

INCTE 2019

IV Encontro Internacional de Formação na Docência
4th International Conference on Teacher Education

Livro de Atas Proceedings



INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA Escola Superior de Educação

Bragança | 3 e 4 de maio | 2019

Livro de Atas

IV Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE)

Proceedings

4th International Conference on Teacher Education (INCTE)

Título: IV Encontro Internacional de Formação na Docência (INCTE): Livro de atas
Edição: Instituto Politécnico de Bragança
Editores: Manuel Vara Pires Instituto Politécnico de Bragança
Cristina Mesquita Instituto Politécnico de Bragança
Rui Pedro Lopes Instituto Politécnico de Bragança
Elisabete Mendes Silva Instituto Politécnico de Bragança
Graça Santos Instituto Politécnico de Bragança
Raquel Patrício Instituto Politécnico de Bragança
Luís Castanheira Instituto Politécnico de Bragança
Ano: 2019
ISBN: 978-972-745-259-0
Handle: <http://hdl.handle.net/10198/15084>

Organização

O INCTE 2019 é organizado pelo IPB, onde decorrem as sessões.

Comissão Organizadora

Adorinda Gonçalves (IPB, Portugal)
Cristina Mesquita (IPB, Portugal)
Elisabete Mendes Silva (IPB, Portugal)
Elza Mesquita (IPB, Portugal)
Graça Santos (IPB, Portugal)
Jacinta Costa (IPB, Portugal)
Luís Castanheira (IPB, Portugal)
Manuel Vara Pires (IPB, Portugal)
Maria José Rodrigues (IPB, Portugal)
Maria Raquel Patrício (IPB, Portugal)
Mário Cardoso (IPB, Portugal)
Paula Vaz (IPB, Portugal)
Rui Pedro Lopes (IPB, Portugal)

Comissão Científica

Adorinda Gonçalves (IPB, Portugal)
 Alexandra Soares Rodrigues (IPB, Portugal)
 Alexia Dotras Bravo (IPB, Portugal)
 Amélia Marchão (IPPortalegre, Portugal)
 Ana Garcia Valcárcel (USAL, Espanha)
 Ana Paula Aires (UTAD, Portugal)
 Ana Paula Laborinho (FEA, Portugal)
 Ana Paula Martins (UMinho, Portugal)
 Angelina Sanches (IPB, Portugal)
 António Guerreiro (UAlgarve, Portugal)
 António Nóvoa (ULisboa, Portugal)
 António Vasconcelos (IPS, Portugal)
 Assunção Folque (UEvora, Portugal)
 Carla Araújo (IPB, Portugal)
 Carla Guerreiro (IPB, Portugal)
 Carlos Neto (ULisboa, Portugal)
 Carlos Teixeira (IPB, Portugal)
 Cláudia Martins (IPB, Portugal)
 Cristina Martins (IPB, Portugal)
 Cristina Mesquita (IPB, Portugal)
 Delmina Pires (IPB, Portugal)
 Domingos Fernandes (ULisboa, Portugal)
 Elisabete Mendes Silva (IPB, Portugal)
 Elza Mesquita (IPB, Portugal)
 Feliciano Veiga (ULisboa, Portugal)
 Fernando Martins (IPC, Portugal)
 Flávia Vieira (UMinho, Portugal)
 Gabriela Portugal (UAveiro, Portugal)
 Graça Santos (IPB, Portugal)
 Haroldo Bentes (IF do Pará, Brasil)
 Helena Rocha (UNova, Portugal)
 Henrique Teixeira-Gil (IPCB, Portugal)
 Ilda Ribeiro (IPB, Portugal)
 Isabel Cabrita (UAveiro, Portugal)
 Isabel Vale (IPVC, Portugal)
 Isolina Oliveira (UAberta, Portugal)
 Jacinta Costa (IPB, Portugal)
 João Carvalho Sousa (IPB, Portugal)
 João Cristiano Cunha (IPB, Portugal)
 João Formosinho (UMinho, Portugal)
 Joaquim Machado (UCP, Portugal)
 Jorge Ramos do Ó (ULisboa, Portugal)
 José Manuel Belo (UTAD, Portugal)
 Juan Gavilán (UConcépcion, Chile)
 Júlia Oliveira-Formosinho (UCP, Portugal)
 Laurinda Leite (UMinho, Portugal)
 Leoncio Vega-Gil (USAL, Espanha)
 Leonor Santos (ULisboa, Portugal)
 Lina Fonseca (IPVC, Portugal)
 Lourdes Montero (USC, Espanha)
 Luciana Silva (UTFPR, Brasil)
 Luís Castanheira (IPB, Portugal)
 Luís Menezes (IPV, Portugal)
 Manuel Meirinhos (IPB, Portugal)
 Manuel Vara Pires (IPB, Portugal)
 Maria Antónia Mezquita (UValladolid, Espanha)
 Maria Assunção Flores (UMinho, Portugal)
 Maria da Conceição Martins (IPB, Portugal)
 Maria do Céu Ribeiro (IPB, Portugal)
 Maria do Céu Roldão (UCP, Portugal)
 Maria do Nascimento Mateus (IPB, Portugal)
 María Dolores Alonso-Cortés (ULEón, Espanha)
 Maria Isabel Castro (IPB, Portugal)
 Maria Isabel Oliveira (UMinho, Portugal)
 Maria João Cardona (IPSantarém, Portugal)
 Maria José Rodrigues (IPB, Portugal)
 Maria Raquel Patrício (IPB, Portugal)
 Marília Castro Cid (UEvora, Portugal)
 Marina Tzakosta (UCreta, Grécia)
 Mário Cardoso (IPB, Portugal)
 Mark Daubney (ILEiria, Portugal)
 Marta Saracho Aranaíz (IPP, Portugal)
 Miguel Ángel Santos Guerra (UMálaga, Espanha)
 Miguel Ribeiro (UniCamp, Brasil)
 Nélia Amado (UAlgarve, Portugal)
 Olga Santos (IPLeiria, Portugal)
 Paula Barros (IPB, Portugal)
 Paula Vaz (IPB, Portugal)
 Pedro Tadeu (IPG, Portugal)
 Raymundo Carlos Ferreira Filho (IFSul, Brasil)
 Rosa Novo (IPB, Portugal)
 Rui Pedro Lopes (IPB, Portugal)
 Rui Vieira (UAveiro, Portugal)
 Sandra Regina Soares (UNEB, Brasil)
 Sandra Santos (IPB, Portugal)
 Sani Rutz da Silva (UTFPR, Brasil)
 Sara Barros Araújo (IPP, Portugal)
 Sofia Bergano (IPB, Portugal)
 Susana Carreira (UAlg, Portugal)
 Susana Colaço (IPSantarém, Portugal)
 Tatjana Devjak (ULubljana, Eslovénia)
 Telma Queirós (IPB, Portugal)
 Vasco Alves (IPB, Portugal)
 Vitor Gonçalves (IPB, Portugal)
 Vitor Hugo Manzke (IFSul, Brasil)

Devíamos fazer mais tarefas como esta!: uma experiência em álgebra linear

Flora Silva¹, Paula Maria Barros¹, José António Fernandes²
flora@ipb.pt, pbarros@ipb.pt, jfernandes@ie.uminho.pt

¹ Instituto Politécnico de Bragança, Portugal

² Universidade do Minho, Portugal

Resumo

O insucesso em álgebra linear no ensino superior constitui um dilema com que muitos professores se deparam, pelo que é fundamental que se investiguem e implementem estratégias de ensino que conduzam a alterações significativas na aprendizagem dos alunos. Tendo como base esta preocupação, no ano letivo 2018/2019, no âmbito da unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica, de dois cursos (A e B) de licenciatura em engenharia de um instituto politécnico, propôs-se aos alunos (33 do curso A e 28 do curso B) a realização de uma tarefa que os levasse a trabalhar, de forma interligada, tópicos de geometria analítica e de sistemas de equações lineares. A tarefa foi efetuada em grupo e recomendou-se o recurso ao *software Microsoft Mathematics*, que permitiu, entre outros aspetos, trabalhar diferentes representações dos conceitos e confirmar a correção de algumas das respostas dadas. Outra especificidade da tarefa, foi o facto de iniciar com uma situação humorística, retirada da internet, que serviu para relembrar a equação geral do plano, e de algumas questões serem orientadas a partir da análise de uma fotografia de uma avenida da cidade de Bragança, que se podia relacionar com a interseção de três planos. Com esta escolha, pretendeu-se, para além do aspeto motivacional, despertar os alunos para a possibilidade de verem a realidade envolvente com um “olhar matemático”. A reflexão sobre a experiência realizada baseou-se nas produções dos alunos, nas perceções da professora, enquanto observadora participante, e num questionário que foi aplicado aos alunos, que teve como principal objetivo auscultar a sua opinião sobre o contributo da tarefa proposta para a sua aprendizagem. Em termos gerais, a tarefa proposta foi um incentivo para que os alunos participassem mais ativamente nas aulas, tendo assim contribuído de forma positiva para a sua aprendizagem. O maior problema dos alunos foi terminar a tarefa extra-aula, porque tiveram dificuldades na sua resolução ou em reunir os elementos do grupo. Porém, a maioria concorda ou concorda totalmente que a tarefa proposta foi motivadora (87,9% curso A, 78,6% curso B) e os ajudou a refletir sobre vários conceitos/procedimentos em que tinham dificuldades (87,9% curso A, 60,7% curso B). Quanto ao *Microsoft Mathematics*, a maioria dos alunos concorda ou concorda totalmente que ele os ajudou a compreender melhor os conteúdos e contribuiu para que entendessem a relação entre as representações gráfica e algébrica.

Palavras-Chave: ensino superior, álgebra linear, *Microsoft Mathematics*.

Abstract

The failure of linear algebra in higher education is a dilemma faced by many teachers, so it is fundamental to research and implement teaching strategies that lead to significant

changes in students' learning. Based on this concern, in the 2018/2019 academic year, in the scope of the Linear Algebra and Analytic Geometry course unit, of two courses (A and B) of bachelor in engineering from a polytechnic institute, it was proposed to the students (33 of the course A and 28 of course B) the accomplishment of a task that would lead them to work, in an interconnected way, topics of analytic geometry and systems of linear equations. The task was done in group and it was recommended the use of the software *Microsoft Mathematics*, which allowed, among other things, to work different representations of the concepts and confirm the correction of some of the given answers. Another specificity of the task was to start with a humorous situation, taken from the internet, which served to remind the general equation of the plane, and some questions to be guided by the analysis of a picture from an avenue in the city of Bragança, which could be related to the intersection of three planes. With this choice, it was intended, beyond the motivational aspect, to make the students aware to the possibility of seeing the surrounding reality with a “mathematical look”. The reflection about the experience was based on the productions of the students, on the teacher perceptions, as an observer participant, and on a questionnaire that was applied to the students, whose main objective was to listen to their opinion about the contribution of the task proposed for their learning. In general terms, the proposed task was an incentive for the students to participate more actively in the classes, thus contributing positively to their learning. The students' biggest problem was to finish the extra-class task because they had difficulty in solving it or gathering the elements of the group. However, the majority agree or fully agree that the proposed task was motivating (87.9% of course A, 78.6% of course B) and helped them to reflect on several concepts / procedures in which they had difficulties (87.9% of course A, 60.7% of course B). As for *Microsoft Mathematics*, most of the students agree or fully agree that it helped them to better understand the contents and the relationship between graphical and algebraic representations.

Keywords: higher education, linear algebra, *Microsoft Mathematics*.

1 Introdução

As investigações sobre o ensino e aprendizagem de álgebra linear devem ter um contributo relevante no combate ao insucesso no ensino superior. De realçar que para além desta área se poder considerar uma das “mais importantes na educação de matemáticos, cientistas, engenheiros e economistas” (Berman & Okubo, 2015), também tem um papel formativo e propedêutico, visto que, em termos curriculares, constitui muitas vezes o primeiro contacto dos estudantes com uma teoria apresentada de modo consideravelmente abstrato (Monteiro, 2001). Porém, como comprovam alguns estudos (Barros, 2018; Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Cutz, 2005; Dorier, 2000), a álgebra linear é uma área em que muitos alunos do ensino superior sentem dificuldades. Considerando este contexto, é natural que os professores que lecionam unidades curriculares que se centram nessa temática se preocupem com o ambiente de aprendizagem nas suas aulas e procurem encontrar estratégias para motivar os alunos e melhorar o seu desempenho. Na opinião de Alcará e Guimarães (2007), a questão da motivação constitui um importante repto para os professores na medida em que esta tem implicações diretas na qualidade do envolvimento do aluno com o processo de ensino e aprendizagem, já que um aluno motivado empenha-se nas tarefas com entusiasmo, procura novos conhecimentos, e revela disposição para novos desafios. Nesta perspetiva, a motivação é um fator crucial para promover a aprendizagem e o sucesso educativo em geral (Lourenço & Paiva, 2010; Veríssimo, 2013).

Pelo exposto, considera-se fundamental que o professor proporcione aos alunos tarefas estimulantes e diversificadas, capazes de otimizar a sua motivação, e que, simultaneamente, promovam o trabalho e a discussão sobre os conteúdos de forma a levar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades. Neste sentido, no âmbito da unidade curricular (UC) de Álgebra Linear e Geometria Analítica de dois cursos de licenciatura em engenharia, de uma instituição do ensino superior politécnico do norte de Portugal, propôs-se aos alunos uma tarefa com um caráter diferente dos tradicionais exercícios, que, para além de ter como objetivo motivar os alunos e promover uma participação mais ativa nas atividades da aula, pretendia levar os alunos a trabalhar conceitos de geometria analítica e de sistemas de equações lineares de forma interligada, com o intuito de melhorar a sua compreensão.

2 O ensino e a aprendizagem da álgebra linear

A preocupação com a aprendizagem dos alunos leva vários autores a recomendar diversas abordagens metodológicas para o ensino de álgebra linear, como, por exemplo, a utilização de diferentes representações dos conceitos, a utilização de *software*, uma abordagem progressiva dos conceitos, relacionada, sempre que possível, com os conhecimentos anteriores dos alunos, os debates em pequeno e grande grupo, sendo, muitas vezes, sugerida uma combinação de várias estratégias (Barros, 2018).

De acordo com Rosso e Barros (2013), na álgebra linear é possível distinguir três linguagens básicas: geométrica, aritmética e algébrica, além de uma variedade de representações. Desta forma pode-se abordar um conceito de distintas maneiras, propondo formas de pensar e marcos de trabalho diferenciados, que requerem habilidades e destrezas para mudar constantemente de uma linguagem para outra. Assim, os autores consideram que no ensino da álgebra linear se deveria propiciar o trabalho com diferentes formas de representação, sendo uma maneira de favorecer a independência do conceito a respeito da linguagem usada e das suas representações e explicitar a polissemia subjacente nos símbolos utilizados. Perspetiva semelhante manifestam Dundar, Gokkurt e Soylu (2012) já que defendem que dada a abstração dos conceitos de álgebra linear, estes devem ser explicados com as suas representações visuais, evitando-se assim que sejam apenas memorizados e não completamente compreendidos. Como consideram que as representações geométricas nem sempre clarificam as definições ou conceitos na sua totalidade, advogam que depois de um conceito ou definição ser explicado com figuras geométricas, é preciso dar lugar às suas definições algébrica e abstrata e se se partir destas primordialmente, também deve ser trabalhada a posteriori a perspetiva geométrica.

No que diz respeito concretamente aos sistemas de equações lineares, Cutz (2005), baseando-se num estudo que realizou com alunos do ensino superior mexicano, em que diagnosticou dificuldades em interpretar a solução de sistemas no modo geométrico, recomenda que os professores relacionem a solução de um sistema de equações lineares com a sua representação gráfica e deem mais atenção ao seu significado, evitando, assim, que a explicação fique apenas ao nível da mecanização de métodos de resolução dos sistemas. Sugere, ainda, que os professores procurem estratégias que favoreçam o tratamento dos sistemas nos distintos modos de pensamento, assim como planeiem atividades que coloquem o estudante em algum modo de pensamento específico, mas sobretudo que incitem a transição entre esses modos de pensamento.

Quanto à tecnologia é reconhecida a sua importância no processo de ensino aprendizagem da álgebra linear, tanto como apoio em termos de ensino como pela possibilidade de gerar ambientes de exploração e descoberta, sendo a sua utilização recomendada por diversos autores (Aydin, 2009; Carlson, Johnson, Lay, & Porter, 1993; Day & Kalman, 1999; Diković, 2007; Ortega, 2002; Pires & Marques, 2009). Por exemplo, Barros (2018) numa investigação com alunos do ensino superior politécnico em que usou o *software Microsoft Mathematics* como apoio nas tarefas da aula de uma unidade curricular de álgebra linear e geometria analítica concluiu que este teve um importante papel em diversas tarefas, pois, para além de permitir efetuar cálculos e explorar exemplos mais rapidamente e relacionar as representações gráfica e analítica, que foi essencial no tema de Sistemas de equações lineares, evitou, em várias situações, que os alunos cometessem erros, obrigando, por vezes, a um confronto com as suas conceções prévias.

3 Metodologia

O estudo realizado insere-se no paradigma qualitativo, podendo ser caracterizado como um estudo descritivo. Foca-se no relato de uma experiência de sala de aula, em que o investigador teve também o papel de professor, estatuto que lhe facilitou a introdução no campo e o acesso aos participantes. Duplo papel que na opinião de Bogdan e Biklen (1994) pode ser potenciador da melhoria da eficácia de ensino pois “os professores, ao agirem como investigadores, não só desempenham os seus deveres, mas também se observam a si próprios, dão um passo atrás e distanciam-se dos conflitos imediatos, tornam-se capazes de ganhar uma visão mais ampla do que se está a passar” (p. 286).

A experiência foi efetuada com alunos que frequentavam a UC de Álgebra Linear e Geometria Analítica afeta a um curso de Licenciatura em Engenharia Mecânica ou em Eletrotécnica e de Computadores, numa instituição do ensino superior politécnico do norte de Portugal. Em ambos os cursos a UC tem um programa comum, é lecionada no 1.º semestre do 1.º ano, tem um total de 60 horas teórico-práticas de contacto e 162 horas totais de trabalho e uma carga horária letiva de quatro horas semanais.

A tarefa proposta (ver Quadro 1) abrange fundamentalmente os temas Sistemas de equações lineares e Geometria analítica, que fazem parte dos conteúdos programáticos da UC, visando a sua interligação. Para além deste aspeto, da perspetiva motivacional e da prática de métodos de resolução de sistemas já abordados nas aulas, um dos objetivos principais da tarefa é que os alunos relacionem as equações dos sistemas de equações lineares com a sua representação gráfica, consigam caracterizar o tipo de sistema obtido e identificar o conjunto-solução, tanto do ponto de vista geométrico como analítico. Pretende-se, ainda, que os alunos se apercebam da diversidade de sistemas quanto ao tipo de solução que podem obter quando estão perante três incógnitas e três equações (ou duas equações), no sentido de combater algumas conceções neste domínio já evidenciadas em alguns estudos (Barros, 2018).

A seleção do *software Microsoft Mathematics* para apoiar a resolução da tarefa foi orientada pelo facto deste permite efetuar representações gráficas a três dimensões e permitir resolver sistemas através do “solucionador de equações”. Para além disso, é um *software* gratuito, tem uma interface simples e facilmente compreensível para o utilizador e tem potencialidades para ser utilizado em outras unidades curriculares no âmbito da matemática ou de outras áreas como, por exemplo, a física.

No âmbito da investigação, apenas se consideraram como participantes os alunos que realizaram todas as etapas da tarefa proposta, visto que alguns deles não estiveram presentes nos momentos em que esta decorreu. Assim, num dos cursos participaram 33 alunos (curso A) e no outro 28 (curso B).

Em ambos os cursos, praticamente todos os alunos são do sexo masculino, à exceção do curso B em que há um aluno do sexo feminino. As suas idades variam entre 17 e 27 anos, sendo a média das idades 21,4 anos no curso A e 20,7 anos no curso B, com desvio-padrão 2,59 e 2,38 anos, respetivamente. Do ponto de vista da nacionalidade, na turma A os alunos são na sua maioria portugueses (72,7%), mas na turma B há uma predominância dos alunos africanos (78,6%).

A recolha de dados centrou-se, essencialmente, nas notas da professora, enquanto observadora participante, nas produções dos alunos e na aplicação de um questionário a cada um deles que visava obter a sua opinião sobre a tarefa e sobre o contributo desta para a sua aprendizagem.

O questionário foi aplicado no fim da aula em que se realizou a apresentação dos trabalhos. Era constituído por 10 questões predominantemente de resposta fechada, algumas das quais com alíneas. As primeiras quatro questões remetiam para dados de carácter pessoal, as duas seguintes pretendiam averiguar os hábitos de trabalho em grupo dos alunos e o seu conhecimento do *software Microsoft Mathematics*. As restantes questões centravam-se em aspetos relacionados com a própria tarefa como dificuldades sentidas, ao nível dos conceitos ou do trabalho com o próprio *software*, e opinião dos alunos sobre ela, sobre o grupo e o trabalho desenvolvido (em termos de organização e coordenação), e as vantagens/inconvenientes da utilização do *software Microsoft Mathematics*, tanto no aspeto motivacional como em termos de aprendizagem.

No tratamento e análise de dados do questionário, determinaram-se as frequências absolutas e relativas referentes às respostas obtidas, tendo-se usado tabelas para resumir essa informação.



4 A tarefa, o seu desenvolvimento e as produções dos alunos

A tarefa (ver Quadro 1) foi efetuada em grupo e recomendou-se o recurso ao *software Microsoft Mathematics*. Os alunos foram previamente avisados da sua realização e, aquando da sua resolução, já tinham sido lecionados os conteúdos relativos ao tema Sistemas de equações lineares. A tarefa foi iniciada numa aula da UC, tendo posteriormente ficado os alunos de acabar a sua resolução extra-aula e de efetuar uma apresentação em *PowerPoint*, com as conclusões, para apresentar aos colegas na aula seguinte. Os estudantes que necessitaram foram convidados a ir esclarecer eventuais dúvidas com a professora no seu gabinete.

A questão 1, centra-se na análise de uma situação humorística retirada da internet. De realçar que de acordo com Menezes et al. (2017) há estudos que revelam que o humor tem efeitos positivos na criação de bons ambientes de aprendizagem e no aumento da capacidade de concentração dos alunos. Assim, para além de captar a atenção dos alunos e os motivar para a aprendizagem, a Fig. 1 (ver Quadro 1) pretendia levar os alunos a recordar a equação do plano e a forma de a obter com base em três pontos não colineares. Esta questão foi debatida na aula em que foi realizada tendo-se aproveitado para abordar o conceito de produto externo entre dois vetores e o facto de este permitir

obter um vetor normal ao plano. Aspeto que se pretendia que servisse de auxiliar quando passassem à etapa seguinte de representar os planos.

Quadro 1: Enunciado da tarefa.

	<p>1. Observe a Fig. 1 e explique o seu sentido do ponto de vista matemático. Recorra a um exemplo concreto para contextualizar a sua explicação.</p>
<p>Fig. 1</p> 	<p>2. Sugira um título matemático para a fotografia da Fig. 2. Justifique a sua escolha.</p> <p>3. Considere que na Fig. 2 estão representados três planos.</p> <p>3.1. Classifique os planos atendendo à sua posição relativa.</p> <p>3.2. Indique se a interseção desses planos é um ponto, uma reta ou um plano.</p> <p>3.3. Represente analiticamente cada um dos planos da Fig. 2 (com a maior aproximação que conseguir) e construa um sistema de equações lineares.</p> <p>a) Resolva o sistema recorrendo a um dos métodos lecionados nas aulas e escreva o conjunto-solução.</p> <p>b) Confirme o resultado utilizando o <i>Microsoft Mathematics</i>.</p> <p>c) Classifique o sistema como impossível, possível e determinado ou possível e indeterminado. Justifique a sua resposta.</p> <p>4. Com o apoio do <i>Microsoft Mathematics</i>, investigue outras posições relativas entre três planos. Escreva um sistema que represente analiticamente cada um dos casos que encontrar, resolva-o, e indique o respetivo conjunto-solução. Classifique também o sistema.</p> <p>5. Investigue o que acontece se tiver apenas dois planos.</p> <p>6. Elabore uma apresentação em <i>PowerPoint</i> com as suas conclusões.</p>
<p>Fig. 2: Avenida das Forças Armadas, Bragança</p>	

Nas questões seguintes partiu-se da análise de uma fotografia de uma avenida da cidade de Bragança, que se podia relacionar com a interseção de três planos. Com esta escolha, pretendeu-se, para além do aspeto motivacional, despertar a atenção dos alunos para possíveis aspetos matemáticos do meio envolvente. Em termos de resultados, pretendia-se que os alunos relacionassem as representações gráfica e analítica de um plano, conseguissem pensar em diversas posições relativas entre três (ou dois) planos e associassem cada caso a um sistema de equações lineares, compreendendo tanto do ponto de vista analítico como geométrico o que representa o conjunto-solução. Para além disso, esperava-se que os alunos trabalhassem a resolução de sistemas baseando-se num dos métodos de resolução aprendidos durante a UC.

Os títulos matemáticos sugeridos para a Fig. 2 da tarefa foram diversificados e criativos, mas a maior parte dos grupos não apresentou uma justificação para a sua escolha. Alguns dos indicados foram: “Um ponto no espaço”, “Colisão entre planos”, “Interseções tridimensionais”, “Arquitetura da concorrência” e “Happn das Equações Lineares” neste caso com a justificação “pois a solução está no encontro entre os três planos”.

Os alunos tiveram alguma dificuldade em representar analiticamente os planos da figura, algo que já era esperado, pois mesmo com o apoio do *Microsoft Mathematics* era necessário pensar em estratégias que permitissem obter uma equação do plano. Por exemplo, poderiam, com base num referencial à sua escolha, definir três pontos no plano, encontrando depois a respetiva equação, como foi feito pelo Grupo 1 do Curso A

(ver Figura 1). De qualquer forma, a própria discussão sobre a melhor forma de conseguir o objetivo pretendido já fez com que os alunos mobilizassem conhecimentos importantes. No final, todos os grupos conseguiram encontrar um sistema de equações lineares (uns com maior fidelidade à figura que outros) cuja interseção fosse um ponto, tendo concluído, corretamente, que os planos eram concorrentes, a sua interseção seria um ponto, e que o sistema correspondente era possível e determinado. Nas Figuras 1 e 2 apresentam-se extratos das produções de alguns grupos referentes à questão 3.



Figura 1: Representação analítica (a) e gráfica (b) dos planos (Grupo 1 do Curso A).

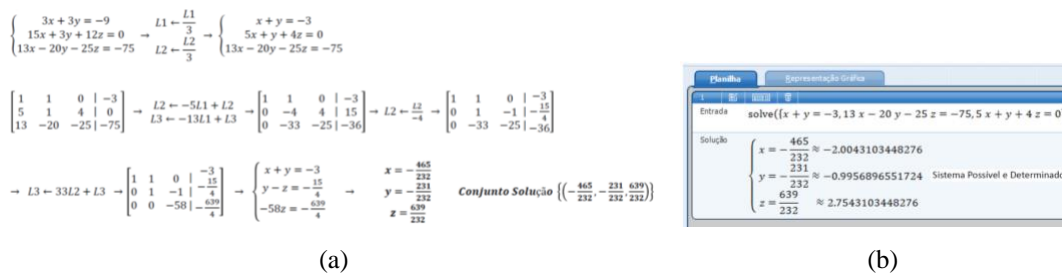


Figura 2: Resolução do sistema recorrendo ao método de eliminação de Gauss, com apresentação do conjunto-solução (a) e confirmação do resultado utilizando o *Microsoft Mathematics* (b) (Grupo 1 do Curso A).

Nas questões 4 e 5, todos os grupos conseguiram descobrir algumas das representações possíveis e os respetivos sistemas (ver Figuras 3 e 4).

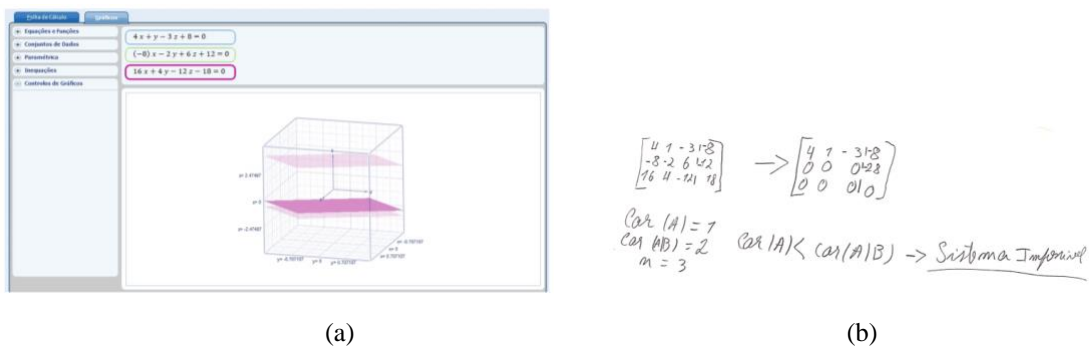


Figura 3: Representação de três planos paralelos (a), resolução do sistema de equações e respetiva classificação (b) (Grupo 3 do Curso A).



Figura 4: Representação de dois planos (Grupo 1 do Curso B).

O facto dos alunos apresentarem o seu trabalho para os colegas, permitiu que fossem abordados exemplos diversificados e que se apercebessem que no caso dos sistemas de três equações lineares a três incógnitas poderiam arranjar exemplos de todos os tipos de sistemas, enquanto que para duas equações lineares a três incógnitas apenas poderiam ter sistemas possíveis e indeterminados e sistemas impossíveis.

5 A avaliação da experiência

Pelo que constatou a professora, a maioria dos alunos em ambas as turmas mostrou-se motivado para a concretização da tarefa, tendo no entanto havido algumas dificuldades na sua execução. De realçar que houve ainda bastantes grupos que tiveram necessidade de esclarecer dúvidas extra-aula com a professora, situação para a qual pode ter concorrido o facto de ter sido a primeira tarefa do género que faziam na UC.

Como já se referiu, retratar os planos da Fig. 2 da tarefa foi uma das dificuldades principais, o que é corroborado pelos alunos quando quantificam as dificuldades que tiveram (ver Tabela 1). Note-se que “descobrir as equações dos planos cuja representação melhor se aproxime da Fig. 2” é apontada por mais de 40% dos alunos, tanto do curso A como do curso B, como uma situação geradora de algumas ou muitas dificuldades, sendo que no curso B “encontrar os pontos na Fig. 2 para construir os planos” também foi complicado para cerca de 57% dos alunos. Outra das situações mais representativas que gerou algumas ou muitas dificuldades em ambos os cursos (45,5% e 46,4% nos cursos A e B, respetivamente) foi “descobrir as possíveis posições relativas de três planos”, eventualmente porque não conseguiram descobrir todas as hipóteses possíveis.

Tabela 1: Dificuldades dos alunos na realização da tarefa proposta.

Dificuldades ao realizar a tarefa proposta	Não tive ou tive poucas		Tive algumas ou tive muitas	
	A (%)	B (%)	A (%)	B (%)
Perceber o sentido matemático da situação humorística apresentada na Fig. 1	78,8	71,4	15,2	28,6
Identificar o significado matemático subjacente à Fig. 2	81,8	67,9	15,2	32,1
Escrever um título sugestivo para a Fig. 2	78,8	71,4	21,2	25,0

Dificuldades ao realizar a tarefa proposta	Não tive ou tive poucas		Tive algumas ou tive muitas	
	A (%)	B (%)	A (%)	B (%)
Encontrar os pontos na Fig.2 para construir os planos	63,6	39,3	33,3	57,1
Descobrir as equações dos planos cuja representação melhor se aproxime da Fig.2	54,5	46,4	42,4	53,6
Calcular a equação geral de um plano	66,7	78,6	30,3	21,4
Aplicar um dos métodos estudados nas aulas para resolver o sistema	75,8	67,9	21,2	28,6
Descobrir as outras possíveis posições relativas de três planos	54,5	21,4	45,5	46,4
Descobrir as possíveis posições relativas de dois planos	57,6	39,3	33,3	35,7
Efetuar no <i>software</i> as representações gráficas em \mathbb{R}^3	57,6	60,7	39,4	35,7
Resolver sistemas utilizando o <i>solucionador de equações do software</i>	72,7	64,3	24,2	32,1
Interpretar os resultados obtidos no <i>software</i>	75,8	64,3	21,2	32,1
Relacionar a representação gráfica com o tipo de sistema	63,6	67,9	33,3	32,1
Realizar a apresentação em <i>PowerPoint</i>	84,8	75,0	12,1	25,0

Quanto à opinião sobre a tarefa proposta, pode-se constatar que em ambos os cursos, mais de 75% dos alunos considera que ela foi motivadora, e que os chamou a atenção para o facto de poderem observar aspetos matemáticos no meio envolvente (ver Figura 5).

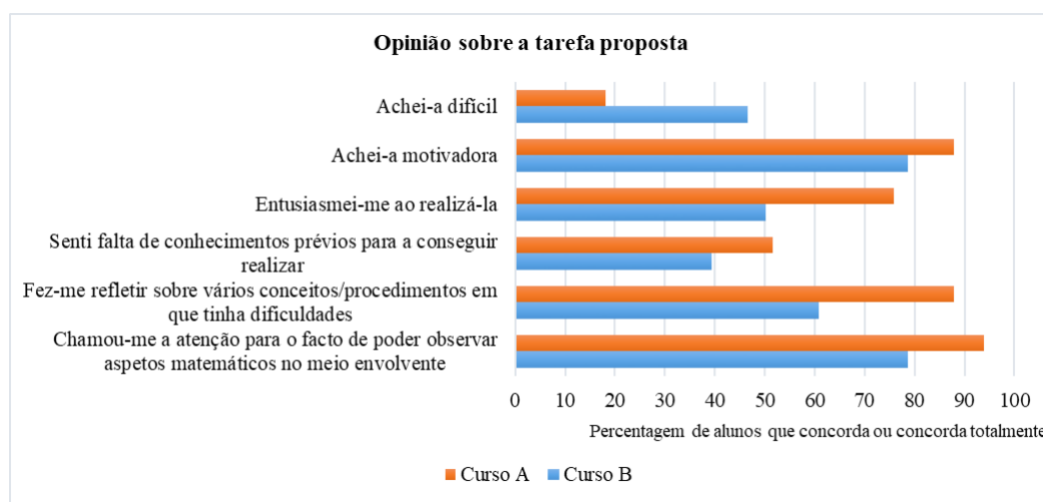


Figura 5: Percentagem de alunos que concorda ou concorda totalmente com os itens referentes à opinião sobre a tarefa proposta.

Relativamente ao grupo e ao trabalho desenvolvido, no geral os alunos consideram que houve coordenação entre os elementos do grupo e que tiveram uma participação ativa na resolução da tarefa (ver Figura 6), sendo estes aspetos mais enfatizados no caso do

curso A. Porém há ainda uma percentagem significativa de alunos (inferior a 50% no curso A, mas que excede os 50% no curso B) que considera ter sido complicado acabar o trabalho extra-aula ou por dificuldades em termos de resolução ou por questões de organização do próprio grupo (aspeto também observado por Barros, 2018).

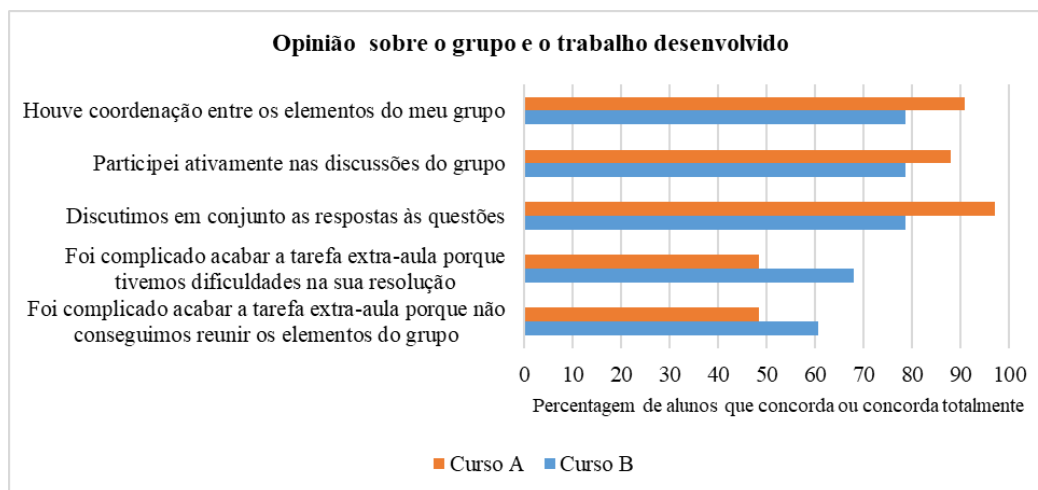


Figura 6: Percentagem de alunos que concorda ou concorda totalmente com os itens referentes à opinião sobre o grupo e o trabalho desenvolvido.

Já no que diz respeito ao *software Microsoft Mathematics*, constata-se que a sua utilização foi vantajosa para os alunos de ambos os cursos, destacando-se as vantagens (mais de 75% dos alunos concorda ou concorda totalmente) do ponto de vista motivacional, o aspeto de confirmação das resoluções e o contributo para entender a relação entre as representações gráfica e algébrica (ver Figura 7).

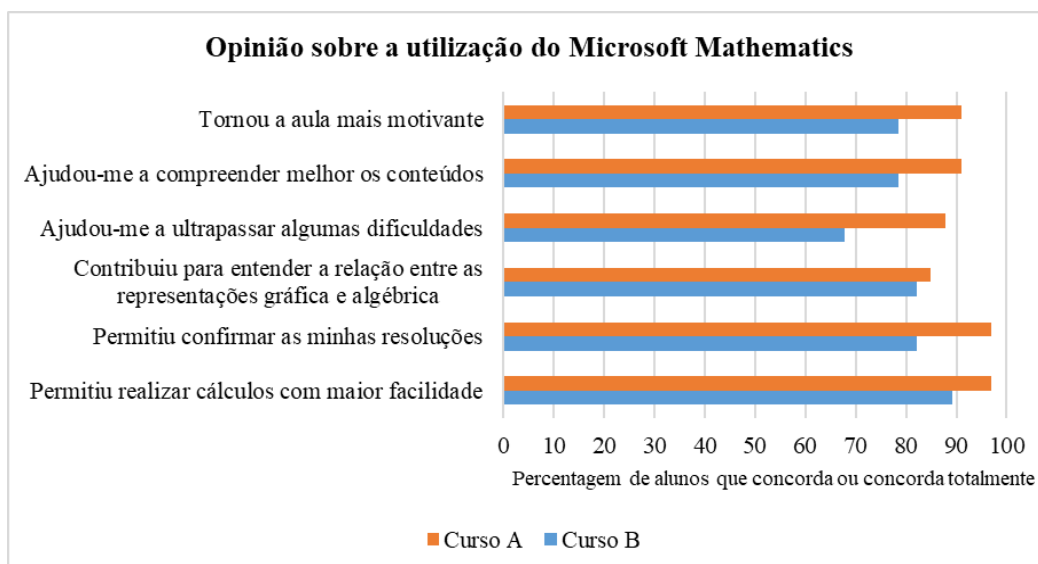


Figura 7: Percentagem de alunos que concorda ou concorda totalmente com os itens referentes à opinião sobre a utilização do *software Microsoft Mathematics*.

Fazendo o balanço relativo à realização da tarefa, houve ainda alunos que referiram alguns dos aspetos que lhe agradaram mais, focando os benefícios de terem trabalhado

em grupo, de terem utilizado o *software* ou da tarefa se reportar a algo que existe em termos reais. Assim, apresentam-se alguns comentários do Curso A: “Compartilhar conhecimento com os meus colegas em grupo onde todos discutem”, “O uso de um programa informático no apoio à realização da ficha prática”, “Poder fazer um trabalho avaliativo com outros colegas, podendo entreajudar-nos”, “Poder aplicar os conceitos matemáticos em algo concreto (escultura)” e do Curso B: “Aprendi a trabalhar com o *Microsoft Mathematics* e prefiro os trabalhos do que os exames”, “A utilização de uma ferramenta neste caso o *Microsoft Mathematics*, que vai ser útil na resolução de exercícios”, “A oportunidade de ver a matemática no dia a dia, o processo de criação dos planos foi muito divertido”, “A cooperação do grupo em apresentar o trabalho”.

Os aspetos que agradaram menos, prendem-se com as “dificuldades em reunir os elementos do grupo extra-aula”, o facto de ter de se realizar “a apresentação do trabalho à turma” ou “o tempo para a execução da tarefa” (Cursos A e B), que na perspetiva dos alunos não foi suficiente.

6 Conclusões

Em termos gerais, pode-se considerar que a tarefa proposta foi um incentivo para que os alunos tivessem uma participação mais ativa na procura do conhecimento e permitiu trabalhar conceitos relativos aos sistemas de equações lineares do ponto de vista gráfico e analítico, como é recomendado por Cutz (2005) e Dundar et al. (2012). De realçar que as opiniões dos alunos, remetem para uma apreciação favorável deste tipo de tarefas pois a maioria concorda ou concorda totalmente que, entre outras vantagens, a tarefa proposta foi motivadora e os ajudou a refletir sobre vários conceitos/procedimentos em que tinham dificuldades, assim como consideram que o *Microsoft Mathematics*, os ajudou a compreender melhor os conteúdos e contribuiu para que entendessem a relação entre as representações gráfica e algébrica. Fazendo o balanço da experiência realizada do ponto de vista da melhoria do ensino e aprendizagem da álgebra linear pode-se concluir que, como referiu um dos alunos, “devíamos fazer mais tarefas como esta”.

7 Referências

- Alcará, A. R., & Guimarães, S. E. R. (2007). A instrumentalidade como uma estratégia motivacional. *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)*, 11(1), 165-178.
- Aydin, S. (2009). The factors effecting teaching linear álgebra. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 1(1), 1549-1553.
- Barros, P. M. (2018). *O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico* (Tese de doutoramento, Universidade do Minho). Disponível em <http://hdl.handle.net/1822/56688>
- Berman, A., & Okubo, K. (2015). Issues surrounding teaching linear álgebra. In S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 593-595). Springer Open.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.
- Carlson, D., Johson, C. R., Lay, d.C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.

- Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: As pesquisas brasileiras na década de 90* (Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de S. Paulo).
- Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear* (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará).
- Cutz, B. M. (2005). *Un estudio acerca de las concepciones de estudiantes de licenciatura sobre los sistemas de ecuaciones y su solución* (Dissertação de mestrado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México).
- Day, J., & Kalman, D. (1999). *Teaching linear algebra: What are the questions?* Disponível em www.american.edu/academic.depts/cas/mathstat/People/kalman/pdffiles/questions.pdf.
- Diković, L. (2007). Interactive learning and teaching of linear algebra by web technologies: Some examples. *The Teaching of Mathematics*, 10(2), 109-116.
- Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.
- Dundar, S., Gokkurt, B., & Soyulu, Y. (2012). The efficiency of visualization through geometry at mathematics education: A theoretical framework. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 46, 2579-2583.
- Lourenço, A. A., & Paiva, M. O. A. (2010). A motivação escolar e o processo de aprendizagem. *Ciências & Cognição*, 15(2), 132-141.
- Menezes, L., Gomes, H., Ribeiro, A., Martins, A. P., Flores, P., Viseu, F., Oliveira, A. M., Matos, I. A., Balula, J. P., & Delplancq, V. (2017). *Humor no ensino da matemática: Tarefas para a sala de aula*. Viseu: Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viseu.
- Monteiro, A. (2001). *Álgebra linear e geometria analítica*. Lisboa: MacGraw- Hill.
- Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico* (Tese de doutoramento, Universidade Complutense de Madrid).
- Pires, M., & Marques, M. (2009). Integrating technologies in linear algebra lectures. In A. Méndez-Vilas, A. Solano Martín, J. A. Mesa González, & J. Mesa González (Eds.), *Research, Reflections and Innovations in Integrating ICT in Education* (pp. 392-396). Badajoz, Spain: FORMATEX.
- Rosso, A. E., & Barros, J. C. (2013). Entramado de languages en algebra lineal. In *Actas do VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1156-1163). Montevideo, Uruguai: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.
- Veríssimo, L. (2013). Motivar os alunos: motivar os professores: faces de uma mesma moeda. In J. Machado & J.M. Alves (Orgs.), *Melhorar a escola – Sucesso escolar, disciplina, motivação, direção de escolas e políticas educativas* (pp. 73-90). Porto: Faculdade de Educação e Psicologia da Universidade Católica Portuguesa/Centro de Estudos em Desenvolvimento Humano (CEDH) & Serviço de Apoio à Melhoria das Escolas (SAME).