

Resumo:

A projeção em ambiente bidimensional (2D), de sistemas de coordenadas tridimensionais (3D), permite representar objetos 3D em perspetiva. Quando tais sistemas são manipulados através de certos parâmetros angulares, conseguimos visualizar diversas perspetivas desse objeto. A implementação em GeoGebra 4.0 destes sistemas permitiu-nos dar um procedimento para a construção da secção plana de um cubo, determinada pelo plano de interseção definido por três pontos móveis, não colineares, sobre as suas arestas. A visualização e manipulação da construção que apresentamos permite observar, conjecturar e demonstrar relações entre a geometria de uma secção e a posição do plano de corte.

Palavras-chave: Cubo, Secções planas, GeoGebra.

Motivação e objetivos

De acordo com as indicações metodológicas dos programas do Ensino Secundário, os estudantes devem saber desenhar representações planas de sólidos, descrever a interseção do cubo com um plano dado, construir e representar a interseção obtida. Neste estudo, temos por objetivos:

- ◇ Desenvolver competências da representação plana de objetos 3D;
- ◇ Apresentar recursos dinâmicos facilitadores da compreensão das possíveis secções planas de um cubo.

Representação de pontos de \mathbb{R}^3 em ambiente 2D do GeoGebra

A utilização de conceitos de Álgebra Linear permite simular a representação de objetos 3D no plano e manipulá-los.

Um objeto sujeito a certas rotações, adquire uma orientação específica. Sejam as matrizes de rotação R_x , R_y e R_z do sistema $\{Oxyz\}$, em torno do eixo x , y e z , de amplitude α , β e φ , respetivamente. Em Geogebra, criamos seletores α , β e φ e implementamos:

$$R_x = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{Bmatrix}$$

$$R_y = \begin{Bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{Bmatrix}$$

$$R_z = \begin{Bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

A projeção de um objeto, num plano, determina uma perspetiva do mesmo. Obtêm-se as direções $\{u, v, w\}$ do sistema $\{Oxyz\}$ rodado e projetado, aplicando à base canónica $\{i, j, k\}$ de \mathbb{R}^3 a matriz M :

$$M = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} R_x R_y R_z$$

Representamos um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ no plano, através da combinação linear $xu + yv + zw$, tal como a imagem a seguir sugere.

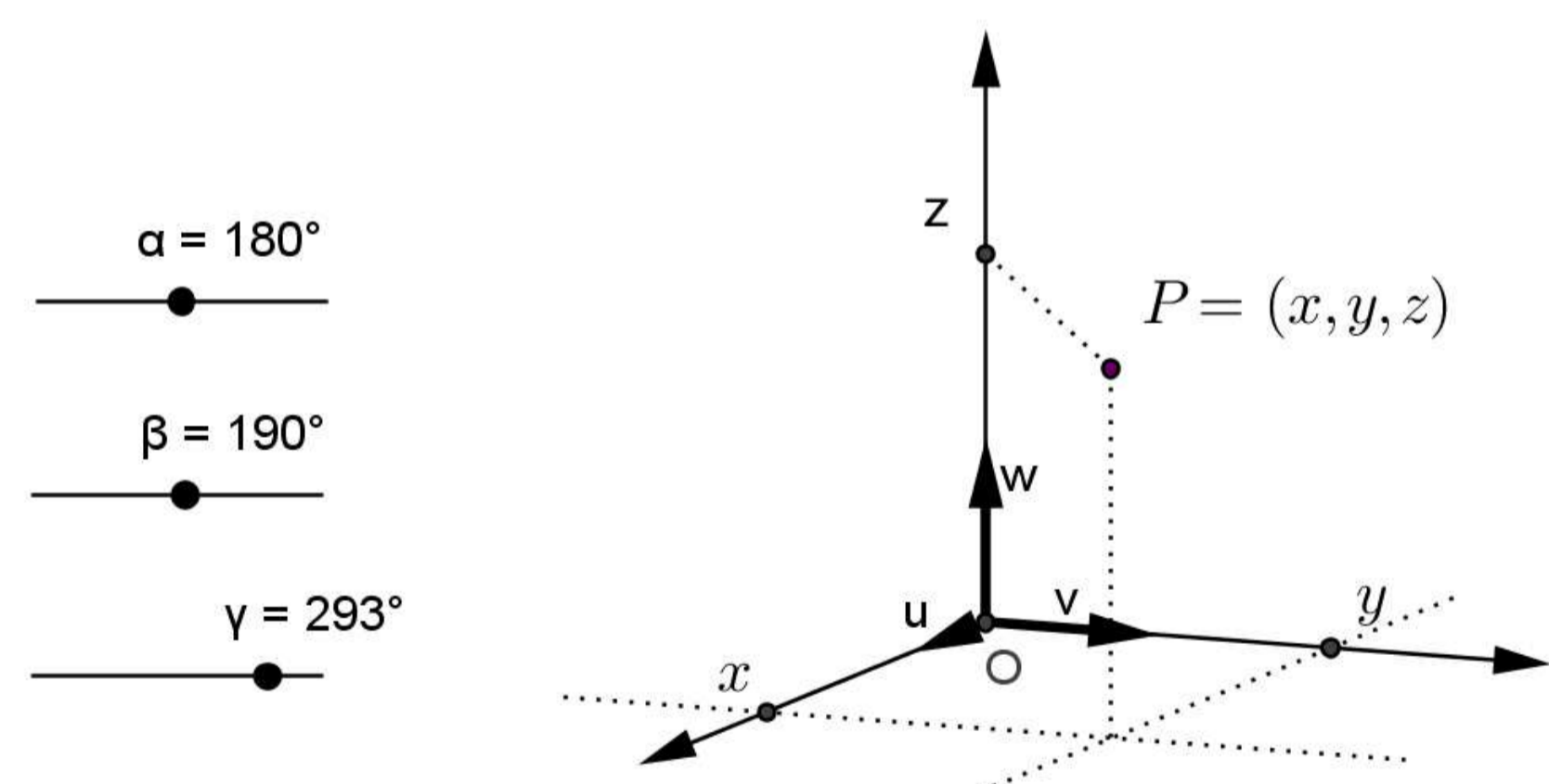


Figura 1: Representação de pontos de \mathbb{R}^3

Representação de um cubo em GeoGebra

Representemos um cubo de aresta l , cujo primeiro vértice, $V_1 = O$ (coincide com a origem do referencial). Consideramos os restantes vértices, $V_2 = V_1 + lu$, $V_3 = V_2 + lv$, $V_4 = V_1 + lv$, $V_{i+4} = V_i + lw$, para $1 \leq i \leq 4$, e as arestas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{12}\}$, de acordo com a Figura ??.

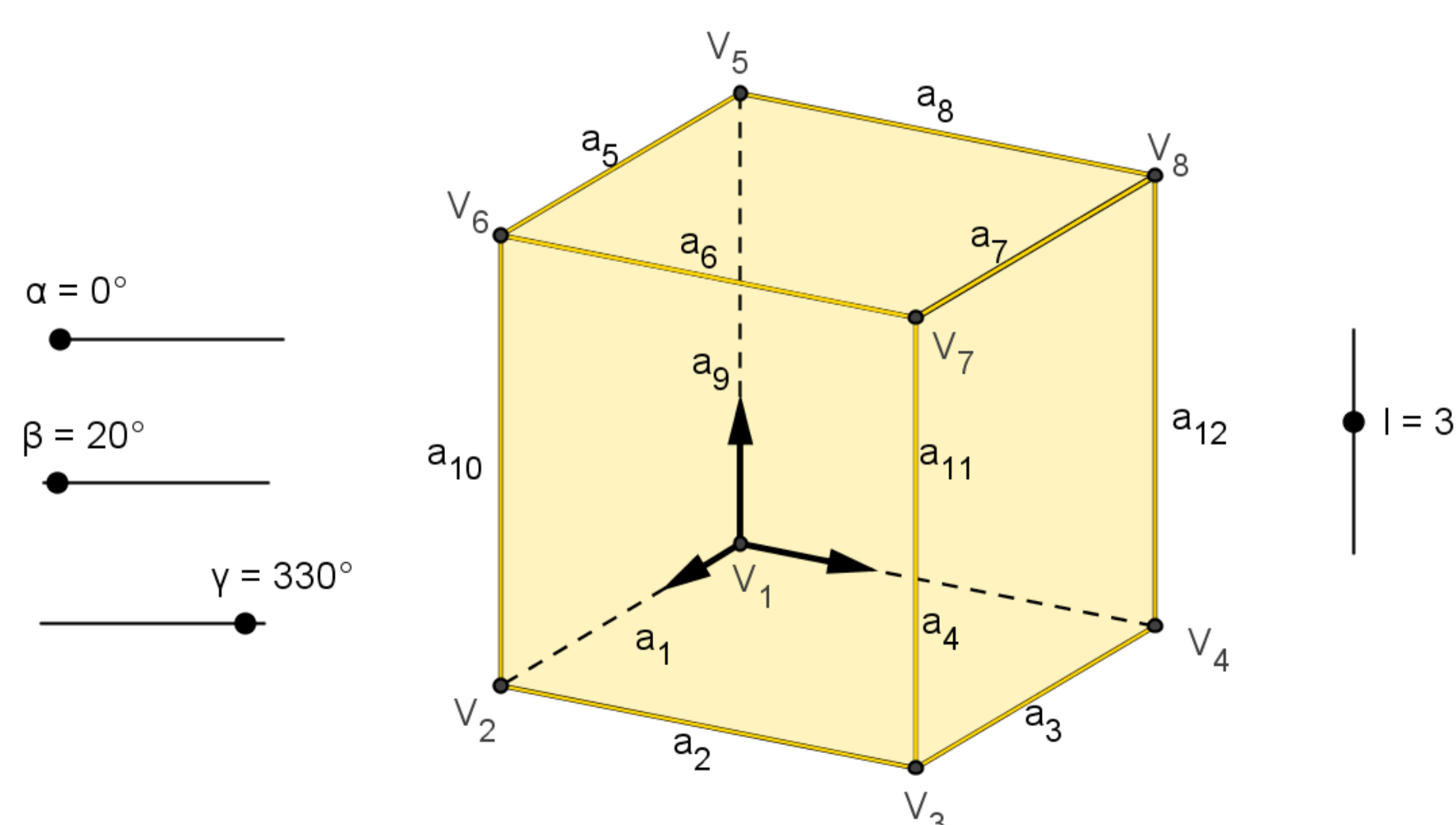


Figura 2: Elementos de um cubo

Visualizamos o cubo em diversas perspetivas, através da variação dos coeficientes angulares α , β e φ .

Secções planas de um cubo

O plano definido por três pontos móveis não colineares A, B e C sobre três das arestas de um cubo determina polígonos, usualmente designados de **secções do cubo**, cuja geometria depende da posição dos pontos.

A construção de linhas poligonais correspondentes a tais secções, usa propriedades elementares da geometria euclidiana, das quais destacamos:

- ◇ A reta definida por dois pontos de um plano está contida nesse plano;
- ◇ Um plano secante a dois planos paralelos entre si, interseca-os segundo retas paralelas.

A imagem a seguir sugere algumas possibilidades:

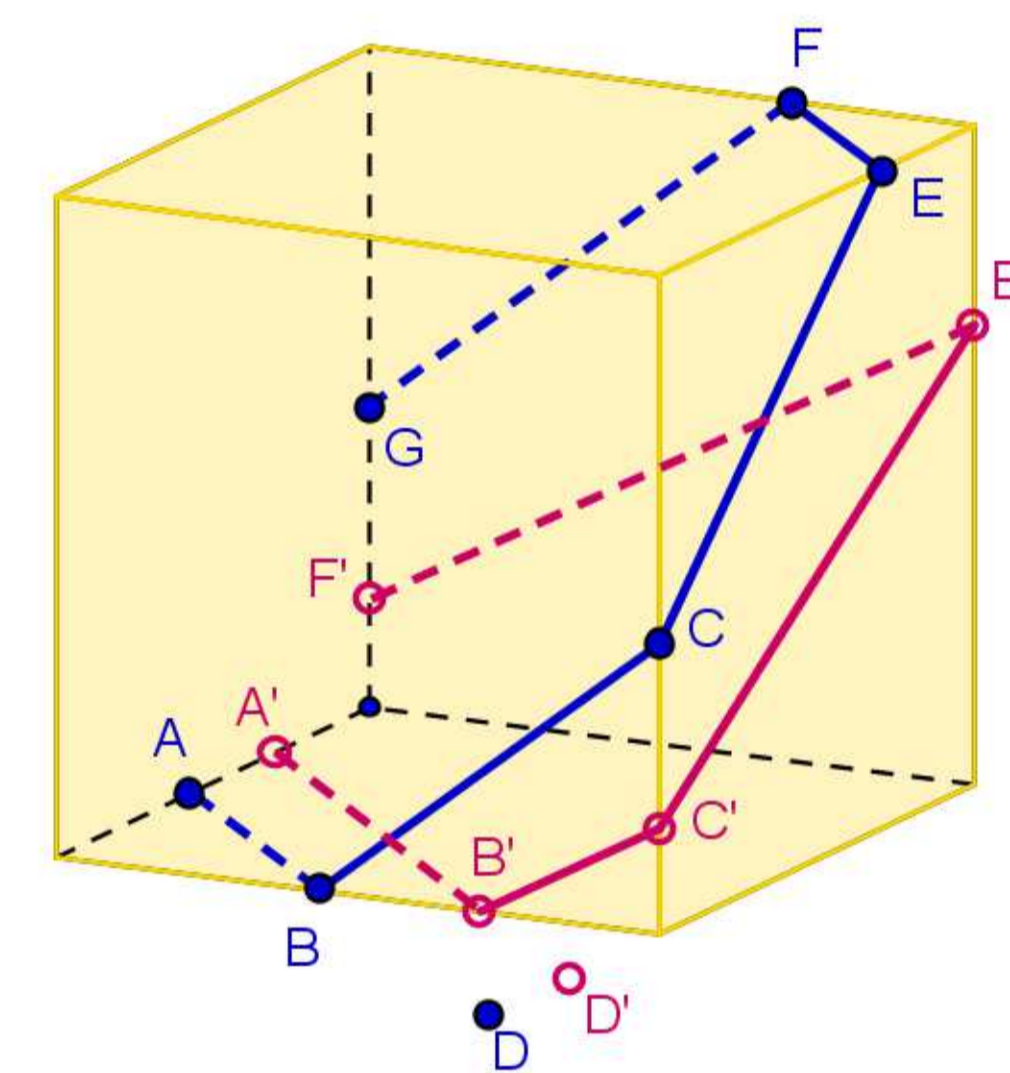


Figura 3: Linhas poligonais relativas a dois planos de corte

No caso particular em que $A \in a_1$, $B \in a_2$ e $C \in a_{11}$, definimos

$$D = AB \cap V_3V_4$$

e aplicamos as propriedades acima referidas para a obtenção dos restantes vértices do polígono. Para esta configuração de pontos, as secções possíveis são quadriláteros, pentágonos e hexágonos.

Notar que obtemos secções triangulares, quando o plano ABC interseca três arestas incidentes num mesmo vértice.

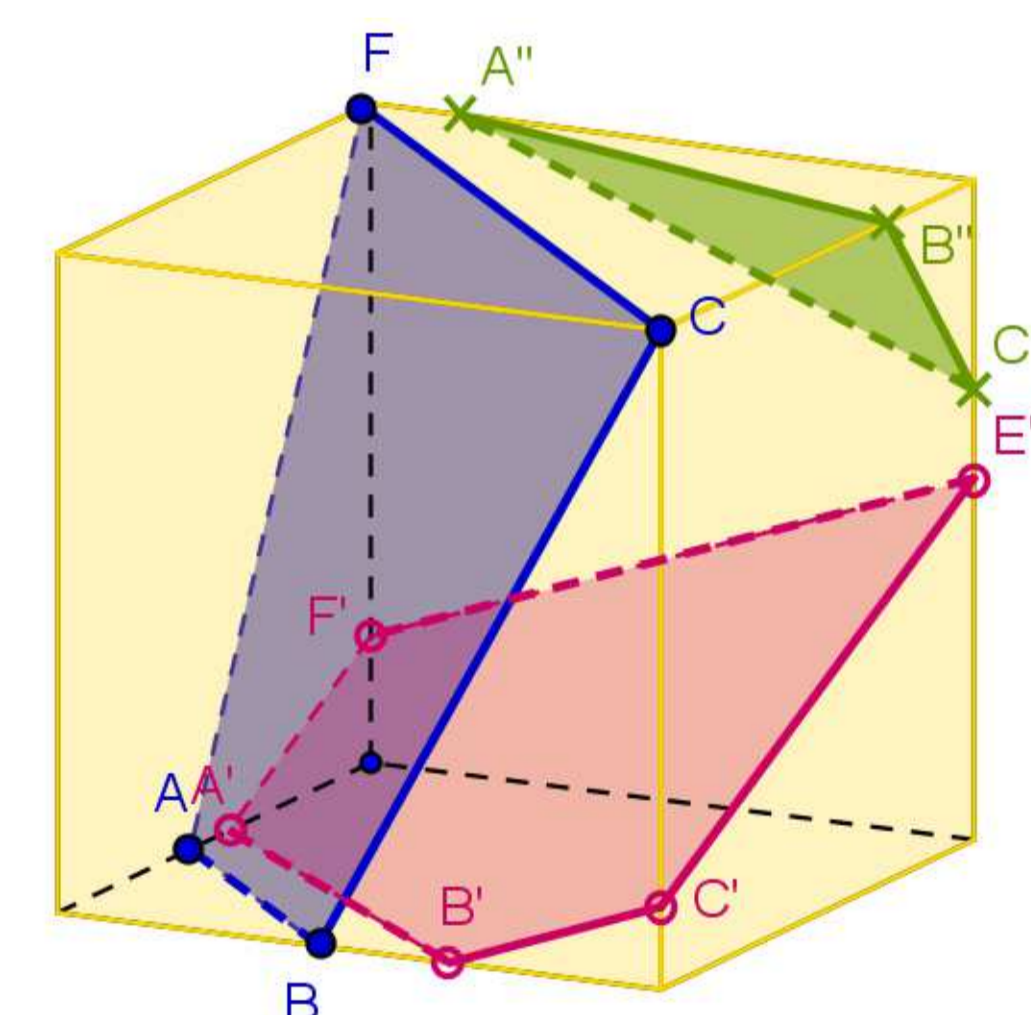


Figura 4: Algumas secções planas do cubo

A dinâmica destas construções, controlada pelos seletores α , β e φ , permite visualizar todas as secções planas de um cubo.

Conclusão

A construção destes materiais por parte dos alunos efetiva a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos e garante a distinção entre as propriedades do desenho e as propriedades do objeto em estudo.

Referências

[1] Silva, J. C., et al. (2001). *Matemática A - Programa do 10º ano*. Lisboa: DES - ME.
[2] Jeong-Eun Park, et al. (2010) *Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D)*, Proc. of 1st Eurasia Meeting of GeoGebra (pp. 46-55). Ankara, Turquia.