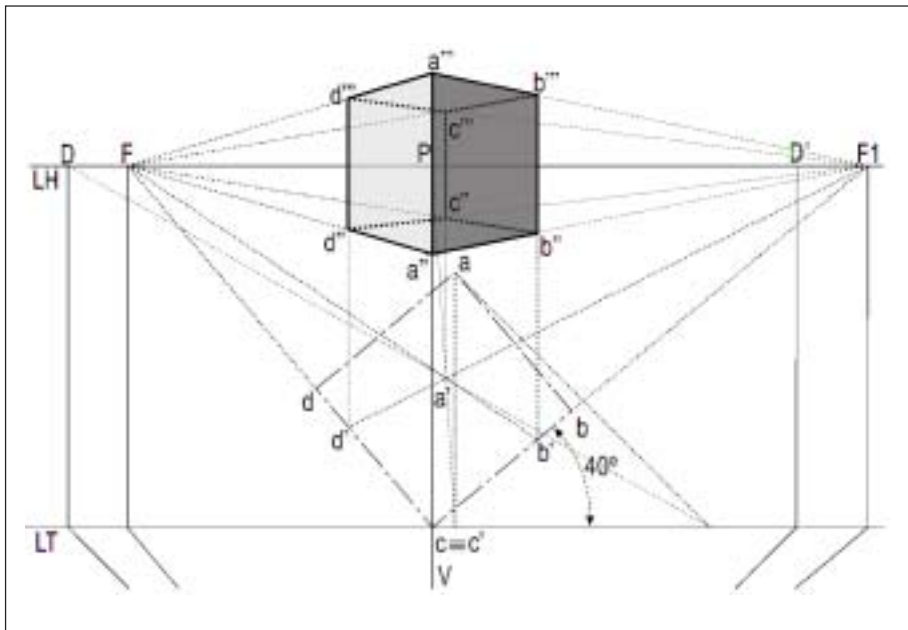


Figura 101 - Perspectiva oblíqua de um cubo não assente no plano geometral.

## 5.4 • Perspectiva de conjunto

### 5.4.1 • Perspectiva de um conjunto de sólidos geométricos

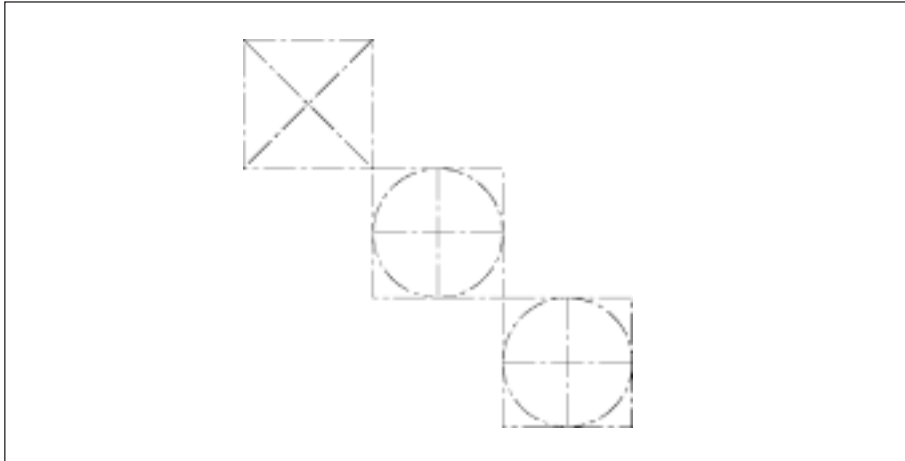


Figura 102 - Planta de um conjunto de sólidos.

Um conjunto de sólidos obriga à construção da respectiva planta do conjunto onde, com grande rigor estão situados os sólidos. Na figura 102 é apresentada a planta de um conjunto de sólidos geométricos distribuídos por três planos na planta identificada:

- 1.º Plano – Cubo sobreposto por um cilindro;
- 2.º Plano – Cilindro sobreposto por uma esfera;
- 3.º Plano – Pirâmide.

Trata-se de um exercício cuja dificuldade passa apenas por um verdadeiro desafio à nossa capacidade de concentração associada ao rigor metódico.

Quando pretendemos determinar várias formas ou sólidos geométricos só se pode recorrer a uma escala de alturas para o conjunto. Evita-se assim a deformação da perspectiva do conjunto. Conforme se verifica na construção do conjunto da figura 103, cuja planta é referenciada na figura 102, existe uma única escala de alturas referenciada pelo segmento de recta  $[x, x3]$  que vai permitir determinar a verdadeira altura de cada sólido geométrico na posição em que se encontra. Jamais esquecer que a escala de alturas ou larguras é sempre realizada sobre o plano do quadro  $[a]$  e em dimensão real.

O presente caso da figura 103 passa por cumprir as seguintes fases:

- Construção da grelha com as linha de terra [LT], linha do horizonte [LH], pontos de vista [V], de distância [D] e [D'], de fuga [F] e [F1] e de vista [V]. Tratando-se da realização de uma perspectiva paralela, existe coincidência entre os pontos [P] e [F].

Por uma questão de método, o exercício deve realizar-se determinando a perspectiva do sólido geométrico mais próximo até ao mais afastado.

No presente caso, e havendo vários sólidos a diferentes distâncias criou-se uma escala de alturas [x,x3] e de distâncias [x,P] que poderia situar-se mais à direita ou esquerda da grelha.

Na realização da perspectiva do cubo, não houve necessidade do recurso à escala de alturas já que a face vertical de frente tem a sua perspectiva em dimensão real por estar sobre o plano do quadro [a].

Após a determinação da perspectiva do cubo, foram traçadas as diagonais das faces (superior e inferior) do cubo obtendo-se o centro da circunferência da base do cone. Construída a base do cone em perspectiva, a determinação da sua altura em perspectiva passa pelo recurso à escala de alturas. Nesta escala marcou-se a distância [x,x3] que é altura real do cone, construindo-se então a escala de larguras respectiva, o segmento de recta [x3,P]. A altura em perspectiva do vértice superior do cone é obtida realizando o seguinte procedimento:

Traça-se um segmento de recta horizontal de frente desde o centro da base do cubo até intersectar o segmento de recta de fuga [x,P], obtendo-se o ponto [y5];

A partir do ponto [y5] traça-se o segmento vertical de frente [y5,y6] que corresponde à altura em perspectiva do cone;

O centro do vértice superior do cone é obtido através da intersecção do segmento de recta vertical de frente traçado a partir da base em perspectiva do cubo e o segmento horizontal de frente traçado a partir do ponto [y6] da escala de alturas.

A segunda fase do exercício consiste em determinar os sólidos em segundo plano constituídos pelo cilindro e a esfera. Construída a base do cilindro em perspectiva, a determinação da sua altura em perspectiva passa novamente pelo recurso à escala de alturas. Nesta escala marcou-se a distância [x,x1] que é altura real do cilindro, construindo-se então a escala de larguras respectiva, o segmento de recta [x1,P]. A altura em perspectiva do centro da base superior do cilindro é obtida realizando o seguinte procedimento:

Traça-se um segmento de recta horizontal de frente desde a base do cilindro até intersectar o segmento de recta de fuga [x,P], obtendo-se o ponto [y2];

A partir do ponto [y2] traça-se o segmento vertical de frente [y2,y3] que corresponde à altura em perspectiva do cilindro;

O centro da base superior do cilindro é obtido através da intersecção do segmento de recta vertical de frente traçado a partir da

base em perspectiva do cilindro e o segmento horizontal de frente traçado a partir do ponto [y3] da escala de alturas.

Determinação da perspectiva da esfera:

Marca-se na escala de alturas a distância [x,x2] que é a altura verdadeira do ponto superior do eixo vertical da esfera, construindo-se o segmento de recta [x2,P].

A partir do ponto [y2] traça-se o segmento vertical de frente [y2,y4] que corresponde à altura em perspectiva da esfera;

O ponto superior do eixo vertical da esfera é obtido através da intersecção do segmento de recta vertical de frente traçado a partir da base em perspectiva do cilindro e o segmento horizontal de frente traçado a partir do ponto [y4] da escala de alturas.

A terceira fase do exercício consiste em determinar o sólido em terceiro plano que é a pirâmide. Construída a base da pirâmide em perspectiva, a determinação da sua altura em perspectiva passa novamente pelo recurso à escala de alturas. Nesta escala marcou-se a distância [x,x1] que é altura real do cilindro, construindo-se então a escala de larguras respectiva, o segmento de recta [x1,P]. A altura em perspectiva do centro da base superior do cilindro é obtida realizando o seguinte procedimento:

Traça-se um segmento de recta horizontal de frente desde o centro da base da pirâmide até intersectar o segmento de recta de fuga [x,P], obtendo-se o ponto [y];

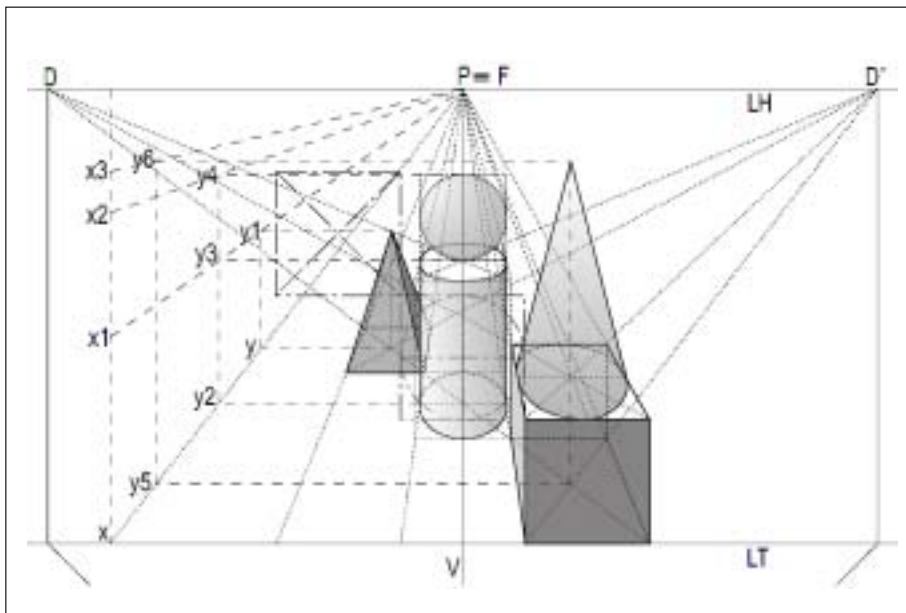


Figura 103 - Planta de um conjunto de sólidos assentes no plano geometral em perspectiva paralela.

A partir do ponto [y] traça-se o segmento vertical de frente [y,y1] que corresponde à altura em perspectiva da pirâmide;

O centro do vértice superior da pirâmide é obtido através da intersecção do segmento de recta vertical de frente traçado a partir da base em perspectiva da pirâmide e o segmento horizontal de frente traçado a partir do ponto [y1] da escala de alturas.



# Sombras

---

## 1 • Sombra do ponto e da recta

Só quando se introduz a sombra numa composição qualquer desenhada, é que se tem a noção da profundidade. A ausência de sombra na composição, faz parecer que as formas não estão assentes no solo. A definição da forma deve-se à sua sombra própria e projectada. A título de exemplo, se houvesse a mesma intensidade de luz à volta de um cilindro, além de não ter sombra própria, também não tinha a sombra projectada. O cilindro apresentava-se como um rectângulo. O que permite identificar a forma do cilindro, é a degradação suave da sua sombra própria que o contorna designada de tonalidade. Mas para uma melhor definição e localização no espaço que o circunda, o recurso à sombra projectada é um complemento imprescindível.

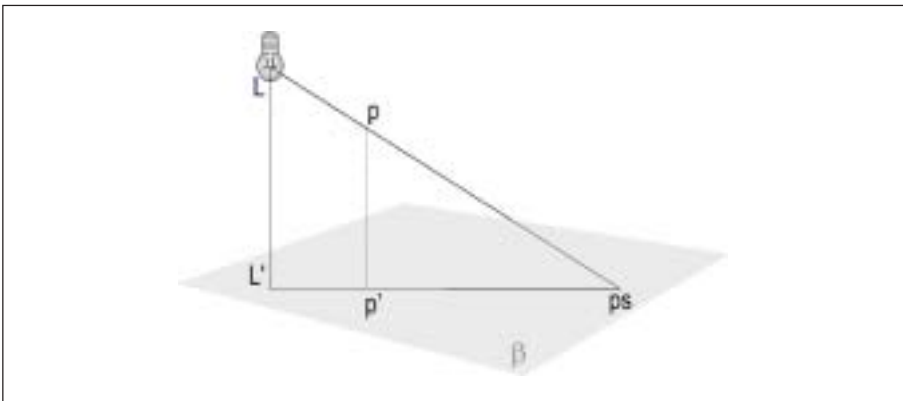
Basicamente, tem-se a noção de sombra, como a ausência de luz, num dado espaço, provocada por uma forma que se interpõe ao ponto de luz. Para existir sombra é necessário haver uma fonte de luz. O Sol e a luz artificial são as fontes que poderão produzir a luz necessária à existência da sombra.

Em perspectiva e no mundo artístico, são considerados quatro tipos: sombra provocada pela luz artificial, sombra provocada pelo sol quando está no plano do quadro, sombra provocada pelo sol quando está atrás do observador (nadir) e sombra provocada pelo sol quando está numa posição lateral.



*Figura 104 - “O Sacramento da Última Ceia” de Salvador Dali | 1955. Óleo sobre tela, 167 x 268 cm. Galeria Nacional de Arte, Washington, D.C. Coleção Chester Dale.*

*Nesta composição realizada no rectângulo de ouro, inspirada na perspectiva paralela de Leonardo da Vinci, a janela do fundo representa um dodecaedro (o dodecaedro é um sólido geométrico formado por doze faces pentagonais).*



*Figura 105 - Determinação da sombra do ponto.*

Começo, como é natural pela perspectiva do ponto. A figura 105, refere a sombra do ponto. O ponto [p], não está situado sobre o plano geometral [b] sendo iluminado por um ponto de luz [L].

Começa-se por encontrar a projecção do ponto [p] sobre o plano geométral [b], que é [p']. O mesmo procedimento é realizado para determinar a projecção do ponto de luz [L] no plano geométral [b], sendo a sua projecção o ponto [L'].

Do ponto de luz [L], sai um raio que intersecta o ponto [p]. Da projecção do ponto de luz [L'], sai a projecção do raio visual que intersecta a projecção do ponto [p']. Da intersecção do raio visual saído de [L] com a projecção saída de [L'], obtém-se a sombra do ponto [p], designada por [ps].

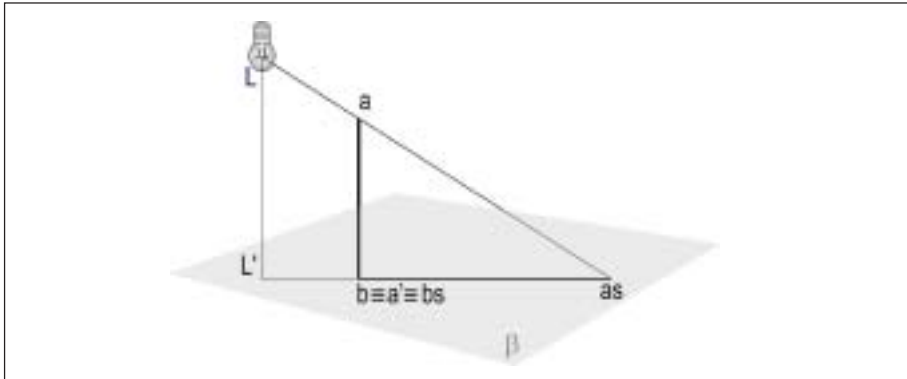


Figura 106 - Determinação da sombra de um segmento de recta.

No caso da sombra do segmento de uma recta vertical [a,b] em que o seu ponto [b] coincide com o plano geométral [b], exemplificado na figura 106, o procedimento é igual.

Tendo em conta, o processo para determinar a sombra do ponto, o ponto [a] do segmento de recta [a,b], tem como sombra [as]. No que se refere à sombra do ponto [b], por estar assente sobre o plano geométral [b], tem a sua sombra [bs] coincidente. O segmento de recta [a,b], tem como sombra o segmento de recta [bs,as].

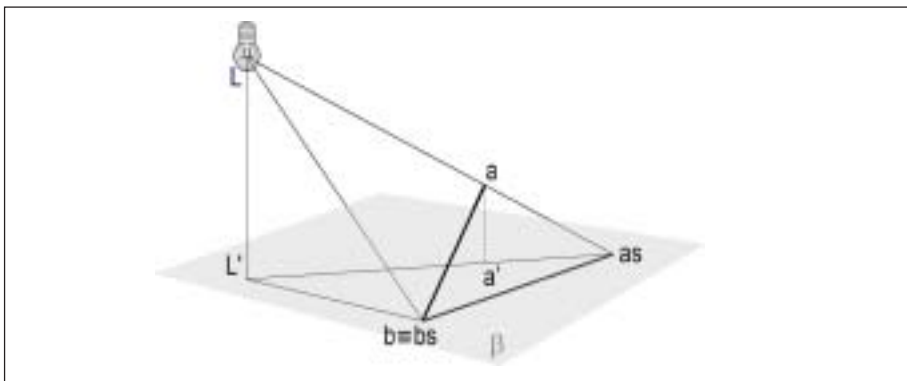
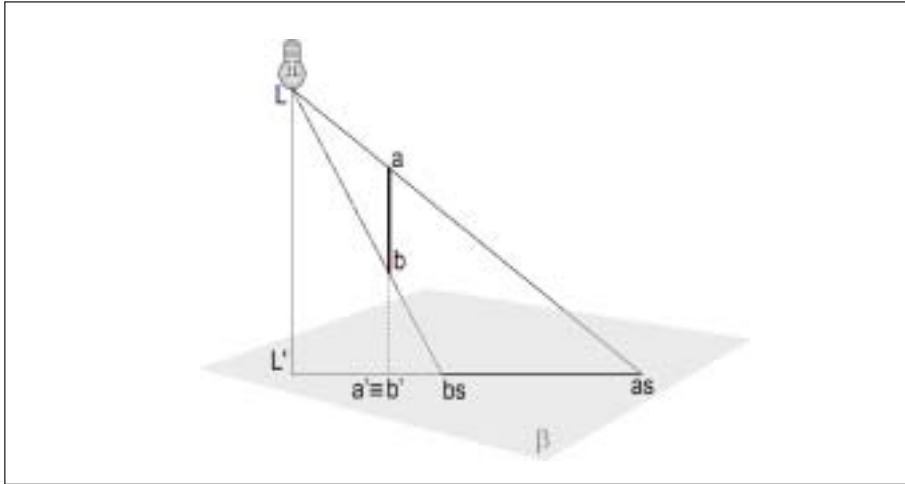


Figura 107 - Determinação da sombra de um segmento de recta oblíquo em relação ao quadro.

Na figura 107, o problema coloca-se da mesma maneira, embora o segmento de recta tem o ponto [b] assente sobre o plano geométral [b], esteja em posição oblíqua. No que respeita à sombra do ponto [b], tem-na coincidente por estar assente sobre o plano geométral [b]. Como o segmento de recta [a,b] não é vertical, a projecção do ponto [a], não se sobrepõe ao ponto [b], como no caso da figura anterior. No entanto, a projecção de [a] é obrigatoriamente vertical, sendo o ponto [a']. A sombra de [a] é [as].



*Figura 108 - Determinação da sombra de um segmento de recta vertical não assente no plano geométral.*

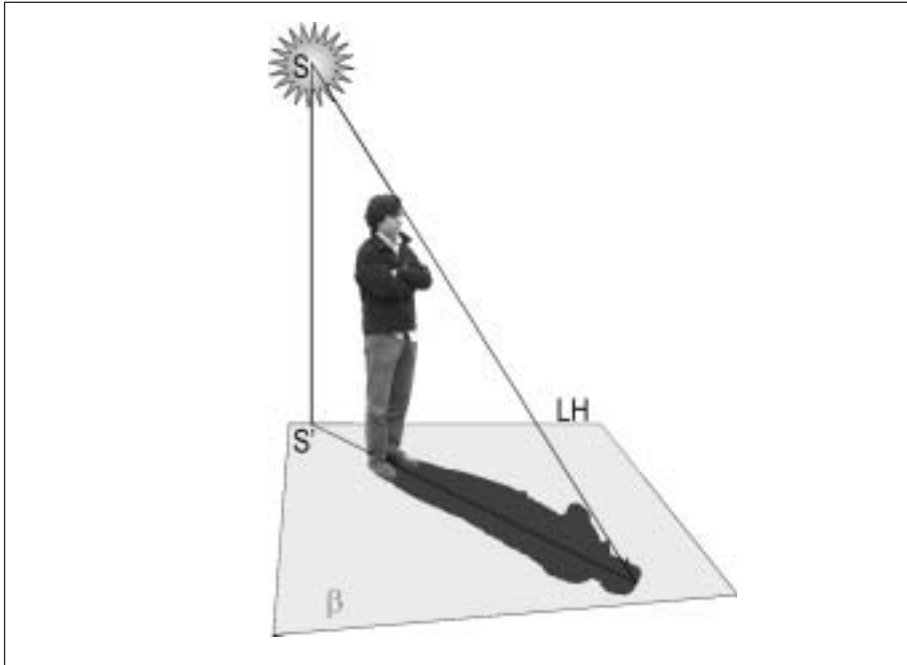
A figura 108 representa o segmento de recta vertical [a,b], que não está assente no plano geométral [b]. Por não estar assente é necessário encontrar as projecções dos dois pontos que o definem [a] e [b], sobre o plano geométral [b]. Como o segmento de recta [a,b] é vertical, tem as suas projecções [a'] e [b'] coincidentes.

Em relação à projecção saída de [L'] que intersecta as projecções [a''ab'], não difere dos exercícios anteriores. Contudo, em relação aos pontos [a] e [b], é necessário partirem de [L] dois raios visuais, já que no presente caso, o segundo ponto da recta não está assente. A sombra do segmento de recta [a,b] é dada pelo segmento de recta [as,bs].

Estudado que está, embora de forma simplificada, a sombra do ponto e da recta, vou proceder a uma abordagem mais detalhada do estudo da sombra da recta, nos quatro casos possíveis de sombras.

## 2 · Os quatro casos de luz

### 2.1 · 1.º caso | Sol no plano do quadro



*Figura 109 - 1.º Caso de sombra – Sol no plano do quadro.*

O sol no plano do quadro, referenciado na figura 109, é o primeiro caso e caracteriza-se pela posição do sol e sombra em relação ao observador. O sol funciona, embora incorrectamente, como um foco de luz que está colocado por detrás da forma representada, sendo a sua sombra projectada na direcção do plano geométrico [b], como se verifica.

O ideal é colocar o Sol [S], o mais alto possível, sendo na figura, a distância de [S] a [S']. O ponto [S'], coincide quase sempre com a linha do horizonte [LH]. No entanto, quando o sol está a uma hora, como o meio-dia, em que está na vertical, o ponto [S'] deverá situar-se perto das formas. O ponto [S'] é geralmente designado de ponto de fuga das sombras.

### 2.2 · 2.º caso | Nadir ou Sol atrás do observador

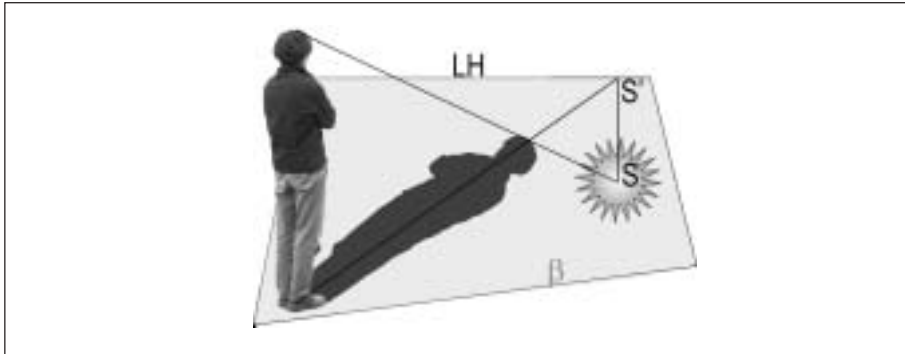


Figura 110 - 2.º Caso de sombra – nadir ou Sol atrás do observador.

Todos nos recordamos da posição do Sol no final de uma tarde de Verão, despida de nuvens. Quando caminhamos no horizonte, no sentido contrário da posição solar, verificamos que a nossa sombra é projectada à nossa frente, aumentando o seu comprimento, à medida que o sol baixa.

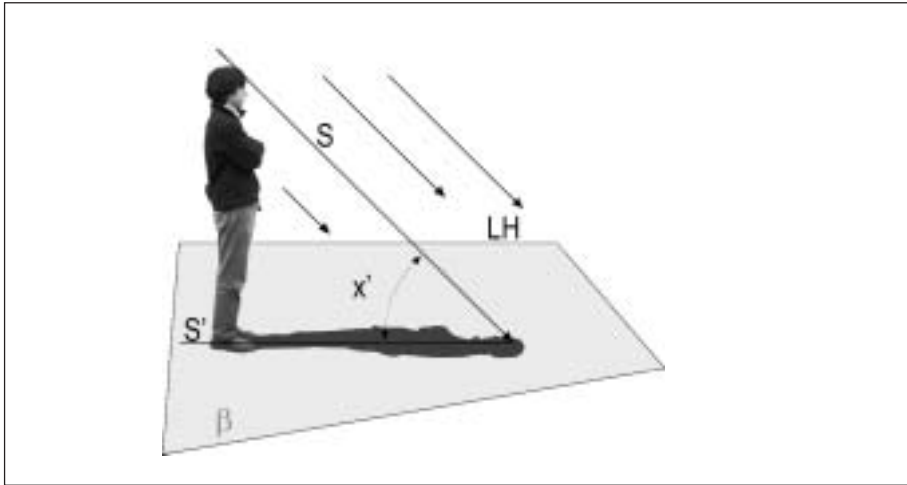
Este caso é designado de nadir ou Sol atrás do observador. Sendo representado de forma contrário em relação ao primeiro caso. Observando a figura 110, observa-se a colocação do sol numa posição invertida em relação ao raio visual que sai do Sol [S] e à recta que sai do ponto de fuga das sombras [S'], observa-se a sua intersecção. Este é o único caso de intersecção.

Só no presente caso e no anterior [Sol do plano do quadro], o ponto de fuga das sombras [S'], está sempre situado sobre a linha do horizonte [LH]. Neste caso existe um sentido inverso de proporcionalidade em relação ao Sol e à sombra.

### 2.3 · 3.º caso | Sol lateral

Dos três casos estudados, em relação à sombra provocada pelo Sol, este será o que mais se aproxima da realidade, já que se obtém de um feixe paralelo de raios solares e não de um ponto fixo, que tem vindo a ser designado de [S]. Como se sabe, o Sol encontra-se a cerca de 149,6 milhões de quilómetros da Terra. Portanto, a esta indeterminável distância, os raios solares quando chegam ao nosso planeta Terra, vêm necessariamente paralelos. Portanto, o ponto [S] é perfeitamente irreal.

O presente caso tem no entanto uma deficiência. As sombras só podem ser traçadas numa posição de frente, em relação ao quadro, ou seja, para a direita ou para a esquerda da forma. Na figura



*Figura 111 - 3.º Caso de sombra – Sol lateral.*

111, foi traçada para o lado direito e num ângulo de  $45^\circ$ . Para traçar este tipo de sombras, como se verifica, não nos servimos de um ponto fixo de luz. Trabalhamos com um feixe paralelo de raios que atingem a forma num ângulo determinado. Todos os raios que atingem a forma ou formas representadas têm de ter sempre o mesmo ângulo. O presente caso poderá ser identificado de “sombra à direita a  $45^\circ$ ”.

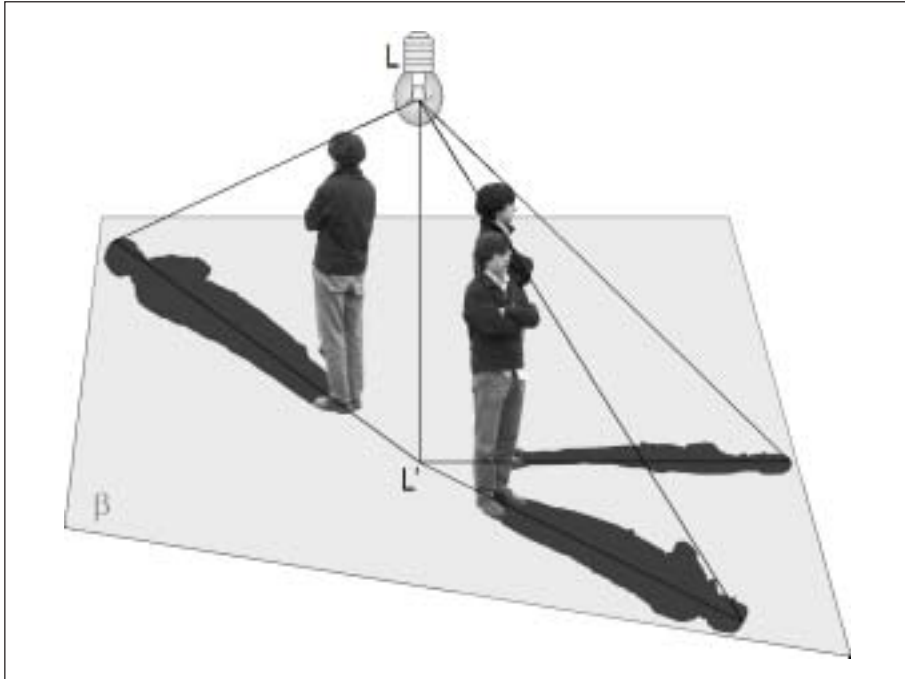
Observando com atenção a figura, para encontrar a sombra de um ponto, procede-se da seguinte maneira:

Traça-se uma recta horizontal de frente que intersecte o local de projecção do ponto no plano geometral [b]. A recta será para o lado direito se queremos que a sombra seja projectada nessa direcção e vice-versa. De seguida, fazemos passar pelo ponto, um raio visual lateral, no ângulo que previamente determinámos. Da intersecção deste raio com a recta horizontal de frente, obtemos a sombra do ponto.

No presente caso, da sombra lateral em ângulo, aconselho o leitor, para facilidade de construção, optar por um ângulo existente no esquadro. Podemos optar pelos ângulos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ . Evita-se o constante recurso ao transferidor e à régua.

#### **2.4 · 4.º caso | Luz artificial**

O caso referido na figura 112 relaciona-se com a sombra provocada por um ponto de luz artificial. Como se verifica, apenas temos de encontrar o ponto de projecção [L'] do ponto de luz [L], no plano geometral [b]. Este ponto [L'] é o designado ponto de fuga das sombras.



*Figura 112 - 4.º Caso de sombra – luz artificial.*

Este caso caracteriza-se pela existência de várias direcções que podem tomar as sombras das diversas formas. Se nos três casos anteriores, as sombras tomavam idêntica direcção, no presente caso, verifica-se a possibilidade de várias direcções, provocadas pela posição do ponto de luz [L].

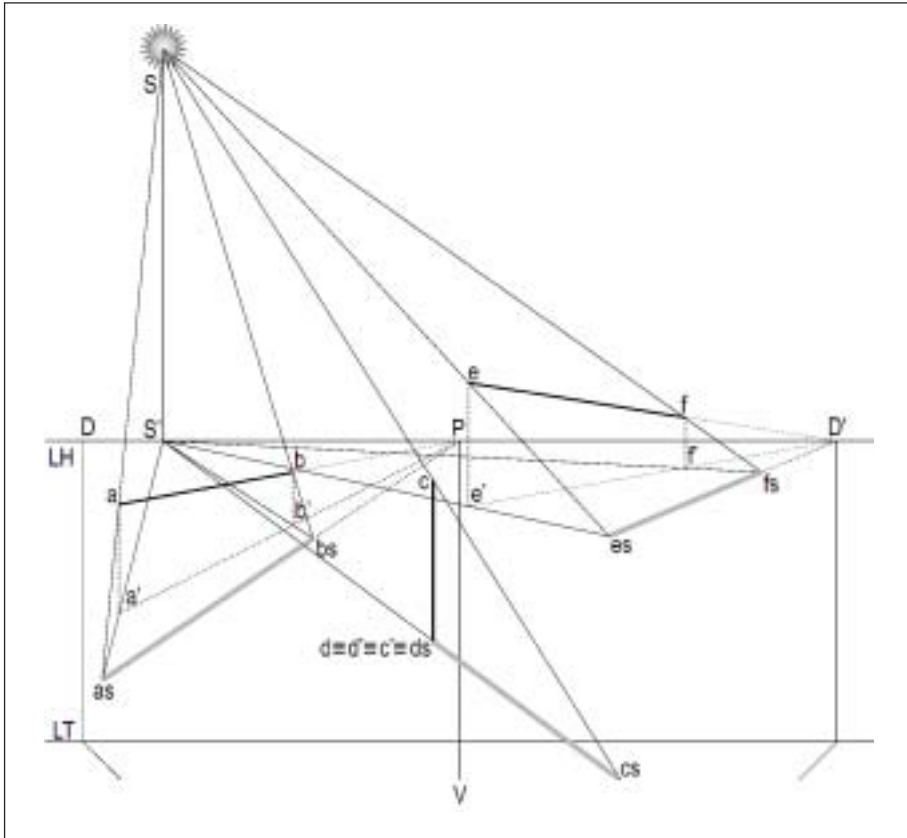
### **3 · Sombra da recta nos quatro casos de luz**

Este sub-capítulo vai abordar a sombra da recta nos quatro casos de luz (Sol no plano do quadro, Nadir, Sol lateral e luz artificial). No capítulo relativo à perspectiva do ponto, da recta e das figuras geométricas, abordou-se a perspectiva das rectas de topo, rectas de frente e rectas de fuga, assentes e não assentes no plano geometral. O presente sub-capítulo tratará agora de proceder à construção das respectivas sombras.

No sentido de esclarecer melhor o leitor, em relação à determinação das sombras, as linhas auxiliares da construção da perspectiva das rectas, serão apenas representadas no essencial. Qualquer dúvida assinalada deverá ser esclarecida através da consulta do capítulo referido.

Embora o leitor saiba, que a definição de recta é o conjunto de pontos unidos entre si, com a mesma direcção, sem princípio e sem fim. A recta é definida sempre por dois pontos. No presente caso e em outros para facilitar o entendimento, a sombra será demonstrada através de segmentos de recta.

**3.1 · Sombra de segmentos de recta de topo, de frente, e de fuga a 45° com o Sol no plano do quadro**



*Figura 113 - Sombra de segmentos de recta de topo, de frente e de fuga a 45° com o Sol no plano do quadro.*

Na figura 113, estão representados os segmentos de recta de topo [a,b], de fuga [e,f] a 45° e de frente [c,d]. Já se sabe, através dos teoremas estudados a perspectiva dos segmentos de recta cuja sombra vai ser determinada:

O segmento de recta de topo tem como perspectiva o ponto principal [P];

O segmento de recta de frente tem como perspectiva outra recta de frente de menor dimensão.

O segmento de recta de fuga a  $45^\circ$  tem como perspectiva um dos pontos de distância [D] ou [D'];

No segmento de recta de topo [a,b] determinou-se a sua projecção no plano geometral [b] obtendo-se os pontos [a'] e [b']. A partir do Sol [S] traçam-se dois raios visuais que intersectam os pontos [a] e [b] do segmento de recta e a partir do ponto de fuga das sombras [S'] traçam-se dois raios visuais que intersectarão os pontos de projecção [a'] e [b']. Da intersecção dos primeiros com os segundos obtemos os pontos em sombra do segmento de recta [as,bs]. Note-se que para que o exercício esteja correcta, a direcção da perspectiva da sombra de um segmento de recta de topo é também o ponto principal [P].

No segmento de recta de frente [c,d] determinou-se a sua projecção no plano geometral [b] obtendo-se a coincidência dos pontos [d''ad'''ac']. A partir do Sol [S] traça-se um raio visual que intersecta o ponto [c] do segmento de recta e a partir do ponto de fuga das sombras [S'] traça-se um raio visual que intersectará o ponto coincidente de projecção [c'''ad']. Da intersecção do primeiro com o segundo obtemos o ponto em sombra do segmento de recta [cs]. O ponto [d] coincide com a sua sombra e respectiva projecção [d''ad'''ads]. Une-se [ds] com [cs].

No segmento de recta de fuga a  $45^\circ$  [ef] determinou-se a sua projecção no plano geometral [b] obtendo-se os pontos [e'] e [f']. A partir do Sol [S] traçam-se dois raios visuais que intersectam os pontos [e] e [f] do segmento de recta e a partir do ponto de fuga das sombras [S'] traçam-se dois raios visuais que intersectarão os pontos de projecção [e'] e [f']. Da intersecção dos primeiros com os segundos obtemos os pontos em sombra do segmento de recta [es,fs]. Note-se que para que o exercício esteja correcta, a direcção da perspectiva da sombra de um segmento de recta de fuga a  $45^\circ$  é também um dos pontos de distância [D] ou [D'].

### **3.2 · Sombra de segmentos de recta de topo, de frente, e de fuga a $45^\circ$ no Nadir ou com o Sol atrás do observador**

No presente caso da figura 114, com os mesmos segmentos de recta e em igual posição, o exercício inicia-se através da determinação na projecção dos seus pontos no plano geometral [b]. A segunda fase é igual ao exercício anterior fazendo passar raios visuais pelos pontos que definem os segmentos de recta a partir do Sol [S] que intersectarão os raios visuais pelos pontos projectados dos segmentos de recta sobre o plano geometral [b] a partir do ponto de fuga das sombras [S']. A intersecção dos primeiros com os segundos permite obter os pontos em sombra.

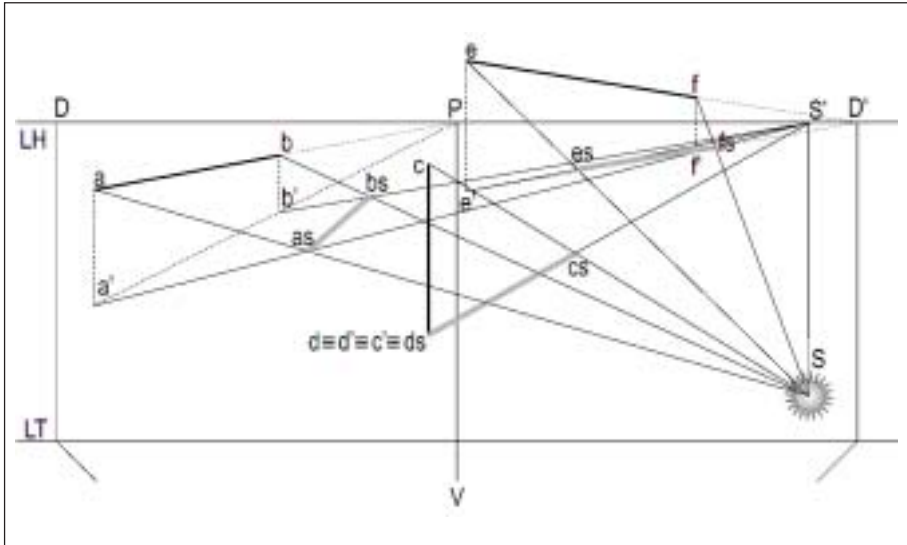


Figura 114 - Sombra de segmentos de recta de topo, de frente e de fuga a 45° no nadir ou com o Sol atrás do observador.

### 3.3 · Sombra de segmentos de recta de topo, de frente, e de fuga a 45° no Nadir ou com o Sol em posição lateral

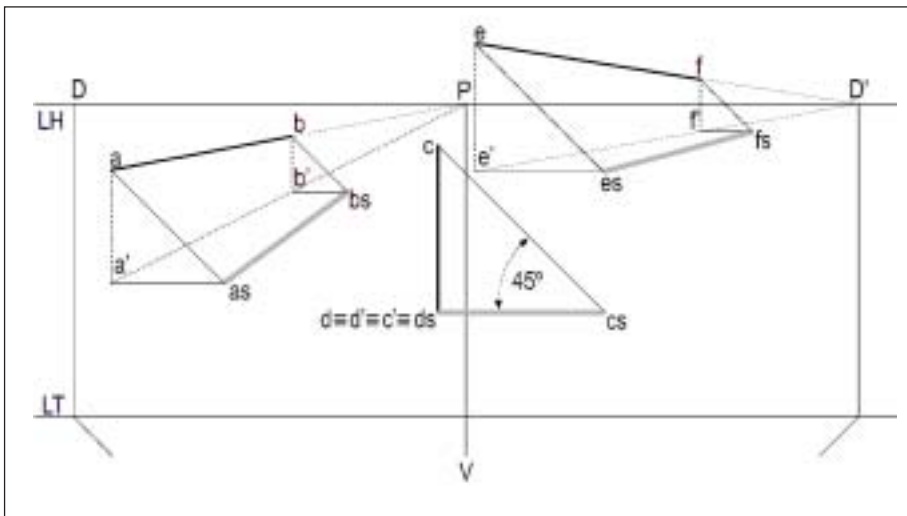


Figura 115 - Sombra de segmentos de recta de topo, de frente e de fuga a 45° com o Sol lateral.



No presente caso da figura 116, os pontos [S] e [S'] serão substituídos pelas letras [L] e [L'] que identificarão um caso de luz artificial. O procedimento é igual ao do primeiro caso (Sol no plano do quadro). Neste caso, o exercício começa por determinar a projecção do ponto de luz [L'] sobre o plano geometral [ $\beta$ ], que constituirá o ponto de fuga das sombras.

#### 4 • Sombra de figuras geométricas nos quatro casos de luz

Para a demonstração não se tornar demasiadamente exaustiva para quem, em princípio, já deve perceber o processo, limito-me a fornecer os exemplos do quadrado e do círculo.

Qualquer uma das duas figuras, sempre na mesma posição, sofrerá a influência de cada um dos quatro casos possíveis de luz. O quadrado está em perspectiva oblíqua, enquanto que o círculo em perspectiva paralela. Ambas as figuras não estão assentes no plano geometral [ $\beta$ ] já que se assim fosse o caso, a sombra não se observaria por coincidir com a própria figura plana.

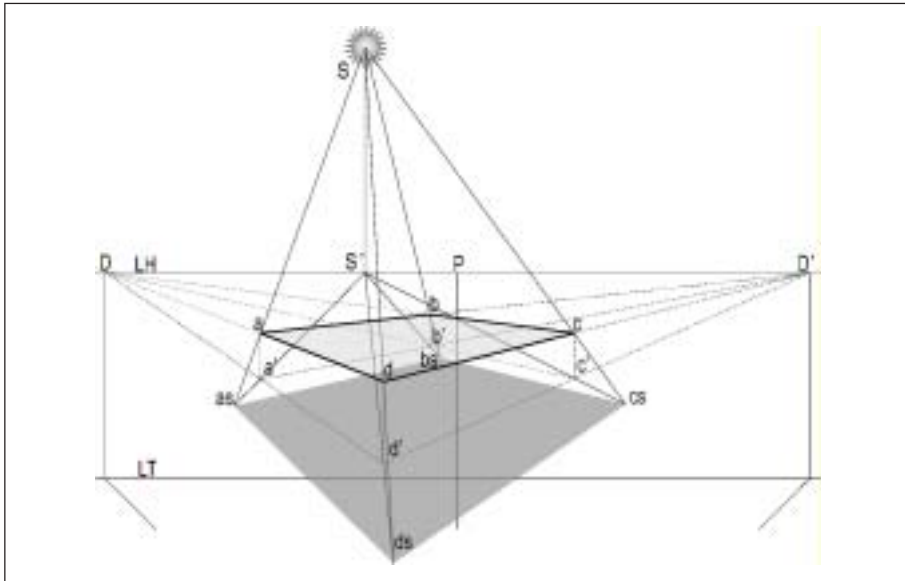
No que respeita à representação, o quadrado será representado por quatro pontos enquanto que o círculo por oito inseridos numa figura quadrada.

Compreendendo os procedimentos anteriores para o ponto e para as rectas, os seguintes exercícios não revestirão de maior dificuldade.

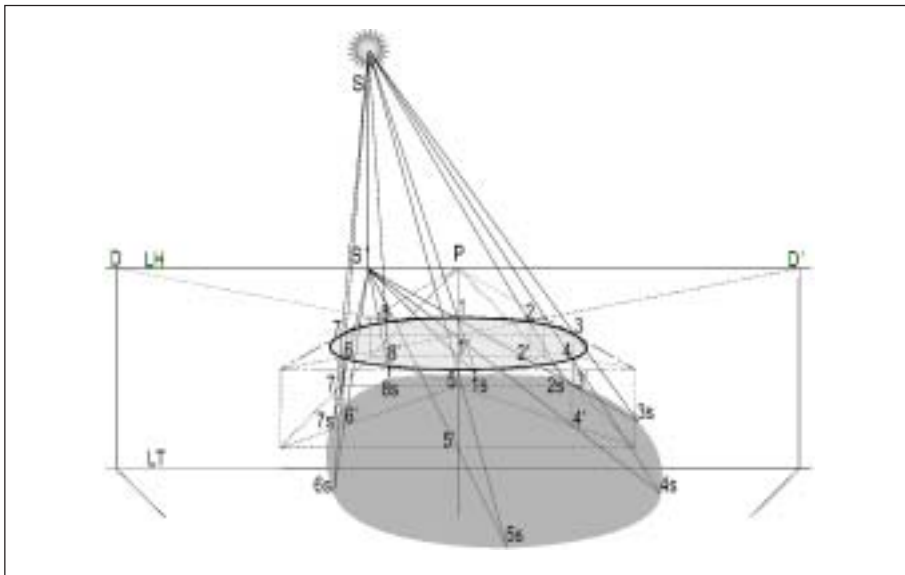
Em todos os exemplos inicia-se o exercício por determinar a projecção dos quatro vértices do quadrado ou os oito pontos que definem a circunferência sobre o plano geometral [ $\beta$ ].

Conforme o tipo de luz, repete-se o procedimento que consiste em determinar os pontos definidores em sombra, obtidos através dos raios visuais que partem do Sol [S] ou do ponto de luz artificial [L] e que intersectarão os raios que partem do ponto de fuga das sombras [S'] ou [L']. No caso específico da luz lateral, a sombra de cada ponto será obtida da intersecção do raio lateral oblíquo de frente com o raio horizontal de frente que passa pela projecção do ponto sobre o plano geometral [ $\beta$ ].

**4.1 · Sombra de um quadrado e de uma circunferência não assentes no plano geometral com luz no plano do quadro**

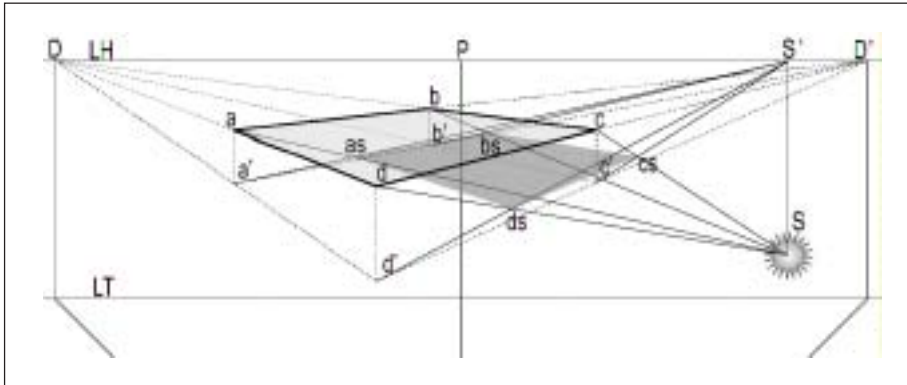


*Figura 117 - Sombra de quadrado em perspectiva oblíqua não assente no plano geometral e com a luz no plano do quadro.*

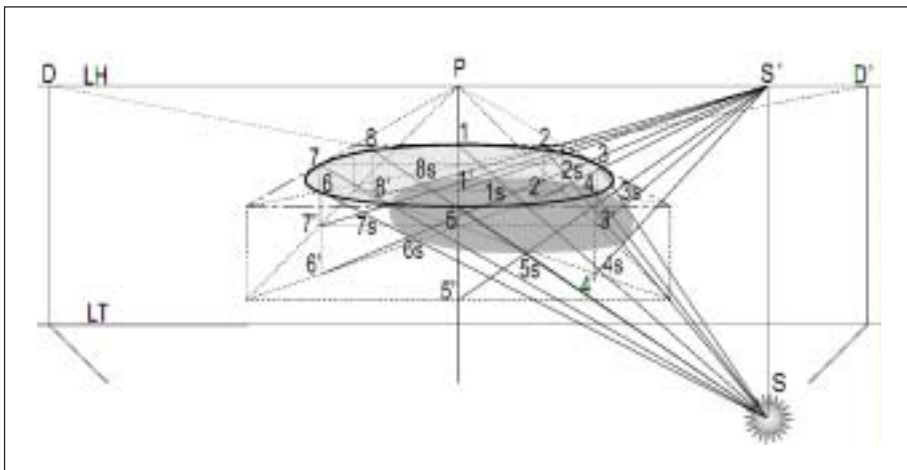


*Figura 118 - Sombra de uma circunferência em perspectiva paralela não assente no plano geometral e com a luz no plano do quadro.*

**4.2 · Sombra de um quadrado e de uma circunferência não assentes no plano geometral com a luz no Nadir ou atrás do observador**



*Figura 119 - Sombra de quadrado em perspectiva oblíqua não assente no plano geometral com a luz no nadir ou atrás do observador.*



*Figura 120 - Sombra de uma circunferência em perspectiva paralela não assente no plano geometral com a luz no nadir ou atrás do observador.*

### 4.3 · Sombra de um quadrado e de uma circunferência não assente no plano geometral com luz lateral

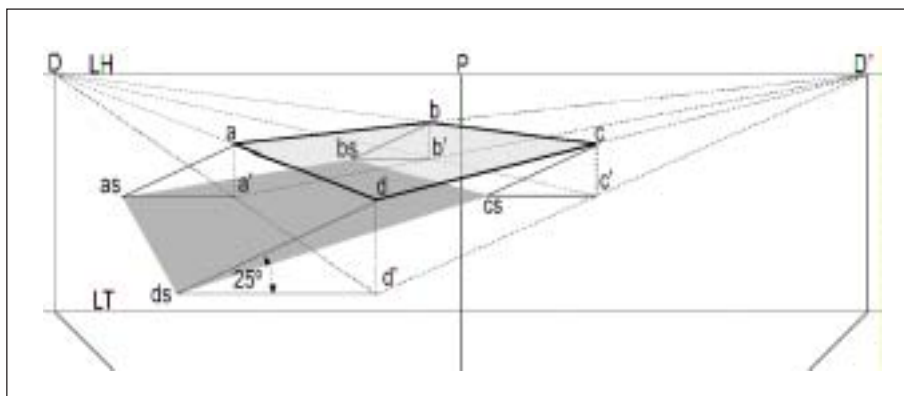


Figura 121 - Sombra de quadrado em perspectiva oblíqua não assente no plano geometral com a luz lateral.

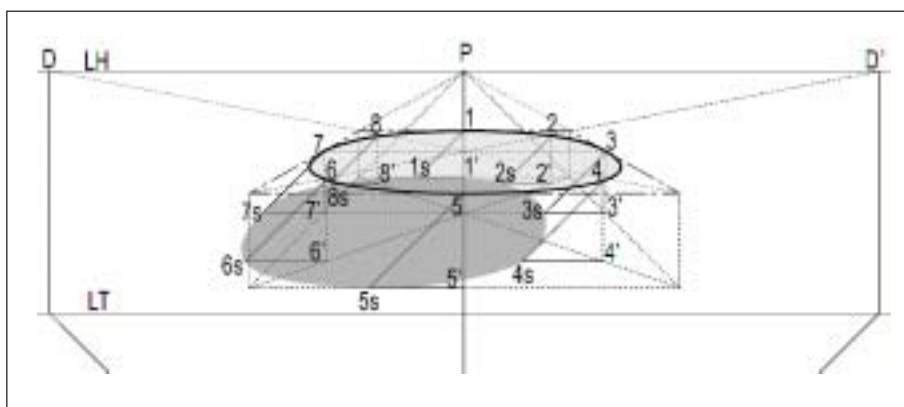
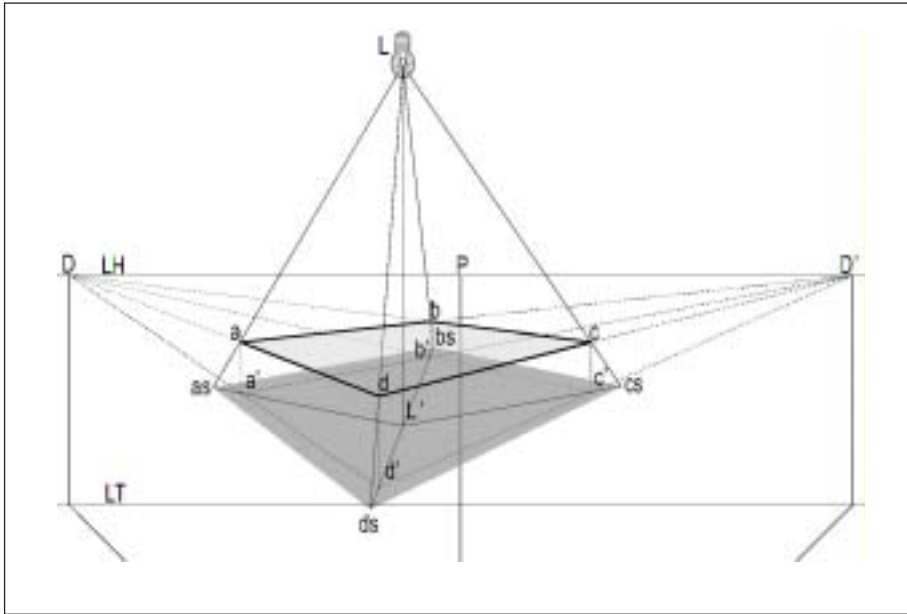
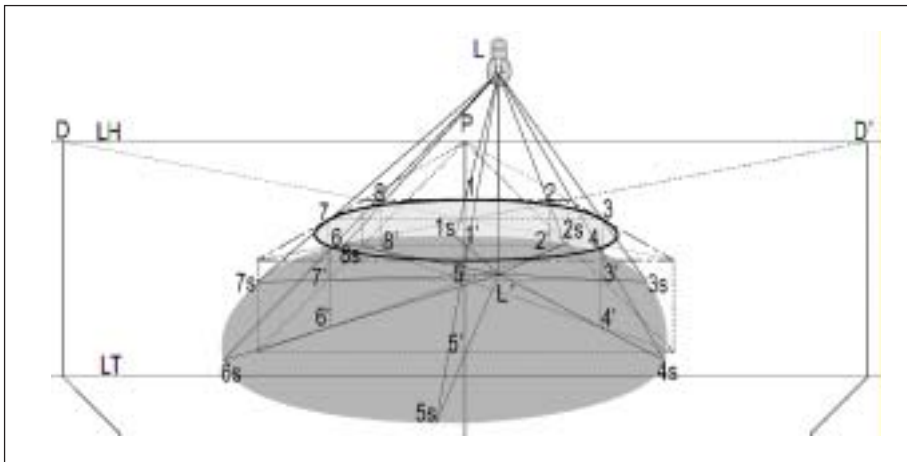


Figura 122 - Sombra de uma circunferência em perspectiva paralela não assente no plano geometral com a luz lateral.

**4.4 · Sombra de um quadrado e de uma circunferência não assente no plano geometral com luz artificial**



*Figura 123 - Sombra de quadrado em perspectiva oblíqua não assente no plano geometral com a luz artificial.*



*Figura 124 - Sombra de uma circunferência em perspectiva paralela não assente no plano geometral com a luz artificial.*

## 5 · Situações específicas da sombra projectada de um segmento de recta

Os exemplos anteriormente referidos demonstraram ser de fácil resolução. No entanto nem sempre a sombra é projectada sobre um plano horizontal. Geralmente, a sombra própria de uma forma, vai encontrar outras formas que produzirão a alteração da sua direcção e forma.

O presente sub-capítulo vai abordar o comportamento da sombra de um segmento de recta quando atinge no seu percurso um plano vertical, inclinado ou curvo.

O problema da projecção da sombra de um segmento de recta de frente sobre os planos horizontal, vertical e curvo será colocado para cada tipo de luz. A figura 125 representa o esquema que será comum a todos os exemplos de luz apresentados. O segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$  terá sempre a sua sombra projectada sobre o paralelepípedo rectângulo  $[a,b,c,d,e,f,g,h]$ .

### 5.1 · Sombra projectada de um segmento de recta sobre os planos vertical e horizontal

#### 5.1.1 · Sol no plano do quadro:

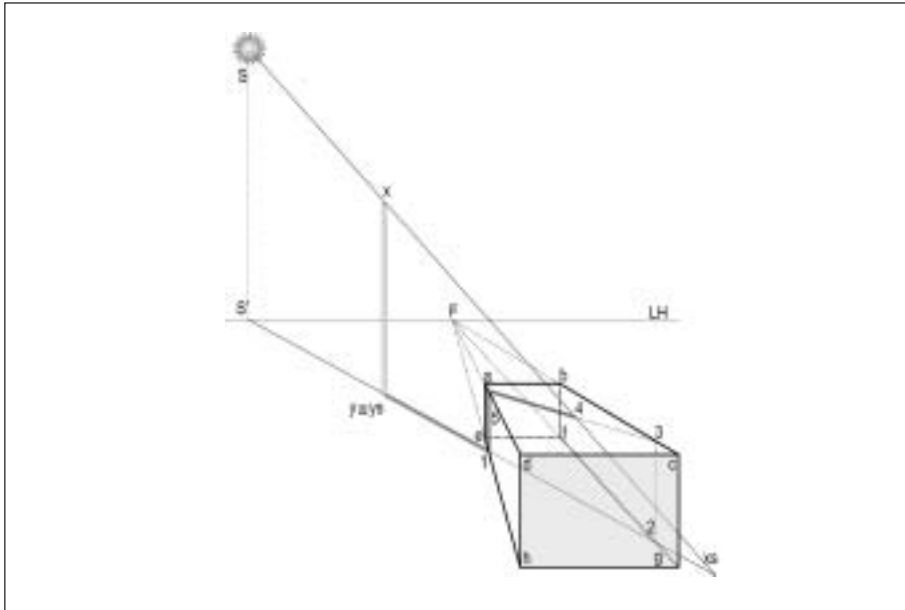


Figura 125 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre os planos vertical e horizontal com o Sol no plano do quadro.

Observe a figura 125. O segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$ , teria como sombra projectada o segmento de recta horizontal de fuga  $[ys,xs]$ , se durante o normal percurso não intersectasse o plano vertical e horizontal.

A sombra intersecta a face inferior do paralelepípedo rectângulo nos pontos [1] e [2]. Quando uma sombra atinge um plano vertical, vai percorrê-lo também verticalmente. Torna-se portanto necessário determinar o percurso que a sombra vai ter na figura geométrica. Para tal, e a partir dos pontos [1] e [2], traçam-se os segmentos de recta verticais [1,5] e [2,3], obtendo-se o segmento de recta horizontal [5,3] a partir da sua união, situado sobre a face superior do paralelepípedo. Está determinado o percurso da sombra quando intersecta o sólido geométrico  $[ys,1,5,3,2,xs]$ . No entanto, conforme se observa a sombra termina o seu percurso no ponto [4], ponto em que o raio de luz  $[S,xs]$  intersecta o segmento de recta [5,3].

**5.1.2 · Sol no Nadir ou atrás do observador:**

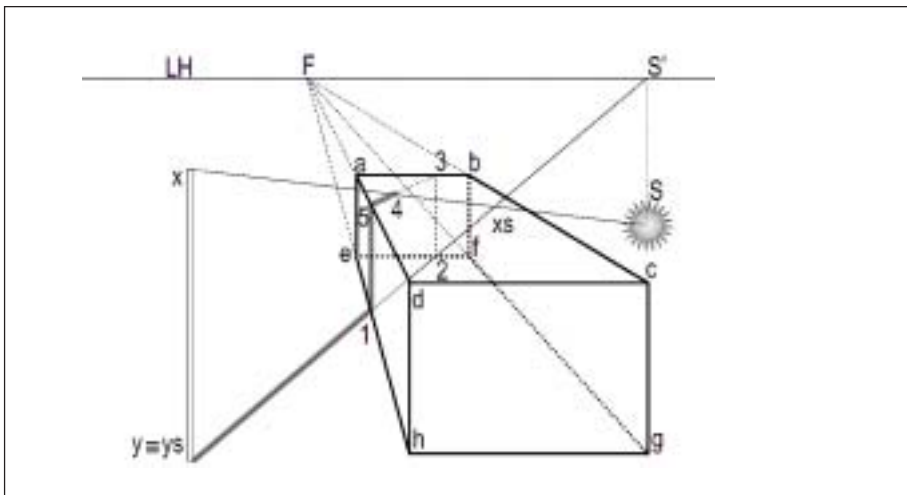


Figura 126 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre os planos vertical e horizontal com o Sol no nadir ou atrás do observador.

A sombra do segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$ , representado na figura 126, intersecta a face inferior do paralelepípedo rectângulo nos pontos [1] e [2]. Quando uma sombra atinge um plano vertical, vai percorrê-lo também verticalmente. Torna-se portanto necessário determinar o percurso que a sombra vai ter na figura geométrica. Para tal, e a partir dos pontos [1] e [2], traçam-se os segmentos de recta verticais [1,5] e [2,3], obtendo-se o segmento de recta horizontal [5,3] a partir da sua união, situado sobre a face superior do paralelepípedo. Está determinado o percurso da sombra

quando intersecta o sólido geométrico [ys,1,5,3,2,xs]. No entanto, conforme se observa a sombra termina o seu percurso no ponto [4], ponto em que o raio de luz [S,x] intersecta o segmento de recta [5,3].

### 5.1.3 · Sol lateral:

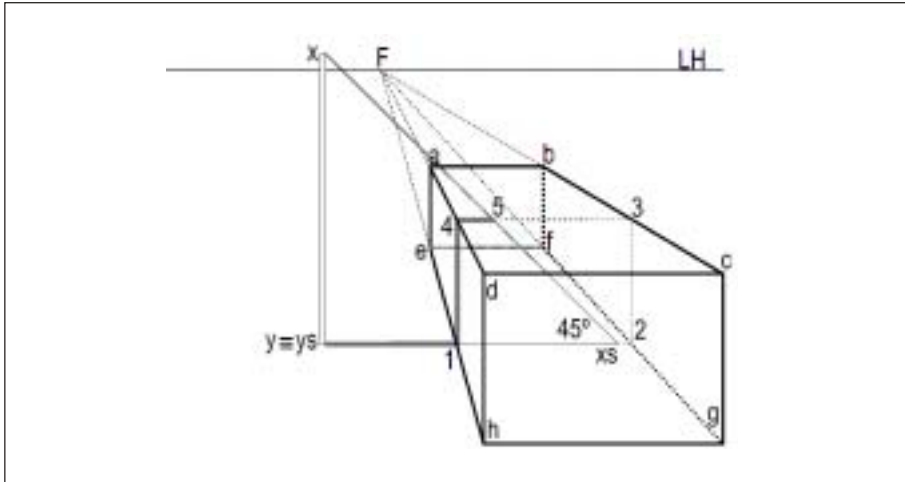


Figura 127 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre os planos vertical e horizontal com o Sol lateral.

A sombra do segmento de recta vertical de frente [x,y], representado na figura 127, a título de exemplo, faz um ângulo de  $45^\circ$  e intersecta a face inferior do paralelepípedo rectângulo no ponto [1]. No entanto, prolongando a direcção da sombra, esta intersecta a aresta [f,g] no ponto [2]. Quando uma sombra atinge um plano vertical, vai percorrê-lo também verticalmente. Torna-se portanto necessário determinar o percurso que a sombra vai ter na figura geométrica. Para tal, e a partir dos pontos [1] e [2], traçam-se os segmentos de recta verticais [1,4] e [2,3], obtendo-se o segmento de recta horizontal [4,3] a partir da sua união, situado sobre a face superior do paralelepípedo. Está determinado o percurso da sombra quando intersecta o sólido geométrico [ys,1,4,3]. No entanto, conforme se observa a sombra termina o seu percurso no ponto [5], ponto em que o raio de luz [x,xs] intersecta o segmento de recta [4,3].



## 5.2 · Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano oblíquo

### 5.2.1 · Sol no plano do quadro:

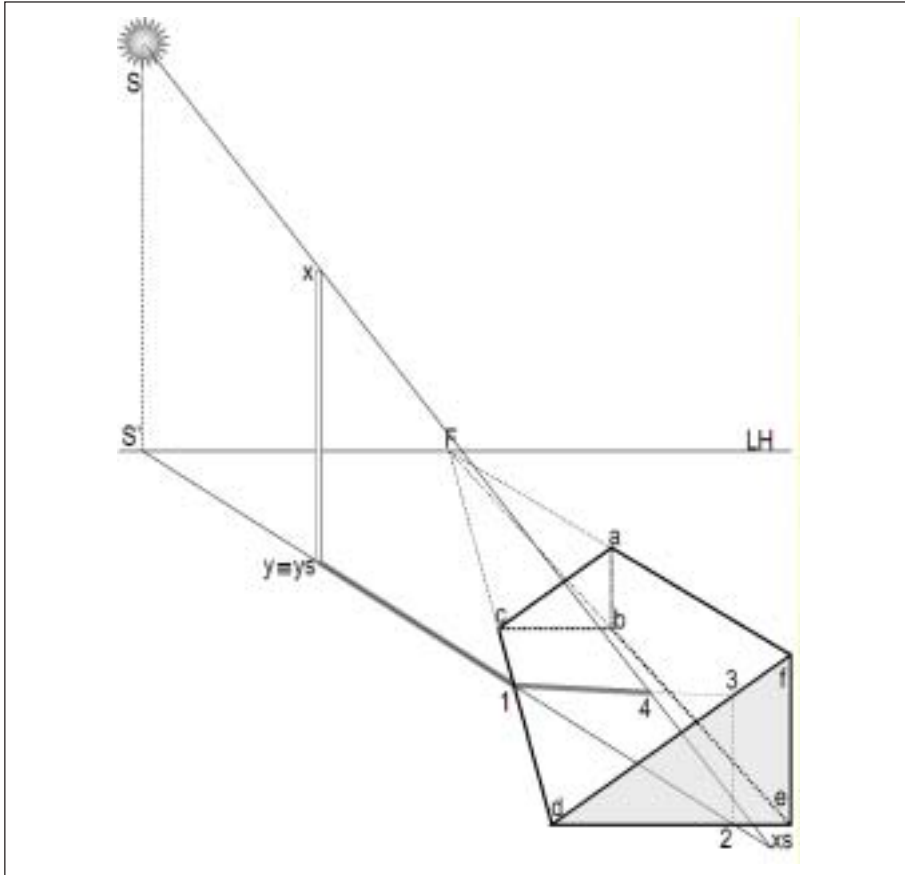


Figura 129 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano oblíquo com o Sol no plano do quadro.

A sombra do segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$ , representado na figura 129, intersecta a face inferior da figura prismática nos pontos [1] e [2]. Torna-se portanto necessário determinar o percurso que a sombra vai ter na figura geométrica. Para tal, e a partir do ponto [2] traça-se o segmento de recta vertical  $[2,3]$ . Unindo-o ao ponto [1], obtém-se a direcção da sombra quando intersecta o sólido geométrico  $[ys,1,3,2,xs]$ . No entanto, conforme se observa a sombra termina o seu percurso no ponto [4], ponto em que o raio de luz  $[S,xs]$  intersecta o segmento de recta  $[1,3]$ .



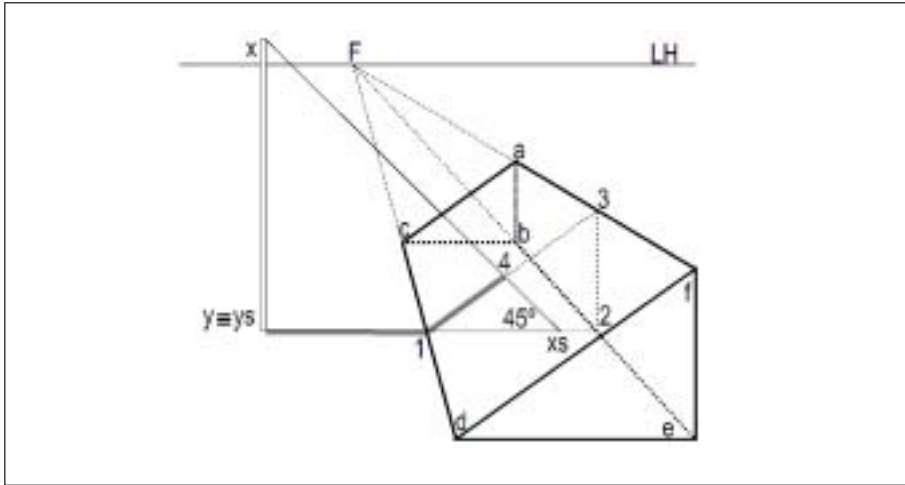


Figura 131 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano oblíquo com o Sol lateral.

5.2.4 · Luz artificial:

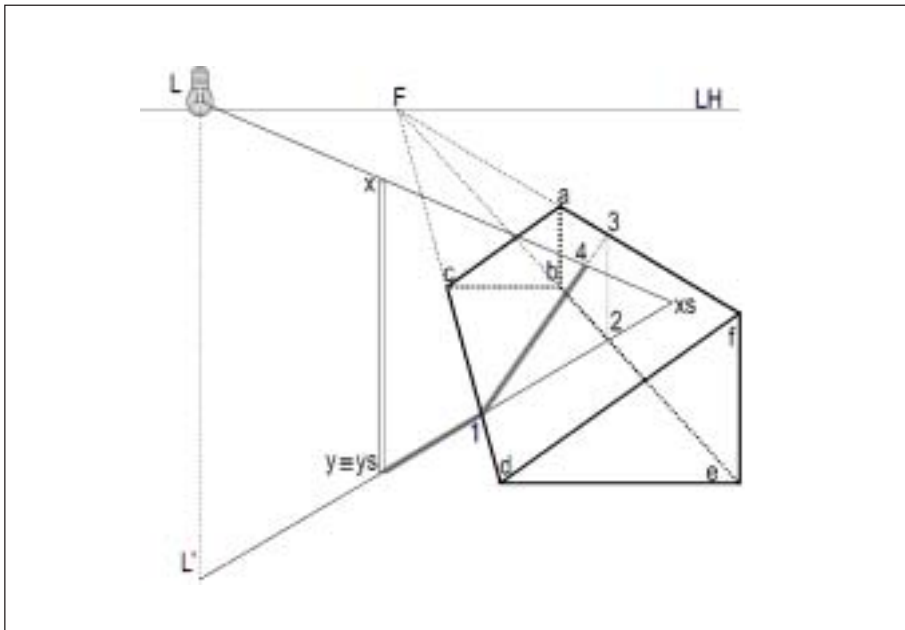


Figura 132 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano oblíquo com o Luz artificial.

A sombra do segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$ , representado na figura 132, intersecta a face inferior da figura prismática nos pontos  $[1]$  e  $[2]$ . Torna-se portanto necessário determinar o percurso que a sombra vai ter na figura geométrica. Para tal, e a partir do ponto  $[2]$  traça-se o segmento de recta vertical  $[2,3]$ . Unindo-o ao ponto  $[1]$ , obtém-se a direcção da sombra quando intersecta o sólido geométrico  $[ys,1,3,2,xs]$ . No entanto, conforme se observa a sombra termina o seu percurso no ponto  $[4]$ , ponto em que o raio de luz  $[L,xs]$  intersecta o segmento de recta  $[1,3]$ .

### 5.3 · Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano curvo

#### 5.3.1 · Sol no plano do quadro:

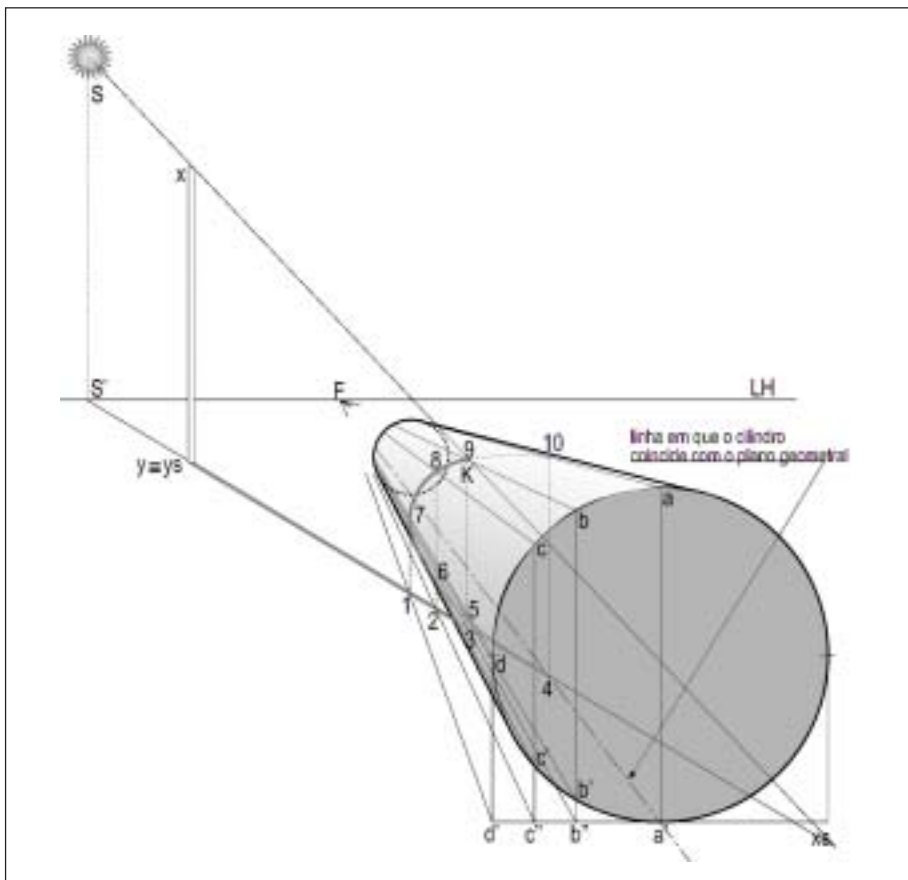


Figura 133 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano curvo com o Sol no plano do quadro.

A sombra do segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$ , representado na figura 133, intersecta o cilindro no ponto [4], que corresponde à linha de coincidência  $[F,a']$  do cilindro com o plano geometral. Não havendo plano vertical, horizontal ou oblíquo torna-se necessário recorrer a linhas auxiliares, para com rigor determinar o percurso da sombra no plano curvo. Para o efeito, dividiu-se o quadrado, que coincide com o plano geometral, onde está inserida a base do cilindro em secções, obtendo-se os pontos  $[d']$ ,  $[c'']$ ,  $[b'']$  e  $[a']$ . Estes pontos intersectam verticalmente a base do cilindro nos pontos  $[d]$ ,  $[c']$ ,  $[c]$ ,  $[b']$ ,  $[b]$  e  $[a]$ . Todos estes pontos formam com o ponto de fuga  $[F]$ , segmentos de recta de topo que seccionam o cilindro.

A sombra do segmento de recta  $[x,y]$  seria o segmento de recta  $[ys,xs]$ . No entanto ao intersectar o cilindro no ponto [4], é alterado o seu normal percurso. O Ponto [10] é um dos pontos que define a direcção da sombra, correspondendo à projecção vertical do ponto [4]. Contudo a sombra já havia intersectado os segmentos de recta:

- $[F,d']$  no ponto [1] a que corresponde verticalmente o ponto [7] do segmento de recta  $[F,d]$ ;
- $[F,c'']$  no ponto [2] a que corresponde verticalmente os pontos [6] e [8], respectivamente dos segmentos de recta  $[F,c']$  e  $[F,c]$ ;
- $[F,b'']$  no ponto [3] a que corresponde verticalmente os pontos [5] e [9], respectivamente dos segmentos de recta  $[F,b']$  e  $[F,b]$ .

Os pontos encontrados [4], [5], [6], [7], [8], [9] e [10], correspondem à direcção que toma a sombra  $[xs,ys]$  do segmento de recta  $[x,y]$  quando intersecta o cilindro. A sombra termina o seu percurso no ponto [k] por ser intersectado pelo raio visual  $[S,xs]$ .

### 5.3.3 • Sol no nadir ou atrás do observador:

Na figura 134, após a necessária segmentação da figura geométrica cilíndrica, explicada no exercício anterior, procede-se à determinação do percurso da sombra do segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$  sobre o cilindro.

A sombra do segmento de recta  $[x,y]$  seria o segmento de recta  $[ys,xs]$ . No entanto ao intersectar o cilindro no ponto [4], é alterado o seu normal percurso. Contudo a sombra já havia intersectado os segmentos de recta:

- $[F,d']$  no ponto [1] a que corresponde verticalmente o ponto [7] do segmento de recta  $[F,d]$ ;
- $[F,c'']$  no ponto [2] a que corresponde verticalmente os pontos [6] e [8], respectivamente dos segmentos de recta  $[F,c']$  e  $[F,c]$ ;
- $[F,b'']$  no ponto [3] a que corresponde verticalmente o ponto [5] do segmento de recta  $[F,b']$ .

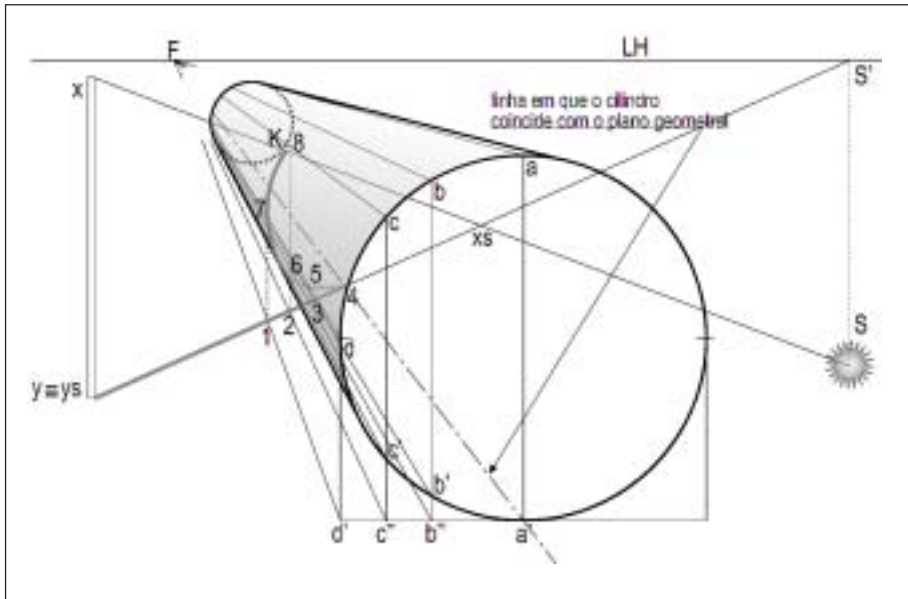


Figura 134 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano curvo com o Sol no nadir ou atrás do observador.

Os pontos encontrados [4], [5], [6], [7] e [8], correspondem à direcção que toma a sombra [xs,ys], do segmento de recta [x,y] quando intersecta o cilindro. A sombra termina o seu percurso no ponto [k] por ser intersectado pelo raio visual [S,x].

### 5.3.4 • Sol lateral:

Na figura 135, após a necessária segmentação da figura geométrica cilíndrica já explicada, procede-se à determinação do percurso da sombra do segmento de recta vertical de frente [x,y] sobre o cilindro.

A sombra do segmento de recta [x,y] seria o segmento de recta [ys,xs]. No entanto ao intersectar o cilindro no ponto [4], é alterado o seu normal percurso. Contudo a sombra já havia intersectado os segmentos de recta:

- [F,d'] no ponto [1] a que corresponde verticalmente o ponto [7] do segmento de recta [F,d];
- [F,c''] no ponto [2] a que corresponde verticalmente os pontos [6] e [8], respectivamente dos segmentos de recta [F,c'] e [F,c].

Os pontos encontrados [4], [5], [6], [7] e [8], correspondem à direcção que toma a sombra [ys,xs] do segmento de recta [x,y] quando intersecta o cilindro. A sombra termina o seu percurso no ponto [k] por ser intersectado pelo raio visual [x,xs].

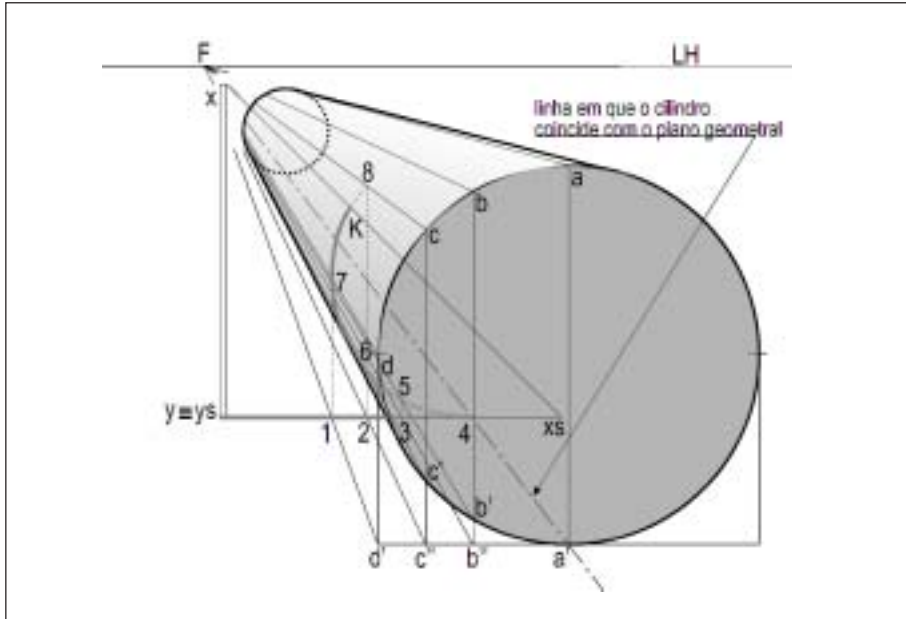


Figura 135 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano curvo com o Sol lateral.

**5.3.4 • Luz artificial:**

Na figura 136, após a necessária segmentação da figura geométrica cilíndrica já explicada, procede-se à determinação do percurso da sombra do segmento de recta vertical de frente  $[x,y]$  sobre o cilindro.

A sombra do segmento de recta  $[x,y]$  seria o segmento de recta  $[y_s,x_s]$ . No entanto ao intersectar o cilindro no ponto [4], é alterado o seu normal percurso. O Ponto [10] é um dos pontos que define a direcção da sombra, correspondendo à projecção vertical do ponto [4]. Contudo a sombra já havia intersectado os segmentos de recta:

- $[F,d']$  no ponto [1] a que corresponde verticalmente o ponto [7] do segmento de recta  $[F,d]$ ;
- $[F,c']$  no ponto [2] a que corresponde verticalmente os pontos [6] e [8], respectivamente dos segmentos de recta  $[F,c']$  e  $[F,c]$ ;
- $[F,b']$  no ponto [3] a que corresponde verticalmente os pontos [5] e [9], respectivamente dos segmentos de recta  $[F,b']$  e  $[F,b]$ .

Os pontos encontrados [4], [5], [6], [7], [8], [9] e [10], correspondem à direcção que toma a sombra [ys,xs] do segmento de recta [x,y] quando intersecta o cilindro. A sombra termina o seu percurso no ponto [k] por ser intersectado pelo raio visual [L,xs].

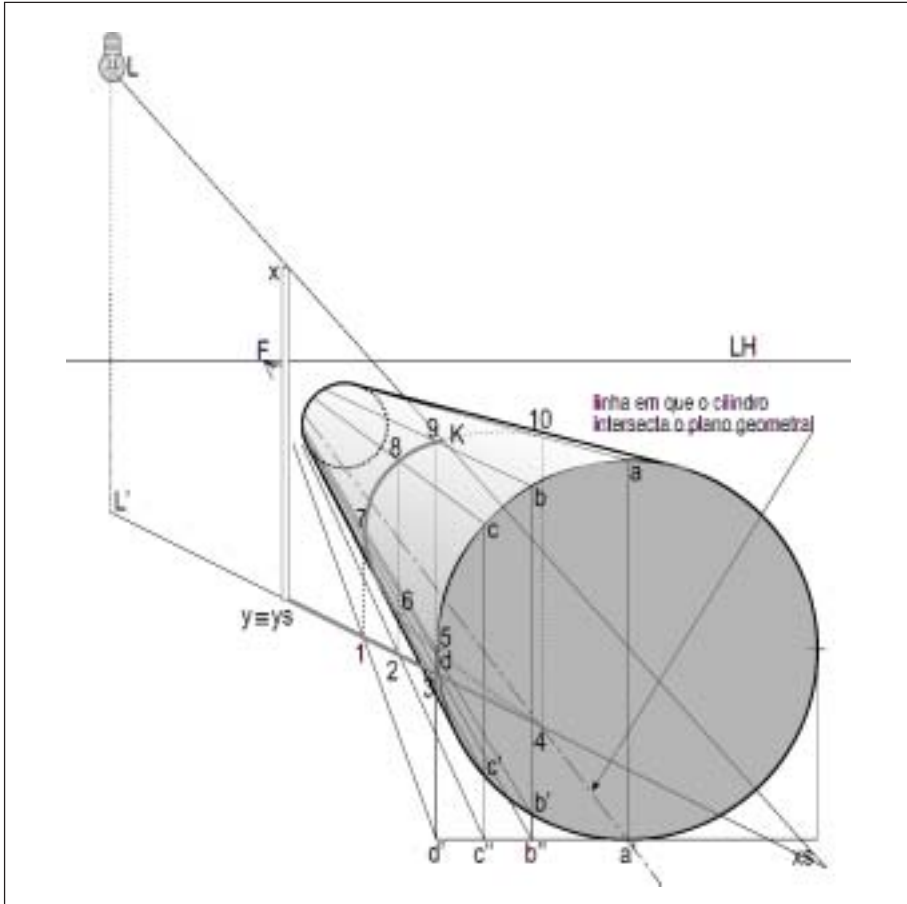


Figura 136 - Sombra projectada de um segmento de recta sobre um plano curvo com luz artificial.

## 6 • Sombra de sólidos geométricos nos quatro casos de luz

Como atrás se verificou, a sombra de uma figura geométrica era dada pela determinação dos segmentos de recta que o definiam. A sombra do sólido, não é mais do que a determinação da sombra dos segmentos de recta que o compõem.

Até aqui, o conceito de sombra própria, não se colocava, tanto para o ponto como para a recta.

Havendo um ponto de luz qualquer, seja solar ou artificial, faz com que uma ou mais faces da forma estejam iluminadas, enquanto outra ou outras, estejam em sombra. Esta ausência de luz numa face ou faces produz a designada sombra própria. Esta sombra própria é uma mancha que geralmente resulta do envolvimento de várias arestas do sólido.

No entanto, nos sólidos e formas que não são planas, verifica-se que a sombra própria possui várias tonalidades de degra-

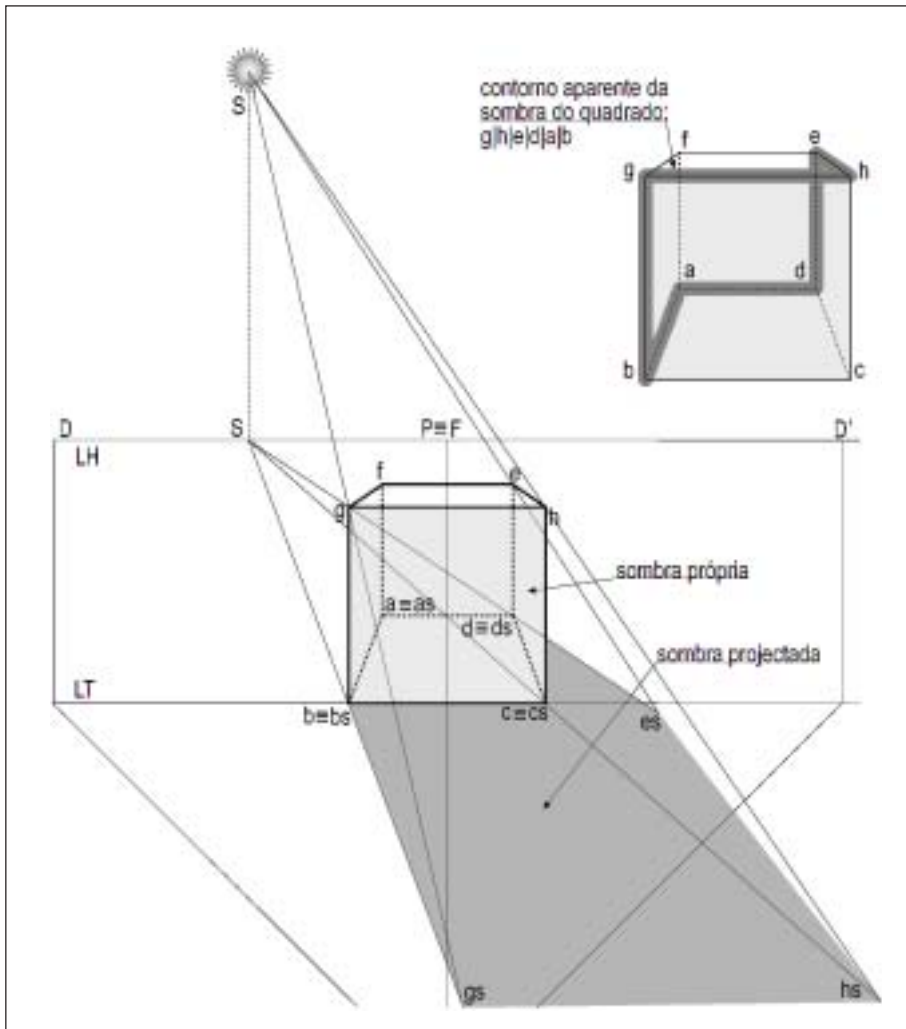


Figura 137 - Sombra própria e sombra projectada de um sólido geométrico.

dação, como é o caso produzido por uma luz sobre o cone ou o cilindro. Se existe sombra própria, também tem de existir sombra projectada, que agora, adquire a forma de mancha, sendo a soma das faces em sombra.

Este sub-capítulo vai novamente, apresentar como exemplos práticos os sólidos geométricos conhecidos (cubo, pirâmide, cone e cilindro), agora alternadamente sujeitos à luz nos quatro casos. Em primeiro lugar, serão observados na posição assente sobre o plano geometral, sendo posteriormente calculada a sombra, não estando assentes.

Na figura 137, verifica-se que o Sol está situado no plano do quadro, à esquerda do cubo, provoca sombra própria em três faces do cubo: [g,h,c,b], [c,d,e,h] e [a,b,c,d], sendo esta última impossível de visualizar por estar assente sobre o plano geometral. Da posição em que nos encontramos, apenas observamos em sombra a face [g,h,c,b]. Este aspecto é relevante, para a ligação com a sombra da recta, já que podíamos agora traçar as arestas do sólido que contornam as faces em sombra, produzindo aquilo que iremos designar de contorno aparente:

Significa que, bastaria, no presente exemplo, determinar a sombra desses seis pontos, unindo-os de seguida, obtendo-se a sombra projectada do cubo [a,b,c,d,e,f,g,h].

Determinação da sombra própria e projectada:

Conforme já foi identificado, a face inferior do cubo [a,b,c,d] por coincidir com o plano geometral, coincide com a sua sombra [as,bs,cs,ds]. Facilmente também é identificável que a face superior do cubo [e,f,g,h] está iluminada dada a posição do Sol.

Apenas necessitamos de determinar os pontos [g], [h] e [e]. O ponto [f] não é necessário determinar dado que a sua sombra não se vê ao estar projectada por debaixo do cubo.

A sombra [gs] é obtida pela intersecção do raio de luz que sai do Sol [S], que ao passar pelo ponto [g], intersecta o segmento de recta que sai do ponto de fuga das sombras [S'] e que passa pela projecção do ponto [g] no plano geometral.

A sombra [hs] é obtida pela intersecção do raio de luz que sai do Sol [S], que ao passar pelo ponto [h], intersecta o segmento de recta que sai do ponto de fuga das sombras [S'] e que passa pela projecção do ponto [h] no plano geometral.

A sombra [es] é obtida pela intersecção do raio de luz que sai do Sol [S], que ao passar pelo ponto [e], intersecta o segmento de recta que sai do ponto de fuga das sombras [S'] e que passa pela projecção do ponto [e] no plano geometral.

A sombra projectada do cubo [a,b,c,d,e,f,g,h] resulta da união dos pontos [bs,gs,hs,es,ds,as].

A sombra própria do cubo [a,b,c,d,e,f,g,h] é dada pelas faces [g,h,c,b], [e,h,c,d] e [a,b,c,d].

### 6.1 · Sombra de uma pirâmide assente no plano geometral com o sol no nadir ou atrás do observador:

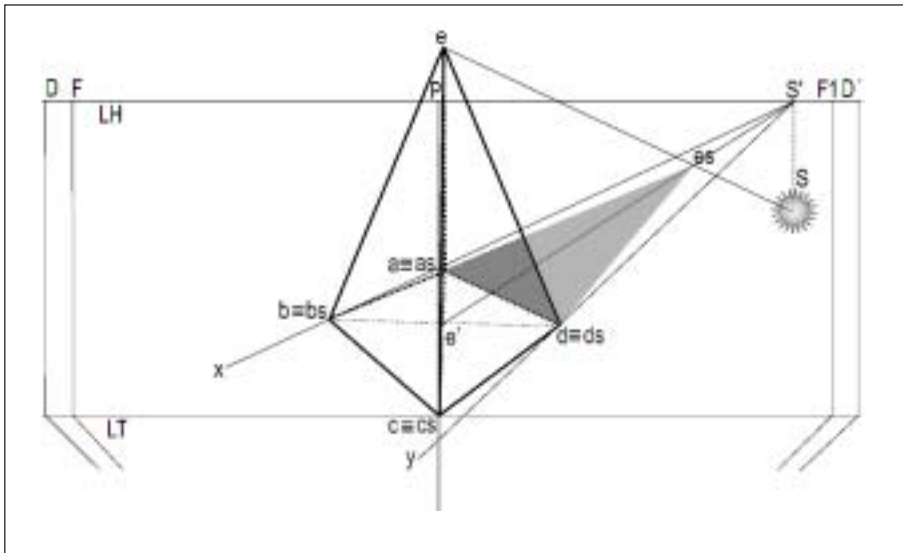


Figura 138 - Sombra própria e sombra projectada de uma pirâmide com o Sol no nadir ou atrás do observador.

Observe-se a figura 138. Para facilitar a determinação da sombra projectada de um sólido geométrico ou de uma forma, deve-se recorrer ao traçado dos segmentos de recta que irão definir a direcção da sombra e respectivo espaço de ocupação. Estes segmentos de recta designados de *contorno aparente da sombra* estão identificados pelas letras [x] e [y] e, obtêm-se através da realização de dois segmentos de recta que saem do ponto de fuga das sombras [S'], sendo tangentes aos vértices mais afastados do sólido geométrico que coincidem com o plano geometral.

O presente caso resulta fácil de determinar já que a face da base da pirâmide [a,b,c,d] coincide com a sua sombra [as,bs,cs,ds]. É apenas necessário determinar a sombra do vértice superior [e], obtida através da intersecção dos segmentos de recta que saem do Sol [S] e do ponto de fuga das sombras [S'] e que intersectam respectivamente os pontos [e] e [e'], obtendo-se o ponto [es].

A sombra projectada da pirâmide [a,b,c,d,e] resulta da união dos pontos [bs,as,es,ds,cs].

A sombra própria da pirâmide [a,b,c,d,e] é dada pela face [a,d,e].

6.2 · Sombra de um cone assente no plano geometral com o sol lateral:

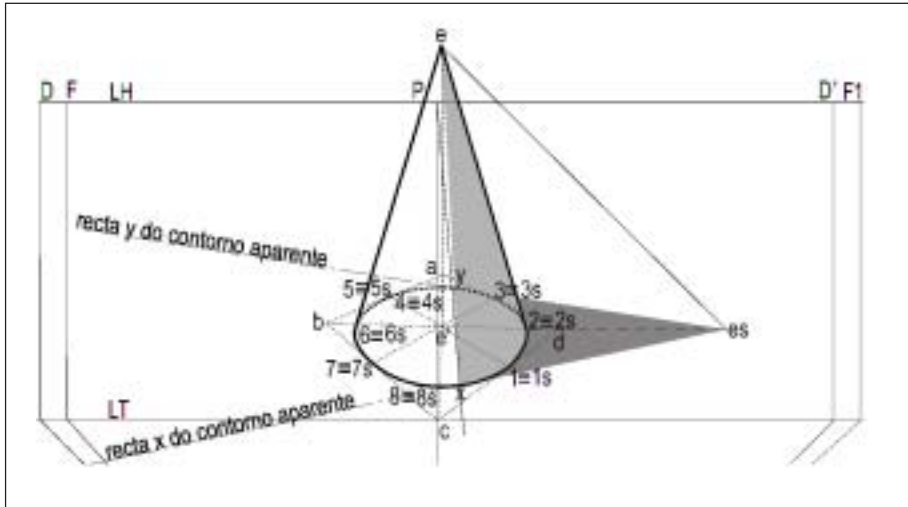


Figura 139 - Sombra própria e sombra projectada de um cone com o Sol lateral.

Na figura 139 recorreu-se novamente ao traçado dos segmentos de recta que irão definir a direcção da sombra e respectivo espaço de ocupação (*rectas do contorno aparente da sombra*), obtidas através da realização de dois segmentos de recta que saem, no presente caso, do vértice em sombra [es] sendo tangentes à base do cone.

O presente caso resulta fácil de determinar já que a base do cone [1,2,3,4,5,6,7,8] coincide com a sua sombra [1s,2s,3s,4s,5s,6s,7s,8s]. Bastou determinar a sombra do vértice superior [e].

A sombra projectada do cone [1,2,3,4,5,6,7,8,e] resulta da união dos pontos [x,es,y,4s,5s,6s,7s,8s].

A sombra própria do cone [1,2,3,4,5,6,7,8,e] é dada pelo espaço ocupado em sombra [e,x,1,2,3,y]. De notar que os pontos [x] e [y] estão num segmento de recta de topo que tem com perspectiva o ponto principal [P].

**6.3 · Sombra de um cilindro assente no plano geometral com luz artificial:**

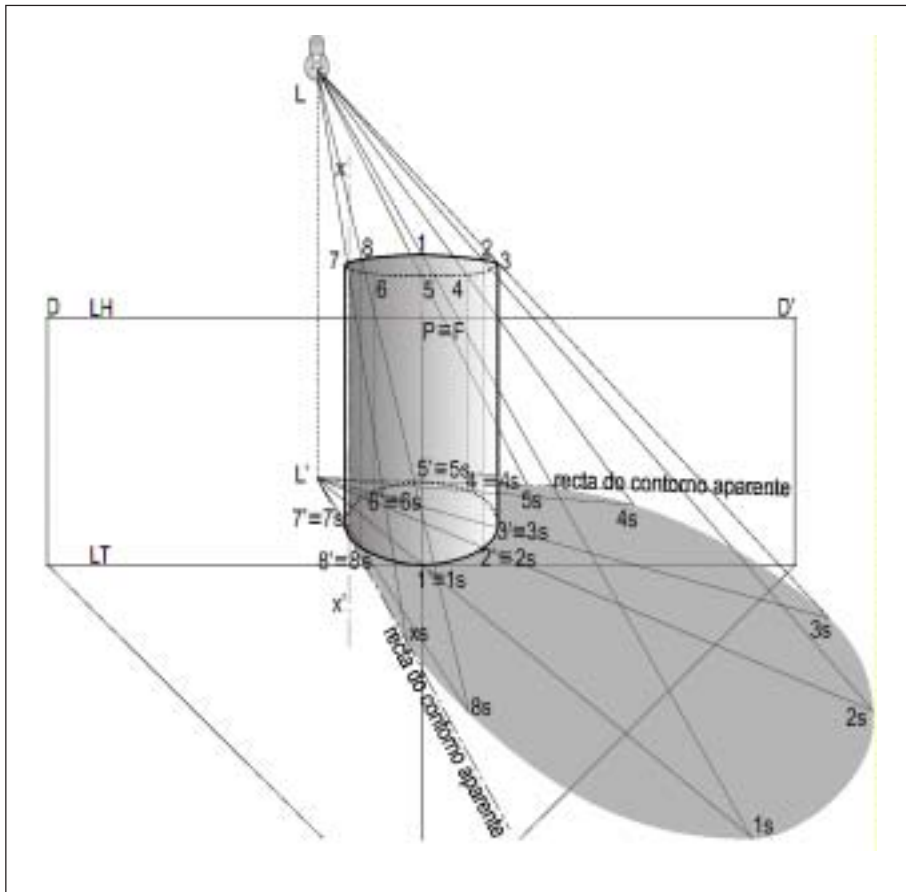


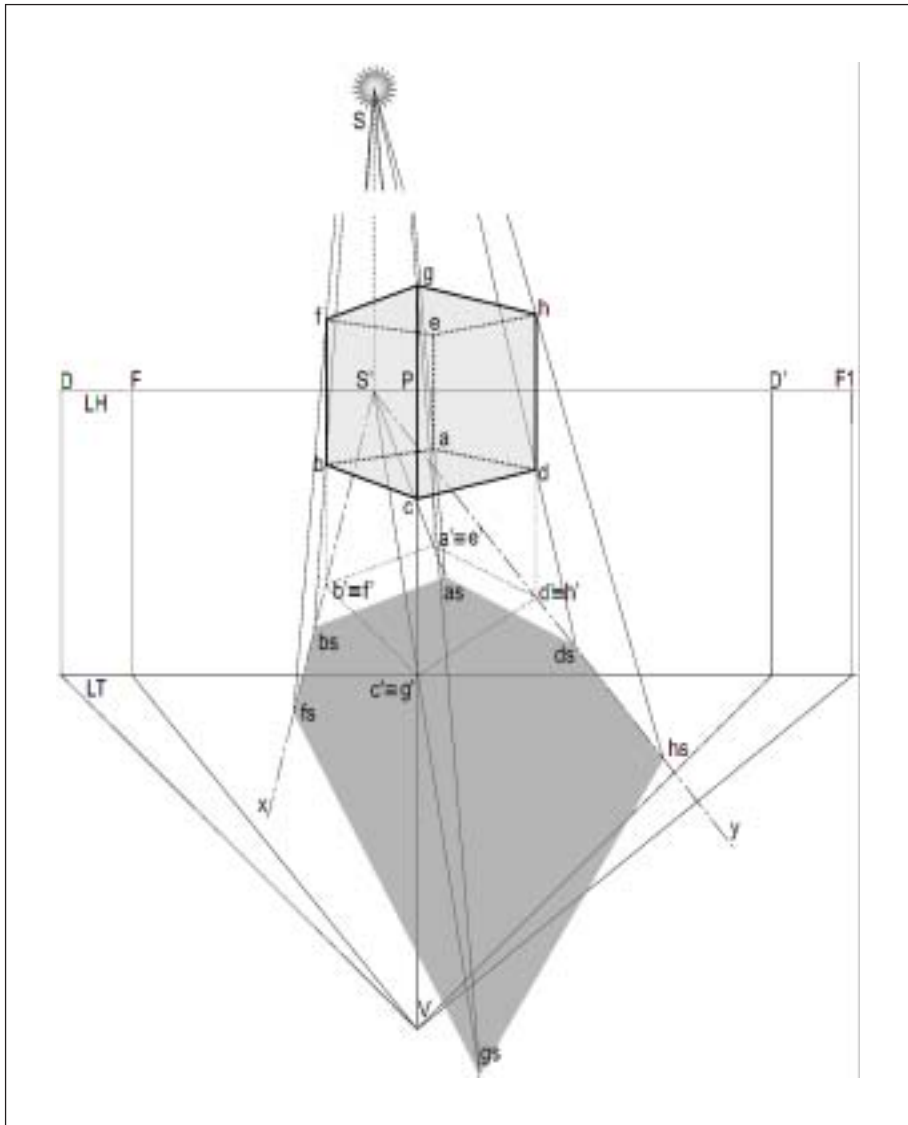
Figura 140 - Sombra própria e sombra projectada de um cilindro com luz artificial.

Novamente e agora na figura 140 recorreu-se ao traçado dos segmentos de recta que irão definir a direcção da sombra e respectivo espaço de ocupação (*rectas do contorno aparente da sombra*), obtidas através da realização de dois segmentos de recta que saem do ponto de fuga das sombras [L'] e sendo tangentes à base do cilindro, encontram na face visível a recta [x,x'].

A base do cone [1',2',3',4',5',6',7',8'] coincide com a sua sombra [1's,2's,3's,4's,5's,6's,7's,8's]. Será apenas necessário determinar a sombra dos pontos [1,2,3,4,5,6,7,8] da base superior do cilindro. Sendo um caso de luz artificial o ponto de fuga das sombras está situado sobre o plano geometral no ponto [L'].

A sombra própria do cone tem início no limite definido na figura pela recta  $[x, x']$  que coincide com o ponto onde uma das rectas de contorno aparente é tangente ao cilindro.

**6.4 · Sombra de um cubo não assente no plano geometral com o sol no plano do quadro:**



*Figura 141 - Sombra própria e sombra projectada de um cubo não assente no plano geometral com o Sol no plano do quadro.*

O procedimento para a determinação da sombra de um sólido geométrico não assente no plano geometral obriga à determinação de quase todos os vértices. Lembro que nos casos anteriores, os sólidos estavam assentes no plano geometral o que facilitava a determinação da sombra já que a sombra da face inferior coincidia com a própria sombra.

Na figura 141 as *rectas do contorno aparente da sombra* [x] e [y], obtidas através da realização dos segmentos de recta que saem do ponto de fuga das sombras [S'], sendo tangentes à base do cubo nos vértices projectados no plano geometral [b'''af'] e [d'''ah']

O presente exercício obriga, no fundo, à determinação das sombras das arestas verticais do cubo [f,b], [g,c], [h,d] e [e,a], no princípio já demonstrado para a sombra da recta não assente,

Os pontos em sombra [bs] e [fs] são obtidos a partir da recta que parte do ponto de fuga das sombras [S'] e intersecta os pontos coincidentes projectados no plano geometral [b'''af'], sendo que esta recta é intersectada pelos raios visuais que partem do Sol [S] e intersectam os vértices [b] e [f]. Não há necessidade de determinar o ponto [cs].

O ponto em sombra [gs] é obtido a partir da recta que parte do ponto de fuga das sombras [S'] e intersecta os pontos coincidentes projectados no plano geometral [c'''ag'], sendo que esta recta é intersectada pelos raio visual que parte do Sol [S] e intersecta o vértice [g].

Os pontos em sombra [ds] e [hs] são obtidos a partir da recta que parte do ponto de fuga das sombras [S'] e intersecta os pontos coincidentes projectados no plano geometral [d'''ah'], sendo que esta recta é intersectada pelos raios visuais que partem do Sol [S] e intersectam os vértices [d] e [h].

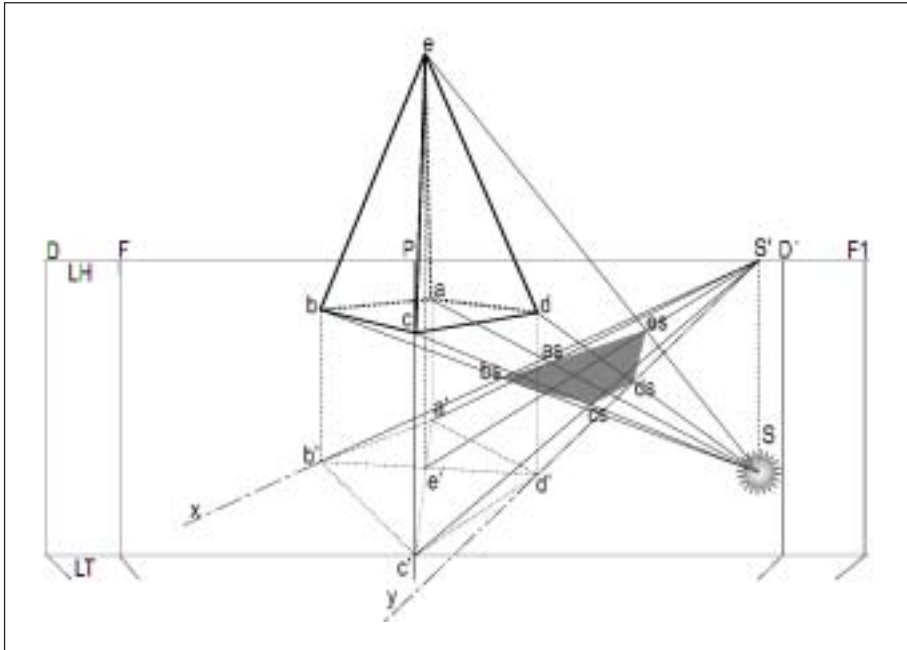
O ponto em sombra [as] é obtido a partir da recta que parte do ponto de fuga das sombras [S'] e intersecta o ponto projectado no plano geometral [a'''ae'], sendo que esta recta é intersectada pelo raio visual que parte do Sol [S] e intersecta o vértice [a]. Não há necessidade de determinar a sombra do ponto [e].

A sombra projectada do cubo é dada pelos pontos [as,ds,hs,gs,fs,bs].

A sombra própria do cubo existe nas faces [a,b,c,d], [b,c,g,f] e [c,d,h,g].

### 6.5 · Sombra de uma pirâmide assente no plano geometral com o sol no nadir ou atrás do observador:

No exercício da figura 142, é idêntico o procedimento para o cálculo da sombra projectada. No entanto vale a pena repetir abreviadamente a metodologia empregue para a sua determinação. A partir do ponto de fuga das sombras [S'], traçam-se as rectas [x] e [y], tangentes respectivamente aos vértices rebatidos da pirâmide no plano geometral [b'] e [d'], obtendo-se a amplitude do *contorno*



*Figura 142 - Sombra própria e sombra projectada de uma pirâmide não assente no plano geometral com o Sol no nadir ou atrás do observador.*

aparente do sólido geométrico. Segue-se a determinação da sombra do vértice superior da pirâmide [e], cuja projecção no plano geometral é dada pelo ponto [e']. Termina o exercício com a determinação dos vértices da base da pirâmide [a,b,c,d].

**6.6 · Sombra de um cone não assente no plano geometral com o sol lateral:**

No exercício da figura 143, verifica-se que é desnecessária a determinação dos pontos [5], [6] e [7], embora o procedimento seja igual ao exemplo dado anteriormente.

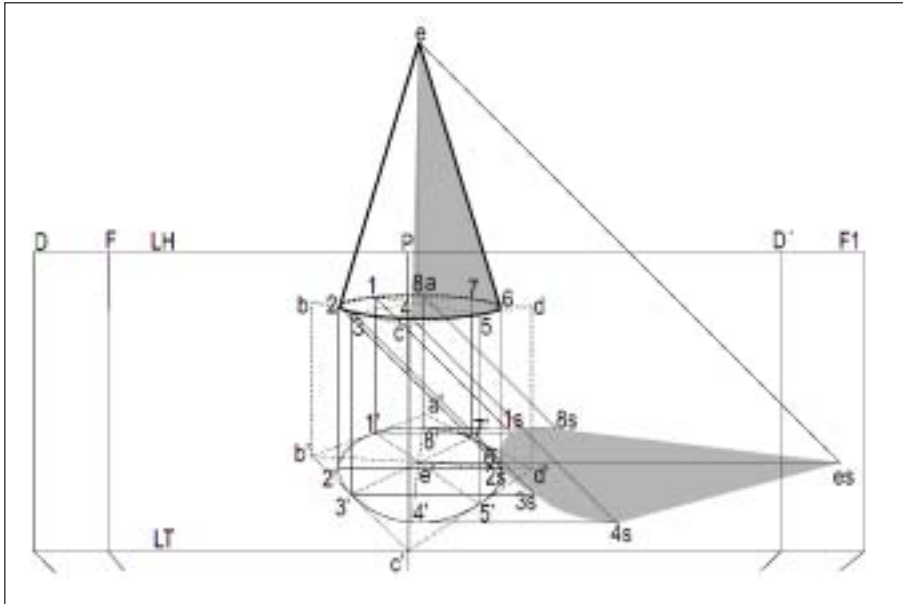


Figura 143 - Sombra própria e sombra projectada de um cone não assente no plano geometral com o Sol lateral.

### 6.7 · Sombra de um cilindro não assente no plano geometral com luz artificial:

No exercício da figura 144, O ponto de fuga das sombras [L'] coincide com a projecção central da base do cilindro [e''], produzindo uma sombra circular e uma sombra própria em na face curva e inferior do cilindro.

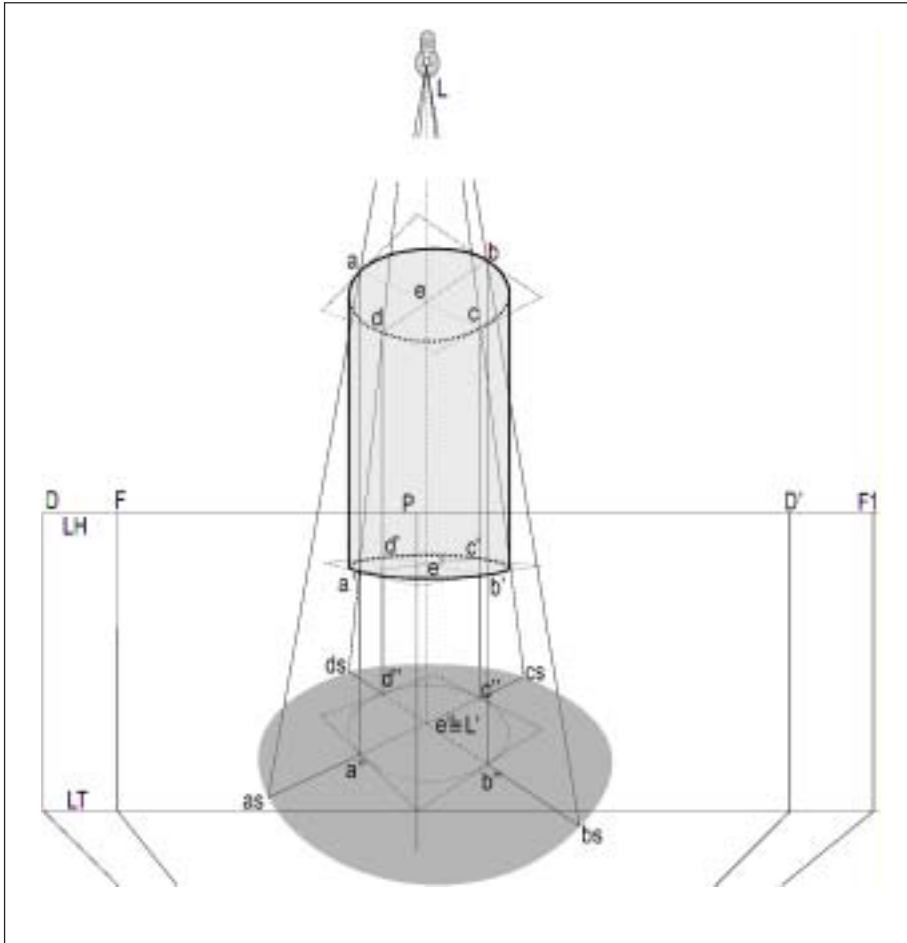


Figura 144 - Sombra própria e sombra projectada de um cilindro não assente no plano geometral com luz artificial.

## 7 · Situações específicas da sombra projectada de sólidos geométricos

O presente sub-capítulo vai abordar o comportamento da sombra de um sólido geométrico quando atinge no seu percurso um plano vertical, inclinado ou curvo.

O problema da projecção da sombra do sólido geométrico sobre o plano horizontal, vertical e curvo será colocado para cada tipo

de luz. A figura 145 representa o esquema que será comum a todos os exemplos de luz apresentados. O cubo  $[i,j,k,l,m,n,o,p]$  terá sempre a sua sombra projectada sobre o paralelepípedo rectângulo  $[a,b,c,d,e,f,g,h]$ .

## 7.1 · Sombra projectada de um sólido geométrico sobre os planos vertical e horizontal

### 7.1.1 · Sol no plano do quadro:

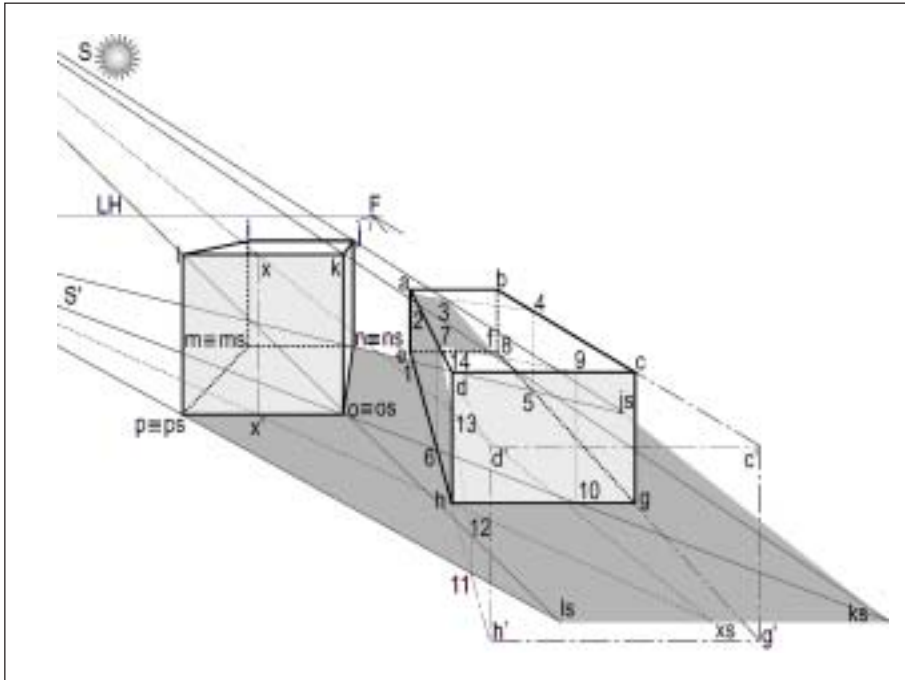


Figura 145 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre o plano vertical e horizontal com o Sol no plano do quadro.

Observe a figura 145. O cubo  $[i,j,k,l,m,n,o,p]$ , teria como sombra projectada o espaço definido através dos pontos  $[ms,ns,js,ks,ls,ps]$ , se durante o normal percurso não intersectasse o plano vertical e horizontal.

Fundamentalmente, os limites da sombra do cubo são dados pelas rectas do contorno aparente da sombra definidas pelas sombras das arestas verticais  $[j,n]$ ,  $[k,o]$  e  $[l,p]$ .

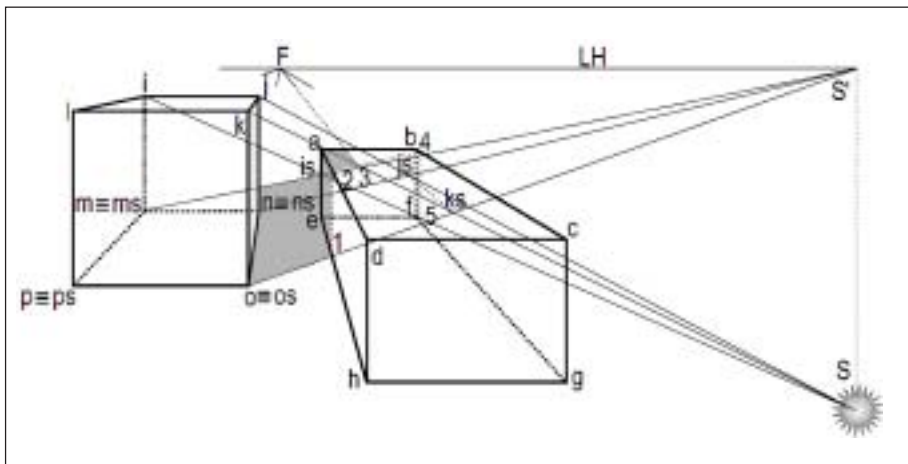
A sombra da aresta  $[j,n]$  intersecta a face inferior do paralelepípedo rectângulo nos pontos  $[1]$  e  $[5]$ . Quando uma sombra

atinge um plano vertical, vai percorrê-lo também verticalmente. Torna-se portanto necessário determinar o percurso que a sombra vai ter na figura geométrica. Para tal, e a partir dos pontos [1] e [5], traçam-se os segmentos de recta verticais [1,2] e [5,4], obtendo-se o segmento de recta horizontal [2,4] a partir da sua união, situado sobre a face superior do paralelepípedo. Está determinado o percurso da sombra quando intersecta o sólido geométrico [ns,1,2,4,5,js]. No entanto, conforme se observa a sombra termina o seu percurso no ponto [3], ponto em que o raio de luz [S,js] intersecta o segmento de recta [2,4].

O mesmo processo é agora utilizado para a determinação da sombra da aresta vertical do cubo [k,o] verificando-se que o seu percurso termina no ponto [8], que depois de unido ao ponto [3] constitui um segmento de recta cuja perspectiva é o ponto principal [P] e é a sombra da aresta [j,k] do cubo.

Coloca-se um novo problema relativamente à direcção do contorno da sombra da aresta [l,k] do cubo, porque a aresta [l,p] não intersecta o paralelepípedo rectângulo. Para a sua determinação, simulou-se a projecção do paralelepípedo rectângulo [c',d',h',g'], identificada na figura através de traço | ponto. Assim verifica-se que a sombra do segmento de recta [l,p], intersecta a aresta simulada [h,h'] no ponto [11] que irá subir verticalmente até ao ponto [12], local onde termina devido ao raio [S,ls].

**7.1.2 · Sol no nadir ou atrás do observador:**



*Figura 146 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre o plano vertical e horizontal com o Sol no nadir ou atrás do observador.*

No exercício da figura 146 só é necessário determinar o percurso da aresta vertical do cubo [k,o] sobre o paralelepípedo rectângulo. Verifica-se que o seu percurso [1,2,3] pode ser dirigido ao

ponto [F] correspondendo à direcção da sombra da aresta superior do cubo [k,j]. Sendo esta aresta um segmento de recta de topo, o mesmo sucederá com a sua sombra.

**7.1.3 · Sol lateral:**

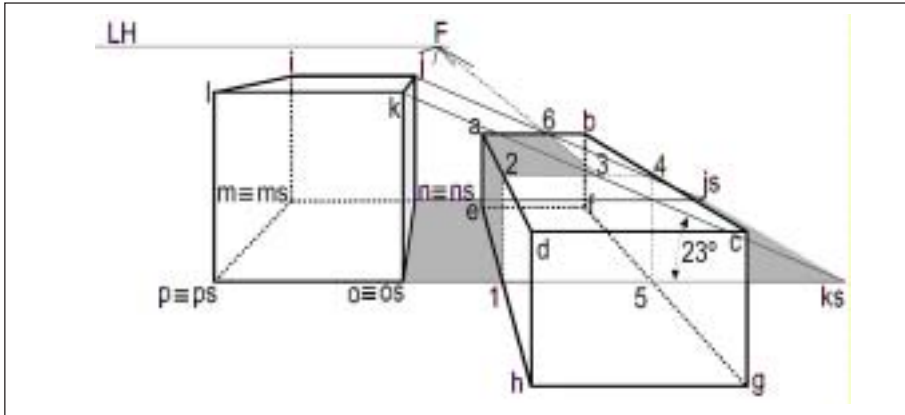


Figura 147 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre o plano vertical e horizontal com o Sol lateral.

No exercício da figura 147 o ângulo dos raios visuais é de 23°, sendo só necessário determinar o percurso da aresta vertical do cubo [k,o] que termina no ponto [3] dirigindo-se de seguida para o ponto [6] que fica na direcção do ponto de fuga [F].

**7.1.4 · Luz artificial:**

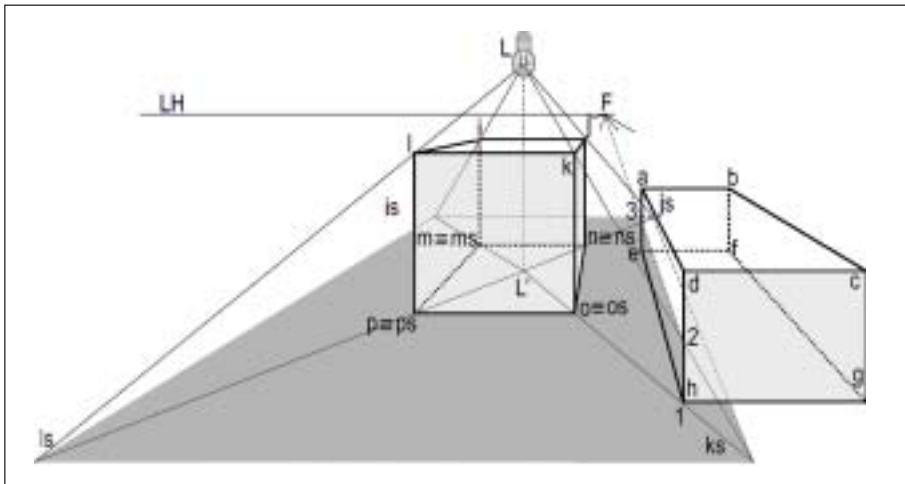


Figura 148 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre o plano vertical e horizontal com luz artificial.

No exercício da figura 148 o ponto de luz [L] tem a sua projecção [L'].

Determinado o percurso da aresta vertical do cubo [k,o] que termina no ponto [2] a sombra dirige-se de seguida para o ponto [3] que fica na direcção do ponto de fuga [F].

## 8 · Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um plano oblíquo

### 8.1 · Sol no plano do quadro:

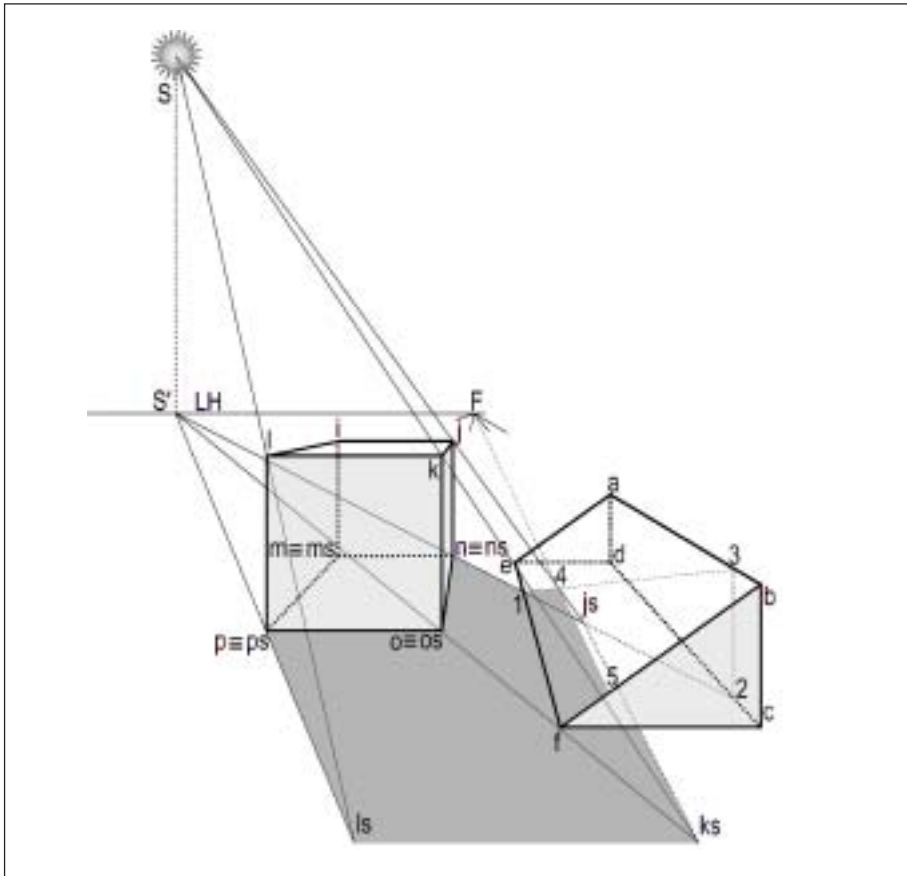


Figura 149 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um plano oblíquo com o Sol no plano do quadro.

Na figura 149 o percurso da sombra projectada do cubo sobre a figura prismática é definida pelas arestas verticais do cubo [j,n] e [k,o].

A sombra projectada da aresta [j,n] intersecta a figura prismática no ponto [1] e termina no ponto [4]. Traçando um segmento de recta desde o ponto de fuga [F] passando pelo ponto [4] obtemos a sombra da aresta do cubo [j,k] sobre a figura prismática que termina no ponto [5].

**8.2 · Sol no nadir ou atrás do observador:**

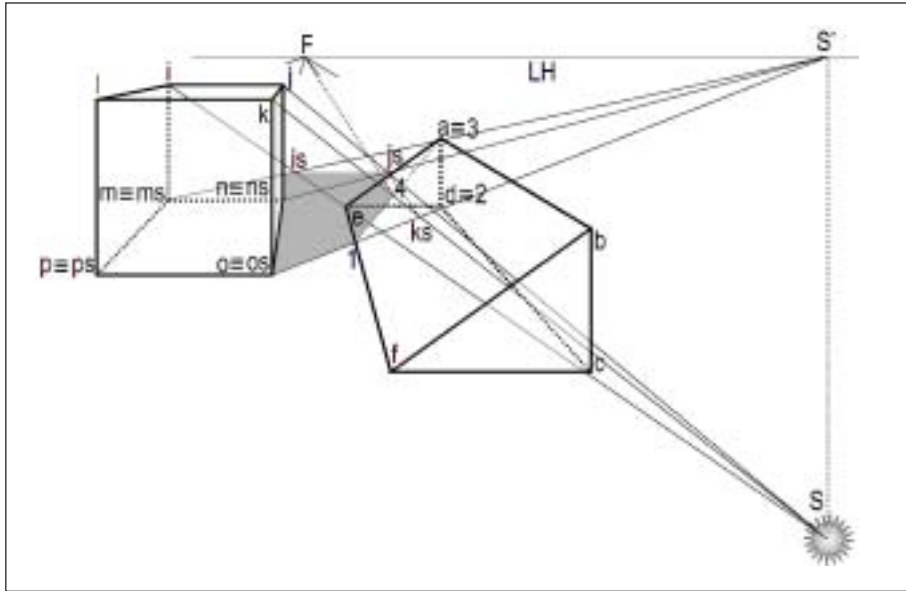


Figura 150 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um plano oblíquo com o Sol no nadir ou atrás do observador.

Na figura 150 o percurso da sombra projectada do cubo sobre a figura prismática é definida pelas arestas verticais do cubo [i,m] [j,n] e [k,o].

A sombra projectada da aresta [k,o] intersecta a figura prismática no ponto [1] e termina no ponto [4]. Traçando um segmento de recta desde o ponto de fuga [F] passando pelo ponto [4] obtemos a sombra da aresta do cubo [k,j].

**8.3 · Sol lateral:**

Na figura 151 o percurso da sombra projectada do cubo sobre a figura prismática é definida pelas arestas verticais do cubo [j,n] e [k,o], estando os raios solares num ângulo de 23°.

A sombra projectada da aresta [k,o] intersecta a figura prismática nos pontos [1] e [2] terminando no ponto [4]. Traçando um segmento de recta desde o ponto de fuga [F] passando pelo ponto [4] obtemos a sombra da aresta do cubo [k,j].



## 9 · Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um plano curvo

### 9.1 · Sol no plano do quadro:

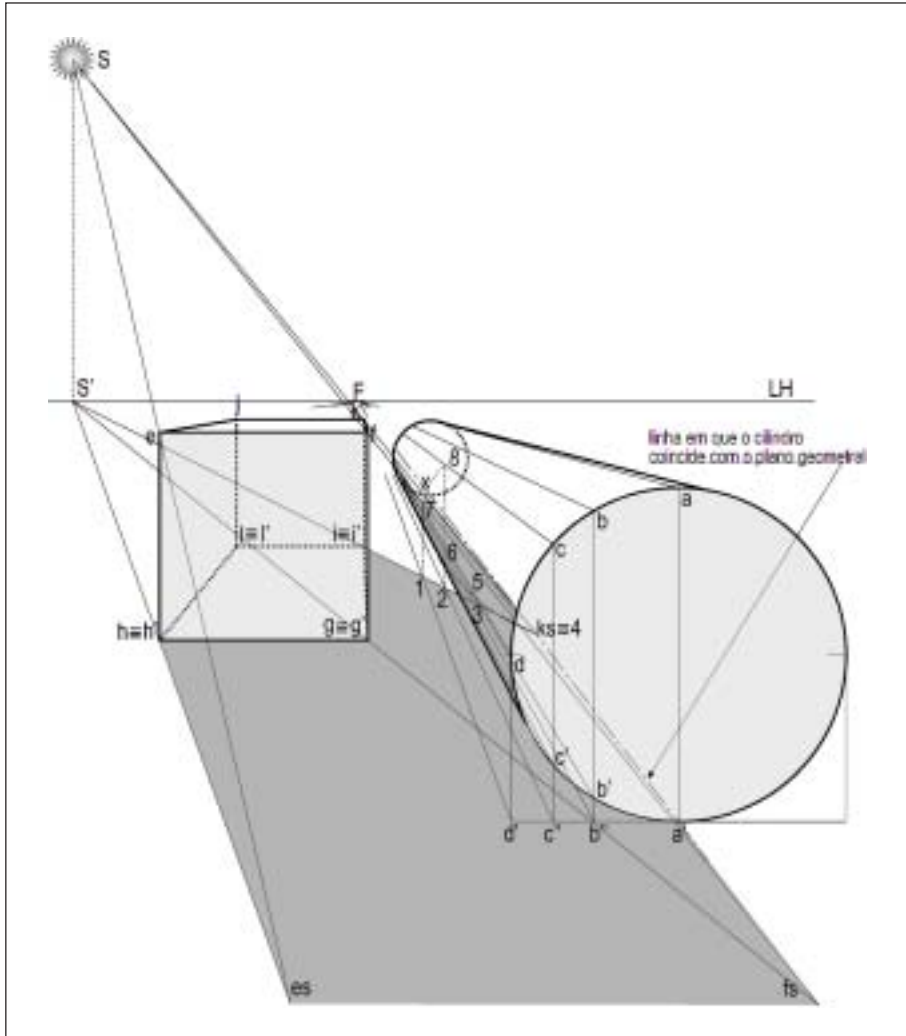


Figura 153 - Sombra projectada de um sólido geométrico sobre um plano curvo com o Sol no plano do quadro.

Na figura 153 o percurso da sombra projectada do cubo sobre a figura cilíndrica é definida pelas arestas verticais do cubo [k,i] e [f,g] e pela aresta horizontal [k,f].

Será conveniente para a compreensão deste exercício, que o leitor consulte o processo de determinação da sombra projectada de um segmento de recta vertical de frente sobre um plano curvo, já explicado.

No presente exercício será necessário determinar o percurso da sombra da aresta [k,i] sobre o plano curvo [4,5,6,7,8]. A sombra termina o seu percurso no ponto [x]. Fazendo passar um segmento de recta desde o ponto de fuga [F] e a passar pelo ponto [x], obtemos a direcção da sombra da aresta da face superior do cubo [k,f].

### 10 • Sombra de um conjunto de cinco sólidos geométricos com o sol lateral

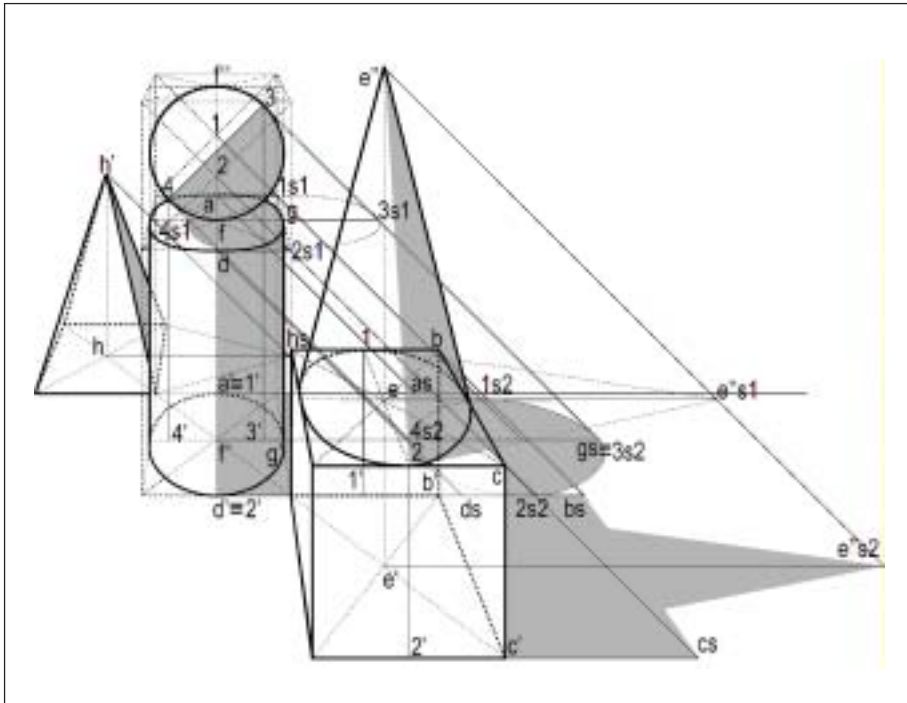


Figura 154 - Sombra própria e sombra projectada de um conjunto de sólidos geométricos com o Sol lateral.

O exercício da figura 154, estabelece a construção da sombra de um conjunto de sólidos geométricos, cuja perspectiva já foi determinada neste capítulo. A metodologia a seguir para a determinação da sombra é idêntica. No presente caso além das sombras próprias, existe a sobreposição de sombras projectadas e de sombras projectadas em diferentes planos.

- 1 - O exercício tem início com a determinação da sombra do primeiro plano constituído pelo cubo assente no plano geometral e do cone sobreposto. O cubo não representa qualquer dificuldade, cuja demonstração já foi explicada nos exercícios anteriores. No entanto o cone projecta uma sombra sobre a face superior do cubo e outra sobre o plano geometral. Para determinar a sombra projectada do cone sobre o plano geometral, realiza-se idêntico procedimento como se o cone não estivesse assente no plano geometral. A sombra projectada do cone sobre a face superior do cubo, obtém-se simulando como se o plano geometral estivesse à altura da face superior do cubo. Para o efeito, traça-se a partir do centro da base do cone [e], o segmento de recta horizontal de frente [e,e''s1] que intersecta o raio visual [e'',e''s2]. A partir do ponto [e''s1], determinam-se as rectas de rectas do contorno aparente da sombra [1,e''s1] e [2,e''s1], tangentes à base do cone, obtendo-se a sombra projectada do cone sobre a face superior do cubo.
- 2 – Determinam-se agora as sombras projectadas dos sólidos no segundo plano (cilindro e esfera). Não havendo dificuldade para determinar a sombra projectada do cilindro, o problema coloca-se novamente em relação à sombra projectada da esfera. Procedendo de forma igual quanto aos sólidos colocados em primeiro plano neste exercício, determina-se em primeiro lugar a sombra projectada da esfera no plano geometral como não estando assente. Segue-se a sua determinação sobre a base superior do cilindro.

A esfera foi construída inserindo-a num cubo representado a tracejado na figura 154. Como o presente exercício é um caso de Sol lateral a  $45^\circ$ . O eixo [3,4], que corresponde a uma das diagonais da secção central vertical de frente do cubo, define o limite da sombra própria da esfera através dos vértices da respectiva diagonal [4,3]. A sombra projectada dos pontos [3] e [4] no plano geometral é dada respectivamente pelos pontos [3s2] e [4s2]. O eixo central de topo da esfera é identificado pelos pontos [1] e [2] que produzem no plano geometral as respectivas sombras projectadas [1s2] e [2s2]. A sombra projectada da esfera no plano geometral é obtida pela união dos pontos [1s2], [3s2], [2s2] e [4s2].

A determinação da sombra projectada da esfera sobre a base superior do cilindro passa por voltar a simular o plano geometral à mesma altura da base do cilindro, exercício já realizado quando da determinação da sombra projectada do cone sobre a face superior do cubo. Para o efeito, traça-se o segmento de recta horizontal de frente que sai do centro da base superior do cilindro [a] e intersecta o raio visual [3,3s2] no ponto [3s1], que corresponde à sombra do ponto [3] se o plano geometral estivesse a essa altura. A sombra do ponto [4] na face superior do cilindro é obtida no ponto [4s1]. Os pontos [1s1] e [2s1] são obtidos da mesma forma determinando-se assim a sombra projectada da esfera sobre a face superior do cilindro.

O exercício termina com a determinação da sombra da pirâmide.

### 11 · Sombra de um conjunto de dois sólidos geométricos com o sol no nadir ou atrás do observador

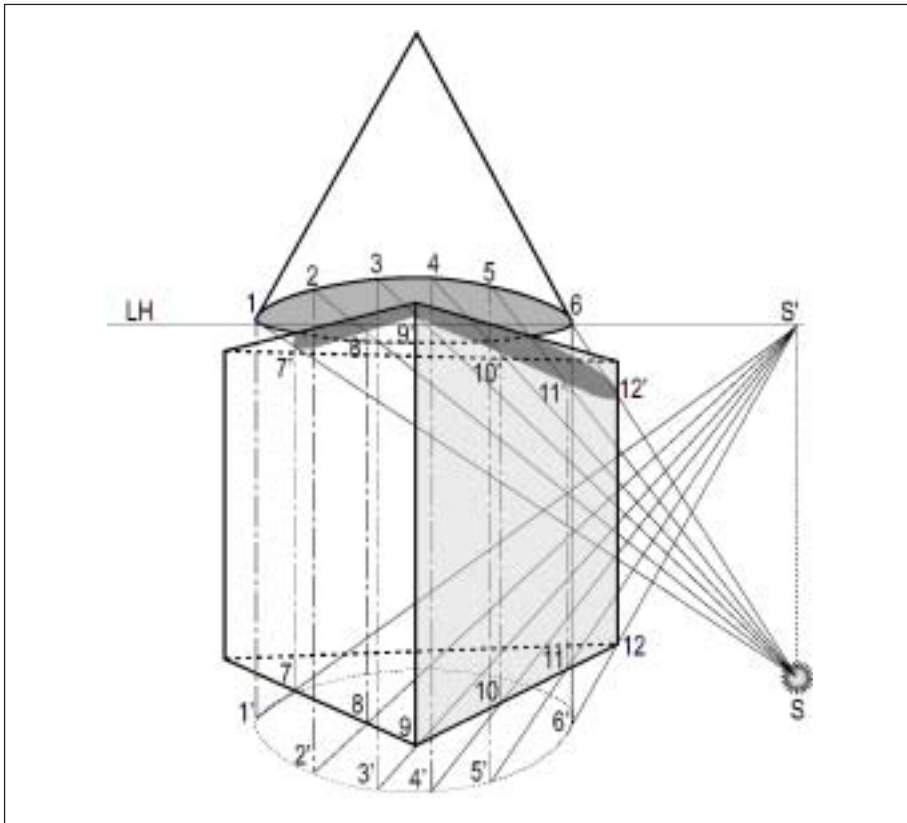


Figura 155 - Determinação da sombra projectada de cone sobre uma figura prismática com o Sol no nadir ou atrás do observador.

O exercício da figura 155 pretende apenas exemplificar o processo de determinação da sombra projectada de um cone sobre uma figura prismática.

Não havendo dificuldade maior para determinar as respectivas sombras projectadas sobre o plano geometral, o mesmo não se passa em relação à sombra projectada do cone sobre o prisma.

O círculo da base do cone, por o Sol estar no nadir, projectará sobre a face em luz do prisma, uma sombra com um contorno curvo. Começou-se por identificar pontos, arbitrariamente

sobre o círculo da base do cone. É sabido que quantos mais pontos definirem a curvatura, mais certeza se terá no traçado do contorno da sombra projectada da base circular do cone. Para o presente caso, identificaram-se os pontos [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Estes seis pontos projectados verticalmente no plano geometral, intersectam a projecção do cone nos pontos [1'], [2'], [3'], [4'], [5'] e [6'].

Utilizando o processo normal para determinar a sombra projectada de uma forma com o Sol no nadir, traçam-se os segmentos de recta [S',1'], [S',2'], [S',3'], [S',4'], [S',5'] e [S',6'] a partir do ponto de fuga das sombras [S'], segmentos que ao intersectarem as duas arestas inferiores do prisma visíveis permitem obter os pontos [7], [8], [9], [10], [11], [12].

A partir do Sol [S] dirigem-se seis raios visuais aos pontos [1], [2], [3], [4], [5], [6]. da base do cone.

A intersecção destes seis raios visuais [S,1], [S,2], [S,3], [S,4], [S,5] e [S,6] com os segmentos de recta verticais que partem dos pontos [7], [8], [9], [10], [11] e [12], permitem encontrar os pontos em sombra da base circular do cone [7'], [8'], [9'], [10'], [11'] e [12'].

# Reflexos

---

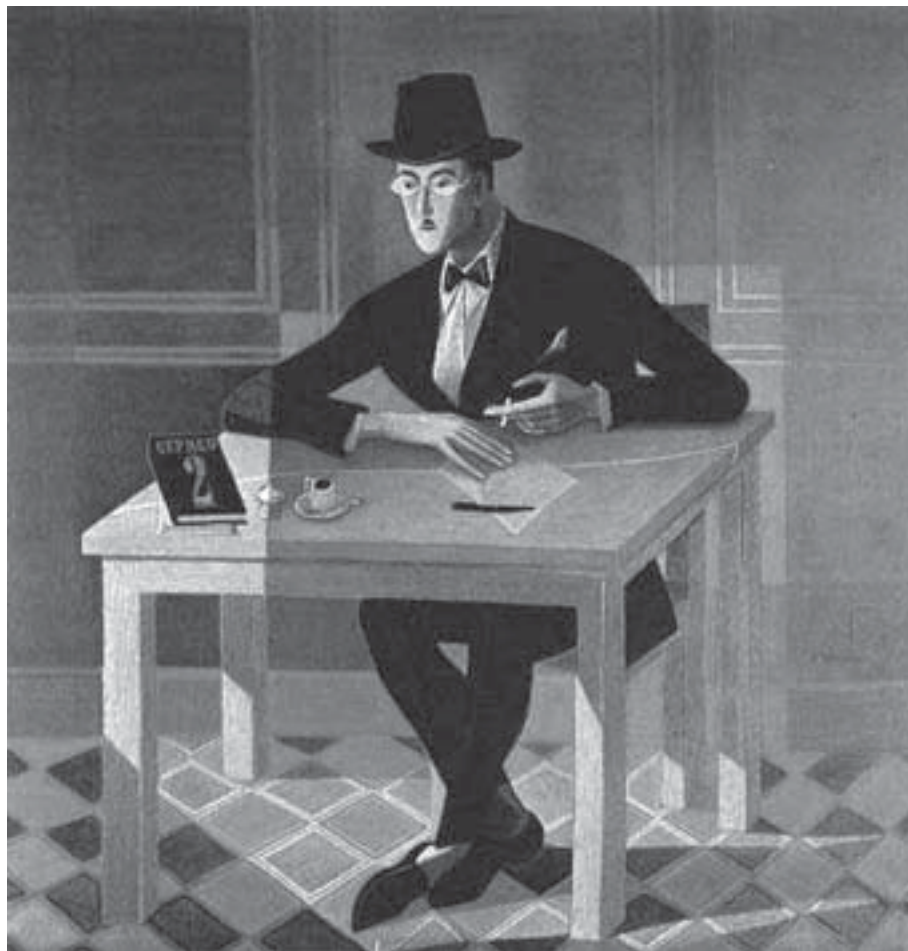
Com a abordagem da temática dos reflexos, entra-se no último capítulo do estudo da perspectiva linear.

Como se sabe, o reflexo de imagens é característica de diversas superfícies naturais e principalmente artificiais. O reflexo sobre uma superfície horizontal é comum aos espaços aquáticos, também designados de espelhos de água. No entanto, também é comum utilizar espelhos, geralmente verticais em composições interiores. Alguns casos, embora raros, utilizam espelhos inclinados.

Em qualquer dos casos, o erro comum praticado e observável em muitas composições pictóricas executadas por autodidactas tem a ver com a distância a que se encontra a imagem reflectida. A imagem reflectida, não é obtida a partir da simples execução de simetria forma / imagem. De qualquer modo, o reflexo é geralmente um tema pouco tratado em composições.

Nesta publicação, os reflexos serão abordados com a colocação do espelho em três posições em relação ao objecto. Começarei pelo espelho vertical, seguido do horizontal, terminando no espelho colocado em posição inclinada.

A abordagem começará pelo ponto, seguido da recta, figura geométrica, sólido geométrico, terminando no conjunto de sólidos estudado.



*Figura 156 - Óleo sobre tela de Almada Negreiros (1893-1970).*

*Retrato do Poeta Fernando Pessoa.*

*Apesar de parecer uma composição na base do quadrado devido à quadrícula do soalho, é na realidade um rectângulo. A perspectiva da mesa é propositadamente deformada, apesar de parecer uma composição em perspectiva paralela.*

# 1 · Reflexo do ponto, segmento de recta e figura geométrica num espelho vertical

## 1.1 · Reflexo num espelho vertical

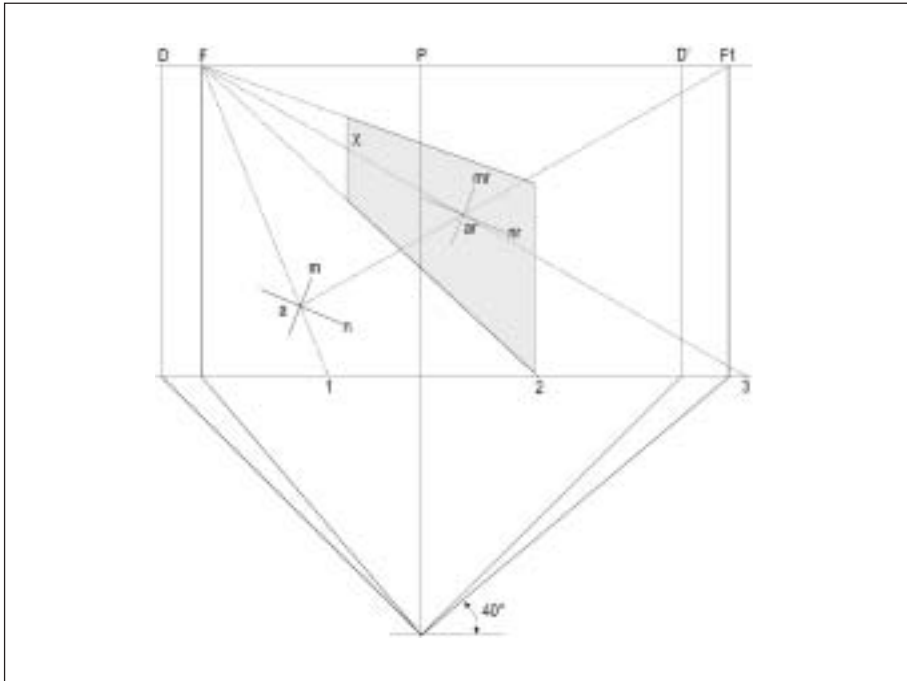


Figura 157 - Reflexo do ponto num espelho vertical.

A abordagem da perspectiva tem começado pelo ponto. De igual modo vou proceder neste capítulo.

A figura 157 representa o reflexo do ponto [a], no espelho lateral vertical [c] colocado à sua direita.

Estamos perante um caso de perspectiva oblíqua a 40°. O ponto [a] define-se sempre através da intersecção de duas rectas, assinaladas de [m] e [n]. A partir do ponto de fuga [F], traçam-se dois segmentos de recta que passam pelo ponto [a] e pelo espelho [c], intersectando o quadro nos pontos [1] e [2].

A partir do ponto de fuga [F1], traça-se um novo segmento de recta que intersecte o ponto [a]. Este raio visual encontra-se na posição perpendicular em relação ao espelho [c]. Medindo a distância que vai de [1] a [2], e transpondo-a para o lado direito do espelho a partir de [2], encontra-se o ponto [3].



reflexo [mr] do segmento de recta, é obtido da intersecção da projecção vertical de [nr] com [m,F1].

O reflexo de um segmento de recta vertical, sobre um espelho também em posição vertical, é sempre uma recta vertical.

Pode-se concluir, não só para a recta, mas também para o sólido geométrico ou outra forma qualquer, quando existe paralelismo entre o espelho e a forma, o reflexo terá sempre a posição da forma e do espelho.

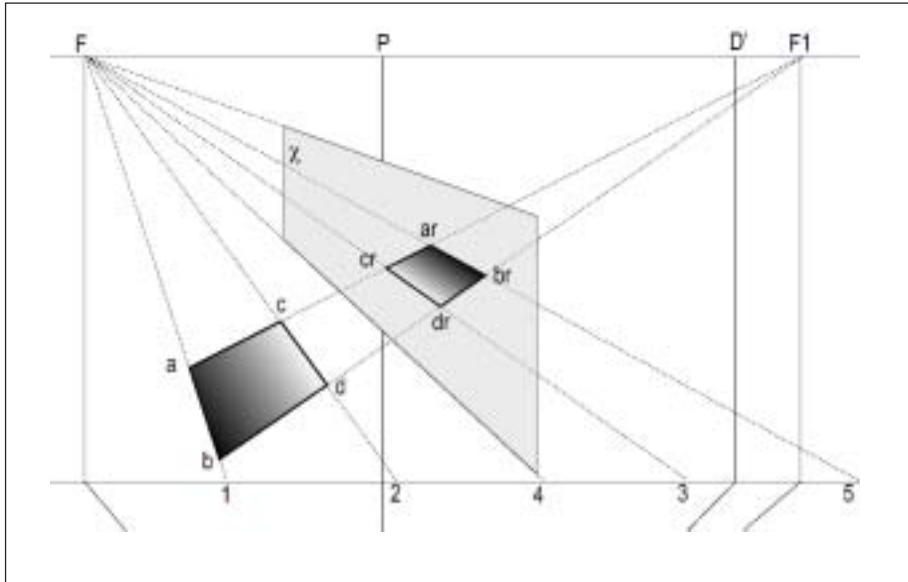


Figura 159 - Reflexo de uma figura geométrica num espelho vertical.

Observando agora para a figura 159, vou proceder à determinação do reflexo do quadrado [a,b,c,d], sobre o espelho vertical [c] que se encontra à sua direita. O quadrado [a,b,c,d] está assente no plano geometral.

Começa-se por fazer passar pelos vértices dos lados [a,b] e [c,d], dois raios visuais a partir do ponto de fuga [F] que intersectam o quadro nos pontos [1] e [2]. Medimos a distância que vai de [2] ao espelho [4], traçando-a para o seu lado direito, obtendo-se o ponto [3]. O ponto [5], distancia-se de [3], a mesma medida que vai de [1] a [2]. Os raios visuais que passam por [3] e [5], determinam a direcção dos lados em reflexo [cr,dr] e [ar,br] do quadrado.

Para serem encontrados os lados em reflexo [cr,ar] e [dr,br] do quadrado, faz-se passar pelos vértices dos lados [ac,] e [b,d] do quadrado dois raios visuais saídos de [F1] que intersectam os raios visuais dirigidos a [3] e [5].

No presente caso, há que observar a posição que tomam os vértices do quadrado. Estão opostos.

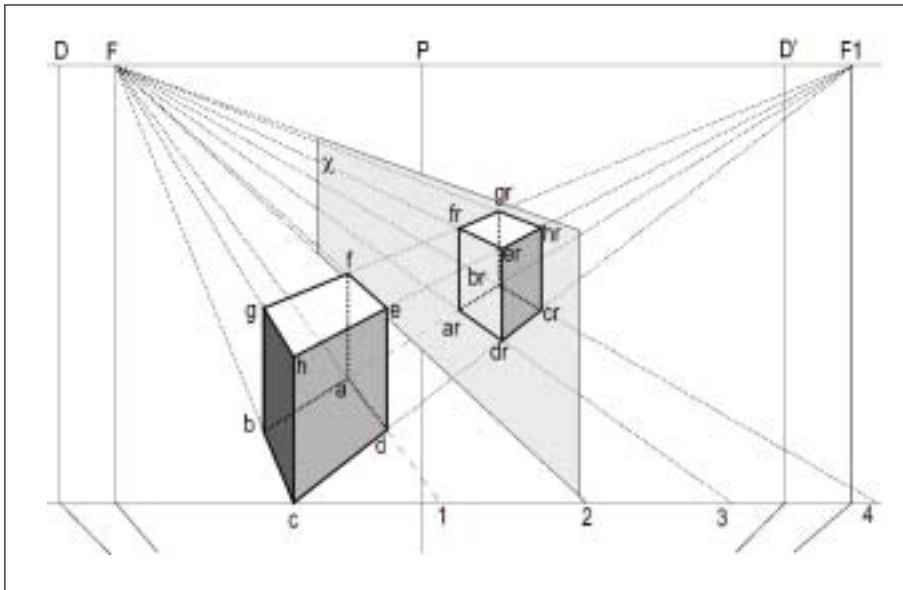


Figura 160 - Reflexo de um sólido geométrico num espelho vertical.

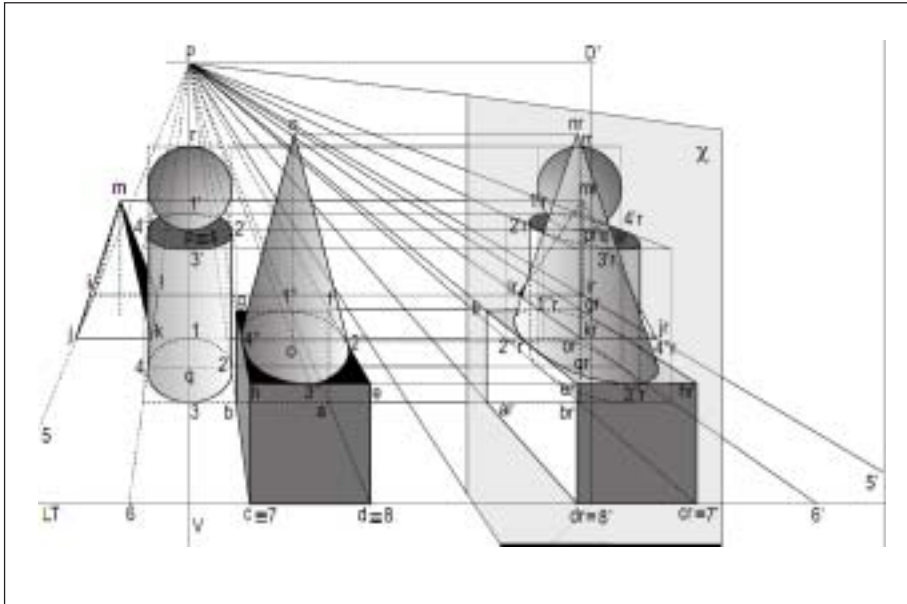
O reflexo do cubo está representado na figura 160. Dado que o cubo [a,b,c,d,e,f,g,h] está em posição vertical, o mesmo acontecendo com o espelho [c], o seu reflexo será sempre vertical. A presente representação, não é mais do que a determinação das arestas [g,b], [h,c], [e,d] e [f,a], do cubo, que são segmentos de recta verticais.

Começa-se por determinar as distâncias sobre o plano do quadro, através dos raios visuais saídos do ponto de fuga [F]. A intersecção dos raios visuais que saem de [F] e que intersectam as arestas verticais do cubo, com os raios visuais que saem do ponto de fuga [F1], permitem encontrar as arestas do cubo em reflexo.

Na figura 161, observa-se agora a representação do conjunto de sólidos que anteriormente se determinou a perspectiva e posteriormente as respectivas sombras, existindo à sua direita um espelho vertical [c].

As faces verticais dos sólidos estão em paralelismo com o espelho, não havendo portanto, alteração na direcção do reflexo. A metodologia utilizada para este caso e semelhantes tem a ver com a determinação individual do reflexo de cada sólido geométrico no espelho.

Tratando-se de uma perspectiva paralela, o exercício revela-se simples, já que se pode determinar a posição de cada sólido



*Figura 161 - Reflexo de um conjunto de sólidos geométricos num espelho vertical.*

através de raios visuais que saem do ponto principal [P] e que passam pelas respectivas arestas e intersectam o plano do quadro na [LT], fazendo desta linha de terra [LT], uma escala de larguras.

Assim, a distância de [8] ao espelho [c], será igual a [8']. A distância entre [8] e [7], é igual entre [8'] e [7']. A distância entre [7] e [6], é igual à distância entre [6'] e [7']. A distância entre [6] e [5], é igual à distância entre [5'] e [6'].

Determinada que está a posição lateral de cada sólido geométrico em relação ao seu reflexo, passa-se a calcular a respectiva distância do seu afastamento em relação ao horizonte.

Para tal, basta traçar rectas de frente (paralelas ao quadro), que passam pelos vértices de cada sólido geométrico, intersectando as rectas de fuga anteriormente executadas.

## 1.2 • Reflexo num espelho vertical em posição oblíqua

Na figura 162 observa-se a planta da representação do reflexo do quadrado, quando o espelho [c] está em posição oblíqua em relação aos seus lados. O quadrado [a',b',c',d'], faz um ângulo de 45° com o espelho [c]. Como não existe paralelismo entre os lados do quadrado e o espelho, o reflexo do quadrado não pode ser paralelo pelo que fará um ângulo de 45°.

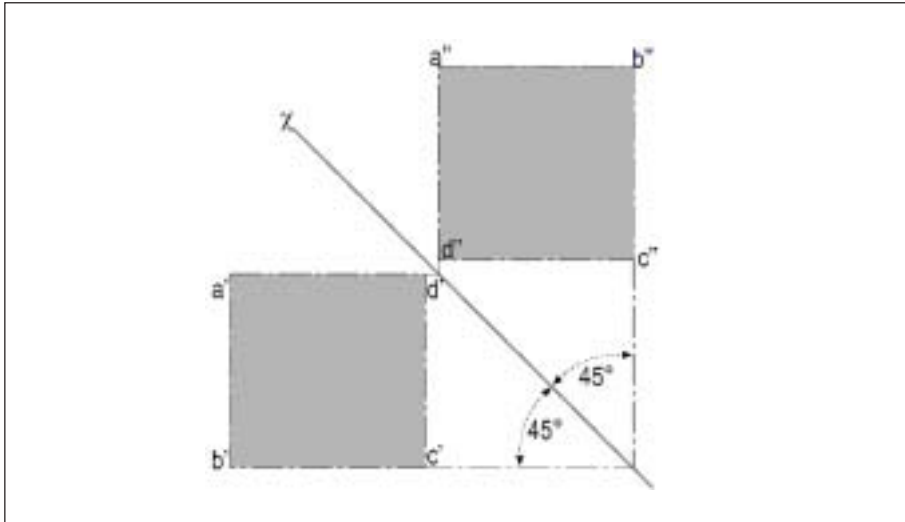


Figura 162 - Identificação através da planta do reflexo de uma figura geométrica num espelho vertical, colocado em posição oblíqua.

Como é verificável, cada lado do quadrado, faz um ângulo de 90°, com o respectivo reflexo.

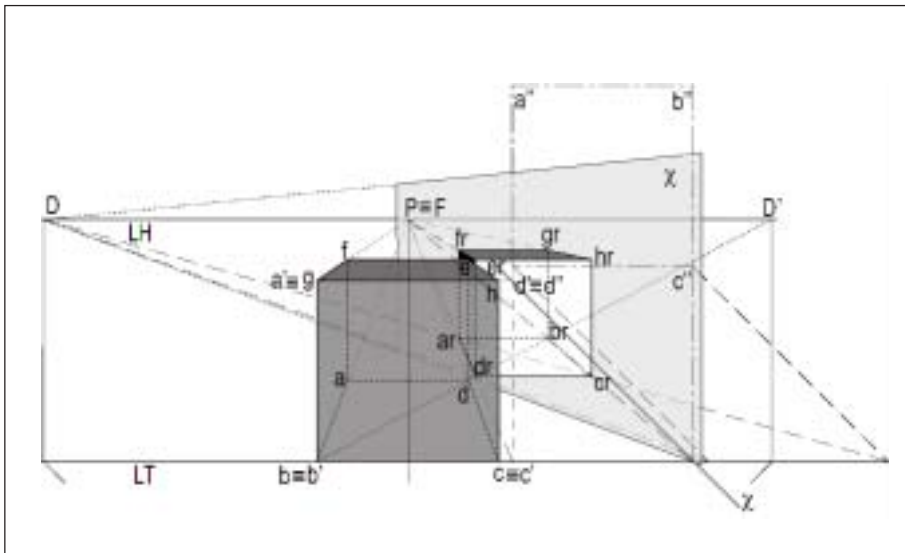
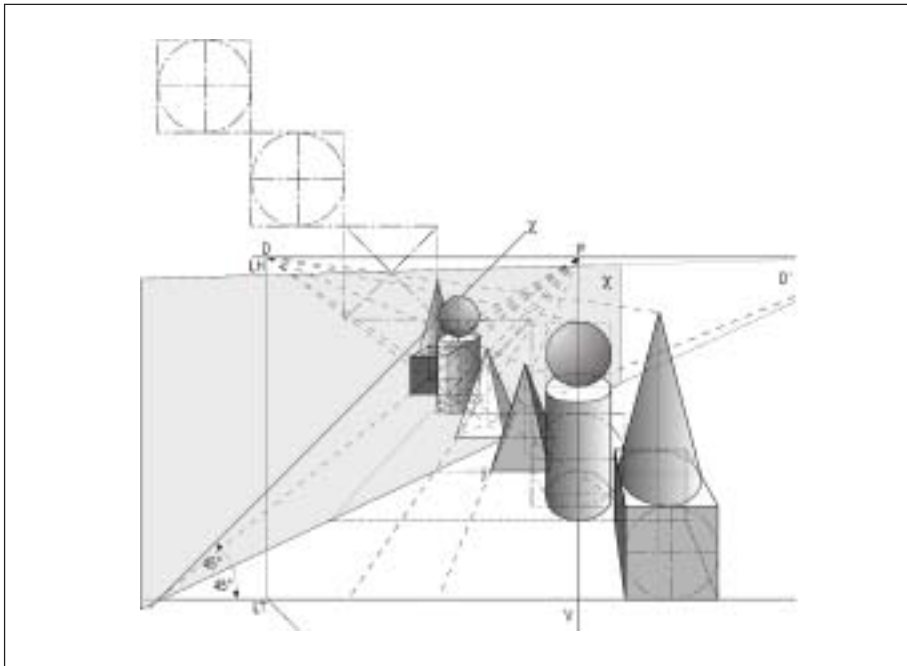


Figura 163 - Reflexo de um sólido geométrico num espelho vertical, colocado em posição oblíqua.

O cubo [a,b,c,d,e,f,g,h] da figura 163, tem o seu reflexo no espelho [c], que embora colocado verticalmente, faz com ele um ângulo de  $45^\circ$ .

Já se verificou que uma forma que não tem o espelho em paralelismo, possui um reflexo em posição diferente, que resultará no dobro do ângulo do espelho. Este aspecto foi observado na figura anterior.

Para o presente caso, e dada a dificuldade que pode ter o exercício, o leitor, quando da representação da planta para determinar a perspectiva, deve também representar a planta do reflexo e a linha que define a posição do espelho. Este aspecto irá facilitar sem dúvida, a execução do exercício. Na figura 163, existe a representação inicial da planta do cubo, espelho e respectivo reflexo. O presente exercício está em perspectiva paralela. Tendo em conta os teoremas estudados, para a representação da perspectiva, qualquer recta ou plano que tenha como ponto de fuga, um dos pontos de distância [D] ou [D'] está em posição oblíqua a  $45^\circ$ . Este pormenor facilita a determinação do reflexo deste exercício.



*Figura 164 - Reflexo de um conjunto de sólidos geométricos num espelho vertical, colocado em posição oblíqua.*

Observe-se agora o reflexo do conjunto de sólidos geométricos, num espelho vertical a  $45^\circ$ , representado na figura 164.

O método utilizado foi o mesmo para o cubo anteriormente determinado. Quando da representação da planta do conjunto, para determinar a sua perspectiva, desenhou-se também a planta do espelho e dos sólidos geométricos já em reflexo. Este aspecto facilita a construção do reflexo, evitando ao mesmo tempo, possíveis erros por falta de concentração por parte do executante.

É evidente que se determinou a perspectiva individual de cada sólido geométrico, começando pelo que está mais perto do quadro, fazendo-se o mesmo em relação ao seu reflexo.

Como o espelho vertical [c] está a  $45^\circ$  em relação ao conjunto, o reflexo dos sólidos geométricos fará um ângulo de  $90^\circ$ .

Não será necessário repetir o processo de representação do reflexo. No entanto inicia-se utilizando a linha de terra [LT], para servir de escala de larguras aos raios visuais que saem do ponto principal [P] e passam pelos vértices dos sólidos geométricos. Serão então as rectas de frente que também passam pelos vértices dos sólidos geométricos, ao intersectarem as rectas de fuga, permitirão encontrar os vértices dos sólidos em reflexo.

## 2 · Reflexo do segmento de recta e do sólido geométrico num espelho horizontal

Sabendo determinar o reflexo das formas num espelho vertical, o reflexo num espelho horizontal, resulta fácil. O espelho horizontal, é o mais utilizado nas composições pelos artistas, já que corresponde às composições de exterior, em que existem formas perto de um rio, lago ou mar. Estas formas que geralmente são árvores, casas ou pessoas, estão sujeitas ao rigor da representação dos sólidos

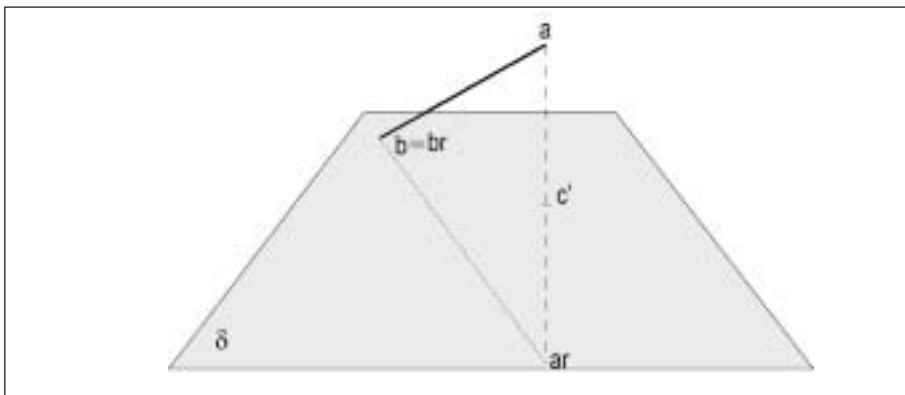


Figura 165 - Reflexo de um segmento de recta num espelho horizontal.

geométricos sobre um espelho horizontal. É geralmente, na execução dos reflexos nas composições da paisagem, que se notam os maiores erros de composição.

O reflexo do segmento de recta está representado na figura 165. O segmento de recta  $[a,b]$  possui o seu ponto  $[b]$  assente sobre o espelho horizontal  $[d]$ , coincidindo portanto com o seu reflexo  $[br]$ . O reflexo do ponto  $[a]$  é obtido determinando a sua projecção  $[c']$  sobre o espelho horizontal. A distância  $[a,c']$ , terá de ser igual a  $[c',ar]$ . Termina-se unindo  $[br]$  a  $[ar]$ . Como se verifica, o comprimento do segmento de recta alterou no reflexo.

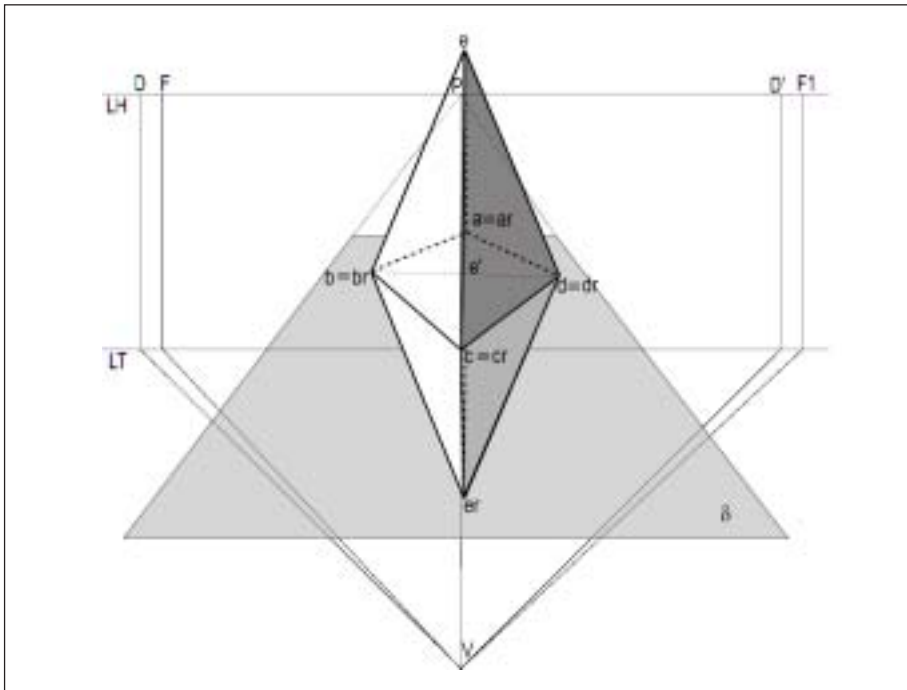
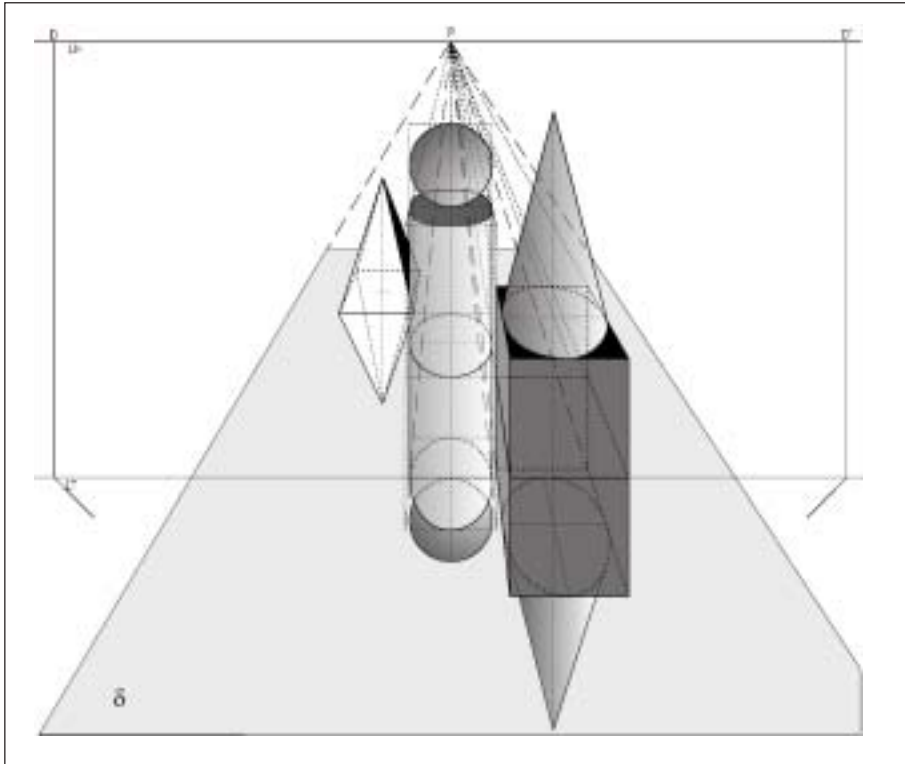


Figura 166 - Reflexo de um sólido geométrico num espelho horizontal.

Observe-se agora o reflexo de um sólido geométrico (pirâmide), sobre um espelho horizontal  $[d]$ , na figura 166.

A perspectiva é paralela, tendo a pirâmide  $[a,b,c,d,e]$ , a sua base  $[a,b,c,d]$  assente sobre o espelho  $[d]$ . Nestas condições o exercício não tem dificuldade alguma, já que a base  $[a,b,c,d]$  coincide com o respectivo reflexo  $[ar,br,cr,dr]$ . Quanto ao vértice superior  $[e]$ , após a determinação do centro da base da pirâmide  $[e']$ , mede-se igual distância  $[e,e']$ , verticalmente no espelho  $[d]$ , obtendo-se o ponto  $[er]$ . Unindo o ponto  $[er]$  aos pontos  $[ar]$ ,  $[br]$ ,  $[cr]$  e  $[dr]$ , obtém-se ao reflexo da pirâmide  $[a,b,c,d,e]$  sobre o espelho horizontal  $[d]$ .



*Figura 167 - Reflexo de um conjunto de sólidos geométricos num espelho horizontal.*

No caso do conjunto de sólidos geométricos, o problema é colocado da mesma maneira, do exercício anterior, exigindo-se apenas da parte do executante, um maior grau de concentração.

O reflexo representado na figura 167 foi executado, realizando-se a determinação individual do reflexo de cada sólido, do mais próximo do quadro para o mais afastado.

Observe-se que no reflexo horizontal, existem faces que deixam de estar visíveis, como a face superior do cubo a negro e a do cilindro. O conjunto reflectido não corresponde portanto ao original.

### **3 · Reflexo do segmento de recta e do sólido geométrico num espelho in inclinado**

O reflexo num espelho inclinado, toma o exercício um pouco mais difícil, já que não podemos recorrer à planta do espelho e do reflexo. De qualquer modo, este caso é o menos representado nas

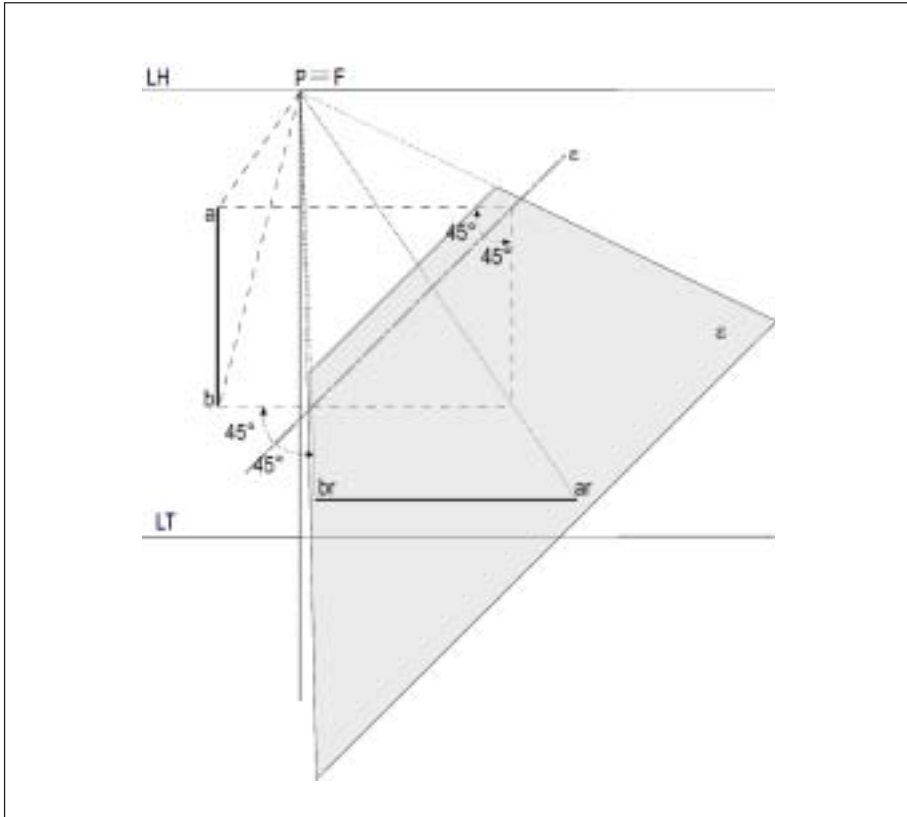


Figura 168 - Reflexo de um segmento de recta num espelho inclinado.

composições não só pela sua dificuldade, mas também pelo desequilíbrio que provoca.

O segmento de recta vertical [a,b], da figura 168, tem o seu reflexo no espelho [e] colocado à sua direita e a 45° em relação ao plano geometral.

Tal como os casos com o espelho vertical em ângulo, a posição do reflexo é obtida determinando a distância e o ângulo que a forma faz com o espelho. Posteriormente repete-se o processo no espelho [e].

O ponto [b] do segmento de recta está assente no plano geometral. Traça-se uma recta de frente que intersecta o espelho inclinado. Como forma um ângulo de 45°, o seu reflexo formará outro ângulo de 45°, sendo a sua projecção vertical. O mesmo acontece com o ponto [a].

Verifica-se que o reflexo da recta [a,b] vertical, passa a ser horizontal e dado pelo segmento de recta [ar,br].

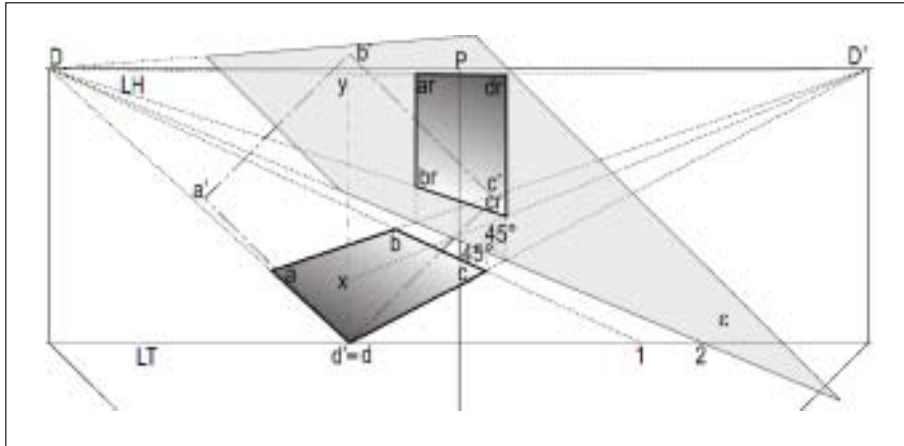


Figura 169 - Reflexo de uma figura geométrica num espelho inclinado.

Observe-se agora outro exemplo com o espelho colocado em posição inclinada. Na figura 169, observamos o quadrado [a,b,c,d], que possui o reflexo no espelho inclinado [e]. O quadrado [a,b,c,d] está assente no plano geométral tendo dois dos seus lados paralelos ao espelho [e]. O quadrado [a,b,c,d] forma um ângulo de  $45^\circ$  com o plano do quadro. A perspectiva oblíqua representada impede que se utilize a linha de terra [LT], como escala de larguras.

Depois de se executar as perspectivas do quadrado [a,b,c,d] e do espelho [e], assinala-se a distância que os separa. Em diagonal, seria de [1] a [2]. No entanto não havia possibilidade de determinar essa distância em altura no espelho, saindo deformada a perspectiva e respectivo reflexo.

Sabe-se que entre o quadrado [a,b,c,d] e o espelho [e] está formado um ângulo de  $45^\circ$ . Somando mais  $45^\circ$  para o reflexo, chega-se à conclusão que o reflexo do quadrado terá uma posição vertical.

No vértice [d] do quadrado traça-se verticalmente uma escala de alturas, marcando nela o ponto [x] que é a verdadeira distância entre a figura geométrica e o espelho. Unindo o ponto [x] ao ponto de distância [D'] por intermédio de um raio visual, encontramos o ponto [cr], ao mesmo tempo a direcção do lado [cr,dr].

Unindo o lado [a,b] através de um raio visual com o ponto de distância [D'], obtém-se o ponto de intersecção com o espelho, que projectado verticalmente, permite encontrar a direcção do reflexo do lado [br,ar].

Marcando a dimensão real do lado do quadrado, a partir de [x], obtém-se o ponto [y], que unido ao ponto de distância [D'], permite encontrar o ponto [dr].

Os pontos [ar] e [br] determinam-se através da intersecção das rectas verticais que resultam dos raios visuais que intersectam o

espelho, com os raios visuais dirigidos a partir do ponto de distância [D] aos pontos [dr] e [cr].

Chamo a atenção para a impossibilidade que há de construir uma escala de larguras horizontal, no caso da perspectiva oblíqua. Provocaria uma deformação do conjunto.

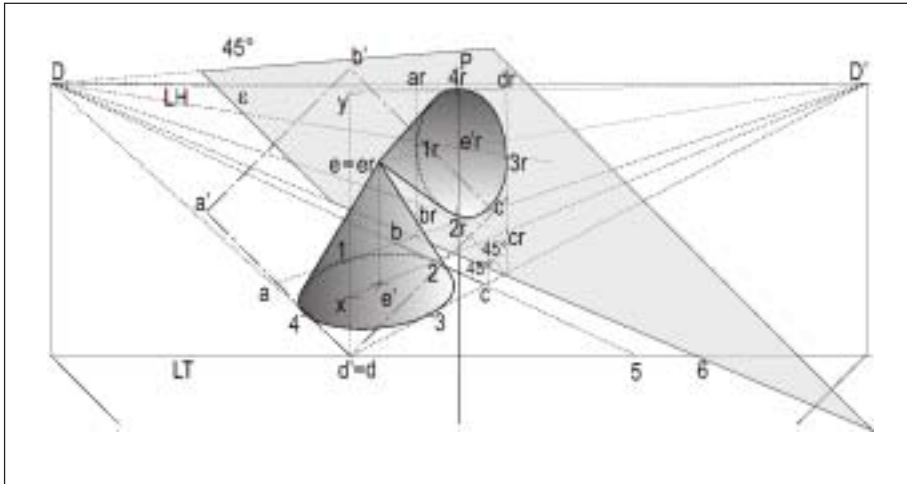


Figura 170 - Reflexo de um sólido geométrico num espelho inclinado.

O reflexo de um sólido geométrico num espelho inclinado está assinalado no exemplo da figura 170. O exemplo é o de um cone que tem o seu vértice superior [e] encostado ao espelho [e].

Começa-se por determinar a perspectiva do cone no espelho a 45°.

A determinação do reflexo começa pela construção da base do cone que está inserida no quadrado [a,b,c,d]. O processo é semelhante ao do exercício anterior, pelo que não será novamente repetido. Como o vértice superior do cone [e] está tangente ao espelho, coincide com o seu reflexo.

Construída a base do cone em reflexo, basta apenas uni-la ao ponto [er].



# Bibliografia

---

Principais livros publicados desde 46 a.C. até ao século XX.

46 a.C. – VITRUVIUS. *Tratado de arquitectura.*

250 a.C – EUCLIDES. *Tratado sobre óptica.*

1436 - ALBERTI, LEON BATISTA. *Tratatto della Pittura* (talvez a primeira publicação específica sobre perspectiva).

1440 - BRAMIANINO, BARTOLOMEU. *Regole di Prospettiva e Misure delle Antichità di Lombardia.*

1494 - PACCIOLLI, F. LUCA. *Summa d' Aritmetica e Geometria.*

1525 - DURER, ALBRECHT. *Viático do Aprendiz de Pintor.*

1550 - VIATOR, JEAN PELERIN. *De Artificialis Perspective.*

1560 - COUSIN, J. *Livre de Perspective.*

1612 - CAUSE, SALOMON DE. *Perspective avec la raison des ombres.*

1615 - SERLIO, SEBASTIANO. *Opere d'architettura e Prospettiva di S. D. Scamozzi.*

1619 - MAROLAIS, SAMUEL. *La Perspective contenant la théorie et la pratique.*

- 1625 - HOUDIN, H. *Institution en la Perspective.*
- 1642 – DUBREUIL. *The Jesuits Perspective.*
- 1651 - VINCI, LEONARDO DA. *Trattato della Pittura.*
- 1652 - NICERON, PÈRE. *La Perspective curieuse.*
- 1661 – BOURGOING. *La Perspective Affranchie de l’embarras du point du vue.*
- 1669 - BARBARO, DANIEL. *Practica di Prospettiva.*
- 1669 - ALBERTINI, ANDRÉ. *Deux livres sur la Perspective.*
- 1672 - TROGLI, GIULIO. *Parodossi della Prospettiva.*
- 1673 - DESCHALESQUE, PÈRE. *La Perspective du; qui se trouve dans son Cours Mathematicus.*
- 1693 – POZZO. *La Perspectiva pictorum et architectorum.*
- 1701 - LAMI, PÈRE. *La Traité de Perspective ou sont contenus les fundemens de la peinture.*
- 1711 - GRAVESANDE, S. *L’ Essai de Perspective.*
- 1731 - TAYLOR, DR. BROOK. *Linear Perspective.*
- 1745 – JACQUIER, PÈRE. *Elementi di Prospettiva.*
- 1748 – HAMILTON. *Stereography, a general Treatise of Perspective in all its branches.*
- 1749 - TAYLOR, BROOK. *New Principies of linear Perspective.*
- 1750 – PETITOT. *Raisonnement sur la Perspective pour enfaciliter l’usage aux artistes.*
- 1750 - JEAURAT, De. *L’ Académie des Sciences. Traité de Perspective pratique à l’ usage des artistes.*
- 1754 - KIRBY, JOHN JOSHUA, DR. BROOK TAYLORS’ . *Method of Perspective made easy both in theory and practice.*
- 1757 – ROI. *Le Essay sur la Perspective pratique par le moyen du calcul.*
- 1776 - MALTON, THOMAS. *A complete Treatise on Perspective in theory and pratice on the Principes of Dr. Brook Taylor.*
- 1770 – PRIESTLEY. *Familiar introductions in the theorie and practice of Perspective.*
- 1874 – HENRIET. *Cours Rational de Dessin.*
- 1800 - MALTON, JAMES. *The Young Pajnters Maulstick; being a practical treatise on Perspective.*

- 1803 - A.R.A., EDWARD EDWARDS. *Practical Treatise on Perspective on the Principles of Dr. Brook Taylor.*
- 1805 – HODSON, T. *The Cabinet of the Arts.*
- 1808 - NOBLE, T. *Practical Perspective.*
- 1832 – BARBARO. *Practica della Prospettiva.*
- 1837 - F.R.S., JOHN BURNET. *The education of the eye with reference to Painting.*
- 1852 - PYNE, GEORGE. *Perspective for Beginners.*
- 1862 – BURCHET. *Linear Perspective.*
- 1872 - PENLEY, AARON. *Elements of Perspective.*
- 1873 - CASSAGNE, M. A. *Traité Pratique de Perspective.*
- 1883 - WARE, W.R. *Modern Perspective Plates.*
- 1884 - TROBRIDGE, G. *The Principies of Perspective.*
- 1886 - CASSAGNE, ARMAND. *Practical Perspective applied to artistic and industrial design.*
- 1888 - JAMES, HENRY. *Handbook of Perspective.*
- 1891 - FERGUSON, F. O. *Architectural Perspective.*
- 1892 - CARROLL. J. M. *Principles and Practice of Perspective.*
- 1897 - POLAK, S. *Theory and Practice of Perspective Drawing.*
- 1974 - SMITH, STAN. *Anatomia, Perspectiva y Composicion para el artista.* Hermann Blume.
- 1985 - WHITE, GWEN. *Perspective. A Guide for Artists, Architects and Designers.* Watson-Guptill Publicatios, New York.
- 1976 - COLE, REX VICAT. *Perspective for artists.* Dover Publications, Inc. New York.
- 1976 - MUNARI, BRUNO. *Design e Comunicazione Visiva.* Biblioteca di Cultura Moderna Laterza.
- 1977 - MERCOLLI, A. *Teoria del Campo. Corso di educazione alla visione.* Sansoni.
- 1993 - ASINS, FRANCISCO. *Cómo se dibuja al lápiz (perspectiva, retrato, dibujos maestros, trazos, esbozos y copias, detalles y expresión, los materiales y su manejo, técnicas, recomendaciones y consejos. Curso práctico completo),* Editorial de Vecchi, Barcelona.
- 1993 - COLE, ALISON. *Perspective: A Collins Eyewitness Guide to Art,* Harper Collins, London, UK.

- 1995 - BRUSATI, CELESTE. *Artifice and Illusion: The Art and Writing of Samuel van Hoogstraten*, University of Chicago Press, Chicago, USA.
- 1997 – CANOTILHO, LUÍS. *Fundamentos Teórico – Práticos da Perspectiva Artística na Pintura*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança.

## Títulos publicados:

- 1 • **A agricultura nos distritos de Bragança e Vila Real**  
Francisco José Terroso Cepeda – 1985
- 2 • **Política económica francesa**  
Francisco José Terroso Cepeda – 1985
- 3 • **A educação e o ensino no 1º quartel do século XX**  
José Rodrigues Monteiro e Maria Helena Lopes Fernandes  
– 1985
- 4 • **Trás-os-Montes nos finais do século XVIII: alguns aspectos económico-sociais**  
José Manuel Amado Mendes – 1985
- 5 • **O pensamento económico de Lord Keynes**  
Francisco José Terroso Cepeda – 1986
- 6 • **O conceito de educação na obra do Abade de Baçal**  
José Rodrigues Monteiro – 1986
- 7 • **Temas diversos – economia e desenvolvimento regional**  
Joaquim Lima Pereira – 1987
- 8 • **Estudo de melhoramento do prado de aveia**  
Tjarda de Koe – 1988
- 9 • **Flora e vegetação da bacia superior do rio Sabor no Parque Natural de Montesinho**  
Tjarda de Koe – 1988
- 10 • **Estudo do apuramento e enriquecimento de um pré-concentrado de estanho tungsténio**  
Arnaldo Manuel da Silva Lopes dos Santos – 1988
- 11 • **Sondas de neutrões e de raios Gama**  
Tomás d'Aquino Freitas Rosa de Figueiredo – 1988
- 12 • **A descontinuidade entre a escrita e a oralidade na aprendizagem**  
Raul Iturra – 1989
- 13 • **Absorção química em borbulhadores gás-líquido**  
João Alberto Sobrinho Teixeira – 1990

- 
- 14 · **Financiamento do ensino superior no Brasil – reflexões sobre fontes alternativas de recursos**  
Victor Meyer Jr. – 1991
  - 15 · **Liberalidade régia em Portugal nos finais da idade média**  
Vitor Fernando Silva Simões Alves – 1991
  - 16 · **Educação e loucura**  
José Manuel Rodrigues Alves – 1991
  - 17 · **Emigrantes regressados e desenvolvimento no Nordeste Interior Português**  
Francisco José Terroso Cepeda – 1991
  - 18 · **Dispersão em escoamento gás-líquido**  
João Alberto Sobrinho Teixeira – 1991
  - 19 · **O regime térmico de um luvissole na Quinta de Santa Apolónia**  
Tomás d'Aquino F. R. de Figueiredo - 1993
  - 20 · **Conferências em nutrição animal**  
Carlos Alberto Sequeira - 1993
  - 21 · **Bref aperçu de l'histoire de France – des origines à la fin du II<sup>e</sup> empire**  
João Sérgio de Pina Carvalho Sousa – 1994
  - 22 · **Preparação, realização e análise / avaliação do ensino em Educação Física no Primeiro Ciclo do Ensino Básico**  
João do Nascimento Quina – 1994
  - 23 · **A pragmática narrativa e o confronto de estéticas em *Contos de Eça de Queirós***  
Henriqueta Maria de Almeida Gonçalves – 1994
  - 24 · **“Jesus” de Miguel Torga: análise e proposta didáctica**  
Maria da Assunção Fernandes Morais Monteiro – 1994
  - 25 · **Caracterização e classificação etnológica dos ovinos churros portugueses**  
Alfredo Jorge Costa Teixeira – 1994
  - 26 · **Hidrogeologia de dois importantes aquíferos (Cova de Lua, Sabariz) do maciço polimetamórfico de Bragança**  
Luís Filipe Pires Fernandes – 1996

- 
- 27 · **Micorrização in vitro de plantas micropropagadas de castanheiro (*Castanea sativa* Mill)**  
Anabela Martins – 1997
- 28 · **Emigração portuguesa: um fenómeno estrutural**  
Francisco José Terroso Cepeda – 1995
- 29 · **Lameiros de Trás-os-Montes: perspectivas de futuro para estas pastagens de montanha**  
Jaime Maldonado Pires; Pedro Aguiar Pinto; Nuno Tavares Moreira – 1994
- 30 · **A satisfação / insatisfação docente**  
Francisco Cordeiro Alves – 1994
- 31 · **O subsistema pecuário de bovinicultura na área do Parque Natural de Montesinho**  
Jaime Maldonado Pires; Nuno Tavares Moreira – 1995
- 32 · **A terra e a mudança – reprodução social e património fundiário na Terra Fria Transmontana**  
Orlando Afonso Rodrigues – 1998
- 33 · **Desenvolvimento motor: indicadores bioculturais e somáticos do rendimento motor de crianças de 5/6 anos**  
Vítor Pires Lopes – 1998
- 34 · **Estudo da influência do conhecimento prévio de alunos portugueses na compreensão de um texto em língua inglesa**  
Francisco Mário da Rocha – 1998
- 35 · **La crise de Mai 68 en France**  
João Sérgio de Pina Carvalho Sousa – 1999
- 36 · **Linguagem, psicanálise e educação: uma perspectiva à luz da teoria lacaniana**  
José Manuel Rodrigues Alves
- 37 · **Contributos para um estudo das funções da tecnologia vídeo no ensino**  
Francisco Cordeiro Alves – 1998
- 38 · **Sistemas agrários e melhoramento dos bovinos de raça Mirandesa**  
Fernando Jorge Ruivo de Sousa – 1998

- 
- 39 · **Enclaves de clima Cfs no Alto Portugal – a difusa transição entre a Ibéria Húmida e a Ibéria Seca**  
Ário Lobo Azevedo; Dionísio Afonso Gonçalves; Rui Manuel Almeida Machado – 1995
- 40 · **Desenvolvimento agrário na Terra Fria – condicionantes e perspectivas**  
Duarte Rodrigues Pires – 1998
- 41 · **A construção do planalto transmontano – Baçal, uma aldeia do planalto**  
Luísa Genésio – 1999
- 42 · **Antologia epistolográfica de autores dos sécs. XIX-XX**  
Lurdes Cameirão – 1999
- 43 · **Teixeira de Pascoaes e o projecto cultural da “Renascença Portuguesa”**  
Lurdes Cameirão – 2000
- 44 · **Descargas atmosféricas – sistemas de protecção**  
Joaquim Tavares da Silva
- 45 · **Redes de terra – princípios de concepção e de realização**  
Joaquim Tavares da Silva
- 46 · **O sistema tradicional de exploração de ovinos em Bragança**  
Carlos Barbosa – 2000
- 47 · **Eficiência de utilização do azoto pelas plantas**  
Manuel Ângelo Rodrigues, João Filipe Coutinho – 2000
- 48 · **Elementos de física e mecânica aplicada**  
João Alberto Sobrinho Teixeira
- 49 · **A Escola Preparatória Portuguesa – Uma abordagem organizacional**  
Henrique da Costa Ferreira – 2002
- 50 · **Agro-ecological characterization of N. E. Portugal with special reference to potato cropping**  
T. C. Ferreira, M. K. V. Carr, D. A. Gonçalves – 1996
- 51 · **A participação dos professores na direcção da Escola Secundária, entre 1926 e 1986**  
Henrique da Costa Ferreira – 2002

- 
- 52 · **A evolução da Escola Preparatória – o conceito e componentes curriculares**  
Henrique da Costa Ferreira – 2003
- 53 · **O Homem e a biodiversidade (ontem, hoje... amanhã)**  
António Réffega – 1997
- 54 · **Conservação, uso sustentável do solo e agricultura tropical**  
António Réffega – 1997
- 55 · **A teoria piagetiana da equilibração e as suas consequências educacionais**  
Henrique da Costa Ferreira – 2003
- 56 · **Resíduos com interesse agrícola - Evolução de parâmetros de compostagem**  
Luís Manuel da Cunha Santos – 2001
- 57 · **A dimensão preocupacional dos professores**  
Francisco dos Anjos Cordeiro Alves – 2001
- 58 · **Análise não-linear do comportamento termo-mecânico de componentes em aço sujeitas ao fogo**  
Elza M. M. Fonseca e Paulo M. M. Vila Real – 2001
- 59 · **Futebol - Referências sobre a orientação do jogo**  
João do Nascimento Quina – 2001
- 60 · **Processos de cozedura em cerâmica**  
Maria Helena Pires César Canotilho – 2003
- 61 · **Labirintos da escrita, labirintos da natureza em "As Terras do Risco" de Agustina Bessa-Luís**  
Helena Génésio – 2002
- 62 · **A construção da escola inclusiva - um estudo sobre a escola em Bragança**  
Maria da Conceição Duque Fernandes Ferreira – 2003
- 63 · **Atlas das aves nidificantes da Serra da Nogueira**  
Domingos Patacho
- 64 · **Dialecto rionorês... contributo para o seu estudo**  
Dina Macias – 2003

- 
- 65 · **A aquisição e o desenvolvimento do vocabulário na criança de 4 anos - Estudo de um caso**  
Dina Macias – 2002
- 66 · **Barbela, um trigo escravo - a cultura tradicional de trigo na terra fria bragançana**  
Ana Maria Carvalho
- 67 · **A língua inglesa, uma referência na sociedade da globalização**  
Eliane Cristine Raab Pires – 2002
- 68 · **Etnobotânica das aldeias da Moimenta da Raia e Rio de Onor**  
Ana Maria Carvalho; Ana Paula Rodrigues
- 69 · **Caracterização Biofísica da técnica de Mariposa**  
Tiago Barbosa – 2004
- 70 · **As inter-relações turismo, meio-ambiente e cultura**  
Eliane Cristine Raab Pires – 2004
- 71 · **Avaliação do impacte dos cursos de jovens empresários agrícolas em Trás-os-Montes**  
Maria da Graça Ferreira Bento Madureira – 2004
- 72 · **Do pai ao pior – 4 conferências**  
Acílio da Silva Estaqueiro Rocha; José Manuel Rodrigues Alves; José Martinho; J. Gaglianone
- 73 · **Alguns deícticos de lugar: Análise pragmática**  
Dina Rodrigues Macias – 2004
- 74 · **Fórum de psicanálise, sonho e criatividade – 100 anos sobre a ciência dos sonhos de Freud**  
Vários autores organizados por José Manuel Rodrigues Alves
- 75 · **Perspectiva pictórica**  
Luís Manuel Leitão Canotilho – 2005