



Escola de Ciências da Universidade do Minho

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia

Simulação do Escoamento Não-Isotérmico
de Fluidos Não-Newtonianos
em Canais Convergentes/Divergentes

Carla Sofia Veiga Fernandes

Julho de 2003



Escola de Ciências da Universidade do Minho

Departamento de Matemática para a Ciência e Tecnologia

Simulação do Escoamento Não-Isotérmico
de Fluidos Não-Newtonianos
em Canais Convergentes/Divergentes

Carla Sofia Veiga Fernandes

*Dissertação de Mestrado em Matemática e Aplicações à Mecânica
apresentada para a obtenção do grau de Mestre.*

*Trabalho realizado sob orientação de:
Doutor João Maia e Doutor Jorge Figueiredo.*

Julho de 2003

Agradecimentos

Ao longo deste trabalho muitos foram os que com um gesto ou palavra amiga me incentivaram e ajudaram a chegar a bom porto, a todos eles obrigada.

Quero agradecer aos meus orientadores, Doutor João Maia e Doutor Jorge Figueiredo, o incentivo e apoio científico prestado ao longo destes meses.

Ao Eng. Miguel Nóbrega, a simpatia, disponibilidade e excelente apoio na fase computacional deste trabalho.

À Eng. Isabel Afonso, a amabilidade, simpatia e disponibilidade com que sempre me acolheu.

À Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Bragança, os apoios concedidos durante a realização deste trabalho.

Aos meus pais e irmão, o carinho com que sempre me apoiaram apesar da distância.

Ao Ricardo, este e tantos outros caminhos percorridos.

Sumário

Este trabalho teve como objectivo simular numericamente o escoamento em estado estacionário de iogurte no interior de um canal pertencente a um permutador de placas. A simulação consistiu na resolução simultânea de três problemas: dois de condução de calor através das placas em aço inox e um de fluxo não-isotérmico do iogurte no canal referido.

A simulação foi efectuada recorrendo ao *software* POLYFLOW, utilizando este o método de elementos finitos na resolução das equações de Navier-Stokes.

Na fase inicial do trabalho construiu-se o domínio geométrico do problema, sendo este constituído por três elementos tridimensionais: placa superior, placa inferior e canal por elas delimitado. As placas apresentavam um conjunto de corrugações, tendo-se definido a sua geometria recorrendo a uma função sinusoidal.

Posteriormente, efectuou-se a discretização do domínio, obtendo-se uma malha com um total de 161474 elementos (tetraédricos, hexaédricos, prismas e pirâmides) e 34373 nós.

O iogurte apresentava um comportamento Não-Newtoniano, sendo a sua viscosidade descrita pelo produto da lei da potência e lei de Arrhenius. Devido ao baixo valor do índice de fluxo e alto valor da energia de activação, estes parâmetros conduziam a dificuldades na convergência das simulações efectuadas.

Para a resolução das dificuldades de convergência citadas, utilizou-se o método das iterações de Picard no respeitante ao índice de fluxo e um processo evolutivo na energia de activação.

Foi utilizada como condição de fronteira um fluxo de calor variável ao longo das placas para descrever o calor perdido pelo iogurte ao longo das mesmas. Esta condição fronteira foi deduzida recorrendo a dados experimentais.

Os dados experimentais disponíveis, nomeadamente temperatura do iogurte à saída do canal, permitiram verificar a validade dos pressupostos considerados nas simulações.

Abstract

This work aimed to simulate yogurt steady-state flow on a channel belonging to a plate heat exchanger. Three problems were numerically solved simultaneously : two problems of heat conduction in the plates and a problem of non-isothermal flow in the referred channel.

The simulation was carried out recurring to the software POLYFLOW, wich uses the finite element method to solve the Navier-Stokes equations.

The geometrical domain was created, being constituted by three three-dimensional components: superior plate, inferior and channel formed by the plates. It was implemented a sinusoidal function to describe the corrugation of the plates.

A mesh constituted by tetrahedral, hexahedral, pyramidal and wedge elements was found appropriate, being obtained 161474 elements and 34373 nodes in the considered geometrical domain.

The yogurt had a Non-Newtonian behavior, being the viscosity described by the product of the power law and Arrhenius equation. Due to the low value of the flow behavior index and the high value of activation energy, some convergence difficulties were observed. Picard iteration method (flow behavior index) and an evolution procedure (activation energy) were used to solve the referred problems.

A variable heat flux along the plates was used as thermal boundary condition, being established recurring to experimental data.

The available experimental data, namely the outflow yogurt temperature, allowed to verify the validity of the established simulation method.

Nomenclatura

| | |
|------------------------|---|
| A | Tensor Cartesiano de 2 ^a Ordem |
| A | Área de Transferência de Calor (m ²) |
| a | Parâmetro característico do material |
| a_{ij} | Componente do Tensor A |
| A_p | Área da parede (m ²) |
| a_p | Amplitude da Corrugação (m) |
| B | Tensor de Finger |
| C | Tensor de Cauchy-Green |
| C_p | Capacidade Calorífica (Jkg ⁻¹ K ⁻¹) |
| 2D | Tensor das Taxas de Deformação (s ⁻¹) |
| De | Número de Deborah |
| E_a | Energia de Activação (Jmol ⁻¹) |
| E_c | Energia Cinética (J) |
| E_i | Energia Interna (J) |
| e_p | Espessura da Parede (m) |
| F | Tensor dos Gradientes de Deformação |
| f | Factor de Fanning |
| f^(r) | Forças Aplicadas a um Corpo (N) |
| G | Módulo de Relaxação (Pa) |
| G* | Módulo de Relaxação Complexo (Pa) |
| G' | Módulo de Rigidez (Pa) |
| G'' | Módulo de Dissipação (Pa) |
| H | Calor Gerado no Interior do Corpo (W) |
| h | Coefficiente Convectivo de Transferência de Calor (Wm ⁻² K ⁻¹) |
| I_A | 1 ^o Invariante do Tensor A |
| II_A | 2 ^o Invariante do Tensor A |
| III_A | 3 ^o Invariante do Tensor A |

| | |
|---------------|---|
| J | Módulo de Susceptibilidade Mecânica (Pa^{-1}) |
| k_1, k_2 | Índices de Consistência do material (Pa s^n) |
| \mathbf{L} | Tensor dos Gradientes de Velocidade (s^{-1}) |
| L | Altura Efectiva da Placa (m) |
| l | Largura Efectiva da Placa (m) |
| l_o | Comprimento de Onda (m) |
| M | Caudal Mássico (kg s^{-1}) |
| M_V | Caudal Volúmico (m^3s^{-1}) |
| m | Massa do Corpo (kg) |
| N_1 | 1 ^a Diferença de Tensões Normais (Pa) |
| N_2 | 2 ^a Diferença de Tensões Normais (Pa) |
| N_c | Número de Canais |
| N_p | Número Total de Placas |
| Nu | Número de Nusselt |
| n | Índice de Comportamento de fluxo |
| P | Potência das Forças Exteriores (W) |
| \mathbf{p} | Momento Linear (N s) |
| p | Pressão (Pa) |
| Pr | Número de Prandtl |
| Q | Caudal Térmico (W) |
| q | Fluxo de Calor (Wm^{-2}) |
| R | Constante dos Gases Perfeitos ($\text{JK}^{-1}\text{mol}^{-1}$) |
| Re | Número de Reynolds |
| \mathbf{T} | Tensor das Tensões Totais (Pa) |
| T | Temperatura (K) |
| \mathbf{t} | Vector Tensão (Pa) |
| Tr | Número de Trouton |
| U | Coefficiente Global de Transferência de Calor ($\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$) |
| u | Função Potencial |
| \mathbf{v} | Vector Velocidade (ms^{-1}) |
| $2\mathbf{W}$ | Tensor de Vorticidade (s^{-1}) |
| W | Função de Energia de Deformação |
| \mathbf{x} | Vector Posição (m) |

Símbolos Gregos

| | |
|------------------------|---|
| β, μ, ξ, ν | Parâmetros Estruturais característicos do material |
| γ | Deformação de Corte |
| $\dot{\gamma}$ | Taxa de Deformação de Corte (s^{-1}) |
| Δp | Queda de Pressão (Pa) |
| $(\Delta T)_m$ | Diferença Média de Temperaturas (K) |
| $(\Delta T)_{ml}$ | Diferença Média de Temperaturas Logarítmica (K) |
| ϵ | Energia Interna ($J\ kg^{-1}$) |
| ε | Deformação Extensional |
| $\dot{\varepsilon}$ | Taxa de Deformação Extensional (s^{-1}) |
| η | Viscosidade (Pa s) |
| η^* | Viscosidade Complexa (Pa s) |
| η' | Viscosidade Dinâmica (Pa s) |
| η_e | Viscosidade Extensional (Pa s) |
| η_0 | Viscosidade para Taxas de Deformação Baixas (Pa s) |
| η_∞ | Viscosidade para Taxas de Deformação Altas (Pa s) |
| λ | Condutividade Térmica ($Wm^{-1}K^{-1}$) |
| ρ | Massa Específica ($kg\ m^{-3}$) |
| σ | Tensor das Tensões (Pa) |
| σ_e | Tensão no equilíbrio (Pa) |
| σ_y | Tensão de Cedência (Pa) |
| φ | Parâmetro Estrutural característico do material |
| φ_e | Parâmetro Estrutural característico do material no equilíbrio |
| ψ_1 | 1º Coeficiente de Tensões Normais ($Pa\ s^2$) |
| ψ_2 | 2º Coeficiente de Tensões Normais ($Pa\ s^2$) |
| ϱ | Factor Correctivo da área da placa |

Sufixos

| | |
|---|---------------|
| a | Água |
| e | Entrada |
| f | Fluido Frio |
| i | Iogurte |
| q | Fluido Quente |
| s | Saída |

Conteúdo

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 1.1 | Reologia | 1 |
| 1.2 | Cálculo Tensorial em Reologia | 3 |
| 1.2.1 | Tensor | 3 |
| 1.2.2 | Valores e Vectores Próprios | 5 |
| 1.2.3 | Derivadas de um Tensor | 6 |
| 1.3 | Tensão | 6 |
| 1.4 | Deformação | 9 |
| 1.5 | Viscosidade | 11 |
| 1.5.1 | Classificação de Fluidos Não-Newtonianos | 15 |
| 1.5.2 | Modelos Matemáticos | 16 |
| 1.6 | Viscoelasticidade | 18 |
| 1.6.1 | Viscoelasticidade Linear | 20 |
| 1.6.2 | Viscoelasticidade Não-Linear | 28 |
| 2 | Escoamento em Canais Convergentes/Divergentes | 43 |
| 2.1 | Iogurte | 43 |
| 2.1.1 | Processo de Fabrico | 44 |
| 2.1.2 | Reologia do Iogurte | 45 |
| 2.2 | Transferência de Calor | 48 |
| 2.2.1 | Mecanismos de Transferência de Calor | 49 |
| 2.2.2 | Permutador de Placas | 49 |
| 2.3 | Formulação Matemática | 58 |
| 3 | Simulação Numérica Viscosa | 65 |
| 3.1 | Domínio Geométrico | 65 |
| 3.2 | Geração de Malha | 69 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3 | Condições de Fronteira | 71 |
| 3.4 | Resolução Numérica | 77 |
| 3.5 | Resultados Numéricos | 80 |
| 4 | Simulação Numérica Viscoelástica | 87 |
| 4.1 | Domínio Geométrico e Geração de Malha | 87 |
| 4.2 | Condições de Fronteira | 89 |
| 4.3 | Resolução Numérica | 89 |
| 5 | Conclusões | 92 |
| 5.1 | Conclusões | 92 |
| 5.2 | Sugestões para Trabalhos Futuros | 95 |
| | Bibliografia | 97 |
| | Apêndice A - <i>Estrutura do POLYFLOW</i> | 100 |
| | Apêndice B - <i>Resultados Numéricos</i> | 101 |

Capítulo 1

Introdução

O conhecimento comportamental dos materiais é de extrema importância em várias áreas da ciência e indústria tais como, desenvolvimento de novos produtos, projecto de unidades de produção e controlo de qualidade. É neste sentido que vários investigadores, quer académicos quer industriais, se têm interessado pela Reologia.

Devido à complexidade desta ciência, os estudos e avanços efectuados nesta área são resultado de esforços conjuntos de investigadores de várias áreas científicas como por exemplo, a Matemática, a Física, a Química e a Engenharia.

1.1 Reologia

Reologia é a ciência que estuda o escoamento e a deformação da matéria. Esta designação foi proposta pelo Professor Eugene C. Bingham, por volta de 1928, tendo sido aceite cientificamente aquando da fundação da Sociedade de Reologia Americana a 29 de Abril de 1929. Neste sentido, a Reologia pode ser encarada como uma ciência muito recente. No entanto, alguns conceitos reológicos foram abordados e estudados muito antes da sua criação formal, como se relata em seguida [1].

No século XVII, os britânicos Robert Hooke e Isaac Newton desenvolveram estudos que constituem os fundamentos de conceitos e teorias utilizados actualmente. Em 1678, Robert Hooke definiu sólido elástico como um corpo no qual a deformação é directamente proporcional à tensão, sendo este o conceito que está na base da Teoria Clássica da Elasticidade. Isaac Newton dedicou-se ao estudo do comportamento dos fluidos e em 1687 surgiu a teoria que deu origem à designação de fluido puramente viscoso ou Newtoniano: a força por unidade de área necessária para que exista escoamento é directamente proporcional ao gradiente de velocidade.

Durante um longo período de tempo, cerca de 150 anos, todos consideraram que as Leis de Hooke e Newton permitiam descrever correctamente o comportamento de qualquer material. No

século XIX começaram a surgir dúvidas, e desenvolveram-se trabalhos que permitiram concluir que existem materiais cujo comportamento difere do observado nos sólidos de Hooke e nos fluidos Newtonianos. Destes estudos surgiram conceitos como sólido viscoelástico (Wilhelm Weber, 1835) e fluido elástico (James Clerk Maxwell, 1867), ou seja, surgiram novos conceitos para caracterizar materiais que deram origem à Teoria da Viscoelasticidade Linear [2].

No início do século XX foram realizados os primeiros trabalhos respeitantes a elasticidade não linear. Zaremba (1903) estendeu a Teoria da Viscoelasticidade Linear à região não linear através da introdução de uma derivada corrotacional. Até à criação formal da Reologia, outros investigadores como Jaumann (1905) e Hencky (1929) desenvolveram trabalhos similares aos de Zaremba. Destes estudos surgiu o conceito de viscoelasticidade não-linear.

Após a criação formal desta ciência, os maiores desenvolvimentos tiveram lugar na segunda metade do século XX. Neste período foram desenvolvidas as equações constitutivas que são usadas nos nossos dias. Inicialmente surgiram os modelos diferenciais e integrais baseados na Teoria da Mecânica dos Meios Contínuos. De entre os vários estudiosos que contribuíram para a criação destes modelos podem citar-se, pelos seus trabalhos desenvolvidos na área dos modelos diferenciais, Olroyd (1950) e Giesekus (1962), e no domínio dos modelos integrais, Green e Rivlin (1957) e mais recentemente Tanner (2001).

Os modelos matemáticos existentes, baseados na mecânica dos meios contínuos, descrevem de forma bastante correcta o fluxo da maioria dos fluidos. No entanto, quando as deformações a que os fluidos estão sujeitos são elevadas tal não se verifica, pelo que se têm desenvolvido estudos no sentido de encontrar a equivalência entre estes modelos e outros que contemplem o comportamento microestrutural dos fluidos. Estes estudos têm como objectivo a obtenção de modelos que descrevam correctamente o fluxo de qualquer fluido, independentemente da deformação. Nesta área podem referir-se várias teorias: Teoria de Rede, em que Green e Tobolsky (1946) são os pioneiros; Teoria de Reptação, proposta inicialmente por Edwards (1967) e Modelos Moleculares em que pode citar-se, entre outros, o trabalho desenvolvido por Bird et al. (1987), uma vez que é o culminar de uma série de trabalhos direccionados neste sentido [1].

As matérias estudadas nesta ciência, escoamento e deformação de matéria, como fenómenos reais que são ocorrem num espaço tridimensional, pelo que é de todo o interesse considerar as três dimensões quando se pretende descrever o comportamento de um dado material, ou seja, as equações constitutivas associadas à Reologia deverão ser escritas na forma tensorial. Como tal, pode afirmar-se que para um bom entendimento dos modelos reológicos é conveniente conhecer um pouco de Cálculo Tensorial. Assim sendo, a secção seguinte tem o intuito não de dissecar o vasto campo do Cálculo Tensorial mas sim apresentar alguns conceitos tensoriais úteis para uma

melhor apreensão dos conceitos reológicos apresentados nas secções seguintes.

1.2 Cálculo Tensorial em Reologia

Para que sejam válidas, as leis físicas devem ser independentes do sistema de coordenadas usado para as descrever. É justamente o estudo das consequências deste requisito que conduz ao Cálculo Tensorial, muito difundido em várias áreas da ciência, como por exemplo a mecânica de fluidos.

1.2.1 Tensor

Apesar de independentes do referencial em que são definidas, muitas vezes é conveniente definir as grandezas físicas num sistema de coordenadas adequado. Matematicamente estas grandezas são representadas por *tensores*.

Quando o espaço em que estas grandezas são definidas é tridimensional os tensores utilizados são de segunda ordem e podem ser definidos como se enuncia em seguida [3, p. 41].

Definição 1.1 *Um tensor de 2ª ordem cartesiano é uma entidade que pode ser representada por uma matriz real (3×3) em qualquer sistema de coordenadas cartesianas com a seguinte característica: se a matriz $[a_{ij}]$ é a representação da entidade num sistema x_i e $[a'_{ij}]$ é a representação da entidade no sistema x'_i , então a_{ij} e a'_{ij} obedecem às seguintes regras de transformação:*

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= \alpha_{ip}\alpha_{jq}a_{pq}, \\ a_{ij} &= \alpha_{pi}\alpha_{qj}a'_{pq}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde os α 's representam os cosenos directores e são os elementos da matriz transformação. Então, a_{ij} e a'_{ij} designam-se componentes de um tensor cartesiano de 2ª ordem nos sistemas x_i e x'_i , respectivamente. ■

De acordo com algumas propriedades dos tensores estes podem ser classificados como se enuncia de seguida.

Um tensor \mathbf{A} diz-se *invertível* se existir um tensor \mathbf{A}^{-1} tal que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{1.2}$$

sendo \mathbf{A}^{-1} o inverso do tensor \mathbf{A} [3, p. 70].

Se um tensor \mathbf{A} é invertível e $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, o tensor \mathbf{A} denomina-se *ortogonal*. Assim, um tensor

\mathbf{A} diz-se ortogonal se e só se [3, p. 70]:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (1.3)$$

Um tensor \mathbf{A} diz-se *definido positivo* se

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A}\mathbf{a} > 0, \quad (1.4)$$

qualquer que seja o vector \mathbf{a} não nulo [3, p. 94].

Relativamente aos tensores utilizados em Reologia, deve ainda referir-se uma característica que estes possuem - simetria.

Um tensor \mathbf{A} diz-se *simétrico* quando a troca das suas linhas pelas suas colunas não o altera, isto é, se \mathbf{A} é simétrico então $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Caso $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ o tensor \mathbf{A} denomina-se *anti-simétrico*.

Para qualquer tensor \mathbf{A} , pode escrever-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T, \\ (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}^T - \mathbf{A} = -(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T), \end{aligned}$$

de onde se conclui que o tensor $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ é sempre simétrico e o tensor $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$ é sempre anti-simétrico.

Recorrendo a estes tensores, o tensor \mathbf{A} pode ser representado através da expressão:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{sym(\mathbf{A})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{skw(\mathbf{A})}, \quad (1.5)$$

ou seja, qualquer tensor pode ser escrito como a soma das suas partes simétrica, $sym(\mathbf{A})$, e anti-simétrica, $skw(\mathbf{A})$ [3, p. 73].

Outro resultado importante quanto à representação de um tensor denomina-se Teorema da Decomposição Polar e permite escrever um tensor como o produto de outros, como se constata através do seu enunciado, Teorema 1.1 [3, p. 97].

Teorema 1.1 (Teorema da Decomposição Polar) *Qualquer tensor invertível \mathbf{A} pode ser representado na forma*

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{Q},$$

onde \mathbf{Q} é um tensor ortogonal e \mathbf{U} e \mathbf{V} são tensores simétricos definidos positivos tais que $\mathbf{U}^2 = \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ e $\mathbf{V}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Sendo esta representação única. ■

1.2.2 Valores e Vectores Próprios

A multiplicação de um tensor \mathbf{A} por um vector \mathbf{v} é o vector $\mathbf{A}\mathbf{v}$. Um caso de grande interesse é aquele em que $\mathbf{A}\mathbf{v}$ é colinear com \mathbf{v} , pois nesse caso pode escrever-se a equação (1.6) para qualquer real λ ,

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.6)$$

Um vector \mathbf{v} com esta propriedade designa-se *vector próprio ou vector principal de \mathbf{A}* , a sua direcção corresponde à *direcção principal de \mathbf{A}* e o valor real λ denomina-se *valor próprio ou valor principal de \mathbf{A}* .

A existência de valores e vectores próprios é garantida pelo Teorema 1.2 [3, p. 84].

Teorema 1.2 *Um número λ é valor próprio de um tensor \mathbf{A} se e só se for uma raiz real da equação cúbica:*

$$\lambda^3 - I_{\mathbf{A}}\lambda^2 + II_{\mathbf{A}}\lambda + III_{\mathbf{A}} = 0. \quad \blacksquare \quad (1.7)$$

A equação (1.7) denomina-se equação característica de \mathbf{A} e os seus coeficientes, $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ e $III_{\mathbf{A}}$, são escalares denominados 1° , 2° e 3° *invariantes principais de \mathbf{A}* , respectivamente, e podem ser determinados através das equações introduzidas em seguida.

$$I_{\mathbf{A}} = \text{tr}\mathbf{A}, \quad (1.8)$$

$$II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}\mathbf{A})^2 - \text{tr}\mathbf{A}^2 \right], \quad (1.9)$$

$$III_{\mathbf{A}} = \frac{1}{6} \left[(\text{tr}\mathbf{A})^3 + 2\text{tr}\mathbf{A}^3 - 3\text{tr}\mathbf{A}^2(\text{tr}\mathbf{A}) \right] = \det \mathbf{A}. \quad (1.10)$$

Como o próprio nome indica, estes escalares têm sempre o mesmo valor, independentemente do sistema de coordenadas utilizado para definir \mathbf{A} .

No caso de tensores simétricos, existe ainda um resultado que garante que estes possuem três valores próprios, distintos ou não, como se pode verificar através do Teorema 1.3 [3, p. 87].

Teorema 1.3 *Se \mathbf{A} é um tensor simétrico, então as três raízes da equação característica de \mathbf{A} são reais, e \mathbf{A} tem exactamente três valores próprios, podendo ou não ser distintos.* \blacksquare

Do Teorema 1.2 obtém-se um resultado bastante importante que permite afirmar que qualquer tensor satisfaz a sua própria equação característica. Este resultado designa-se Teorema de Cayley-Hamilton [3, p. 93] e o seu enunciado encontra-se em seguida.

Teorema 1.4 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Para qualquer tensor \mathbf{A} :*

$$\mathbf{A}^3 - I_{\mathbf{A}}\mathbf{A}^2 + II_{\mathbf{A}}\mathbf{A} + III_{\mathbf{A}}\mathbf{I} = 0, \quad (1.11)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. ■

1.2.3 Derivadas de um Tensor

A descrição de um processo de deformação num fluido envolve necessariamente a consideração do tempo. Num fluido há essencialmente duas maneiras possíveis de descrever a evolução da sua deformação: *descrição espacial* ou *Euleriana*, e *descrição material* ou *Lagrangeana*. Na descrição material é fixada uma partícula e acompanha-se o seu movimento. A descrição espacial é obtida fixando um ponto e verificando o que se passa nesse ponto ao longo do tempo.

Dependendo da descrição utilizada para caracterizar a deformação têm-se derivadas em ordem ao tempo distintas: *derivada espacial*, que corresponde à derivada parcial em ordem ao tempo e pode ser expressa por $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, e *derivada material*,

$$\frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \dot{\mathbf{A}}. \quad (1.12)$$

Em Reologia deve ainda fazer-se referência a uma outra derivada, a *derivada convectiva superior*,

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.13)$$

Neste caso, o referencial no qual é definida a derivada temporal é especial pois está embutido no corpo que está sujeito a deformação e deforma-se com ele [4, p. 55].

1.3 Tensão

Uma vez que a Reologia é o estudo do escoamento e deformação, tensão e deformação são duas grandezas que assumem um lugar de destaque nesta ciência. Nesta secção será abordado o conceito de tensão, enquanto o de deformação será abordado na secção seguinte.

Um material pode estar sujeito a dois tipos de forças muito distintos: forças superficiais e forças internas. As forças internas actuam sobre qualquer porção do material, logo sobre todo o volume do corpo, enquanto as outras actuam sobre a superfície.

As forças superficiais são as responsáveis pelo movimento e deformação do corpo e são contabilizadas sob a forma de uma grandeza definida como força por unidade de área. Esta grandeza física designa-se *tensão* [5, p. 39].

Para um melhor entendimento do conceito de tensão, considere-se um corpo sujeito a uma força \mathbf{f} conforme representado na Figura 1.1a. Se se efectuar um corte desse corpo utilizando um plano que passa pelo ponto P e cuja normal é $\hat{\mathbf{n}}$, pode afirmar-se que nesse plano actua uma força

\mathbf{f}_n , que é a componente da força \mathbf{f} nessa direcção e \mathbf{t}_n é o vector tensão que actua nesta superfície de P (Figura 1.1b) [6, p. 8].

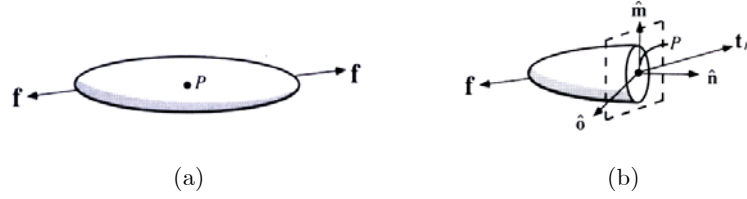


Figura 1.1: (a) Corpo submetido a uma força f ; (b) Vector tensão [6, p. 9].

O vector tensão pode escrever-se sob a forma:

$$\mathbf{t}_n = \hat{\mathbf{n}}T_{nn} + \hat{\mathbf{m}}T_{nm} + \hat{\mathbf{o}}T_{no}, \quad (1.14)$$

onde T_{nn} , T_{nm} e T_{no} são as componentes do vector. O 1º índice de cada componente refere-se ao plano no qual ela actua e o 2º à sua direcção nesse plano.

No entanto, para que o estado de tensão de um ponto esteja totalmente definido não é suficiente considerar este vector. Para tal têm de se ter em conta os três planos perpendiculares que passam por P, isto é, devem conhecer-se os vectores de tensão que actuem nos planos cujas normais são as representadas na Figura 1.1b: $\hat{\mathbf{n}}$, $\hat{\mathbf{m}}$ e $\hat{\mathbf{o}}$.

As componentes dos vectores \mathbf{t}_n , \mathbf{t}_m e \mathbf{t}_o constituem as linhas do *tensor das tensões totais*, \mathbf{T} , entidade que permite descrever totalmente o estado de tensão de um ponto.

Considerando o sistema de coordenadas $\{x, y, z\}$, os vectores de tensão são os representados na Figura 1.2a - \mathbf{t}_x , \mathbf{t}_y e \mathbf{t}_z . Neste caso, as componentes do tensor das tensões totais são as indicadas na Figura 1.2b e o tensor é:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{componentes de } \mathbf{t}_x \\ \rightarrow \text{componentes de } \mathbf{t}_y \\ \rightarrow \text{componentes de } \mathbf{t}_z \end{array}$$

Em Reologia é usual utilizarem-se índices numéricos, pelo que a representação mais comum do tensor \mathbf{T} é:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix},$$

onde os elementos da diagonal principal, T_{ii} ($i=1, 2, 3$), se designam por *tensões normais* e os restantes elementos, T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), são denominados *tensões de corte*. Relativamente a estas

tensões pode estabelecer-se a relação $T_{ij} = T_{ji}$ uma vez que \mathbf{T} é um tensor simétrico.

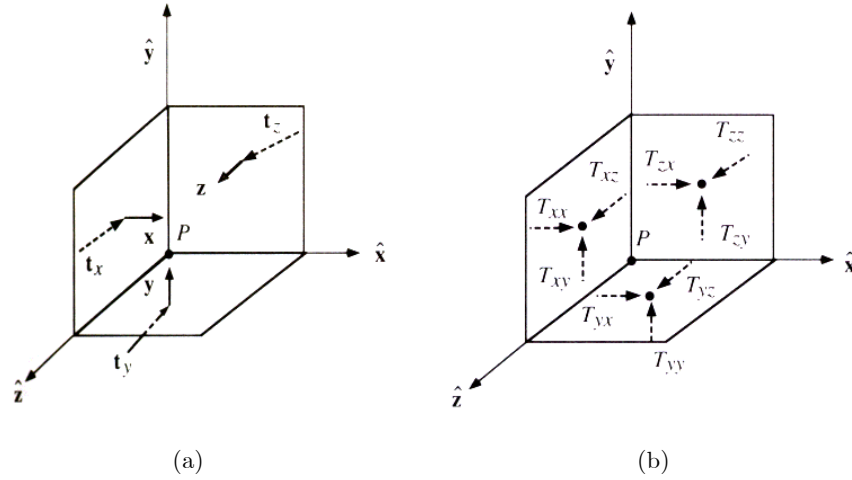


Figura 1.2: (a) Vectores tensão ; (b) Componentes do tensor das tensões totais [6, p. 9].

Quando um fluido está em repouso, a única tensão a que está sujeito é a pressão hidrostática, p , [5, p. 40] logo, o tensor das tensões totais é dado por:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I}, \quad (1.15)$$

ou seja, estes fluidos possuem apenas tensões normais: $T_{11} = T_{22} = T_{33} = -p$.

No caso de fluidos em movimento, terão de se considerar os efeitos da deformação do material, pelo que o tensor das tensões totais para um fluido em movimento é:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}, \quad (1.16)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o *tensor das tensões*.

Geralmente, as equações constitutivas são escritas não em função de \mathbf{T} , mas de $\boldsymbol{\sigma}$. No entanto, as medições experimentais de tensão dizem respeito a \mathbf{T} , pelo que é conveniente eliminar a pressão da expressão de $\boldsymbol{\sigma} = f(\mathbf{T})$ resultante da equação (1.16). Com esse intuito foram definidas duas grandezas - 1ª e 2ª *diferenças de tensões normais* - definidas pelas expressões (1.17) e (1.18), respectivamente,

$$N_1 = T_{11} - T_{22} = \sigma_{11} - \sigma_{22}, \quad (1.17)$$

$$N_2 = T_{22} - T_{33} = \sigma_{22} - \sigma_{33}. \quad (1.18)$$

A 1ª diferença de tensões normais, N_1 , é sempre positiva e considera-se que o seu valor é aproximadamente dez vezes maior que o da 2ª diferença de tensões normais, N_2 [7, p. 16].

1.4 Deformação

Designa-se por *deformação* a transformação de um corpo material a partir de uma configuração inicial (não deformada) até atingir uma configuração corrente (deformada) [3, p. 167].

Considere-se que a configuração deformada é descrita pelas coordenadas x_i e atingida num instante de tempo t , enquanto a configuração não deformada é descrita pelas coordenadas x'_j e diz respeito a um instante de tempo t' .

Para que o estado de deformação em cada ponto fique totalmente definido é conveniente definir uma grandeza análoga à apresentada para a tensão. Essa grandeza designa-se *tensor dos gradientes de deformação*, \mathbf{F} , e é dado por:

$$\mathbf{F} = \nabla' \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}'}. \quad (1.19)$$

A equação (1.19) pode escrever-se, em termos de componentes, na forma:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (1.20)$$

Da expressão (1.20) pode concluir-se que o tensor \mathbf{F} tem nove componentes de magnitude $\frac{\partial x_i}{\partial x'_j}$, e duas direcções para cada uma delas.

Este tensor descreve a variação de orientação e forma de um elemento material entre duas configurações, pois para um ponto material x que na configuração inicial ocupava a posição \mathbf{x}' tem-se [4, p. 52]:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{x}'. \quad (1.21)$$

Assim, este tensor não é o adequado para descrever a deformação, pois também contabiliza a rotação de um corpo rígido. De modo a eliminá-la surgiram os tensores de Finger, \mathbf{B} , e de Cauchy-Green, \mathbf{C} .

Por forma a evidenciar a ideia de estiramento e rotação presentes em \mathbf{F} , este tensor pode ser escrito sob a forma do produto de dois tensores \mathbf{V} e \mathbf{R} de acordo com o Teorema 1.1:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (1.22)$$

onde \mathbf{V} diz respeito ao estiramento e \mathbf{R} está associado à rotação.

Multiplicando \mathbf{F} pelo seu transposto, e tendo em conta que $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$, uma vez que \mathbf{R} é ortogonal, obtém-se um tensor que não contabiliza a rotação, como se pode ver através da expressão

(1.23).

$$\begin{aligned}\mathbf{FF}^T &= (\mathbf{VR})(\mathbf{VR})^T \\ &= \mathbf{VRR}^T\mathbf{V}^T \\ &= \mathbf{VV}^T\end{aligned}\tag{1.23}$$

O tensor assim obtido permite definir a deformação em termos de variação local de área e denomina-se *tensor de Finger*, \mathbf{B} , [6, p. 29]

$$\mathbf{B} = \mathbf{FF}^T.\tag{1.24}$$

A deformação pode ainda ser expressa em termos de variação de comprimento. Neste caso, o tensor que a descreve é o *tensor de Cauchy-Green*, \mathbf{C} , que é dado por [6, p. 30]:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}.\tag{1.25}$$

Muitas vezes, as equações constitutivas relacionam não a tensão e deformação mas sim tensão e gradientes de velocidade, pelo que é conveniente ter conhecimento das grandezas tensoriais que representam este gradiente.

Gradiente de Velocidade

A velocidade de um fluido é, regra geral, função do espaço e tempo, ou seja,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t).$$

Quando se está perante um escoamento em estado estacionário, que constitui a maioria dos problemas reológicos, a velocidade é independente do tempo, ou seja, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$. Assim, apenas faz sentido falar em gradiente espacial de velocidade [8, p. 112]:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{x}\tag{1.26}$$

ou,

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L}d\mathbf{x},\tag{1.27}$$

onde \mathbf{L} é o *tensor de gradiente de velocidade*. Por comparação das equações (1.26) e (1.27) conclui-

se que \mathbf{L} é dado por,

$$\mathbf{L} = (\nabla \mathbf{v})^T, \quad (1.28)$$

que em termos de componentes se pode escrever na forma:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (1.29)$$

Este tensor pode ser decomposto nas suas partes simétrica e anti-simétrica, de acordo com a equação (1.5) [8, p. 112]:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ &= D_{ij} + W_{ij}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

O tensor simétrico, \mathbf{D} , caracteriza a taxa de deformação a que o material é submetido, enquanto que o anti-simétrico, \mathbf{W} , dá conta da rotação angular que o corpo sofre.

De acordo com a equação (1.30) podem escrever-se as definições destes dois tensores,

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.31)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.32)$$

que podem ser reescritas sob a forma das expressões (1.33) e (1.34), respectivamente,

$$2\mathbf{D} = \mathbf{L} + \mathbf{L}^T = (\nabla \mathbf{v})^T + (\nabla \mathbf{v}), \quad (1.33)$$

$$2\mathbf{W} = \mathbf{L}^T - \mathbf{L} = (\nabla \mathbf{v}) - (\nabla \mathbf{v})^T. \quad (1.34)$$

O tensor $2\mathbf{W}$ é designado *tensor de vorticidade* e o tensor $2\mathbf{D}$ denomina-se *tensor das taxas de deformação*. O último tensor é o que descreve correctamente o estado de deformação pois contabiliza apenas o estiramento, enquanto que \mathbf{L} caracteriza simultaneamente estiramento e rotação, tal como acontece com \mathbf{F} .

1.5 Viscosidade

A *viscosidade* é considerada a propriedade reológica mais importante de qualquer material e pode ser definida como a “*resistência ao escoamento*”, ou seja, é a característica que quantifica a resistência que um fluido oferece ao escoamento.

Esta propriedade pode apresentar uma dependência significativa com a temperatura, pressão, taxa de deformação e duração da deformação imposta, isto é, do tempo.

Do ponto de vista reológico, a influência que a taxa de deformação exerce sobre a viscosidade é de todas as citadas a mais importante, pelo que serão feitas apenas breves considerações sobre as variações da viscosidade com os restantes parâmetros, dando-se maior relevância à taxa de deformação.

Varição com a Temperatura

Geralmente, a viscosidade de um líquido diminui com o aumento de temperatura de acordo com a lei de Arrhenius [7, p. 33]

$$\eta = K \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right), \quad (1.35)$$

onde η é a viscosidade, T é a temperatura absoluta, R a constante dos gases perfeitos, E_a a energia de activação de fluxo e K uma constante do material.

Varição com a Pressão

A dependência existente entre viscosidade e pressão segue uma lei exponencial em que o aumento de pressão leva a um aumento da viscosidade. No entanto, as variações verificadas na gama de pressões usada na maioria das aplicações práticas são tão diminutas que, geralmente, são ignoradas [9, p. 14].

Varição com a Taxa de Deformação

A existência ou não de uma dependência entre a viscosidade e a taxa de deformação conduz a uma separação dos fluidos viscosos, fluidos tais que $\sigma_{ij} \neq 0$ [10, p. 284], em duas classes: fluidos Newtonianos e fluidos Não-Newtonianos.

Os *fluidos Newtonianos* são definidos como os fluidos cuja viscosidade é independente da taxa de deformação e que apresentam uma relação linear entre tensão e taxa de deformação. Esta linearidade é traduzida pela Lei de Newton

$$\sigma = \eta \dot{\gamma}, \quad (1.36)$$

onde $\dot{\gamma}$ é a taxa de deformação e η é a constante de proporcionalidade, pelo que a viscosidade de fluidos Newtonianos é frequentemente designada por *coeficiente de viscosidade*.

Recorrendo ao tensor das tensões e ao tensor das taxas de deformação, o postulado de Newton

pode ser expandido para três dimensões através da expressão [6, p. 77]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta 2\mathbf{D}, \quad (1.37)$$

que pode ser reescrita em termos do tensor das tensões totais na forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta 2\mathbf{D}. \quad (1.38)$$

No entanto, para a maioria dos fluidos, a viscosidade não é um coeficiente mas sim uma função da taxa de deformação. Os fluidos que apresentam esta característica denominam-se *fluidos Não-Newtonianos* e à sua viscosidade é frequentemente atribuída a designação de *viscosidade aparente*, $\eta(\dot{\gamma})$. Para estes fluidos, a relação entre tensão e taxa de deformação pode ser expressa por uma relação análoga à equação (1.36), em que o coeficiente de proporcionalidade é substituído por uma função da taxa de deformação, $\eta(\dot{\gamma})$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}. \quad (1.39)$$

Contudo, para que o estado de deformação e tensão estejam totalmente definidos é necessário considerar o escoamento em três dimensões, como já foi referido, pelo que a equação (1.39) deve ser expandida para três dimensões [6, p. 83].

Considere-se que a tensão depende apenas da taxa de deformação,

$$\mathbf{T} = f(2\mathbf{D}). \quad (1.40)$$

Expandindo a equação (1.40) em série de potências obtém-se:

$$\mathbf{T} = f_0\mathbf{D}^0 + f_1\mathbf{D} + f_2\mathbf{D}^2 + f_3\mathbf{D}^3 + \dots, \quad (1.41)$$

onde $\mathbf{D}^0 = \mathbf{I}$ e f_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) são escalares dependentes dos invariantes do tensor $2\mathbf{D}$.

Aplicando o Teorema de Cayley Hamilton, equação (1.11), ao tensor $2\mathbf{D}$, e atendendo ao facto do 1º invariante desse tensor ser nulo tem-se:

$$(2\mathbf{D})^3 + III_{2\mathbf{D}}(2\mathbf{D}) - III_{2\mathbf{D}}\mathbf{I} = 0. \quad (1.42)$$

Resolvendo a equação (1.42) em ordem a $(2\mathbf{D})^3$ obtém-se:

$$(2\mathbf{D})^3 = III_{2\mathbf{D}}\mathbf{I} - III_{2\mathbf{D}}(2\mathbf{D}). \quad (1.43)$$

Por procedimento análogo ao apresentado para $(2\mathbf{D})^3$, pode escrever-se qualquer potência do tensor $2\mathbf{D}$ em função dos seus invariantes e dos tensores $2\mathbf{D}$ e $(2\mathbf{D})^2$, pelo que definindo novas funções escalares, η_i , também dependentes dos invariantes de $2\mathbf{D}$ ¹, a equação (1.41) pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{T} = \eta_0 (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}}) \mathbf{I} + \eta_1 (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}}) 2\mathbf{D} + \eta_2 (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}}) (2\mathbf{D})^2. \quad (1.44)$$

Para fluidos incompressíveis $\eta_0 = -p$, logo a equação (1.44) para estes fluidos toma a forma

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta_1 (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}}) 2\mathbf{D} + \eta_2 (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}}) (2\mathbf{D})^2. \quad (1.45)$$

A expressão (1.45) é a *equação constitutiva de um fluido viscoso* e quando os parâmetros η_1 e η_2 tomam os valores η e zero, respectivamente, obtém-se a equação (1.38), ou seja, a equação constitutiva de fluidos Newtonianos.

No entanto, verifica-se que o termo η_2 presente em (1.45) prevê tensões normais para escoamentos em estado estacionário, o que vai contra os resultados experimentais conhecidos. Por este motivo, este termo é usualmente desprezado e a equação (1.45) reduz-se a:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \eta (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}}) 2\mathbf{D}. \quad (1.46)$$

Surge então a necessidade de determinar as expressões de $\eta (II_{2\mathbf{D}}, III_{2\mathbf{D}})$ para definir completamente o comportamento dos fluidos Não-Newtonianos. A maioria dos trabalhos desenvolvidos neste sentido foram realizados em escoamento de corte puro pelo que $III_{2\mathbf{D}} = 0$. Assim, assume-se que η é função apenas de $II_{2\mathbf{D}}$ o que permite escrever a equação (1.46) em termos do tensor das tensões, $\boldsymbol{\sigma}$, na forma [6, p. 84]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \eta (II_{2\mathbf{D}}) 2\mathbf{D}. \quad (1.47)$$

Como se pode verificar, por comparação das equações (1.47) e (1.39), a expressão supracitada é a expansão da equação (1.39) a três dimensões. Pode ainda concluir-se que $\eta (II_{2\mathbf{D}})$ é o “responsável” pelo desvio que os fluidos Não-Newtonianos apresentam em relação à linearidade característica dos fluidos Newtonianos.

A forma como os fluidos Não-Newtonianos se desviam do comportamento dos Newtonianos difere de fluido para fluido, o que conduz à sua divisão em classes distintas, bem como a vários modelos matemáticos para descrever $\eta (II_{2\mathbf{D}})$.

¹De referir que as funções η_i são apenas função dos 2º e 3º invariantes uma vez que o 1º é constante.

1.5.1 Classificação de Fluidos Não-Newtonianos

Como foi citado anteriormente, a viscosidade de um fluido pode depender do tempo. Esta característica diz apenas respeito aos fluidos Não-Newtonianos, pelo que estes se podem dividir em duas classes: *independentes do tempo* e *dependentes do tempo*.

Os fluidos Não-Newtonianos dependentes do tempo podem ainda ser subdivididos em *fluidos tixotrópicos* e *fluidos reopéticos*. Nos primeiros verifica-se uma diminuição da viscosidade com o tempo de aplicação de uma deformação, enquanto os segundos são caracterizados por um aumento da viscosidade com o tempo [11, p. 6].

Relativamente aos fluidos Não-Newtonianos independentes do tempo podem considerar-se três classes (Figura 1.3): fluidos pseudoplásticos, dilatantes e plásticos de Bingham.

Os *fluidos pseudoplásticos* são caracterizados por uma diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de deformação, enquanto que os *dilatantes* apresentam o comportamento inverso, ou seja, a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação [4, p. 29].

Os *plásticos de Bingham* são fluidos que não escoam abaixo de um certo valor de tensão ao qual se atribui a denominação de *tensão de cedência*, σ_y .

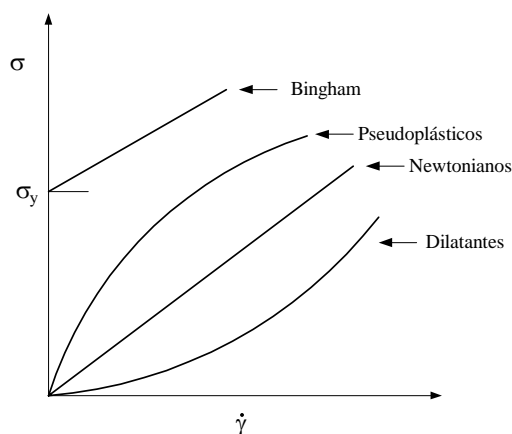


Figura 1.3: Curvas de fluxo características de fluidos independentes do tempo. (adaptado de [11, p. 3])

A maioria dos fluidos reais apresentam características pseudoplásticas. Nestes casos, a curva que descreve o comportamento da viscosidade em função da taxa de deformação é do tipo da representada na Figura 1.4.

Esta curva indica que a viscosidade assume um valor constante quer para taxas de deformação baixas, η_0 , quer para taxas de deformação elevadas, η_∞ , sendo $\eta_0 > \eta_\infty$. As regiões em que tal acontece designam-se 1ª e 2ª regiões Newtonianas, respectivamente. Estes valores limite de viscosidade, η_0 e η_∞ , desempenham um papel muito importante na descrição do comportamento reológico dos fluidos, como se pode constatar nos modelos matemáticos apresentados na secção seguinte.

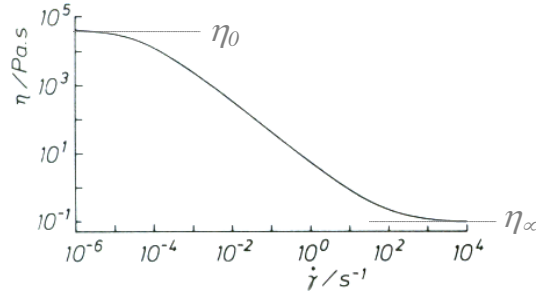


Figura 1.4: Curva de fluxo característica de um fluido pseudoplástico (η vs. $\dot{\gamma}$). (adaptado de [9, p. 17])

1.5.2 Modelos Matemáticos

Os modelos reológicos utilizados para descrever o comportamento dos fluidos Não-Newtonianos podem ser classificados em *Modelos Viscosos* e *Modelos Viscoplasticos*, de acordo com a natureza do fluido em estudo.

Modelos Viscosos

A relação constitutiva mais utilizada para descrever o comportamento de fluidos viscosos é a

Lei da Potência [6, p. 84]

$$\boldsymbol{\sigma} = k |II_{2\mathbf{D}}|^{\frac{n-1}{2}} (2\mathbf{D}), \quad (1.48)$$

onde k é o índice de consistência e n o índice de fluxo.

Esta lei é aplicada usualmente em escoamento de corte pelo que $|II_{2\mathbf{D}}| = \dot{\gamma}^2$, logo é frequente escrever-se a Lei da Potência, em termos de componentes dos tensores, sob a forma [6, p. 85]:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = k\dot{\gamma}^n. \quad (1.49)$$

A expressão (1.49), com índices de fluxo inferiores e superiores a 1, descreve o comportamento dos fluidos pseudoplásticos e dilatantes, respectivamente, e quando $n = 1$ esta lei traduz o comportamento Newtoniano.

A Lei da Potência ajusta-se de forma bastante satisfatória aos dados experimentais para valores de $\dot{\gamma}$ elevados. No entanto, para valores de $\dot{\gamma}$ baixos não descreve correctamente o comportamento dos fluidos [6, p. 85].

De modo a ultrapassar este problema surge o **Modelo de Cross** que representa correctamente as duas regiões Newtonianas e pode ser traduzido pelas equações [9, p. 18]:

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \frac{1}{1 + (k^2 |II_{2\mathbf{D}}|)^{\frac{1-n}{2}}}, \quad (1.50)$$

$$\frac{\eta_0 - \eta}{\eta - \eta_\infty} = (k^2 |II_{2\mathbf{D}}|)^{\frac{1-n}{2}}. \quad (1.51)$$

De modo a obter um melhor ajuste aos dados experimentais, Yasuda propôs outro modelo [9, p. 86]:

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{[1 + (\lambda^a |II_{2\mathbf{D}}|)]^{\frac{1-n}{a}}}. \quad (1.52)$$

Quando o parâmetro a assume o valor 2 este modelo designa-se **Modelo de Carreau**, que para escoamento de corte toma a forma:

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{[1 + (\lambda\dot{\gamma})^2]^{\frac{1-n}{2}}}. \quad (1.53)$$

Quando $\eta \ll \eta_0$ o Modelo de Cross, equação (1.51), pode escrever-se sob a forma:

$$\eta = \eta_\infty + \frac{\eta_0}{(k^2 |II_{2\mathbf{D}}|)^{\frac{1-n}{2}}}, \quad (1.54)$$

que se designa **Modelo de Sisko** e pode ser reescrita sob a forma:

$$\eta = \eta_\infty + \frac{\eta_0}{(k\dot{\gamma})^{1-n}}, \quad (1.55a)$$

$$\eta = \eta_\infty + k_2 \dot{\gamma}^{n-1}, \quad (1.55b)$$

quando se trata de um escoamento de corte [9, p. 19].

Modelos Viscopoplásticos

Um dos Modelos Viscopoplásticos mais utilizado deriva da Lei da Potência, equação (1.48), e denomina-se **Modelo de Herschel-Bulkley**. A expressão matemática que lhe está associada quando se trata de uma deformação unidimensional é [9, p. 20]:

$$\sigma = \sigma_y + k\dot{\gamma}. \quad (1.56)$$

Um exemplo dos fluidos plásticos são os plásticos de Bingham, já referidos, que após uma tensão de cedência apresentam um comportamento semelhante ao Newtoniano. Neste sentido, e admitindo que abaixo de σ_y o fluido tem um comportamento Hookeano, ou seja, a tensão é directamente proporcional à deformação, γ , o seu comportamento pode ser descrito pelo **Modelo de Bingham** [6, p. 92]

$$\begin{cases} \sigma = G\gamma & , \sigma < \sigma_y \\ \sigma = \sigma_y + k\dot{\gamma} & , \sigma \geq \sigma_y \end{cases}, \quad (1.57)$$

onde G é o módulo de rigidez.

Para deformações que ocorrem em mais do que uma direcção o Modelo de Bingham deve ser expandido a três dimensões, resultando a expressão [6, p. 93]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = G\mathbf{B} & , II_{\boldsymbol{\sigma}} < \sigma_y^2 \\ \boldsymbol{\sigma} = \left(\eta_0 + \frac{\sigma_y}{|II_{2D}|} \right) 2\mathbf{D} & , II_{\boldsymbol{\sigma}} \geq \sigma_y^2 \end{cases} . \quad (1.58)$$

Dentro dos Modelos Viscoplasticos, deve ainda referir-se o **Modelo de Casson** [6, p. 95]:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = 0 & , \sigma < \sigma_y \\ \sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_y} + \sqrt{\eta\dot{\gamma}} & , \sigma \geq \sigma_y \end{cases} , \quad (1.59)$$

uma vez que se trata de um modelo que conduz a bons ajustes aos dados experimentais existentes para diversos fluidos, como por exemplo, sangue e vários produtos alimentares.

1.6 Viscoelasticidade

Além dos fluidos referidos na secção anterior existem outros que exibem, simultaneamente, propriedades viscosas e elásticas. Estes fluidos denominam-se *viscoelásticos* e assumem um lugar de destaque, uma vez que todos os fluidos reais possuem esta característica denominada *viscoelasticidade*.

Para quantificar a viscoelasticidade de um dado material é usual recorrer-se a testes de relaxação. Estes testes consistem em impor rapidamente uma deformação ao material em estudo, γ_0 , e mantê-la constante durante um período suficientemente longo, durante o qual se regista o valor da tensão necessária para a manter. As respostas apresentadas pelos diversos materiais são bastante distintas, como se pode observar na Figura 1.5.

Relativamente aos materiais viscoelásticos verifica-se uma diminuição gradual da tensão ao longo do tempo, sendo este fenómeno designado por relaxação. Pode ainda constatar-se que entre estes a tensão relaxa até zero no caso dos líquidos, enquanto nos sólidos a tensão decai até um valor de equilíbrio $\sigma_e > 0$ [7, p. 299].

A relaxação da tensão observada pode ser expressa através do *módulo de relaxação*, G , que para pequenas deformações é definido por [6, p. 109]:

$$G(t) = \frac{\sigma(t)}{\gamma_0} . \quad (1.60)$$

Para grandes deformações, o módulo de relaxação depende não só do tempo mas também da

deformação imposta, pelo que a expressão que o define nestas condições é [6, p. 110]:

$$G(t, \gamma) = \frac{\sigma(t, \gamma)}{\gamma_0}. \quad (1.61)$$

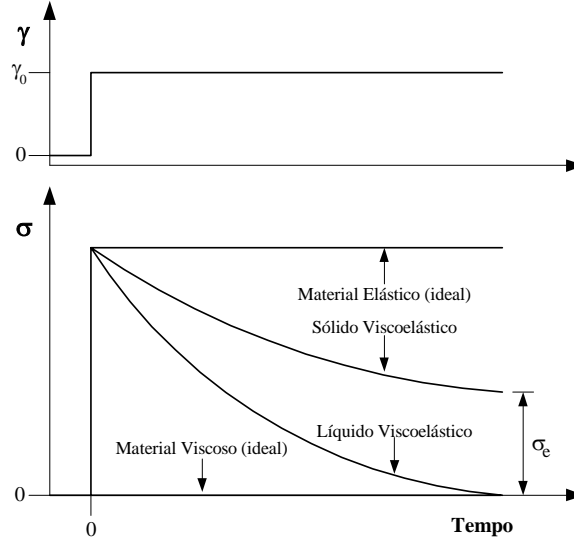


Figura 1.5: Curvas de relaxação típicas. (adaptado de [7, p. 299])

Quando a relação entre relaxação da tensão e deformação é representada pela equação (1.60), esta toma a designação de *viscoelasticidade linear*, enquanto o comportamento traduzido por (1.61) assume a denominação de *viscoelasticidade não-linear*. Estes dois conceitos serão abordados de forma mais detalhada nas Secções 1.6.1 e 1.6.2, respectivamente.

De acordo com a definição de viscoelasticidade é de todo o interesse conseguir avaliar qual dos comportamentos, elástico ou viscoso, domina num dado escoamento. Para tal, pode recorrer-se a um parâmetro adimensional, proposto por Marcus Reiner [7, p. 333], designado por *número de Deborah*, De , e que pode ser definido como:

$$De = \frac{\lambda}{t}, \quad (1.62)$$

onde t é o tempo característico do escoamento e é definido, usualmente, como o inverso da taxa de deformação, isto é, $t = (\dot{\gamma})^{-1}$, enquanto que λ é um tempo característico do material designado por *tempo de relaxação* e caracteriza a rapidez com que $\sigma \rightarrow 0$.

Quando os dois tempos são semelhantes, o material em estudo apresenta um comportamento viscoelástico acentuado, enquanto para $De \ll 1$ e $De \gg 1$ o comportamento dos materiais corresponde aos casos limite de líquidos viscosos e sólidos elásticos, respectivamente [7, p. 334].

1.6.1 Viscoelasticidade Linear

A teoria da viscoelasticidade linear apenas pode ser aplicada quando as variáveis envolvidas sofrem pequenas variações, ou seja, para pequenas deformações, o que poderia ser encarado como uma grande limitação desta teoria. No entanto, vários têm sido os investigadores a dedicar atenção a este assunto, pois os conhecimentos que advêm dos seus trabalhos mostram-se de extrema relevância. De entre eles podem citar-se: a estrutura molecular de um material pode ser sugerida a partir da sua resposta viscoelástica linear; o conhecimento de alguns parâmetros e funções materiais, determinados experimentalmente, revelam-se bastante úteis no controlo de qualidade a nível industrial e uma boa compreensão dos conceitos inerentes à viscoelasticidade linear permite um melhor entendimento da viscoelasticidade não-linear [9, p. 37].

Matematicamente, esta teoria acenta no *Princípio de Sobreposição de Boltzman*, segundo o qual a tensão num instante de tempo t pode ser determinada através da soma de todas as contribuições da deformação verificadas para tempos anteriores a t . Este princípio implica que a resposta do sistema é em cada instante de tempo directamente proporcional ao valor inicial do sinal. No caso de um teste de relaxação, a resposta do sistema é a tensão e o sinal inicial é a deformação imposta.

Modelos Matemáticos

Como já foi referido, as equações constitutivas têm como intuito caracterizar o comportamento reológico dos fluidos, estabelecendo relações entre tensão e deformação ou tensão e taxa de deformação.

De modo a estabelecer uma correlação entre tensão e deformação, Boltzman sugeriu que pequenas variações na tensão tomariam o valor do produto entre a deformação e pequenas variações do módulo de relaxação, ou seja, [6, p. 111]

$$d\sigma(t) = \gamma dG(t). \quad (1.63)$$

Por forma a caracterizar a dependência temporal dos materiais, surge uma função designada *função memória*, $M(t)$, sendo esta o simétrico da derivada temporal do módulo de relaxação,

$$M(t) = -\frac{dG}{dt}. \quad (1.64)$$

Tendo em conta esta definição, a equação (1.63) pode ser reescrita na forma:

$$d\sigma = -M\gamma dt. \quad (1.65)$$

Assim, e de acordo com as considerações iniciais, a expressão (1.65) estabelece uma relação entre tensão e deformação para materiais viscoelásticos. No entanto, apenas é válida para deformações muito pequenas, o que não é desejável. Contudo, segundo o Princípio de Sobreposição de Boltzman, se estas deformações forem somadas é possível obter-se uma maior deformação, o que permite encontrar a relação procurada, ou seja, para “grandes” deformações que ainda se situam na região de linearidade. Admitindo que G é função apenas do tempo e, conseqüentemente, M , esta relação poderá ser estabelecida através do integral:

$$\sigma = \int_0^{\sigma} d\sigma = - \int_{-\infty}^t M(t-t')\gamma(t') dt', \quad (1.66)$$

onde t' é um instante de tempo passado, pelo que está compreendido entre o infinito, $-\infty$, e o instante de tempo actual, t .

Da equação (1.66) pode concluir-se que a função memória depende apenas do tempo decorrido entre um passado recente e o presente, ou seja, $(t-t')$. Denotando este período por s , a equação anterior pode ser reescrita na forma

$$\sigma(t) = - \int_0^{\infty} M(s)\gamma(t-s) ds, \quad (1.67)$$

uma vez que,

$$s = t - t' \Leftrightarrow t' = t - s \Rightarrow dt' = -ds$$

e, atendendo à mudança de variável efectuada, os novos limites de integração tomam os valores:

$$t' = -\infty \Rightarrow s = +\infty \quad \text{e} \quad t' = t \Rightarrow s = 0.$$

Deste modo, obtém-se uma equação que estabelece a relação procurada entre σ e γ , isto é, a expressão (1.67) é uma *equação constitutiva viscoelástica unidimensional*.

Uma vez que os resultados experimentais são, habitualmente, expressos em função do módulo de relaxação, é conveniente descrever o comportamento viscoelástico em função deste parâmetro. Para tal, consideram-se pequenas variações na tensão devidas a pequenas alterações na deformação [6, p. 112]

$$d\sigma = G d\gamma. \quad (1.68)$$

Esta expressão pode ainda escrever-se na forma:

$$d\sigma = G \frac{d\gamma}{dt} dt = G \dot{\gamma} dt \quad (1.69)$$

que, por integração, conduz a uma outra relação constitutiva viscoelástica que traduz a dependência entre tensão e taxa de deformação:

$$\sigma = \int_{-\infty}^t G(t-t') \dot{\gamma}(t') dt', \quad (1.70a)$$

$$\sigma = \int_0^{\infty} G(s) \dot{\gamma}(t-s) ds. \quad (1.70b)$$

A equação (1.70b) resulta de (1.70a) por mudança de variável, $s = t - t'$.

De acordo com dados experimentais conhecidos, é plausível admitir que o módulo de relaxação pode ser expresso através de uma função exponencial, assumindo a forma [6, p. 112]:

$$G(t) = G_0 e^{-t/\lambda}. \quad (1.71)$$

Substituindo a equação (1.71) em (1.70a) obtém-se o **Modelo de Maxwell**, um dos modelos viscoelásticos lineares mais difundido, que pode ser expresso, na sua forma integral, através da expressão [6, p. 113]

$$\sigma = \int_{-\infty}^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\gamma}(t') dt'. \quad (1.72)$$

Experimentalmente, verifica-se que os ajustes obtidos a partir deste modelo não são muito correctos, apesar do comportamento qualitativo apresentado ser razoável. Com o intuito de superar esta lacuna, o modelo deve ser escrito não em termos de um único tempo de relaxação, mas sim uma série de tempos, λ_k , tendo cada um deles um determinado peso, G_k . Assim, em alternativa à equação (1.71), o módulo de relaxação pode ser calculado através da expressão:

$$G(t) = \sum_{K=1}^N G_k e^{-t/\lambda_k}. \quad (1.73)$$

Conjugando as equações (1.70a) e (1.73) obtém-se o **Modelo Generalizado de Viscoelasticidade Linear** [6, p. 113]

$$\sigma = \int_{-\infty}^t \sum_{K=1}^N G_k e^{-(t-t')/\lambda_k} \dot{\gamma}(t') dt'. \quad (1.74)$$

Como já foi citado, é conveniente considerar o espaço tridimensional para descrever o comportamento reológico de qualquer material, pois só deste modo se define completamente o estado de tensão e deformação de um corpo, pelo que os modelos viscoelásticos apresentados devem ser

expandidos a três dimensões. Recorrendo ao tensor das tensões e ao tensor das taxas de deformação, pode obter-se a expansão pretendida e, deste modo, a equação constitutiva (1.70a) pode ser escrita na forma [6, p. 115]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t G(t-t') 2\mathbf{D}(t') dt' = \int_{-\infty}^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} 2\mathbf{D}(t') dt', \quad (1.75)$$

ou seja, (1.75) é uma equação constitutiva viscoelástica tridimensional.

Por derivação do Modelo de Maxwell, equação (1.72), é possível obter uma equação diferencial que traduz igualmente a viscoelasticidade linear, como se demonstra em seguida.

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t') dt' \\ &= \frac{d}{dt} \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t') dt' \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\frac{d}{dt} \int_a^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t') dt' \right] \end{aligned}$$

Por forma a determinar a derivada material presente na equação supracitada recorre-se à *Regra de Leibnitz* [12, p. 11],

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \frac{db}{dt} f(b, t) - \frac{da}{dt} f(a, t), \quad (1.76)$$

que conduz a:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\int_a^t -\frac{1}{\lambda} G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t') dt' + \frac{dt}{dt} G_0 e^{-(t-t)/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) - \frac{da}{dt} G_0 e^{-(t-a)/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(a) \right] \\ &= G_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) - \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t') dt', \end{aligned} \quad (1.77)$$

uma vez que $\frac{da}{dt} = 0$.

Atendendo a (1.72), o resultado anterior pode ser reescrito na forma:

$$\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = G_0 \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\lambda}, \quad (1.78)$$

que ao ser multiplicado por λ conduz à relação

$$\lambda \frac{d\sigma}{dt} = \lambda G_0 \dot{\gamma} - \sigma. \quad (1.79)$$

Tendo em consideração que a área abaixo da curva de relaxação de um líquido corresponde ao valor de η_0 , ou seja, da sua viscosidade para taxas de deformação baixas, é possível escrever-se:

$$\eta_0 = \int_0^{\infty} G(t) dt = \int_0^{\infty} G_0 e^{-t/\lambda} dt.$$

Resolvendo o integral presente nesta relação vem:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a G_0 e^{-t/\lambda} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\lambda G_0 e^{-t/\lambda} \right]_0^a \\ &= \lambda G_0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Na região de linearidade pode afirmar-se que $\eta_0 \rightarrow \eta$, uma vez que as deformações e taxas de deformação em causa são pequenas, pelo que a equação (1.81) pode ser escrita sob a forma:

$$\eta = \lambda G_0. \quad (1.81)$$

Assim, por substituição de (1.81) na equação (1.79) obtém-se a forma diferencial do **Modelo de Maxwell** [6, p. 117],

$$\lambda \frac{d\sigma}{dt} = \eta \dot{\gamma} - \sigma \Leftrightarrow \sigma + \lambda \frac{d\sigma}{dt} = \eta \dot{\gamma}. \quad (1.82)$$

Que pode ser escrito, para três dimensões, sob a forma:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda \dot{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta \mathbf{D}. \quad (1.83)$$

Os modelos viscoelásticos lineares apresentados foram deduzidos em função de G , que traduz os resultados experimentais dos testes de relaxação. No entanto, de acordo com as características do material em estudo este pode não ser o teste ideal, pelo que a seguir serão apresentados, de forma sucinta, outros ensaios e as funções materiais que representam os resultados por eles obtidos.

Ensaio de Caracterização

A caracterização do comportamento reológico é um aspecto bastante importante pois é o ponto de partida para estabelecer as várias equações constitutivas, ou seja, para determinar os modelos matemáticos que melhor descrevem as relações tensão/deformação ou tensão/taxa de deformação para os diversos materiais.

Os ensaios de caracterização existentes podem ser classificados em: ensaios transitórios, ensaios dinâmicos e ensaios quase-estáticos. Os primeiros podem ainda ser divididos em testes de relaxação (descritos no início desta secção) e testes de fluência. De entre os ensaios dinâmicos há que destacar os testes oscilatórios.

Quando se pretende caracterizar a viscoelasticidade linear de um fluido é usual, como já foi citado, recorrer a *testes de relaxação*. No entanto, estes apresentam alguns problemas quando se pretende efectuar uma caracterização quer para tempos muito reduzidos quer para períodos muito longos. Limitações mecânicas dos instrumentos tornam difícil obter dados fiáveis para $t < 0,1s$, devido ao tempo necessário para a sua estabilização, o que faz com que este teste se limite à caracterização de materiais com tempos de relaxação de pelo menos alguns segundos. No que diz respeito a tempos mais elevados, torna-se complicado efectuar medições correctas uma vez que os transdutores disponíveis não possibilitam efectuar medições em mais de três décadas [6, p. 118]. Assim, torna-se necessário encontrar testes mais adequados para tempos muito curtos e muito longos.

Os *testes de fluência* são particularmente úteis para ultrapassar a lacuna existente para tempos longos. Estes ensaios consistem em impor rapidamente uma tensão uniforme, σ_0 , durante um período de tempo longo registando-se a variação da deformação com o tempo (Figura 1.6).

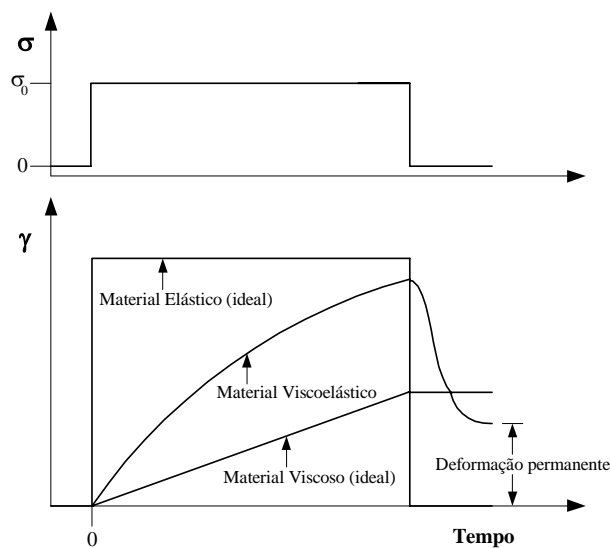


Figura 1.6: Curvas de fluência típicas. (adaptado de [7, p. 305])

Os resultados experimentais obtidos através destes testes são expressos em função do *módulo de susceptibilidade mecânica*, $J(t)$, que pode ser calculado através de [4, p. 14]

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\sigma_0}. \quad (1.84)$$

Para que seja possível utilizar os dados experimentais assim obtidos na modelação da viscoelasticidade linear, é necessário relacionar esta nova função material com o módulo de relaxação, o que não é simples.

Um outro modo de caracterizar a viscoelasticidade linear consiste em submeter o material em estudo a uma deformação que varia sinusoidalmente com o tempo, registando-se a evolução temporal da tensão. Estes ensaios estão bastante difundidos e denominam-se *ensaios oscilatórios*.

A resposta obtida nestes testes é, usualmente, uma função sinusoidal com igual frequência angular mas desfasada um ângulo δ da deformação imposta (Figura 1.7). Se a amplitude do sinal inicial for γ_0 e a frequência angular w pode escrever-se:

$$\gamma = \gamma_0 \text{sen}(wt) = \gamma_0 e^{iwt}, \quad (1.85)$$

$$\sigma = \sigma_0 \text{sen}(wt + \delta) = \sigma_0 e^{i(wt + \delta)}, \quad (1.86)$$

onde i é a unidade imaginária.

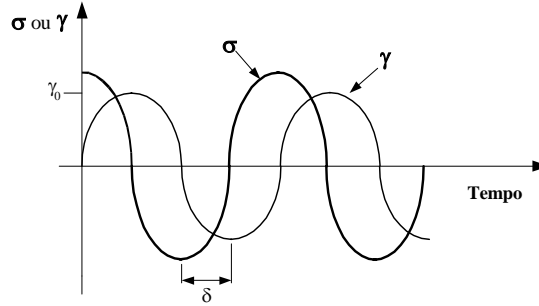


Figura 1.7: Ensaio oscilatório. (adaptado de [4, p.15])

Quando se recorre a estes testes define-se uma nova função material designada por *módulo de relaxação complexo*, G^* , que pode ser definido através de [9, p. 46]:

$$G^* = G' + iG'', \quad (1.87)$$

onde G' é o *módulo de rigidez* e G'' o *módulo de dissipação*. O primeiro diz respeito à componente elástica do material e é dado por

$$G' = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \cos(\delta), \quad (1.88)$$

enquanto G'' representa a energia dissipada por unidade de volume por ciclo de deformação, ou seja, a parte viscosa da resposta, e é dado por [7, p. 315]:

$$G'' = \frac{\sigma_0}{\gamma_0} \text{sen}(\delta). \quad (1.89)$$

Estas grandezas podem ainda ser determinadas através das equações

$$G'(w) = \frac{G\lambda^2 w^2}{1 + \lambda^2 w^2} = \frac{\eta\lambda w^2}{1 + \lambda^2 w^2}, \quad (1.90)$$

$$G''(w) = \frac{G\lambda w}{1 + \lambda^2 w^2} = \frac{\eta w}{1 + \lambda^2 w^2}, \quad (1.91)$$

se se considerar válido o Modelo de Maxwell, expressão (1.82) ou, no caso de se recorrer ao Modelo Generalizado de Viscoelasticidade Linear, equação (1.74) [6, p. 124]:

$$G'(w) = \sum_k G_k \frac{\lambda_k^2 w^2}{1 + \lambda_k^2 w^2}, \quad (1.92)$$

$$G''(w) = \sum_k G_k \frac{\lambda_k w}{1 + \lambda_k^2 w^2}. \quad (1.93)$$

Outra função material muito utilizada para caracterizar a viscoelasticidade é a $\text{tg}(\delta)$, que representa a importância relativa das respostas elástica e viscosa dos materiais.

$$\text{tg}(\delta) = \frac{G''}{G'}. \quad (1.94)$$

Em alternativa ao módulo de relaxação complexo pode recorrer-se à *viscosidade complexa*, η^* , que pode ser definida através da relação [9, p. 48]

$$\eta^* = \eta' + i\eta'', \quad (1.95)$$

onde η' é a *viscosidade dinâmica* e η'' representa a parte elástica da viscosidade complexa. Estas grandezas estão relacionadas com os módulos de rigidez e dissipação através das equações $\eta' = \frac{G''}{w}$ e $\eta'' = \frac{G'}{w}$.

O módulo de relaxação complexo e a viscosidade complexa podem ser relacionados através da sua magnitude, pois

$$|\eta^*| = \sqrt{\eta'^2 + \eta''^2} = \sqrt{\left(\frac{G''}{w}\right)^2 + \left(\frac{G'}{w}\right)^2} = \frac{1}{w} \sqrt{G'^2 + G''^2} = \frac{1}{w} |G^*|. \quad (1.96)$$

1.6.2 Viscoelasticidade Não-Linear

As equações constitutivas devem possibilitar a caracterização de qualquer escoamento, pelo que se pode afirmar que a teoria linear, abordada na secção anterior, não será a mais adequada uma vez que o seu campo de aplicação se restringe a pequenas deformações. Por este facto, vários têm sido os investigadores a procurar relações constitutivas que permitam prever fenómenos não-lineares tais como: tensões normais, pseudoplasticidade e dilatância em regime extensional, que serão descritos de forma muito sintética no início desta secção.

Como resultado de todos os estudos desenvolvidos nesta área pode encontrar-se um grande número de modelos matemáticos que podem ser divididos em: *equações constitutivas não-lineares*, *modelos diferenciais* e *modelos integrais*, que serão o alvo de estudo desta secção.

Diferença de Tensões Normais

As diferenças de tensões normais, N_1 e N_2 , foram já abordadas na Secção 1.3, e podem ser encaradas como uma consequência da não-linearidade, uma vez que na presença de pequenas deformações, região de linearidade, se verifica que as três tensões normais tomam o mesmo valor o que implica diferenças de tensões normais nulas [9, p. 55].

Para um fluido viscoelástico, em escoamento de corte, as componentes do tensor das tensões podem ser expressas como se indica em seguida.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{12} = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \\ \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} = N_1(\dot{\gamma}) \\ \sigma_{22} - \sigma_{33} = N_2(\dot{\gamma}) \end{array} \right.$$

Em alternativa às diferenças de tensões normais podem definir-se os 1º e 2º *coeficientes de tensões normais*, ψ_1 e ψ_2 , que podem ser dados pelas equações [6, p. 139]:

$$\psi_1 \equiv \frac{T_{11} - T_{22}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2}, \quad (1.97)$$

$$\psi_2 \equiv \frac{T_{22} - T_{33}}{\dot{\gamma}^2} = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2}. \quad (1.98)$$

Pseudoplasticidade

A pseudoplasticidade corresponde, como foi referido aquando da classificação dos fluidos Não-Newtonianos, a uma diminuição da viscosidade com o aumento da taxa de deformação à qual está associada uma diminuição dos coeficientes de tensões normais.

Este fenómeno é também evidente em medições temporais e pode ser expresso, para um escoamento de corte estacionário, através da relação [6, p. 140]:

$$\eta^+(t, \dot{\gamma}) = \frac{T_{12}(t, \dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}, \quad (1.99)$$

onde η^+ representa a viscosidade dependente do tempo.

De acordo com dados experimentais conhecidos pode concluir-se que os desvios de η^+ relativamente à viscosidade linear se verificam apenas quando $\dot{\gamma}$ e $\gamma = \dot{\gamma}t$ tomam valores não muito pequenos.

Usualmente, dados inerentes a viscoelasticidade linear não podem ser usados para prever comportamentos não-lineares, como foi referido no início desta secção. No entanto, em escoamento de corte constata-se serem válidas algumas relações entre funções materiais lineares e não-lineares, tais como [6, p. 141]:

$$\eta'(w)|_{w \rightarrow 0} = \eta(\dot{\gamma})|_{\dot{\gamma} \rightarrow 0}, \quad (1.100a)$$

$$\psi_1(\dot{\gamma})|_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} = \frac{N_1(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}^2} \Big|_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} = \frac{2G'(w)}{w^2} \Big|_{w \rightarrow 0}. \quad (1.100b)$$

As relações (1.100a) e (1.100b) são válidas apenas para escoamentos com taxas de deformação baixas, mas existem outras que se verifica serem válidas para taxas de deformação mais elevadas. De entre elas pode referir-se uma lei empírica denominada *Lei de Cox-Merz*,

$$\eta(\dot{\gamma}) = |\eta^*(w)| \quad , \text{ para } w = \dot{\gamma}, \quad (1.101)$$

e a *Relação de Lodge-Meissner*, [6, p. 142]

$$N_1 = \sigma_{12}\gamma. \quad (1.102)$$

Dilatância em Regime Extensional

Até ao momento todos os modelos matemáticos e considerações apresentadas foram efectuadas tendo em vista escoamentos de corte, tendo-se ignorado o escoamento extensional. Tal deve-se ao facto da maioria dos estudos desenvolvidos no sentido de encontrar equações constitutivas e mesmo classificação de fluidos serem realizados recorrendo a escoamentos de corte.

No entanto, torna-se agora oportuno tecer algumas considerações muito breves sobre escoamento extensional uma vez que uma das consequências da não-linearidade está relacionada com

ele.

Podem considerar-se três tipos básicos de escoamento extensional, ilustrados na Figura 1.8: escoamento uniaxial, planar e biaxial. No escoamento uniaxial o material é esticado numa direcção e comprimido, com igual intensidade, nas outras duas; no biaxial o material sofre estiramento em duas direcções e compressão na outra, e no planar o material é esticado numa direcção e comprimido numa segunda, mantendo-se fixa a dimensão na terceira direcção.

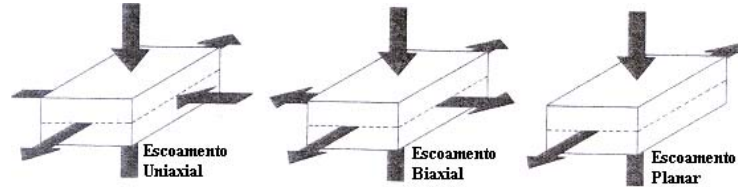


Figura 1.8: Tipos de escoamento extensional. (adaptado de [9, p. 76])

Para evitar ambiguidades, neste tipo de escoamento é usual denominar-se a viscosidade por *viscosidade extensional*, η_e , uma vez que o comportamento dos materiais em corte e extensão é bastante distinto, podendo estabelecer-se algumas relações entre as viscosidades de corte e extensão. Para fluidos Não-Newtonianos sujeitos a pequenas deformações podem escrever-se as seguintes relações limite [7, p. 46]:

$$\lim_{\dot{\epsilon} \rightarrow 0} \eta_e(\dot{\epsilon}) = 3 \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}), \quad (1.103a)$$

$$\lim_{\dot{\epsilon} \rightarrow 0} \eta_{eb}(\dot{\epsilon}) = 6 \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}), \quad (1.103b)$$

$$\lim_{\dot{\epsilon} \rightarrow 0} \eta_{ep}(\dot{\epsilon}) = 4 \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \eta(\dot{\gamma}), \quad (1.103c)$$

para escoamento uniaxial, biaxial e planar, respectivamente, sendo $\dot{\epsilon}$ a *taxa de deformação extensional*. Para fluidos Newtonianos as relações supracitadas tomam a forma das equações:

$$\eta_e = 3\eta, \quad (1.104a)$$

$$\eta_{eb} = 6\eta, \quad (1.104b)$$

$$\eta_{ep} = 4\eta. \quad (1.104c)$$

De modo a relacionar as duas viscosidades, Trouton estabeleceu uma relação matemática entre elas à qual foi atribuída a designação de *Número de Trouton*, Tr , [7, p. 47]

$$Tr = \frac{\eta_e(\dot{\epsilon})}{\eta(\dot{\gamma})}. \quad (1.105)$$

Da expressão acima pode verificar-se que as duas viscosidades são função de taxas de deformação distintas o que pode conduzir a alguma ambiguidade quando se efectua a comparação. Assim, com o intuito de a eliminar, Jones et al. [7, p. 47] assumiram as relações (1.106a) e (1.106b) para a determinação de Tr para os escoamentos uniaxial e planar. De modo análogo, Huang e Kokini mostraram que para o caso de escoamento biaxial o Tr pode determinar-se através de [7, p. 47]

$$(Tr)_{uniaxial} = \frac{\eta_e(\dot{\varepsilon})}{\eta(\sqrt{3}\dot{\varepsilon})}, \quad (1.106a)$$

$$(Tr)_{planar} = \frac{\eta_e(\dot{\varepsilon})}{\eta(2\dot{\varepsilon})}, \quad (1.106b)$$

$$(Tr)_{biaxial} = \frac{\eta_e(\dot{\varepsilon})}{\eta(\sqrt{12}\dot{\varepsilon})}. \quad (1.106c)$$

Dos estudos realizados neste âmbito, concluíram ainda que qualquer valor de Tr distinto de 3 está associado a um comportamento viscoelástico [9, p. 80].

Na Seccção 1.5.1 foi referido que a maioria dos materiais reais apresentam propriedades pseudo-plásticas. No entanto, verifica-se experimentalmente que em escoamento extensional é usual encontrar materiais que apresentam características dilatantes, ou seja, a viscosidade extensional aumenta com o aumento da taxa de deformação. No entanto, um dos problemas que surge quando se trata um escoamento extensional é o facto de ser muito complicado atingir-se o estado estacionário, pelo que surge a necessidade de definir uma nova grandeza designada por *viscosidade extensional transiente*, η_E^+ , que contabiliza a dependência temporal [6, p. 142]:

$$\eta_E^+(t, \dot{\varepsilon}) \equiv \frac{T_{11}(t, \dot{\varepsilon}) - T_{22}(t, \dot{\varepsilon})}{\dot{\varepsilon}}, \quad (1.107)$$

onde $\dot{\varepsilon}$ é a taxa de deformação em estado estacionário.

No âmbito da não-linearidade vários têm sido os investigadores a procurar encontrar relações constitutivas que prevejam os vários fenómenos que lhe estão adjacentes. Estes estudos conduziram a um grande número de modelos matemáticos que podem ser divididos em: *equações constitutivas não-lineares*, *modelos diferenciais* e *modelos integrais*.

Equações Constitutivas Não-Lineares

De modo a encontrar modelos matemáticos que descrevam os fenómenos não-lineares citados pode partir-se de uma expansão da tensão, $\boldsymbol{\sigma}$, em função da taxa de deformação, $2\mathbf{D}$, de potências de $2\mathbf{D}$ e ainda das derivadas convectivas de $2\mathbf{D}$. Partindo deste princípio é possível obter-se a

equação [4, p.73]

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\eta_0 \mathbf{D} - \psi_{1,0} \overset{\nabla}{\mathbf{D}} + 4\psi_{2,0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \quad (1.108)$$

que, obviamente, pode ser escrita em função do tensor das tensões totais sob a forma:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\eta_0 \mathbf{D} - \psi_{1,0} \overset{\nabla}{\mathbf{D}} + 4\psi_{2,0} \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}.$$

O modelo reológico assim encontrado denomina-se **Equação de Fluido de Segunda Ordem** e é a equação constitutiva mais simples capaz de prever a primeira diferença de tensões normais. Esta relação só pode ser aplicada no caso de escoamentos muito lentos ou que variam lentamente, por forma a assegurar pequenos desvios relativamente ao comportamento Newtoniano.

Outro modo de encontrar equações constitutivas não-lineares consiste em modificar o Modelo de Maxwell. Desta forma, e como se ilustra em seguida, pode obter-se o Modelo de Lodge e o Modelo de Maxwell Convectivo Superior.

Considere-se o Modelo de Maxwell, equação (1.72), para um escoamento de corte, ou seja,

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^t G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \dot{\gamma}(t') dt'.$$

Integrando por partes obtém-se a Equação de Lodge:

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \gamma(t, t') dt', \quad (1.109)$$

onde $\gamma(t, t') = \int_{t'}^t \dot{\gamma}(t'') dt''.$

De modo a generalizar este modelo a três dimensões recorre-se ao tensor de Finger, \mathbf{B}^2 , uma vez que é uma das grandezas tensoriais que permite caracterizar totalmente o estado de deformação de um material, obtendo-se o **Modelo de Lodge** [6, p. 153]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) dt'. \quad (1.110)$$

Este modelo pode ainda ser escrito recorrendo à função memória uma vez que $M = -\frac{dG}{dt} =$

²De referir que se subtrai o tensor identidade a \mathbf{B} por forma a garantir que a deformação é nula quando na ausência de forças externas, situação em que $\mathbf{B}=\mathbf{I}$.

$\frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda}$, obtendo-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t M(t, t') (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) dt'. \quad (1.111)$$

Por derivação de (1.110) em ordem a t , recorrendo à Regra de Leibnitz, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) dt' \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^t \left(-\frac{G_0}{\lambda^2} e^{-(t-t')/\lambda} (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) + \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, t') \right) dt' + \\ &\quad + \frac{G_0}{\lambda} (\mathbf{B}(t, t) - \mathbf{I}) - \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-a)/\lambda} (\mathbf{B}(t, a) - \mathbf{I}) \right) \\ &= \int_{-\infty}^t -\frac{G_0}{\lambda^2} e^{-(t-t')/\lambda} (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) dt' + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, t') dt'. \end{aligned}$$

Tendo em consideração a equação (1.110), esta relação pode ainda escrever-se sob a forma:

$$\frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} = -\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\sigma} + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, t') dt'. \quad (1.112)$$

Atendendo à definição do tensor de Finger, equação (1.24), a derivada $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ é dada por:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial t}, \quad (1.113)$$

e as derivadas $\frac{\partial}{\partial t}$ do tensor dos gradientes de deformação e do seu transposto são dadas pelas equações (1.114) e (1.115), respectivamente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \\ &= (\nabla_{\mathbf{v}})^T \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (1.114)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x'_j} \right)^T = \left(\frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) \right)^T \\ &= \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \right)^T = \left(\frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \right)^T \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^T \\ &= \mathbf{F}^T \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (1.115)$$

Por substituição de (1.114) e (1.115) em (1.113) tem-se:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{F}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{F}^T \cdot \nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{v}. \quad (1.116)$$

Conjugando as equações (1.112) e (1.116) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{D\boldsymbol{\sigma}}{Dt} &= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \left[(\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{B}(t, t') + \mathbf{B}(t, t') \cdot \nabla \mathbf{v} \right] dt' \\ &= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{B}(t, t') dt' + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{B}(t, t') \cdot \nabla \mathbf{v} dt' \\ &= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + (\nabla \mathbf{v})^T \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{B}(t, t') dt' + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{B}(t, t') dt' \nabla \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.117)$$

O integral presente na equação acima pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{B}(t, t') dt' &= \int_{-\infty}^t \left[\frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) + \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{I} \right] dt' \\ &= \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} (\mathbf{B}(t, t') - \mathbf{I}) dt' + \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{I} dt' \\ &= \boldsymbol{\sigma} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^t \frac{G_0}{\lambda} e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{I} dt' \\ &= \boldsymbol{\sigma} + \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[G_0 e^{-(t-t')/\lambda} \mathbf{I} \right]_a^t \\ &= \boldsymbol{\sigma} + G_0 \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Assim, por substituição de (1.118) em (1.117), e tendo em conta a definição do tensor das taxas de deformação, equação (1.33), obtém-se a relação:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + (\nabla \mathbf{v})^T \cdot (\boldsymbol{\sigma} + G_0 \mathbf{I}) + (\boldsymbol{\sigma} + G_0 \mathbf{I}) \cdot \nabla \mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} + G_0 \mathbf{I} \cdot \left((\nabla \mathbf{v})^T + \nabla \mathbf{v} \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\sigma} + (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} + 2G_0 \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Multiplicando ambos os membros da equação (1.119) por λ e considerando a derivada convec-

tiva superior, relação (1.13), obtém-se a expressão que traduz o **Modelo de Maxwell Convectivo Superior (UCM)** [6, p. 149]:

$$\lambda \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) + \boldsymbol{\sigma} = 2\lambda G_0 \mathbf{D} \Leftrightarrow \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} = 2\lambda G_0 \mathbf{D}. \quad (1.120)$$

Atendendo à relação (1.80), o Modelo de Maxwell Convectivo Superior pode ainda escrever-se na forma:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = 2\eta_0 \mathbf{D} \quad (1.121)$$

Pelo modo como foram deduzidos, pode concluir-se que a Equação de Lodge e o UCM são idênticos, pelo que as suas previsões também o são.

Em escoamento de corte em estado estacionário prevêem uma viscosidade e uma 1ª diferença de tensões normais constantes e um valor nulo para a 2ª diferença de tensões normais. Estas previsões podem ser sumariadas da seguinte forma [6, p. 150]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \eta_0 \\ N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22} = 2\eta_0 \lambda \dot{\gamma}^2 \\ N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33} = 0 \end{array} \right. .$$

Para um escoamento extensional uniaxial estacionário a viscosidade prevista pode ser determinada através da expressão [6, p. 151]:

$$\eta_e = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\dot{\epsilon}} = \frac{2\eta_0}{1 - 2\lambda\dot{\epsilon}} + \frac{\eta_0}{1 + \lambda\dot{\epsilon}},$$

o que permite concluir que estes modelos prevêem dilatância em regime extensional, dado que a viscosidade extensional diverge para um valor finito de taxa de deformação $\dot{\epsilon} = \frac{1}{2\lambda}$, como se mostra em seguida.

$$\lim_{\dot{\epsilon} \rightarrow \frac{1}{2\lambda}} \eta_e = \lim_{\dot{\epsilon} \rightarrow \frac{1}{2\lambda}} \left(\frac{2\eta_0}{1 - 2\lambda\dot{\epsilon}} + \frac{\eta_0}{1 + \lambda\dot{\epsilon}} \right) = +\infty$$

Em suma, verifica-se que os modelos de Lodge e UCM traduzem satisfatoriamente o comportamento qualitativo de um grande número de fluidos, mas quantitativamente apresentam desvios consideráveis [6, p. 156].

Modelos Diferenciais

Por forma a ultrapassar as falhas inerentes ao UCM este pode ser generalizado, permitindo obter outras equações constitutivas que representam os efeitos da não-linearidade de forma mais correcta.

Os *Modelos Diferenciais* assim desenvolvidos são da forma:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + f_1(\boldsymbol{\sigma}, 2\mathbf{D}) + f_2(\boldsymbol{\sigma}) = 2\eta_0 \mathbf{D}, \quad (1.122)$$

onde $f_1(\boldsymbol{\sigma}, 2\mathbf{D})$ influencia a velocidade com que a tensão tende a aumentar e $f_2(\boldsymbol{\sigma})$ modifica a velocidade com que a tensão tende a diminuir. Apesar de ser plausível admitir que os efeitos não-lineares introduzidos por f_1 e f_2 alteram a dependência temporal da tensão para escoamentos em regime transiente de forma distinta, verifica-se que os efeitos introduzidos por ambas são similares [6, p. 166].

Uma vez que os Modelos Diferenciais mais usuais são do tipo da equação (1.122) é simples verificar que as diferenças existentes entre eles estarão associadas às funções f_1 e f_2 , cujas expressões são deduzidas com base em princípios moleculares. Assim, dependendo das funções f_1 e f_2 propostas surgiram vários modelos, alguns dos quais serão apresentados nesta secção.

Em 1982, *Giesekus* sugeriu uma equação diferencial não linear do tipo da representada por (1.122) em que as funções f_1 e f_2 tomam a forma [6, p.167]:

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{\sigma}, 2\mathbf{D}) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\mu}{G} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{cases},$$

onde μ é um parâmetro que está associado a fenómenos moleculares e $0 \leq \mu \leq 1$. Assim, o **Modelo de Giesekus** é traduzido pela equação:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\mu}{G} \boldsymbol{\sigma}^2 = 2\eta_0 \mathbf{D}. \quad (1.123)$$

As previsões obtidas através deste modelo para escoamento de corte são:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_s + \eta_p \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{(1-f)^2}{1 + (1-2\mu)f} \right], \\ N_1 &= \frac{2\dot{\gamma}^2 \eta_p (\lambda_1 - \lambda_2) f (1 - \mu f)}{(\lambda_1 \dot{\gamma})^2 \mu (1 - f)}, \\ N_2 &= \frac{\eta_p (\lambda_1 - \lambda_2) f}{(\lambda_1 \dot{\gamma})^2}. \end{aligned}$$

e para escoamento extensional uniaxial tem-se

$$\eta_e = 3\eta_p \left\{ \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{A}{6\mu} \right\},$$

onde o índice s diz respeito a um termo Newtoniano ($\boldsymbol{\sigma}_s = 2\eta_s \mathbf{D}$), o índice p a um termo dado

pelo UCM e

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\eta_s}{\eta_p},$$

$$f = \frac{1 - \chi}{1 + \chi(1 - 2\mu)} \quad ; \quad \chi^2 = \frac{\left[1 + 16\mu(1 - \mu)(\lambda_1 \dot{\gamma})^2\right]^{\frac{1}{2}} - 1}{8\mu(1 - \mu)(\lambda_1 \dot{\gamma})^2},$$

$$A = 3 + \frac{\left[1 - 4(1 - 2\mu)\lambda_1 \dot{\epsilon} + 4(\lambda_1 \dot{\epsilon})^2\right]^{\frac{1}{2}} - \left[1 + 2(1 - 2\mu)\lambda_1 \dot{\epsilon} + (\lambda_1 \dot{\epsilon})^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\lambda_1 \dot{\epsilon}}.$$

Este modelo permite a obtenção de bons ajustes no caso de escoamentos de corte. No entanto, quando o escoamento em causa é extensional os ajustes obtidos não são muito bons.

Phan Thien e Tanner também desenvolveram trabalhos nesta área e como culminar dos seus estudos, em 1984, sugeriram as seguintes expressões para as funções f_1 e f_2 [6, p. 167]:

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{\sigma}, 2\mathbf{D}) = \xi (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \\ f_2(\boldsymbol{\sigma}) = \exp\left(\frac{v}{G} I_{\boldsymbol{\sigma}}\right) (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I}) = \exp\left(\frac{v}{G} tr \boldsymbol{\sigma}\right) (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I}) \end{cases} ,$$

onde ξ e v são funções características do material, podendo ξ pode ser constante ou função de $II_{2\mathbf{D}}$. Assim, o **Modelo de Phan-Thien Tanner (PTT)** é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \xi (\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) + \exp\left(\frac{v}{G} tr \boldsymbol{\sigma}\right) (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I}) = 2\eta_0 \mathbf{D}. \quad (1.124)$$

Este modelo prevê, para escoamento de corte [9, p. 155]

$$\eta = \eta_s + \frac{\eta_p f}{f^2 + \xi(2 - \xi)(\lambda \dot{\gamma})^2},$$

$$N_1 = \frac{2\eta_p \lambda \dot{\gamma}^2}{f^2 + \xi(2 - \xi)(\lambda \dot{\gamma})^2},$$

$$N_2 = -\frac{\xi}{2} N_1.$$

com f uma função que satisfaz a condição:

$$\ln(f) = \frac{2v(\lambda \dot{\gamma})^2(1 - \xi)}{f^2 + \xi(2 - \xi)(\lambda \dot{\gamma})^2}.$$

No caso de escoamento extensional uniaxial prevê

$$\eta_e = 3\eta_s + \frac{2\eta_p}{f - 2\lambda \dot{\epsilon}(1 - \xi)} + \frac{\eta_p}{f + \lambda \dot{\epsilon}(1 - \xi)},$$

onde f obedece a

$$\ln(f) = \frac{6\nu(\lambda\dot{\epsilon})^2(1-\xi)}{[f-2\lambda\dot{\epsilon}(1-\xi)][f+\lambda\dot{\epsilon}(1-\xi)]}.$$

Quanto aos méritos deste modelo podem citar-se os bons ajustes obtidos para vários tipos de deformação, enquanto que no que diz respeito a lacunas podem referir-se as oscilações espúrias na incepção de escoamento de corte quando $\xi \neq 0$ e o facto da 2ª diferença de tensões normais ser nula quando $\xi = 0$ [6, p. 167].

Em 1977, *Johnson e Segalman* propuseram um modelo muito semelhante ao PTT no qual as funções f_1 e f_2 são dadas por [6, p. 167]:

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{\sigma}, 2\mathbf{D}) = \xi(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \\ f_2(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \end{cases},$$

ou seja, o **Modelo de Johnson-Segalman** é representado por:

$$\boldsymbol{\sigma} + \lambda \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} + \xi(\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) = 2\eta_0 \mathbf{D}. \quad (1.125)$$

Através deste modelo obtêm-se, para escoamento de corte, as seguintes previsões [9, p. 155]:

$$\eta = \eta_s + \frac{\eta_0}{1 + (1 - \xi^2) \lambda^2 \dot{\gamma}^2},$$

$$N_1 = \frac{2\lambda\eta_0}{1 + (1 - \xi^2) \lambda^2},$$

$$N_1 = \frac{(\xi - 1) \lambda \eta_0}{1 + (1 - \xi^2) \lambda^2 \dot{\gamma}^2}.$$

e para escoamento extensional uniaxial tem-se

$$\eta_e = \frac{\eta_0}{1 - 2\xi\dot{\epsilon}}.$$

Tal como o PTT este modelo prevê oscilações espúrias na incepção de escoamento de corte e prevê ainda singularidades em escoamento extensional. Em contrapartida, este modelo apresenta ajustes razoáveis para escoamentos de corte estacionários [6, p. 167].

Modelos Integrais

Os *Modelos Integrais* surgem como consequência de um esforço desenvolvido no sentido de encontrar relações constitutivas que descrevam de forma mais adequada o comportamento dos vários materiais, uma vez que os Modelos de Lodge e UCM se mostram inadequados em diversas

situações.

As falhas que se pretendem ultrapassar prendem-se com o facto de nos Modelos de Lodge e UCM a componente elástica corresponder à de um sólido de Hooke. Assim, por forma a superar esta falha vários autores desenvolveram modelos matemáticos que se baseiam numa versão viscoelástica da *equação constitutiva de um sólido elástico*³,

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + g_1(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})\mathbf{B} + g_2(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})\mathbf{B}^{-1},$$

onde g_i são funções escalares dependentes dos invariantes do tensor de Finger. Esta equação pode ainda ser escrita com base em balanços energéticos que conduzem a uma relação que tem em conta a *função energia de deformação*, W , [6, p. 43]

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\frac{\partial W(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})}{\partial I_{\mathbf{B}}}\mathbf{B} - 2\frac{\partial W(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})}{\partial II_{\mathbf{B}}}\mathbf{B}^{-1}. \quad (1.126)$$

Com base nesta ideia, *Kaye* em 1962 e posteriormente *Bernstein, Kearsley e Zapas*, em 1963, propuseram, tendo ainda em consideração que a função W depende da história dos invariantes de \mathbf{B} , que [6, p. 158]

$$W = \int_{-\infty}^t u[I_{\mathbf{B}}(t, t'), II_{\mathbf{B}}(t, t'), t - t'] dt', \quad (1.127)$$

onde $u(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, t - t')$ é uma função potencial dependente do tempo.

Substituindo (1.127) em (1.126) obtém-se a **Equação K-BKZ**:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t \left[2\frac{\partial u[I_{\mathbf{B}}(t, t'), II_{\mathbf{B}}(t, t'), t - t']}{\partial I_{\mathbf{B}}}\mathbf{B} - 2\frac{\partial u[I_{\mathbf{B}}(t, t'), II_{\mathbf{B}}(t, t'), t - t']}{\partial II_{\mathbf{B}}}\mathbf{B}^{-1} \right] dt'. \quad (1.128)$$

Através deste modelo pode prever-se uma enorme variedade de comportamentos. No entanto, uma vez que a função de energia u depende de dois invariantes e do tempo, não é simples calculá-la. Para tal é necessário um grande número de dados experimentais ou ter conhecimentos da teoria molecular, pelo que é conveniente simplificar a descrição traduzida por (1.128).

Se se restringir o campo de aplicação a escoamentos de corte a equação (1.128) reduz-se a:

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^t 2 \left(\frac{\partial u}{\partial I_{\mathbf{B}}} - \frac{\partial u}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) \gamma(t, t') dt', \quad (1.129)$$

³Esta expansão pode ser determinada de forma análoga ao efectuado aquando da dedução da equação constitutiva de um fluido viscoso, equação (1.42), partindo da relação $\boldsymbol{\sigma} = G\mathbf{B}$, que traduz a relação linear para um sólido de Hooke.

uma vez que para este tipo de escoamento se tem [6, p. 31],

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & 0 \\ -\gamma & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ainda tendo em consideração a restrição apresentada, as diferenças de tensões normais podem ser determinadas através das equações:

$$N_1 = \int_{-\infty}^t 2 \left(\frac{\partial u}{\partial I_{\mathbf{B}}} - \frac{\partial u}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) \gamma^2(t, t') dt',$$

$$N_2 = - \int_{-\infty}^t 2 \frac{\partial u}{\partial II_{\mathbf{B}}} \gamma^2(t, t') dt'.$$

Defina-se uma nova função designada por ϕ [6, p. 159],

$$\phi(\gamma, t - t') \equiv 2 \left(\frac{\partial u}{\partial I_{\mathbf{B}}} - \frac{\partial u}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right).$$

Esta função pode ser obtida facilmente, pois quando se aplica uma deformação instantânea a um material, γ , esta é independente do tempo, pelo que a equação (1.129) pode ser escrita na forma:

$$\sigma_{12} = \gamma \int_{-\infty}^0 2 \left(\frac{\partial u}{\partial I_{\mathbf{B}}} - \frac{\partial u}{\partial II_{\mathbf{B}}} \right) dt' = \gamma \int_{-\infty}^0 \phi(\gamma, t - t') dt'$$

e, tendo em conta a definição do módulo de relaxação, pode escrever-se

$$G(\gamma, t) = \frac{\sigma_{12}(\gamma, t)}{\gamma} = \int_{-\infty}^0 \phi(\gamma, t - t') dt' \Rightarrow \frac{dG(\gamma, t)}{dt} = \phi(\gamma, t). \quad (1.130)$$

Assim, conhecendo a função ϕ , a 1ª diferença de tensões normais e σ_{12} podem ser determinados para qualquer deformação de corte.

Admita-se ainda que o módulo de relaxação é factorizável em termos dependentes da deformação e do tempo, isto é, $G(\gamma, t)$ pode ser escrito sob a forma:

$$G(\gamma, t) = G(t)h(\gamma), \quad (1.131)$$

sendo $h(\gamma)$ denominada por *função de decaimento*. Como consequência de (1.131) e tendo em consideração que a função memória corresponde à derivada temporal de $G(\gamma, t)$, tem-se que ϕ

também pode ser factorizada na forma:

$$\phi(\gamma, t) = \frac{dG(t)}{dt} h(\gamma) = M(t)h(\gamma), \quad (1.132)$$

pelo que, para uma deformação de corte, se pode escrever:

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^t M(t-t')h(\gamma)\gamma(t-t') dt'. \quad (1.133)$$

Através de dados experimentais verifica-se que a factorização expressa por (1.132) é válida para deformações distintas da de corte. Se se admitir que é válida para qualquer deformação a função de energia u pode ser definida como:

$$u(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}, t-t') = M(t-t')\mathcal{U}(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}}),$$

pelo que a expressão (1.128) pode ser escrita sob a forma [6, p.161]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t 2M(t-t') \left[\frac{\partial \mathcal{U}(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})}{\partial I_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}(t-t') - \frac{\partial \mathcal{U}(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})}{\partial II_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^{-1}(t-t') \right] dt', \quad (1.134)$$

designada **Equação K-BKZ Separável**.

Deste modo, o Modelo K-BKZ tornou-se muito mais simples pois a função $M(t-t')$ pode ser determinada através de medições simples de viscoelasticidade linear e testes não-lineares só são necessários para a obtenção de $\mathcal{U}(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})$. No entanto, continua a envolver derivadas parciais de uma função potencial, o que não é trivial.

Por forma a minimizar este problema, Wagner propôs um novo modelo que resultou de uma simplificação efectuada no modelo K-BKZ Separável e que consistiu em eliminar o termo em \mathbf{B}^{-1} presente na equação (1.134). A este modelo atribui-se a designação de **Modelo K-BKZ Simplificado** e pode ser escrito sob a forma [4, p. 82]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t M(t-t')h(I_{\mathbf{B}}, II_{\mathbf{B}})\mathbf{B}(t-t') dt'. \quad (1.135)$$

Tal como acontece nos Modelos Diferenciais, também nos Modelos Integrais se podem encontrar equações constitutivas distintas. Neste caso, as diferenças existentes derivam das funções de decaimento propostas pelos vários autores.

Além da simplificação referida, Wagner propôs ainda um novo invariante, I , dependente dos

primeiro e segundo invariantes do tensor de Finger:

$$I = \beta I_{\mathbf{B}} + (1 - \beta) II_{\mathbf{B}}, \quad (1.136)$$

onde β um parâmetro característico do material, e definiu a função de decaimento como função deste novo invariante,

$$h(I) = \exp\left(-\alpha\sqrt{I-3}\right). \quad (1.137)$$

Assim, o **Modelo de Wagner** pode ser traduzido pela equação [4, p. 82]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \exp\left(-\alpha\sqrt{I-3}\right) \mathbf{B}(t-t') dt'. \quad (1.138)$$

Osaki também se dedicou a estudos neste âmbito tendo proposto uma função de decaimento que consiste na soma de duas funções exponenciais, podendo também ser escrita em função de I :

$$h(I) = f_1 \exp\left(-n_1\sqrt{I-3}\right) + f_2 \exp\left(-n_2\sqrt{I-3}\right), \quad (1.139)$$

onde f_1 , f_2 , n_1 e n_2 são constantes características do material. Logo, substituindo (1.139) em (1.135) obtém-se o **Modelo de Osaki**,

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \left[f_1 \exp\left(-n_1\sqrt{I-3}\right) + f_2 \exp\left(-n_2\sqrt{I-3}\right) \right] \mathbf{B}(t-t') dt'. \quad (1.140)$$

Outro modelo bastante difundido é o **Modelo PSM**, proposto pelos investigadores Papanastasiu, Scriven e Mackosco e que consiste em admitir que a função de decaimento é [4, p. 82]:

$$h(I) = \frac{1}{1 + c(I-3)}, \quad (1.141)$$

onde c é uma função escalar inerente ao material.

Os modelos deduzidos a partir da equação (1.135) permitem obter ajustes razoáveis aos dados experimentais obtidos em escoamentos de corte e extensionais.

Muitos têm sido os trabalhos desenvolvidos neste vasto campo da Reologia. No entanto, não é possível eleger o “Melhor Modelo”. Cada escoamento é um caso especial e portanto a escolha do modelo mais indicado deve ser feito com base nas suas características. Se se pretender comparar o desempenho dos Modelos Diferenciais face aos Modelos Integrais pode afirmar-se que os primeiros são mais fáceis de implementar em métodos numéricos enquanto os Integrais exigem menor esforço computacional, dado o cálculo integral envolver primitivas que são, na maioria, conhecidas.

Capítulo 2

Escoamento em Canais

Convergentes/Divergentes

O objectivo deste trabalho consiste em simular o escoamento não-isotérmico de fluidos Não-Newtonianos em canais de geometria complexa. Este problema é extremamente relevante para o correcto dimensionamento das referidas secções de escoamento durante operações que envolvem tratamento térmico. Um exemplo deste tipo de escoamento tem lugar numa das etapas de produção de iogurte e será este o alvo concreto deste estudo.

Neste capítulo realizar-se-á a formulação do problema de escoamento de iogurte num permutador de placas. Para tal, começar-se-á pela sua descrição física e posteriormente formular-se-á matematicamente.

2.1 Iogurte

Actualmente, o iogurte é um dos derivados do leite mais consumido em todo o mundo. A sua crescente popularidade levou a um aumento de produção bem como uma maior preocupação com a sua qualidade.

De uma forma muito simplista, a tecnologia base de produção do iogurte consiste na promoção da acção de uma microflora, constituída por *Lactobacillus delbruckii subsp bulgaricus* e *Streptococcus salivarius subsp thermophilus*, que ao ser adicionada ao leite transforma a lactose em ácido láctico (fermentação láctica), ou seja, acidifica o leite produzindo leite coagulado - *iogurte* [13].

O iogurte pode ser classificado em dois tipos básicos: *iogurte sólido* e *iogurte batido*. Esta distinção resulta dos diferentes processos de fabrico e, conseqüentemente, das diferentes propriedades apresentadas pelo produto final. O iogurte sólido é coagulado e arrefecido nas embalagens individuais, enquanto que o batido é coagulado em cuba, agitado posteriormente e arrefecido antes

de ser embalado [14].

2.1.1 Processo de Fabrico

O processo de fabrico do iogurte varia de acordo com o produto final desejado e com as matérias-primas utilizadas. As diferenças evidenciam-se principalmente nas fases de fermentação e pós-incubação, sendo as restantes etapas do processo bastante semelhantes para os vários tipos de iogurte.

Na Figura 2.1 encontram-se representadas as várias etapas do processo de fabrico do iogurte batido.

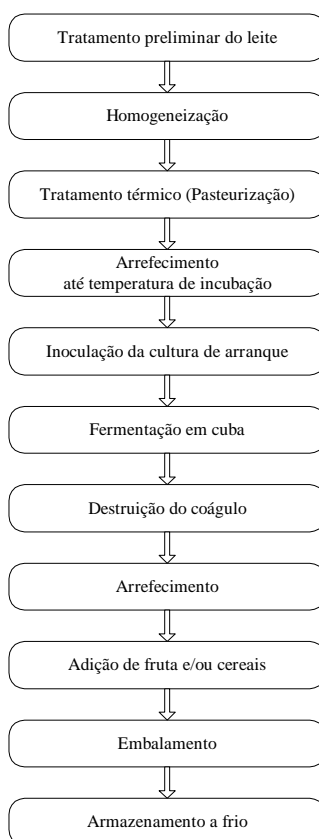


Figura 2.1: Diagrama de fluxo do fabrico de iogurte batido (adaptado de [15, p. 7]).

Todas as etapas são levadas a cabo em condições que permitam a obtenção de um produto final de elevada qualidade.

As três etapas iniciais têm como objectivo garantir que o leite utilizado seja de boa qualidade e tenha uma composição que permita produzir um iogurte com propriedades organolépticas, tais como viscosidade, aroma e consistência, desejáveis.

A fase seguinte consiste em arrefecer o leite, proveniente da pasteurização, até à temperatura de incubação ou seja, até à temperatura à qual existe actividade da flora.

A fermentação é a etapa característica e essencial do fabrico de iogurte, sendo aqui que se verificam as maiores diferenças entre a tecnologia dos iogurtes sólido e batido. É nesta fase,

também conhecia por acidificação, que se dá a fermentação láctica e consequente formação do coágulo do iogurte.

Quando o coágulo atinge a acidez desejada, é necessário proceder ao seu arrefecimento de modo a reduzir a actividade metabólica das culturas lácticas. Esta fase denomina-se arrefecimento e é uma das etapas críticas de todo o processo, pois é através dela que se controla a acidez do iogurte. Nesta etapa o iogurte é arrefecido até uma temperatura de 15 a 22°C e é realizada, normalmente, num permutador de placas.

Após o arrefecimento, o iogurte está em condições de ser embalado. No caso de se tratar de um iogurte de aromas ou com pedaços de fruta, os concentrados de fruta e aromas são introduzidos nesta fase ou seja, durante a transferência do iogurte para as máquinas de enchimento.

Depois de devidamente embalados, os iogurtes devem ser armazenados a temperatura constante entre os 2 e os 5°C.

2.1.2 Reologia do Iogurte

A reologia desempenha um papel importante na indústria alimentar. A sua acção faz-se sentir, essencialmente, no controlo de qualidade e processo, no desenvolvimento de produtos e concepção das linhas de fabrico.

A indústria dos iogurtes não se tem alheado dos avanços que esta ciência pode trazer, pelo que se têm desenvolvido vários estudos com o intuito de caracterizar reologicamente o iogurte. Consequentemente, as suas propriedades reológicas também serão alteradas, sendo portanto dependentes das condições de processamento.

Assim, os dois tipos de iogurte já mencionados apresentam algumas diferenças, não só nas propriedades físicas que apresentam, mas também do ponto de vista reológico. O iogurte sólido tem um carácter predominantemente elástico, enquanto que o batido se pode considerar essencialmente um líquido viscoso, apesar de possuir componente elástica [16], ou seja, pode considerar-se um fluido viscoelástico.

Reologicamente, o iogurte batido é classificado como fluido Não-Newtoniano, pseudoplástico e dependente do tempo [17], ou seja, a sua viscosidade é função não só da temperatura como também do tempo e da taxa de deformação. Estas dependências apresentam-se em seguida de forma resumida.

Influência da Temperatura na Viscosidade do Iogurte

Para estudar a influência da temperatura nas propriedades reológicas do iogurte foram efectuados ensaios a diferentes temperaturas, registando-se os valores da viscosidade.

Este estudo permitiu concluir que a viscosidade diminui com o aumento da temperatura e que a dependência em causa é mais acentuada para temperaturas superiores a 30°C, podendo ser expressa pela lei de Arrhenius, equação (1.32), [18].

Influência da Taxa de Deformação na Viscosidade do Iogurte

A influência da taxa de deformação na viscosidade do iogurte pode ser efectuada através de ensaios em que as amostras são sujeitas a uma gama de taxas de deformação, ascendente e descendente, para as quais é registado o valor da tensão.

Este tipo de estudos permitiu concluir que o iogurte é um fluido *pseudoplástico*, uma vez que a viscosidade diminui com o aumento da taxa de deformação. Verifica-se, no entanto, que para taxas de deformação baixas a viscosidade aumenta com o aumento da taxa de deformação, sendo este comportamento mais acentuado para viscosidades mais elevadas [15].

Outra abordagem já realizada, através do conhecimento da relação entre taxa de deformação e tensão, consistiu em encontrar o modelo matemático que melhor se ajusta aos dados experimentais obtidos, ou seja, permite determinar o modelo matemático que descreve o fluxo do fluido. Dos estudos realizados nesta área, concluiu-se que os modelos da Potência, de Casson e de Herschel-Bulkley ajustam correctamente os dados obtidos [19].

Em estudos mais recentes, Afonso et al. [18] verificaram que, para um valor de tensão de aproximadamente 6,7 Pa, existia uma alteração no tipo de relação existente entre viscosidade e tensão. Assim, de modo a descrever de forma mais correcta o comportamento reológico do iogurte considerou duas zonas distintas, $\sigma < 6,7 Pa$ e $\sigma > 6,7 Pa$, aquando da sua modelização. O modelo obtido deste modo pode ser expresso matematicamente por:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_y + k_1 \dot{\gamma} & , \sigma < 6,7 Pa \\ \sigma = k_2 \dot{\gamma}^n & , \sigma \geq 6,7 Pa \end{cases} \quad (2.1)$$

Os parâmetros envolvidos foram determinados experimentalmente e tomam os valores a seguir indicados: $\sigma_y = 0,54 Pa$, $n = 0,42$, $k_1 = 1,45 Pa s$ e $k_2 = 3,65 Pa s^n$ [18].

Influência do Tempo na Viscosidade do Iogurte

Há vários fluidos alimentares que apresentam um comportamento dependente do tempo. Esta propriedade pode ser estudada efectuando ensaios, a temperatura e taxa de deformação constantes, registando-se a evolução da tensão ao longo do tempo para uma dada taxa de deformação.

De Kee et al. (1983) descreveu o efeito do tempo no iogurte a taxas de deformação constantes. Para introduzir esta dependência, a expressão que permite determinar a tensão, equação (1.36),

foi alterada introduzindo-se um parâmetro estrutural, φ , que contabiliza o efeito do tempo. Este modelo foi proposto por Cheng e Evans (1965) e pode ser descrito pelas equações [19, 20]:

$$\sigma = \varphi f(\dot{\gamma}), \quad (2.2)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -C(\varphi - \varphi_e)^p. \quad (2.3)$$

Nas equações acima, $f(\dot{\gamma})$ é uma função que descreve a curva de fluxo para o instante de tempo inicial, C é uma função dependente apenas da taxa de deformação e é determinada experimentalmente, φ_e é o valor do parâmetro estrutural φ no equilíbrio, ou seja, quando a viscosidade atinge o equilíbrio, η_e ,

$$\varphi_e = \frac{\eta_e \dot{\gamma}}{\sigma_0 + k \dot{\gamma}^n}. \quad (2.4)$$

Nos estudos desenvolvidos por De Kee et al. foram determinados valores do parâmetro p para diversos alimentos, tendo-se obtido o valor 1,7 para o iogurte batido [19].

Tendo em conta que o modelo de Herschel-Bulkley descreve correctamente o fluxo do iogurte, De Kee et al. resolveram analiticamente a equação diferencial (2.3) tendo obtido a função de decaimento da viscosidade para uma taxa de corte constante:

$$\eta(\dot{\gamma}, t) = \left\{ [\eta_i - (\sigma_{oe} \dot{\gamma}^{-1} + k_e \dot{\gamma}^{n-1})]^{1-p} - Ct(1-p)\eta_i^{1-p} \right\}^{\frac{1}{1-p}} + (\sigma_{oe} \dot{\gamma}^{-1} + k_e \dot{\gamma}^{n-1}). \quad (2.5)$$

Na equação (2.5), η_i é a viscosidade no início da deformação, σ_{oe} o valor da tensão no estado de equilíbrio, n o índice de escoamento, e k_e o índice de consistência no equilíbrio.

Como se pode verificar através da equação (2.5) este modelo possui 6 parâmetros reológicos. No entanto, apenas três dependem do tipo iogurte em estudo, η_i , C e k_e .

Dos trabalhos desenvolvidos neste sentido ou seja, para determinar a influência do tempo na viscosidade do iogurte, concluiu-se que esta diminui com o decorrer do tempo ou seja, o iogurte é um fluido *tixotrópico* [19].

Modelação Viscoelástica do Iogurte

Como já foi referido, o iogurte batido pode ser classificado como um líquido viscoso com componente elástica, pelo que seria de todo o interesse conhecer o modelo viscoelástico que descrevesse o seu comportamento reológico.

Assim, no âmbito do presente trabalho efectuou-se a modelação viscoelástica de um iogurte comercial. Efectuaram-se ensaios em estado estacionário que conduziram aos pontos experimentais que traduzem a relação viscosidade/taxa de deformação representados na Figura 2.2.

A modelação viscoelástica foi efectuada considerando um espectro de relaxação constituído por três tempos de relaxação, Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Espectro de Relaxação.

| λ_k (s) | G_k (Pa) | η_k (Pas) |
|----------------------|------------|-----------------------|
| 1 | 2,5 | 2,5 |
| $2,2 \times 10^{-2}$ | 6,5 | $1,43 \times 10^{-1}$ |
| 8×10^{-4} | 45 | $3,6 \times 10^{-2}$ |

Concluiu-se que o modelo de Wagner, equações (2.6), com $\alpha = 0,23$ e $\beta = 0,1$, se ajusta de forma bastante razoável aos dados experimentais para taxas de deformação superiores a $1s^{-1}$ (Figura 2.2). Para valores inferiores a este, o modelo em questão afasta-se consideravelmente dos dados experimentais, situação que resulta do facto deste modelo não prever a existência de tensão de cedência.

$$h(I) = \exp\left(-\alpha\sqrt{I-3}\right) \quad (2.6a)$$

$$I = \beta I_{\mathbf{B}} + (1 - \beta) II_{\mathbf{B}} \quad (2.6b)$$

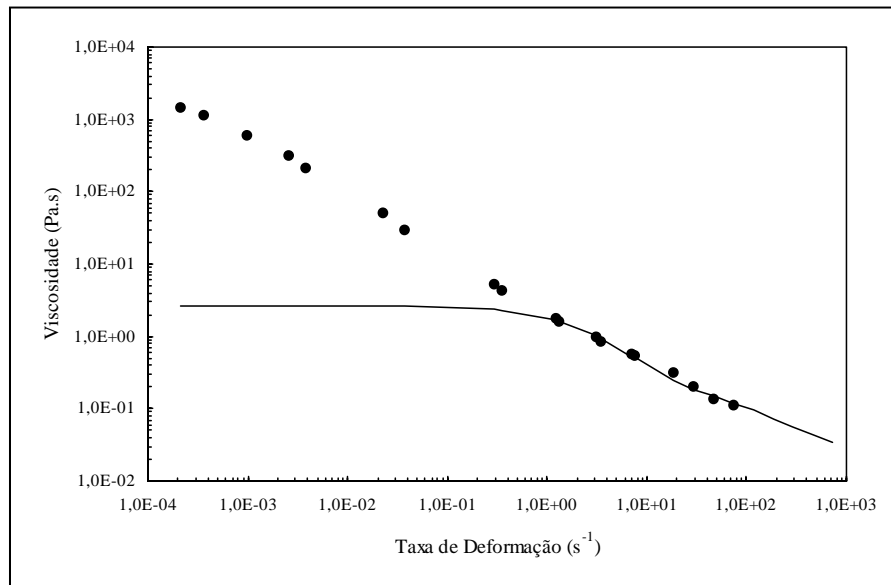


Figura 2.2: Modelação reológica do iogurte.

2.2 Transferência de Calor

No processo de fabrico de iogurte a fase de arrefecimento desempenha um papel crucial, pelo que é de extrema importância conhecer os mecanismos envolvidos no arrefecimento, bem como o modo como se processa o escoamento do iogurte no interior do permutador.

2.2.1 Mecanismos de Transferência de Calor

A *Transferência de Calor* pode ser definida como um processo de transferência de energia provocado por um gradiente de temperatura. Este processo pode ocorrer através de três mecanismos: condução, convecção e radiação.

Na transferência de calor por *condução* a energia térmica é transferida através de corpos sólidos e/ou camadas de líquido em repouso. Num sólido o fluxo de calor pode ocorrer de duas formas, por transferência de energia de vibração entre moléculas ou devido ao movimento de electrões livres. Nos fluidos esta transferência deve-se à energia cinética das moléculas.

A transferência de calor por *convecção* é originada pelo movimento macroscópico do fluido, pelo que este mecanismo só ocorre em líquidos e gases. Dentro deste mecanismo pode ainda considerar-se convecção natural e convecção forçada. Na convecção natural, a transferência ocorre devido a diferenças de densidade resultantes dos gradientes de temperatura existentes. Na convecção forçada, a transferência é provocada por agentes externos.

O mecanismo de transferência de calor menos relevante para os permutadores de calor é a *radiação*, podendo mesmo ser desprezado. Este mecanismo tem lugar devido a todos os corpos irradiarem energia térmica sob a forma de ondas electromagnéticas. Ao incidir num outro corpo esta energia pode ser parcialmente reflectida, transmitida ou absorvida, sendo a última parcela a única que surge como energia térmica no corpo [21, p. 217].

Industrialmente, as trocas de calor são usualmente promovidas em equipamentos designados *permutadores de calor*, onde a transferência ocorre de forma indirecta entre dois fluidos que se encontram a temperaturas diferentes e separados por uma parede sólida.

Existem vários tipos de permutadores, sendo a sua classificação efectuada de acordo com a sua configuração. Na indústria alimentar existem alguns permutadores que assumem um lugar de destaque devido à sua grande utilização: permutador tubular, permutador de tubos e carcaça, permutador de superfície raspada e permutador de placas.

No processamento de iogurte os permutadores utilizados são permutadores de placas, pelo que será efectuada uma descrição deste tipo de permutador, assim como de todo o trabalho envolvido no seu projecto.

2.2.2 Permutador de Placas

Descrição

Os permutadores cuja superfície de transferência de calor é constituída por placas metálicas separadas por vedantes, escoando os fluidos que vão trocar calor em pequenos canais aí formados, designam-se *permutadores de placas*. Estas placas são empacotadas, obtendo-se assim um permutador

tador que ocupa pouco espaço e que apresenta elevados coeficientes de transferência de calor. Na Figura 2.3 encontra-se a representação esquemática de um permutador deste tipo.

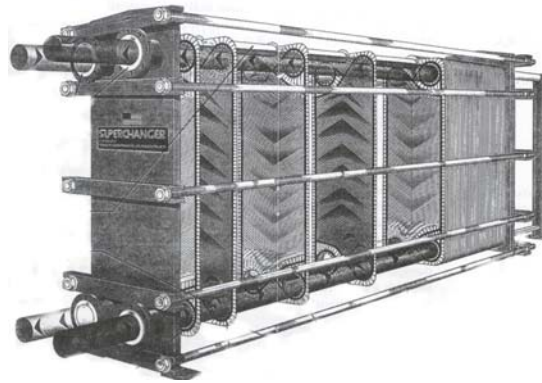


Figura 2.3: Representação esquemática de um permutador de placas [22, p. 573].

Atendendo à função do permutador, o elemento mais importante deste equipamento é, obviamente, a superfície de transferência de calor ou seja, as placas.

As *placas* têm orifícios localizados nos quatro cantos através dos quais se dá a entrada e saída dos dois fluidos. Estes orifícios estão cercados total ou parcialmente por vedantes cuja função é impedir a mistura dos fluidos. A superfície das placas é enrugada, existindo vários tipos de corrugações. As mais utilizadas são as que se encontram representadas na Figura 2.4, *Herringbone* e *Washboard* [23, p. 17-23]. Esta textura permite aumentar a área de transferência de calor e a turbulência dos fluidos circulantes, havendo uma diminuição do sujamento e um aumento do coeficiente de transferência de calor que se traduz numa grande eficiência na troca de calor.

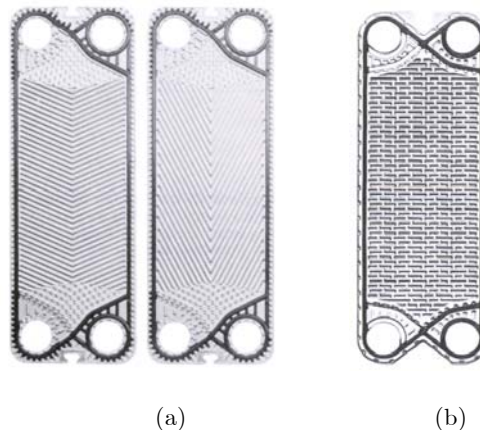


Figura 2.4: Diferentes enrugamentos: (a) Par de placas Herringbone ; (b) Placa Washboard [23, p. 17-23].

Tendo em consideração a configuração dos permutadores de placas podem enunciar-se duas vantagens deste tipo de equipamento: pequenas perdas para o exterior devido à pequena distância entre as placas e à pequena área exposta ao exterior e dimensões reduzidas dada a grande eficiência na transferência de calor.

Como principais desvantagens deste tipo de equipamento podem citar-se as seguintes: as pressões de operação devem ser reduzidas (entre 10 a 20 bar), limitações nas temperaturas de

funcionamento devido à natureza dos vedantes e impossibilidade de tratar fluidos cujo teor de partículas seja elevado [24].

Funcionamento

A Figura 2.5 mostra o princípio de funcionamento de um permutador de placas. Como se pode verificar, cada canal troca calor com outros dois, excepto os que se encontram nas extremidades. Nesta figura, pode ainda observar-se o facto de não existir mistura dos fluidos devido aos vedantes existentes nas placas.

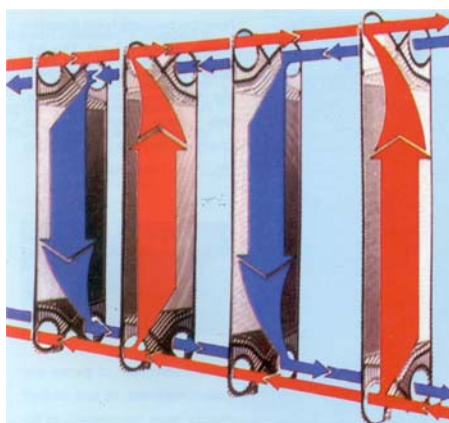


Figura 2.5: Princípio de funcionamento de um permutador de placas em paralelo e contra-corrente (catálogo de fabricante).

A forma como os vedantes são colocados conduz a escoamentos distintos dentro do permutador, podendo encontrar-se dois tipos de arranjo: em série e em paralelo [23, p. 17-41].

No *arranjo em série*, a corrente é contínua e muda de direcção após cada percurso vertical. Este tipo de arranjo é utilizado quando dois fluidos com um pequeno caudal trocam calor para provocar uma variação elevada de temperatura.

Quando se pretende tratar um grande caudal de fluido é conveniente dividir a corrente pelos vários canais do permutador uma vez que estes são estreitos e, conseqüentemente, um caudal elevado conduzirá a velocidades e pressões elevadas. Neste caso, deve optar-se por um *arranjo em paralelo* ou seja, a corrente que dá entrada no permutador é dividida em vários fluxos paralelos que depois se juntam para sair do permutador como uma corrente única.

Quanto aos arranjos de escoamento possíveis num permutador, pode ainda efectuar-se a seguinte classificação: escoamento em *co-corrente* e *contra-corrente* (Figura 2.6). No primeiro caso, os dois fluidos escoam no mesmo sentido, enquanto no segundo caso, tal como o próprio nome indica, o escoamento dos fluidos é efectuado em sentidos opostos.

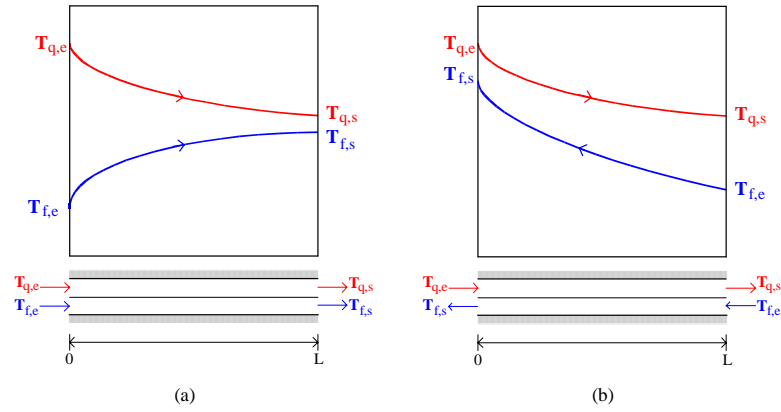


Figura 2.6: Perfis de temperatura para fluxo em (a) co-corrente; (b) contra-corrente.

Da observação da Figura 2.6 pode verificar-se que a diferença de temperaturas entre os fluidos atinge o seu máximo à entrada do permutador, havendo uma diminuição desse valor à medida que os fluidos percorrem o equipamento. No escoamento em contra-corrente, (b), esse decréscimo não é muito acentuado, pelo que a transferência de calor pode ocorrer ao longo de todo o permutador, o que pode não acontecer no escoamento em co-corrente, (a), uma vez que neste caso o gradiente de temperatura diminui rapidamente, tendendo para zero. Além de influenciar o perfil de temperaturas, o regime de escoamento também afecta a área de transferência de calor necessária. Para as mesmas condições de operação, isto é, diferença de temperaturas média entre os dois fluidos e caudal térmico transferido, a área de transferência de calor necessária será menor para a configuração em contra-corrente [22, p. 570].

Projecto

O projecto de um permutador de placas consiste essencialmente em determinar a área de transferência de calor e a potência de bombagem necessária para um dado tratamento térmico. Este dimensionamento deve ser efectuado tendo em consideração as propriedades reológicas do fluido, mais precisamente a sua variação com a temperatura, o caudal de fluido a tratar e a gama de temperaturas em que se pretende operar, pois estes factores são de extrema importância para uma escolha adequada quer do tipo e configuração das placas quer do tipo de escoamento.

A equação geral de projecto de um permutador de placas é [25, p. 18]:

$$Q = UA(\Delta T)_m, \quad (2.7)$$

onde Q é o caudal térmico, U o coeficiente global de transferência de calor, $(\Delta T)_m$ a diferença média de temperaturas e A a área de transferência de calor.

Através da equação (2.7) é possível dimensionar a área de transferência de calor, sendo necessário para tal determinar inicialmente todas as outras variáveis da equação.

O caudal térmico pode calcular-se através de balanços energéticos aos fluidos, obtendo-se assim

as equações,

$$Q = M_{V,q}\rho_q C_{p,q} (T_{q,e} - T_{q,s}) = M_q C_{p,q} (T_{q,e} - T_{q,s}), \quad (2.8)$$

$$Q = M_{V,f}\rho_f C_{p,f} (T_{f,s} - T_{f,e}) = M_f C_{p,f} (T_{f,s} - T_{f,e}), \quad (2.9)$$

cujas incógnitas dizem apenas respeito às condições de operação e propriedades dos fluidos, sendo totalmente independentes das características do permutador.

Nas equações acima, M_V e $M (= \rho M_V)$ são caudais volumétricos e mássicos, respectivamente, ρ é a massa específica do fluido e C_p é a capacidade calorífica dos fluidos à temperatura média.

Geralmente, a equação (2.7) é escrita não em função da diferença média de temperaturas mas sim de uma aproximação desta grandeza, a diferença média de temperaturas logarítmica, $(\Delta T)_{ml}$, cuja expressão se deduz em seguida, tendo em consideração a Figura 2.7 [25, p. 19].

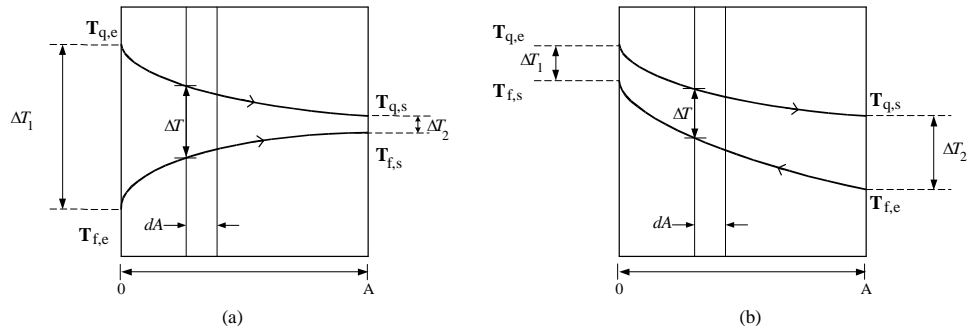


Figura 2.7: Perfis de temperatura para fluxo em (a) co-corrente ; (b) contra-corrente [25, p. 19].

Para um elemento de área dA tem-se, da equação (2.7):

$$dQ = U dA (\Delta T)_m. \quad (2.10)$$

Considerando os balanços efectuados aos dois fluidos, equações (2.8) e (2.9), resulta

$$dQ = M_q C_{p,q} (-dT_q) = M_f C_{p,f} (\pm dT_f) \quad (2.11)$$

donde,

$$dT_q = \frac{-1}{M_q C_{p,q}} dQ \quad (2.12)$$

e

$$dT_f = \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} dQ. \quad (2.13)$$

Tendo em considerações as relações (2.10), (2.12) e (2.13), o incremento da diferença de

temperaturas, $d(\Delta T)$, pode calcular-se através da equação

$$\begin{aligned}
 d(\Delta T) &= d(T_q - T_f) = dT_q - dT_f \\
 &= \left[\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right] dQ \\
 &= \left[\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right] U dA \Delta T.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Assim, obtém-se a equação

$$\frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = \left[\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right] U dA,$$

que após integração entre a entrada e saída do sistema de transferência de calor, representado na Figura 2.6, conduz a

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d(\Delta T)}{\Delta T} = \int_0^A \left(\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right) U dA \Leftrightarrow \ln \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \left(\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right) U A. \tag{2.15}$$

Por integração da equação (2.14) entre a entrada e saída do sistema é possível obter uma relação entre Q e as diferenças de temperatura ΔT_1 e ΔT_2 :

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} d(\Delta T) = \int_0^Q \left(\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right) dQ \Leftrightarrow \Delta T_2 - \Delta T_1 = \left(\frac{-1}{M_q C_{p,q}} - \frac{\pm 1}{M_f C_{p,f}} \right) Q. \tag{2.16}$$

Resolvendo a equação (2.15) em ordem ao termo que se encontra entre parêntesis e substituindo esse resultado em (2.16) obtém-se:

$$Q = U A \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)}. \tag{2.17}$$

Comparando esta equação com a equação geral de projecto (2.7), $(\Delta T)_m$ pode ser escrita como a diferença média de temperaturas logarítmica, $(\Delta T)_{ml}$, pois

$$(\Delta T)_{ml} = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\ln \left(\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} \right)}. \tag{2.18}$$

No entanto, em permutadores reais as diferenças de temperatura média, $(\Delta T)_m$, e a diferença média de temperaturas logarítmica, $(\Delta T)_{ml}$, podem não ser iguais, pelo que é introduzido um

factor de correcção, F , na equação geral de projecto, obtendo-se:

$$Q = UAF (\Delta T)_{ml}. \quad (2.19)$$

O valor do parâmetro de correcção F é função do permutador em estudo, existindo representações gráficas nas quais este factor toma a forma de uma função [26]

$$F = g(\varepsilon, R),$$

onde a eficiência do permutador, ε , e o factor R são dados por:

$$\varepsilon = \frac{\text{Caudal térmico real}}{\text{Caudal térmico máximo permitido pelo permutador}} = \frac{T_{f,s} - T_{f,e}}{T_{q,e} - T_{f,e}}, \quad (2.20)$$

$$R = \frac{M_{V,f} \rho_f C_{p_f}}{M_{V,q} \rho_q C_{p_q}} = \frac{T_{q,e} - T_{q,s}}{T_{f,s} - T_{f,e}}. \quad (2.21)$$

No permutador de placas a transferência de calor ocorre através de condução, no interior da parede que separa os fluidos e por convecção, entre a parede e os dois fluidos (Figura 2.8), pelo que estes dois fenómenos têm de ser contabilizados no coeficiente global de transferência de calor.

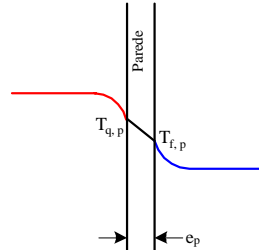


Figura 2.8: Transferência de calor por condução e convecção, simultaneamente.

O caudal de calor transferido em cada uma das zonas representadas na figura acima, fluidos quente e frio e parede pode determinar-se através das equações

$$Q_q = h_q A_q (T_q - T_{q,p}), \quad (2.22)$$

$$Q_f = h_f A_f (T_{f,p} - T_f), \quad (2.23)$$

$$Q_p = \frac{\lambda_p}{e_p} A_p (T_{q,p} - T_{f,p}), \quad (2.24)$$

respectivamente.

Nas equações acima, h é o *coeficiente convectivo de transferência de calor*, e_p a espessura da parede e λ_p a *condutividade térmica da parede*.

Em estado estacionário os três caudais térmicos são iguais, $Q_q = Q_f = Q_p = Q$, pelo que:

$$\begin{aligned} T_q - T_{q,p} &= \frac{Q}{h_q A_q}, \\ T_{f,p} - T_f &= \frac{Q}{h_f A_f}, \\ T_{q,p} - T_{f,p} &= Q \frac{e_p}{\lambda_p A_p}. \end{aligned}$$

Somando as três equações obtém-se a expressão

$$T_q - T_f = Q \left[\frac{1}{h_q A_q} + \frac{1}{h_f A_f} + \frac{e_p}{\lambda_p A_p} \right],$$

que resolvida em ordem a Q permite obter a relação:

$$Q = \frac{1}{\frac{1}{h_q A_q} + \frac{1}{h_f A_f} + \frac{e_p}{\lambda_p A_p}} (T_q - T_f). \quad (2.25)$$

Por comparação das equações (2.7) e (2.25) pode concluir-se que:

$$UA = \frac{1}{\frac{1}{h_q A_q} + \frac{1}{h_f A_f} + \frac{e_p}{\lambda_p A_p}}. \quad (2.26)$$

A parede que separa os dois fluidos é bastante fina, pelo que a resistência térmica da parede é desprezável, ou seja,

$$\frac{e_p}{\lambda_p A_p} \cong 0$$

e as áreas de transferência de calor para os fluidos quente, A_q , e frio, A_f , são praticamente iguais entre si e iguais à área de transferência de calor total, A . Assim, após introduzir estas simplificações na equação (2.26) e resolvendo a equação resultante em ordem a U , obtém-se a expressão que permite o cálculo do coeficiente global de transferência de calor para um permutador de placas:

$$U = \frac{1}{\frac{1}{h_q} + \frac{1}{h_f}}. \quad (2.27)$$

Da equação(2.27) pode verificar-se que para determinar o coeficiente global de transferência de calor é necessário conhecer os coeficientes convectivos de transferência de calor, cujos valores são determinados através de correlações empíricas. Uma das correlações mais utilizada é a lei de Dittus-Boelter [26]:

$$Nu = a Re^b Pr^c \left(\frac{\eta}{\eta_p} \right)^d, \quad (2.28)$$

onde a , b , c , d são coeficientes determinados pelo construtor (podendo indicar-se os seguintes valores médios: $a = 0,28$; $b = 0,65$; $c = 0,4$ e $d = 0,14$), η é a viscosidade do fluido, η_p é a viscosidade do fluido junto à parede e as restantes variáveis são números adimensionais cuja definição é:

$$Nu = \frac{hD_{eq}}{\lambda} \quad (\text{Número de Nusselt}),$$

$$Re = \frac{\rho v D_{eq}}{\eta} \quad (\text{Número de Reynolds}),$$

$$Pr = \frac{C_p \eta}{\lambda} \quad (\text{Número de Prandtl}).$$

Nas relações anteriores, D_{eq} é o diâmetro equivalente e v a velocidade média do fluido.

No caso de fluidos cuja viscosidade apresenta uma forte dependência com a temperatura, os processos de transferência de calor provocam importantes variações radiais na viscosidade do fluido na vizinhança da parede, o que implica alterações dos perfis de velocidade. Assim, torna-se necessário utilizar uma expressão de correcção que permita contabilizar este efeito nas correlações empíricas anteriormente citadas. A expressão mais utilizada é a de Sieder et Tate, que toma a forma $\left(\frac{\eta}{\eta_p}\right)^d$ [27], e já está contabilizada na lei de Dittus-Boelter (2.28).

No entanto, quando se está perante regime turbulento a correcção de Sieder et Tate pode ser desprezada [26].

Nos permutadores de placas, os canais através dos quais se processa o escoamento dos fluidos não apresentam uma geometria da qual possamos determinar o diâmetro com facilidade pois, inclusivamente, ele não toma um valor constante ao longo de todo o canal. É por este motivo que nas definições dos números adimensionais surge o diâmetro equivalente que, para uma conduta, se define como [28]:

$$D_{eq} = 4 \frac{\text{Área da secção recta de passagem}}{\text{Perímetro molhado}}. \quad (2.29)$$

Uma vez que é bastante difícil identificar a geometria dos canais formados entre as placas, considera-se que estes têm a geometria de um canal rectangular de dimensões b e w (Figura 2.9).

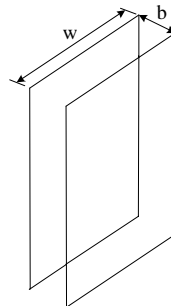


Figura 2.9: Esquema de um canal rectangular para cálculo do diâmetro equivalente.

Atendendo à simplificação considerada, a equação (2.29) toma a forma,

$$D_{eq} = 2 \frac{bw}{b+w}. \quad (2.30)$$

A distância entre as placas, aproximada pela dimensão b , é em geral muito inferior ao comprimento do canal, representado aproximadamente por w , pelo que a equação (2.30) pode escrever-se na forma:

$$D_{eq} \cong 2b. \quad (2.31)$$

De (2.31) conclui-se então que o diâmetro equivalente corresponde, aproximadamente, ao dobro do espaçamento entre placas.

Após a definição de todas as grandezas intervenientes na equação geral de projecto, é agora possível resolver a equação (2.7) em ordem à área total de transferência de calor, A .

No caso dos permutadores de placas, a queda de pressão é outro parâmetro muito importante a ter em consideração no seu dimensionamento e pode determinar-se através da equação [26],

$$\Delta p = 2f \frac{L}{D_{eq}} v^2 \rho, \quad (2.32)$$

onde f é o Factor de Fanning e pode ser representado por

$$f = mRe^n, \quad (2.33)$$

em que m e n são coeficientes determinados pelo construtor e que estão relacionados com o tipo de placas. Em regime turbulento estes parâmetros poderão tomar valores dentro dos seguintes intervalos: $2 \leq m \leq 5$ e $-0,3 \leq n \leq -0,2$. Para escoamentos laminares $n = -1$ e o valor de m depende da geometria da placa, mais concretamente do ângulo da corrugação, tendo-se verificado que para ângulos inferiores a 40° $m = 24$ [30].

2.3 Formulação Matemática

Para além das equações constitutivas apresentadas no Capítulo 1 um escoamento tem de obedecer a princípios de conservação de massa, momento e energia, pelo que a formulação matemática de um problema de mecânica de fluidos consiste em encontrar as relações matemáticas que traduzam estes princípios. A este conjunto de equações dá-se o nome de *Equações de Navier-Stokes* [29].

Conservação de Massa

Segundo o *Princípio de Conservação de Massa*, a massa de um corpo em movimento mantém-

se constante ao longo do tempo. Matematicamente, este princípio traduz-se pela relação [3, p. 326]:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0, \quad (2.34)$$

onde m é a massa do corpo. Esta grandeza pode ser determinada através da equação

$$m = \int_V \rho dV, \quad (2.35)$$

onde V é o volume do corpo e $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ é a massa específica do material no ponto \mathbf{x} no instante de tempo t .

Substituindo (2.35) em (2.34) tem-se:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho dV = 0. \quad (2.36)$$

Por forma a determinar a derivada material presente na equação supracitada pode recorrer-se ao Teorema 2.1, cujo enunciado se encontra em seguida [3, p. 274].

Teorema 2.1 *Seja ϕ um escalar, um componente de um vector ou de um tensor na forma espacial. Então, para um corpo de volume V , na configuração corrente, verifica-se:*

$$\frac{D}{Dt} \int_V \phi dV = \int_V \left(\frac{D\phi}{Dt} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV. \quad \blacksquare$$

Assim, (2.36) pode ser reescrita na forma:

$$\int_V \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = 0$$

e, uma vez que esta relação deve verificar-se qualquer que seja o volume V , tem-se

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2.37)$$

para qualquer ponto \mathbf{x} do corpo e qualquer instante de tempo t .

A equação (2.37) designa-se *equação de conservação de massa* ou *equação de continuidade* e pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.38)$$

que resulta da aplicação da definição da derivada material, equação (1.9), e da relação (2.39)

existente para a divergência de um vector da forma $\phi \mathbf{u}$ com $\phi = \phi(\mathbf{x})$ e \mathbf{u} um vector [3, p. 119]:

$$\text{div}(\phi \mathbf{u}) = \phi \text{div} \mathbf{u} + \nabla \phi \cdot \mathbf{u}. \quad (2.39)$$

Para fluidos incompressíveis a massa específica é constante, pelo que a equação de conservação de massa para estes materiais se reduz a:

$$\rho \text{div} \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (2.40)$$

Conservação de Momento Linear

O *momento linear* de um corpo, \mathbf{p} , é dado pelo produto da sua massa pela velocidade. Tendo em conta (2.35) pode escrever-se:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \int_V \rho \mathbf{v} dV. \quad (2.41)$$

Pelo *Princípio de Conservação de Momento Linear* postula-se que a variação temporal do momento é igual às forças aplicadas no corpo, $\mathbf{f}^{(r)}$, pelo que matematicamente se pode escrever a relação [3, p. 332]:

$$\frac{D\mathbf{p}}{Dt} = \mathbf{f}^{(r)}. \quad (2.42)$$

A força total aplicada num corpo é dada pela soma das forças internas e forças superficiais definidas na Secção 1.3. Assim, para um corpo de volume V e superfície S a equação (2.42) pode ser escrita na forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \underbrace{\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} dS}_{(1)} + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{g} dV}_{(2)}, \quad (2.43)$$

onde (1) diz respeito às forças superficiais, que são dadas pelo vector das tensões, $t_n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}$, e (2) refere-se às forças internas, tais como a gravidade, que tem associado o vector aceleração da gravidade, \mathbf{g} .

Por forma a transformar os integrais de superfície presentes em (2.43) em integrais de volume recorre-se ao Teorema da Divergência, Teorema 2.2 [3, p. 143].

Teorema 2.2 (Teorema da Divergência) *Seja V o volume de uma região tridimensional de fronteira fechada e regular S . Então, para um tensor \mathbf{A} definido em V e S ,*

$$\int_V \text{div} \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \hat{\mathbf{n}} dS,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal a S . ■

Assim, a equação (2.43) pode escrever-se apenas em função de integrais de volume,

$$\int_V \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{T}^T dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T}^T + \rho \mathbf{g}) dV \quad (2.44)$$

e, atendendo ao facto de \mathbf{T} ser um tensor simétrico ($\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$), a expressão (2.44) é equivalente a:

$$\int_V \left[\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \right] dV = 0. \quad (2.45)$$

Dado que a equação (2.45) deve ser válida para qualquer volume V , tem-se

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} = 0 \Leftrightarrow \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.46)$$

A equação (2.46) designa-se *equação de conservação do momento linear* e em conjunto com a expressão (2.37) são usualmente designadas por *equações de movimento*.

De acordo com a definição da derivada $\frac{D}{Dt}$ a equação de conservação de momento pode ainda escrever-se na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} - \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}), \quad (2.47)$$

e para fluidos incompressíveis toma a forma:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{g} - \rho \operatorname{div}(\mathbf{v} \mathbf{v}). \quad (2.48)$$

Conservação de Energia

Segundo o *Princípio de Conservação de Energia* ou *1ª Lei da Termodinâmica*, a variação temporal da energia total de um corpo toma o valor da soma da variação do trabalho associado às forças externas que actuam sobre o volume e a superfície do material e o calor contido nesse volume. Assim, este princípio exprime-se matematicamente através da relação [3, p. 345]:

$$\frac{D}{Dt}(E_c + E_i) = P + (H - Q), \quad (2.49)$$

onde E_c representa a energia cinética do corpo, E_i a sua energia interna, P a potência das forças exteriores que actuam no corpo, H a quantidade de calor gerado no interior do corpo, por unidade de tempo, e Q a quantidade de calor que sai do material através da sua superfície, pelo que $(H - Q)$ representa a quantidade de calor armazenado no volume. As expressões que definem

estas grandezas são:

$$\begin{aligned}
 E_c &= \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV, \\
 E_i &= \int_V \rho \epsilon dV, \\
 P &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dS, \\
 H &= \int_V \rho h dV, \\
 Q &= \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS,
 \end{aligned}$$

onde ϵ é a energia interna por unidade de massa ou energia específica, h é um escalar que se determina experimentalmente e \mathbf{q} é o fluxo de calor.

Atendendo a estas definições, a equação (2.49) pode escrever-se na forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \epsilon \right) dV = \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dS + \int_V \rho h dV - \int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (2.50)$$

O primeiro membro da expressão anterior pode ser escrito como¹ [3, p. 346]:

$$\frac{D}{Dt} \int_V \rho \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \epsilon \right) dV = \int_V \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \epsilon \right) dV = \int_V \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{D\epsilon}{Dt} \right) dV. \quad (2.51)$$

Pelo Teorema da Divergência tem-se:

$$\int_S \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{div} \mathbf{q} dV, \quad (2.52)$$

$$\int_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} dS = \int_V \text{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV, \quad (2.53)$$

Atendendo à igualdade (2.54), existente para a divergência de um vector da forma $\mathbf{A}\mathbf{u}$ em que \mathbf{A} é um tensor cartesiano de 2ª ordem e \mathbf{u} um vector,

$$\text{div} (\mathbf{A}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \text{div} \mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (2.54)$$

¹ $\frac{D}{Dt} \int_V \rho \phi dV = \int_V \rho \frac{D\phi}{Dt} dV$ é um resultado utilizado e pode deduzir-se a partir da equação de continuidade, tendo em conta a relação (2.39).

a relação (2.53) pode ainda escrever-se na forma:

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{T}^T + \mathbf{T}^T \cdot \nabla \mathbf{v}) dV = \int_V (\mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV. \quad (2.55)$$

Tendo em consideração (2.51), (2.52) e (2.55) a equação (2.50) conduz a:

$$\begin{aligned} \int_V \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{D\epsilon}{Dt} \right) dV &= \int_V \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V (\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV + \int_V \rho h dV - \int_V \operatorname{div} \mathbf{q} dV \\ &\Leftrightarrow \int_V \left[\rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{D\epsilon}{Dt} \right) - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{T} - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho h + \operatorname{div} \mathbf{q} \right] dV = 0. \end{aligned}$$

Uma vez que V é um volume arbitrário, tem-se

$$\begin{aligned} \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \frac{D\epsilon}{Dt} \right) - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho h + \operatorname{div} \mathbf{q} &= 0 \\ \Leftrightarrow \rho \frac{D\epsilon}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \left(\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} - \rho \mathbf{g} - \operatorname{div} \mathbf{T} \right) - \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho h + \operatorname{div} \mathbf{q} &= 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

que, atendendo à equação de conservação de momento linear, (2.48), conduz à *equação de conservação de energia*,

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho h - \operatorname{div} \mathbf{q}. \quad (2.57)$$

No caso de um escoamento em estado estacionário, ou seja, independente do tempo, (2.57) poderá ser simplificada obtendo-se:

$$\mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho h - \operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \quad (2.58)$$

Em suma, o escoamento de um fluido incompressível, caso do iogurte, em estado estacionário, rege-se pelas equações (2.40), (2.48) e (2.58) que constituem um sistema de 5 equações diferenciais de derivadas parciais:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \text{equação de continuidade} \\ \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i - \rho \frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j} = 0 \quad \rightarrow \text{equação de conservação de momento} \\ T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho h - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \quad \rightarrow \text{equação de conservação de energia} \end{array} \right. \quad (2.59)$$

onde a 1ª equação corresponde a uma equação escalar, a lei de conservação de momento resulta

em três equações escalares e, finalmente, a equação de conservação de energia é representada por uma só equação escalar.

Neste sistema de equações diferenciais existem 13 incógnitas: as componentes do vector velocidade ($v_i, i = 1, 2, 3$), as componentes do vector fluxo de calor ($q_i, i = 1, 2, 3$), as componentes do tensor das tensões totais² ($T_{ij}, i, j = 1, 2, 3$) e h . Admite-se que ρ é uma grandeza conhecida. Torna-se assim clara a necessidade de considerar equações adicionais para que se possa resolver um problema de escoamento. Estas equações devem representar as características dos materiais em estudo, ou seja, as equações adicionais são as equações constitutivas, já apresentadas no Capítulo 1.

Assim, para o escoamento em estudo, ou seja, fluxo de iogurte num permutador de placas em estado estacionário, as equações necessárias são:

$$\begin{array}{l}
 \text{Equações de Navier-Stokes} \\
 \\
 \text{Equação Constitutiva} \\
 \text{(Viscosa)} \\
 \\
 \text{Equação Constitutiva} \\
 \text{(Viscoelástica)}
 \end{array}
 \left\| \begin{array}{l}
 \text{Sistema de equações diferenciais (2.59)} \\
 \hookrightarrow \rho = 1068 \text{kgm}^{-3} \text{ [16]} \\
 \\
 \sigma = (k_2 \dot{\gamma}^n) \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right) \\
 \hookrightarrow n = 0,42; k_2 = 3,65 \text{Pa s}^n; E_a/R = 3394,32 \text{K} \text{ [16, 19]} \\
 \\
 \sigma = \int_{-\infty}^t M(t-t') \exp(-\alpha\sqrt{t-t'}) B(t-t') dt' \\
 \hookrightarrow \alpha = 0,23; \beta = 0,1
 \end{array} \right.$$

onde a equação constitutiva viscosa resulta de estudos reológicos efectuados por Afonso et al. [18], nos quais se verificou que este escoamento correspondia a $\sigma > 6,7 \text{Pa}$, e que já foram abordados de forma mais exhaustiva na Secção 2.1.2. Por outro lado, a equação viscoelástica resulta da modelação viscoelástica efectuada no presente trabalho (Secção 2.1.2).

²Relativamente ao tensor das tensões totais basta determinar 6 componentes para que este fique totalmente definido, uma vez que se trata de um tensor simétrico.

Capítulo 3

Simulação Numérica Viscosa

A resolução numérica do problema viscoso apresentado no Capítulo 2 (p. 64) consiste na resolução das Equações de Navier-Stokes (equação (2.59), p. 63), logo pode afirmar-se que a solução do problema em estudo existe e é única [30, p. 913].

A simulação foi efectuada computacionalmente usando o *software* POLYFLOW, programa da área de Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD) que implementa o Método de Elementos Finitos, e tem associados dois pré-processadores: GAMBIT e POLYDATA. Este processo pode dividir-se em quatro etapas (Apêndice A):

- Construção da geometria em estudo, efectuada no pré-processador GAMBIT;
- Geração da malha, também por utilização do GAMBIT;
- Definição do problema, ou seja, definição de todas as propriedades e condições de fronteira associadas ao sistema em estudo, por construção de um ficheiro de dados no pré-processador POLYDATA;
- Resolução numérica do problema de elementos finitos com recurso ao POLYFLOW.

Neste capítulo começar-se-á por apresentar o modo como se implementou este método ao problema em estudo e por fim apresentar-se-ão os resultados numéricos obtidos.

3.1 Domínio Geométrico

No presente trabalho pretende-se estudar as características hidrodinâmicas do escoamento de iogurte num permutador de placas que opera em paralelo e contra-corrente. Este permutador é constituído por 17 placas cujas características geométricas mais importantes se encontram sumariadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Características das placas.

| | |
|--|-------------|
| Modelo da Placa | RS 22 |
| Corrugação | Herringbone |
| Ângulo da Corrugação | 30° |
| Condutividade Térmica, λ_p ($Wm^{-1}K^{-1}$) | 16,3 |
| Área Superficial da Placa, A (m^2) | 0,015 |
| Altura (m) | 0,265 |
| Altura efectiva, L (m) | 0,13 |
| Largura (m) | 0,102 |
| Largura efectiva, l (m) | 0,072 |
| Espessura, $e_p \times 10^3$ (m) | 0,5 |
| Comprimento de onda, $l_o \times 10^3$ (m) | 10 |
| Amplitude da Corrugação, $a_p \times 10^3$ (m) | 1,3 |

As dimensões efectivas e a área superficial apresentadas dizem respeito à região das placas em que se processa efectivamente transferência de calor, região em que se efectuará a simulação (Figura 3.1). A área superficial citada toma um valor superior ao que se obteria no caso das placas serem planas ($0,072 \times 0,13 = 0,0936m^2$), facto que vem de encontro a uma das vantagens associadas aos permutadores de placas, e que deverá ser tido em conta sempre que se efectuem cálculos de projecto através da introdução de um factor correctivo da área efectiva da placa, ϱ , que neste caso tomará o valor 1,602564 ($A = \varrho Ll$).

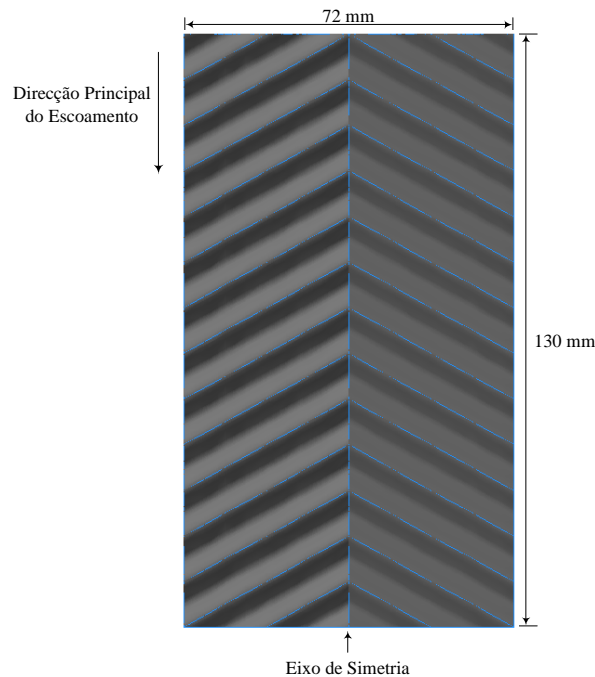


Figura 3.1: Região de efectiva transferência de calor (vista frontal).

Considerando que o fluxo é uniforme, e atendendo ao facto do permutador operar em paralelo, a simulação far-se-á apenas num dos oito canais formados entre duas placas e onde circula iogurte. Assim, a geometria em estudo é uma unidade tridimensional constituída por duas placas em fase que estão em contacto em vários pontos que serão designados por pontos de contacto (Figuras 3.2 e 3.3). Tem-se ainda em conta a existência de um eixo de simetria (Figura 3.1) pelo que apenas se considera metade do canal de modo a minimizar o esforço de cálculo envolvido no processo computacional.

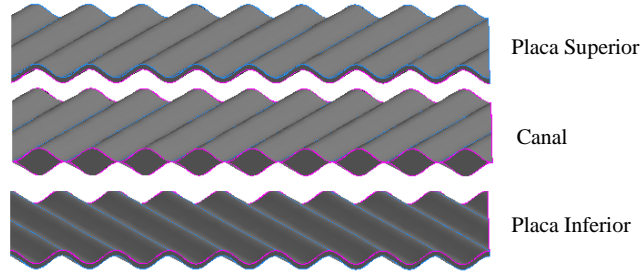


Figura 3.2: Elemento periódico de um canal de um permutador de placas.

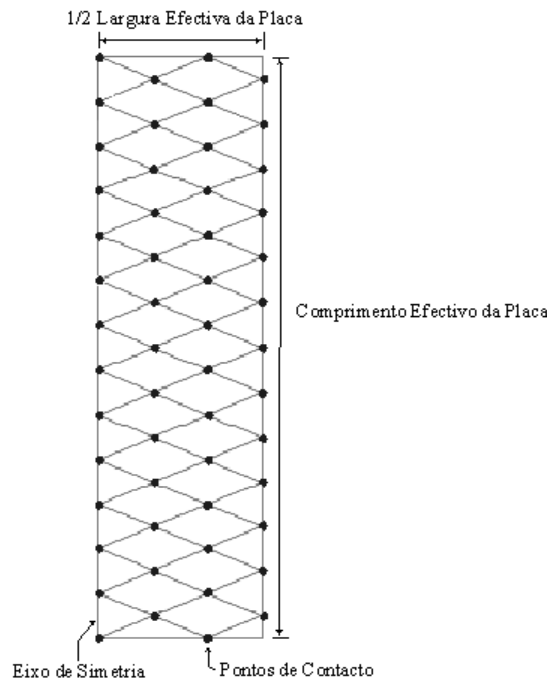


Figura 3.3: Pontos de Contacto.

A geometria é implementada no pré-processador GAMBIT tendo em conta que uma corrugação sinusoidal de um permutador de calor pode ser descrita por uma função sinusoidal de equação [29]:

$$y(x) = a_p \sin \left(\frac{2\pi}{l_o} \left(x - \frac{l_o}{4} \right) \right) + a_p. \quad (3.1)$$

Para a corrugação em causa, a equação (3.1) toma a forma:

$$y(x) = 0,0013 \sin(200\pi x - 0,5\pi) + 0,0013,$$

onde y e x são dados em metros.

Através do conhecimento desta relação marcam-se 100 pontos (Figura 3.4) que são unidos posteriormente obtendo-se assim a corrugação pretendida, e a partir da qual se efectua a construção da geometria.

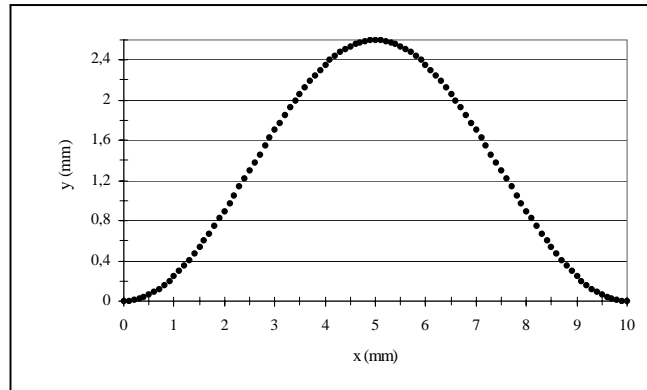


Figura 3.4: Corrugação.

Atendendo às restantes características apresentadas na Tabela 3.1 a geometria do canal no qual se efectua a simulação é a representada na Figura 3.5 onde $0 \leq x \leq 0,13m$, $-3,6 \times 10^{-3} \leq y \leq 3,6 \times 10^{-3}m$ e $0 \leq z \leq 0,036m$ sendo o plano de simetria o plano de equação $z = 0$.

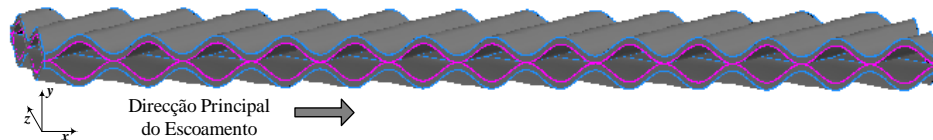


Figura 3.5: Geometria do canal considerando o eixo de simetria.

Dada a complexidade dos canais do permutador, a simulação foi também efectuada num pequeno elemento desse canal ao qual se atribuiu a designação de corte (Figura 3.6) de modo a verificar qual o comportamento do escoamento em torno dos pontos de contacto.

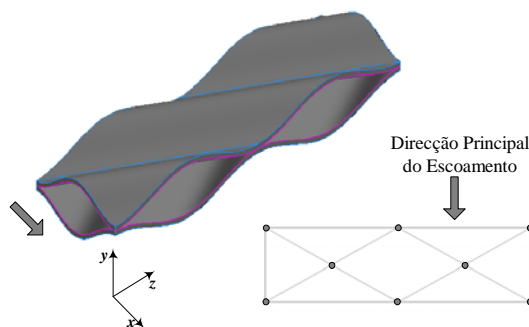


Figura 3.6: Geometria de um elemento do canal - Corte.

3.2 Geração de Malha

O Método de Elementos Finitos é um método muito utilizado na resolução numérica de equações diferenciais. Para o implementar é necessário definir o domínio do problema e em seguida proceder à sua discretização, isto é, dividi-lo em pequenos elementos designados por elementos finitos que em conjunto definem uma triangulação do domínio, isto é, a malha.

O domínio do escoamento em estudo é bastante complexo uma vez que possui regiões em que existe uma diminuição bastante acentuada da área de secção recta, havendo mesmo pontos em que as paredes que delimitam o canal entram em contacto. Com base nesta característica optou-se por construir uma malha que utiliza preferencialmente elementos tetraédricos conjugando-os, sempre que necessário, com elementos hexaédricos, piramidais e prismáticos, possuindo cada um deles 4, 8, 5 e 6 nós respectivamente (Figura 3.7).

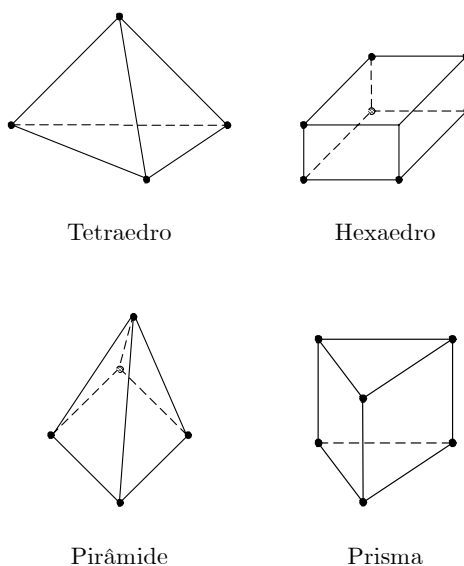


Figura 3.7: Tipo de Elementos usados na simulação numérica(adaptado de [31, p. 5-2]).

Por forma a testar a independência dos resultados em relação à malha gerada efectuaram-se simulações com base em discretizações com distâncias distintas entre os nós existentes nas arestas: 2 mm, 1,5 mm, 1,2 mm e 1 mm. De referir que o valor mínimo foi condicionado pelo *hardware*¹ disponível.

Relativamente aos perfis de velocidade obtidos nas várias simulações, e conseqüentemente do seu valor médio, verificou-se uma grande discrepância entre os resultados obtidos com as malhas de distância nodal de 2 e 1 mm (Tabela 3.2). No caso da primeira malha obteve-se uma grande região de velocidade nula, tendo-se verificado que esta diminuía à medida que a distância nodal decrescia, confinando-se às imediações dos pontos de contacto, situação que também se verificou

¹Todo o processo computacional foi efectuado num Pentium IV a 1.60 GHz e 256MB de memória RAM.

no caso do corte. Este facto pode ser explicado atendendo a que se considerou que o fluido possuía velocidade nula junto às paredes do canal, logo os nós presentes nas faces que delimitam o domínio geométrico possuem velocidade nula. Deste modo, quanto maiores forem os elementos a que pertencem estes nós maior será a região em que o efeito da condição de fronteira referida se fará sentir logo, quanto maior for a distância nodal maiores serão as regiões de velocidade nula.

Os valores presentes na Tabela 3.2 permitem ainda concluir que a diminuição da distância nodal a partir de 1,5 *mm* não se traduz numa grande alteração dos valores médios de velocidade.

Tabela 3.2: Velocidade média no plano dos pontos de contacto.

| Distância nodal nas arestas (<i>mm</i>) | v_m (ms^{-1}) |
|---|---------------------|
| 2 | 0,018 |
| 1,5 | 0,024 |
| 1,2 | 0,025 |
| 1 | 0,026 |

Da observação da Figura 3.8, concluiu-se que os perfis de temperatura obtidos nas quatro simulações efectuadas apresentam uma tendência de convergência para um perfil do tipo do apresentado em (d), e que corresponde à malha com menor distância nodal.

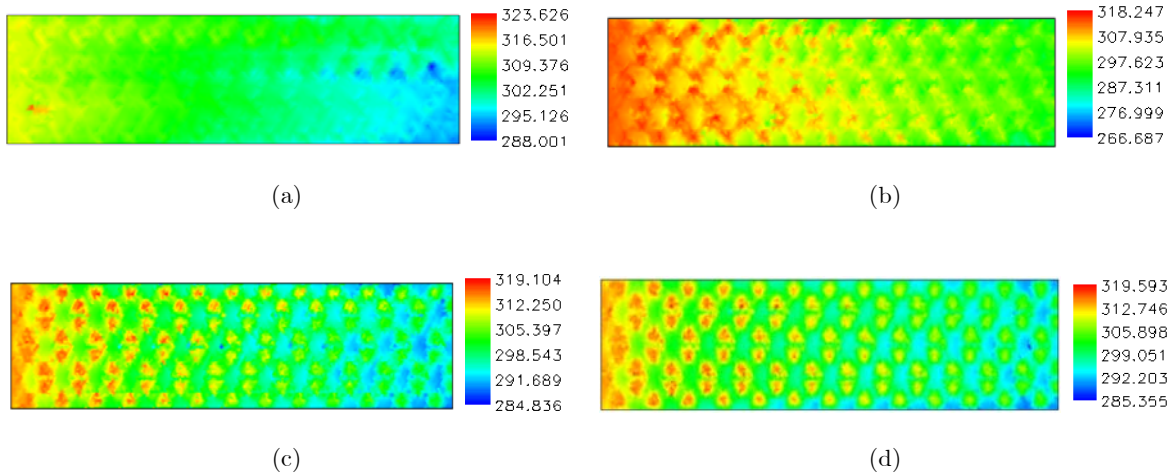


Figura 3.8: Temperatura para malhas de distância nodal: (a) 2mm; (b) 1,5mm; (c) 1,2mm; (d) 1mm.

No que diz respeito ao corte testaram-se também algumas malhas, tendo-se optado por utilizar uma discretização com distância nodal nas arestas de 0,5 *mm* (mínimo possível), o que conduziu a uma malha com 78692 elementos e 16072 nós.

As simulações efectuadas no corte tiveram como objectivo verificar se uma malha mais refinada conduzia a uma relação entre a precisão da aproximação e tempo de cálculo melhor. Analisando o valor médio da velocidade no plano dos pontos de contacto, 0,027 ms^{-1} , pode concluir-se que

uma redução de 1 *mm* para metade na distância nodal nas arestas não se reflecte numa alteração significativa dos resultados numéricos, ou seja, estes apresentam independência relativamente à malha utilizada aquando da redução referida. Situação que vem de encontro ao facto de que reduções em distâncias nodais suficientemente pequenas não levam a alterações significativas nos resultados obtidos.

Assim, decidi utilizar-se na simulação do escoamento no canal uma malha constituída por elementos de distância nodal nas arestas de 1 *mm*, uma vez que os resultados obtidos nas várias simulações convergem para os alcançados com esta malha e estes são corroborados pelas simulações efectuadas no corte. A discretização efectuada com esta distância resultou na geração de uma malha com 161474 elementos e 34373 nós (Figura 3.9).

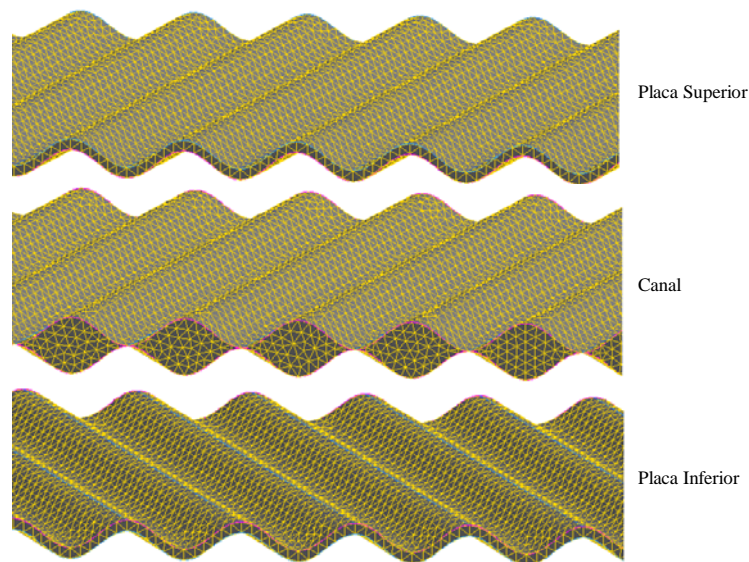


Figura 3.9: Malha de uma parte da Geometria.

3.3 Condições de Fronteira

As condições de fronteira a considerar na resolução numérica de um problema derivam das especificações do escoamento em estudo, pelo que no presente trabalho é necessário ter em conta o caudal volumétrico de iogurte envolvido no processo, a sua temperatura de entrada no sistema de arrefecimento, uma vez que se trata de um escoamento não-isotérmico, e o modo como se processa a transferência de calor ao longo das placas.

De modo a garantir que o problema não se afasta muito do processo real utilizaram-se resultados experimentais obtidos por Afonso et al. aquando dos seus estudos sobre o comportamento reológico do iogurte durante o processo de arrefecimento (Tabela 3.3).

Tabela 3.3: Condições de operação [15].

| | |
|--|-----------------------|
| Número Total de Placas, N_p | 17 |
| Coefficiente Global de Transferência de Calor, U ($Wm^{-2}K^{-1}$) | 777,4 |
| Caudal de iogurte, $M_{V,i}^t$ (m^3s^{-1}) | $3,99 \times 10^{-5}$ |
| Temperatura do iogurte à entrada, $T_{i,e}$ (K) | 314,15 |
| Temperatura do iogurte à saída, $T_{i,s}$ (K) | 293,64 |
| Caudal de água, $M_{V,a}^t$ (m^3s^{-1}) | $1,17 \times 10^{-4}$ |
| Temperatura da água à entrada, $T_{a,e}$ (K) | 278,72 |
| Temperatura da água à saída, $T_{a,s}$ (K) | 284,12 |

Na gama de temperaturas em que efectuaram os estudos, Afonso et al. verificaram que algumas propriedades dos fluidos envolvidos no processo de transferência de calor tais como, massa específica, ρ , capacidade calorífica, C_p , e condutividade térmica, λ , podiam considerar-se constantes, tomando os valores apresentados na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Propriedades físicas da água e iogurte [15].

| Iogurte | | | Água | | |
|-----------------------------|---------------------------|------------------------------|-----------------------------|---------------------------|------------------------------|
| ρ ($\frac{kg}{m^3}$) | C_p ($\frac{J}{kgK}$) | λ ($\frac{W}{mK}$) | ρ ($\frac{kg}{m^3}$) | C_p ($\frac{J}{kgK}$) | λ ($\frac{W}{mK}$) |
| 1068 | 3530 | 0,523 | 999,78 | 4181,8 | 0,597 |

Caudal Volumétrico de Iogurte

O caudal volumétrico de iogurte, $M_{V,i}$, que circula num dos canais do permutador é dado por:

$$M_{V,i} = \frac{M_{V,i}^t}{N_c}, \quad (3.2)$$

onde $M_{V,i}^t$ é o caudal volumétrico total de iogurte que entra no permutador e N_c é o número de canais pelo qual o caudal se divide, sendo

$$N_c = \frac{N_p - 1}{2}, \quad (3.3)$$

uma vez que o permutador opera em paralelo.

Das expressões (3.2) e (3.3) conclui-se que o caudal volumétrico de iogurte que circula num canal é $4,988 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$, o que implica que o caudal em metade do canal será de $2,494 \times 10^{-6} m^3 s^{-1}$ (metade do valor anterior).

Fluxo Térmico ao Longo de uma Placa

Num processo de transferência de calor é importante saber como se processa a troca de calor ao longo do sistema térmico, pelo que se efectuaram simulações com condições de fronteira distintas no que diz respeito ao fluxo de calor transferido do iogurte para a água, a saber:

- Fluxo térmico constante ao longo da placa;
- Fluxo térmico variável ao longo da placa, ou seja, função da altura da placa.

Fluxo Térmico Constante ao Longo da Placa

Efectuando um balanço energético ao iogurte tem-se que o calor transferido do iogurte para a água num canal do permutador é:

$$\begin{aligned} Q &= -M_i C_{p,i} (T_{i,s} - T_{i,e}) \\ &= -M_{V,i} \rho_i C_{p,i} (T_{i,s} - T_{i,e}) \\ &= 385,69 \text{ W}. \end{aligned}$$

Admitindo que Q é constante ao longo do canal, o fluxo de calor em cada placa será dado por $q = \frac{Q}{2A} = 12856 \text{ W m}^{-2}$. Este será o fluxo de calor a considerar em cada placa da geometria em estudo pois, apesar de se considerar apenas metade do canal e, conseqüentemente, metade do calor total transferido, a área de cada placa também é reduzida a metade, ou seja,

$$\begin{aligned} Q_{1/2 \text{ canal}} &= \frac{Q}{2} \\ \Rightarrow Q_{1/2 \text{ canal/placa}} &= \frac{Q_{1/2 \text{ canal}}}{2} = \frac{Q}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{Q_{1/2 \text{ canal/placa}}}{A_{1/2 \text{ placa}}} &= \frac{Q}{\underbrace{4A_{1/2 \text{ placa}}}_{\frac{1}{2}A}} = \frac{Q}{2A}. \end{aligned}$$

Fluxo Térmico Variável ao Longo da Placa

Para determinar a expressão que define o fluxo de calor transferido do iogurte para a água em função da altura da placa, $q(x) = \frac{dQ}{dA}(x)$, recorre-se a um processo análogo ao já apresentado na Secção 2.2.2, como se passa a descrever.

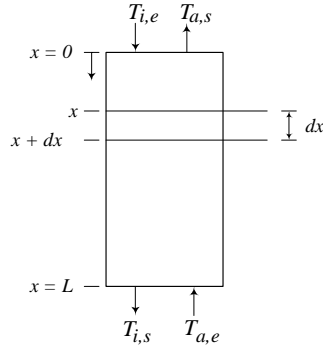


Figura 3.10: Representação esquemática de um elemento infinitesimal de uma placa.

Aplicando a equação de projecto de um permutador de placas a um elemento de área infinitesimal de área dA (Figura 3.10) admitindo que as temperaturas se mantêm constantes nesse elemento, o fluxo de calor transferido do iogurte para a água é:

$$dQ = UFdA(T_i(x) - T_a(x)),$$

onde $dA = l\rho dx$ com dx a altura infinitesimal do elemento, l a largura da placa, T_i a temperatura do iogurte e T_a a temperatura da água. Assim,

$$dQ = UFl\rho dx (T_i(x) - T_a(x)) \Leftrightarrow \frac{dQ}{dx} = UFl\rho (T_i(x) - T_a(x)). \quad (3.4)$$

Efectuando balanços energéticos ao iogurte e água, de acordo com a equação (2.10), e atendendo a que o permutador opera em contra-corrente, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{M_i}{2} C_{p,i} (T_{i,e} - T_i(x)) &= \frac{M_a}{2} C_{p,a} (T_{a,s} - T_a(x)) \\ \Leftrightarrow T_{a,s} - T_a(x) &= \frac{M_i C_{p,i}}{M_a C_{p,a}} (T_{i,e} - T_i(x)). \end{aligned}$$

A expressão anterior permite escrever uma relação que possibilita a determinação da temperatura da água para qualquer ponto da placa em função da temperatura do iogurte:

$$T_a(x) = T_{a,s} - C (T_{i,e} - T_i(x)), \quad (3.5)$$

onde $C = \frac{M_i C_{p,i}}{M_a C_{p,a}}$.

Substituindo (3.5) em (3.4) tem-se:

$$\frac{dQ}{dx}(x) = UFl\rho [T_i(x) (1 - C) - T_{a,s} + CT_{i,e}]. \quad (3.6)$$

Por outro lado, o caudal térmico pode ser determinado através de um balanço energético

infinitesimal ao iogurte, pelo que $\frac{dQ}{dx}$ pode calcular-se através da relação:

$$\frac{dQ}{dx}(x) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{M_i}{2} C_{p,i} T_i \right).$$

Assim, pode escrever-se:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(\frac{M_i}{2} C_{p,i} T_i \right) &= UFl\varrho [T_i(x) (1 - C) - T_{a,s} + CT_{i,e}] \\ \Leftrightarrow \frac{1}{T_i(x) (1 - C) - T_{a,s} + CT_{i,e}} dT_i &= -\frac{2UFl\varrho}{M_i C_{p,i}} dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Integrando (3.7) entre a entrada do permutador ($x = 0$) e um ponto genérico x no qual a temperatura do iogurte é $T_i(x)$ tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{T_{i,e}}^{T_i(x)} \frac{1}{T_i(x) (1 - C) - T_{a,s} + CT_{i,e}} dT_i &= \int_0^x -\frac{2UFl\varrho}{M_i C_{p,i}} dx \\ \Leftrightarrow \ln \left| \frac{T_i(x) (1 - C) - T_{a,s} + CT_{i,e}}{T_{i,e} (1 - C) - T_{a,s} + CT_{i,e}} \right| &= -\frac{2UFl\varrho}{M_i C_{p,i}} (1 - C) x. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Resolvendo a equação (3.8) em ordem a $T_i(x)$ obtém-se:

$$T_i(x) = \frac{1}{1 - C} \left\{ (T_{i,e} - T_{a,s}) \exp \left[2UFl\varrho x \left(\frac{1}{M_a C_{p,a}} - \frac{1}{M_i C_{p,i}} \right) \right] + T_{a,s} - CT_{i,e} \right\}. \quad (3.9)$$

Das equações (3.5) e (3.9) pode determinar-se a diferença de temperaturas para qualquer valor de x , a saber

$$(T_i - T_a)(x) = (T_{i,e} - T_{a,s}) \exp \left[2UFl\varrho x \left(\frac{1}{M_a C_{p,a}} - \frac{1}{M_i C_{p,i}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.4) obtém-se a relação:

$$\frac{dQ}{dx}(x) = UFl\varrho (T_{i,e} - T_{a,s}) \exp \left[2UFl\varrho x \left(\frac{1}{M_a C_{p,a}} - \frac{1}{M_i C_{p,i}} \right) \right]. \quad (3.11)$$

Logo, o fluxo de calor pode calcular-se, para qualquer valor de x , através da expressão:

$$\frac{dQ}{dA}(x) = q(x) = UF (T_{i,e} - T_{a,s}) \exp \left[2UFl\varrho x \left(\frac{1}{M_a C_{p,a}} - \frac{1}{M_i C_{p,i}} \right) \right]. \quad (3.12)$$

O coeficiente de transferência de calor presente na equação (3.12) pode ser escrito em função

das condições de operação,

$$U_{teórico} = -1813,07 \ln \left(\frac{0,692T_{i,s} + 0,308T_{i,e} - T_{a,s}}{T_{i,e} - T_{a,s}} \right), \quad (3.13)$$

que conduz a um valor de $U_{teórico} = 1160 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$. Esta relação resulta da resolução de (3.9) em função de U para $x = 0,13$ e, conseqüentemente, $T_i(x) = T_{i,s}$.

Como se pode verificar, o valor supracitado é superior ao registado na Tabela 3.3, $U=777,4 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$, o que pode ser explicado por perdas existentes no sistema real e que não são contabilizadas na expressão (3.13). Uma vez que se verifica esta discrepância pode estudar-se a sua influência nas condições hidrodinâmicas do escoamento, pois os dois valores conduzem a fluxos de calor distintos e que podem ser calculados a partir das relações

$$q_{teórico}(x) = 30,03U_{teórico} \exp(-4,2427 \times 10^{-3}U_{teórico}x) = 34834,8 \exp(-4,921x), \quad (3.14)$$

$$q(x) = 30,03U \exp(-4,2427 \times 10^{-3}Ux) = 23345,32 \exp(-3,298x). \quad (3.15)$$

Contudo, não é possível implementar estas condições de fronteira no POLYFLOW pois este apenas permite considerar fluxo de calor constante ou representá-lo através de uma função linear. Por forma a ultrapassar esta limitação efectuaram-se interpolações lineares que permitem obter dependências lineares entre o fluxo de calor e a altura da placa,

$$q_{teórico}(x) = 34836,77 - 126652x, \quad (3.16)$$

$$q(x) = 23345,322 - 61652,2x. \quad (3.17)$$

tendo-se verificado, através dos dados experimentais conhecidos, que o erro relativo máximo cometido é de cerca de 5% (Figura 3.11).

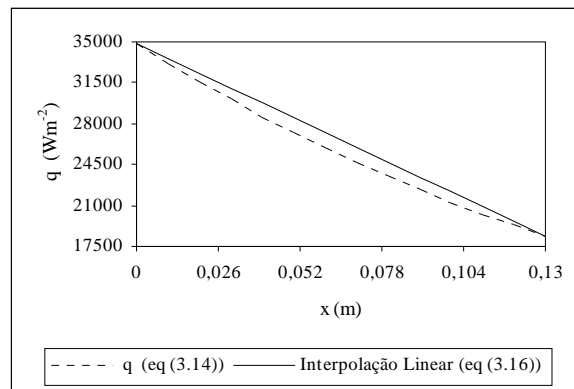


Figura 3.11: Fluxo de calor ao longo de uma placa.

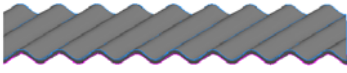

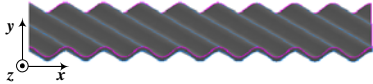
No entanto, uma vez que a simulação é efectuada em metade de um canal, o fluxo de calor transferido do iogurte para a água através de cada placa da geometria em estudo é traduzido pelas expressões

$$q_{teórico}(x) = 17418,385 - 63326x, \quad (3.18)$$

$$q(x) = 11672,661 - 30826,1x. \quad (3.19)$$

que correspondem a metade do valor representado por (3.16) e (3.17), respectivamente.

Em suma, as condições de fronteira a considerar em cada elemento da geometria são:

| | |
|--|--|
| <p>Placa superior</p>  | <p>Problema de Condução de Calor</p> <p>↔ Fluxo de Calor imposto na parede exterior</p> <p>Variável: equações (3.18) e (3.19)</p> <p>Constante: 12856 Wm^{-2}</p> |
| <p>Canal</p>  | <p>Problema de Escoamento de Fluido Não-Newtoniano</p> <p>↔ Entrada ($x = 0$)</p> <p>$M_{V,i} = 2,494 \times 10^{-6} \text{ m}^{-3} \text{ s}^{-1}$</p> <p>$T_{i,e} = 314,15 \text{ K}$</p> |
| <p>Placa inferior</p>  | <p>Problema de Condução de Calor</p> <p>↔ Fluxo de Calor imposto na parede exterior</p> <p>Variável: equações (3.18) e (3.19)</p> <p>Constante: 12856 Wm^{-2}</p> |

3.4 Resolução Numérica

A etapa principal da simulação numérica do escoamento do iogurte no permutador de placas consiste na resolução numérica das equações de Navier-Stokes juntamente com a equação constitutiva:

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = k_2 \dot{\gamma}^{n-1} \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right), \quad (3.20)$$

onde $k_2 = 3,65 \text{ Pas}^{0,42}$, $n = 0,42$ e $E_a/R = 3394,32 \text{ K}$.

O sistema de equações diferenciais a resolver é não-linear. Assim, a sua resolução envolverá obrigatoriamente um processo iterativo. Por forma a avaliar a convergência desse processo, o *software* utiliza um teste baseado no erro relativo cometido em cada iteração e assume como

critério de convergência $|Erro\ Relativo| < 10^{-4}$ nos campos de velocidade e temperatura [31, p. 22-2], ou seja, para uma iteração genérica i o critério de convergência é:

$$\left| \frac{T_i - T_{i-1}}{T_{i-1}} \right| < 10^{-4} \wedge \frac{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{i-1}\|}{\|\mathbf{v}_{i-1}\|} < 10^{-4},$$

com $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ a norma euclidiana do vector velocidade \mathbf{v} .

No decurso da resolução verificou-se, inicialmente, que existiam dois parâmetros presentes em (3.20) que comprometiam a convergência da simulação. De facto, os parâmetros n e E_a influenciam muito o comportamento de η e, conseqüentemente, a determinação da solução das equações de Navier-Stokes. Uma vez que $n < 1$, a viscosidade aumentará com a diminuição da taxa de deformação, pelo que $\eta \rightarrow \infty$ quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, sendo esta tendência mais pronunciada quanto menor for o valor de n . Quanto à energia de activação, uma vez que $E_a > 0$ verifica-se que um aumento no seu valor conduz a um aumento da viscosidade logo, $E_a \rightarrow \infty \Rightarrow \eta \rightarrow \infty$.

Por forma a ultrapassar este problema a resolução numérica foi dividida em duas etapas:

- Simulação com viscosidade independente da temperatura, ou seja,

$$\eta(\dot{\gamma}) = k_2 \dot{\gamma}^{n-1}. \quad (3.21)$$

Desta forma, a influência da energia de activação na viscosidade não é tida em consideração;

- Resolução do problema considerando a dependência da viscosidade com a temperatura, equação constitutiva (3.20), usando os resultados da simulação anterior como condição inicial.

O Método de Iterações de Picard é um método iterativo que pode ser utilizado na resolução de problemas de valor inicial da forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{com} \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.22)$$

e, utiliza para determinação da solução de cada iteração a expressão [32, p. 256]

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt. \quad (3.23)$$

Na 1ª fase da simulação foi utilizado este método para resolução do problema de valor inicial

associado à equação (3.21), ou seja:

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{1}{k_2} \eta(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad \text{com} \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0.$$

No que diz respeito à 2ª fase da simulação foi necessário aplicar um processo evolutivo à energia de activação, uma vez que sendo o seu valor elevado, levava à divergência na viscosidade. Este processo consiste em iniciar a resolução numérica com um valor de $(E_a/R) = \alpha$ inferior ao real, aumentando este de iteração em iteração até se atingir o valor pretendido (3394, 32), ou seja, criava-se uma sequência de novos problemas que eram gerados como se enuncia de seguida [31, p. 19-3].

1º - Neste novo problema, o parâmetro alvo de evolução, α , será dado por $\alpha_1 = \alpha S_{ini}$ com $0 \leq S_{ini} < 1$ e $\alpha = 3394, 32$. Se este problema tiver solução, cria-se um novo problema - 2º Problema.

2º - O parâmetro evolutivo S é aumentado de uma pequena quantia ΔS_{ini} , assumindo o valor $S_2 = S_{ini} + \Delta S_{ini}$. O novo problema é então criado com $\alpha_2 = \alpha S_2$. Se o problema tem solução o valor de ΔS é aumentado para $\Delta S_2 = 1,5 \Delta S_{ini}$ e cria-se um novo problema - 3º Problema. Caso contrário, o valor do incremento ΔS é diminuído tomando o valor $\Delta S_2 = 0,5 \Delta S_{ini}$ até que se encontre solução².

...

$i^{ésimo}$ - O parâmetro evolutivo S é $S_i = S_{i-1} + \Delta S_{i-1} \Rightarrow \alpha_i = \alpha S_i$. Se o problema tem solução o valor de ΔS_{i-1} é aumentado para $\Delta S_i = 1,5 \Delta S_{i-1}$ e cria-se um novo problema - $(i+1)^{ésimo}$ Problema. Caso contrário, o valor do incremento ΔS_{i-1} é diminuído tomando o valor $\Delta S_i = 0,5 \Delta S_{i-1}$ até que se encontre solução.

O processo descrito será repetido até que o parâmetro evolutivo S tome o valor 1, situação em que se obtém o problema com os parâmetros reais.

Utilizando o processo descrito nesta secção foi possível obter convergência na simulação, tendo sido efectuado um conjunto de 7 simulações com as características que se passam a enunciar:

- Fluxo de Calor Constante e Viscosidade Independente da Temperatura num canal com um plano de simetria;

²De referir que ΔS não poderá diminuir infinitamente, existindo um valor que impõe um limite mínimo para este parâmetro, $(\Delta S)_{\min}$.

- Fluxo de Calor Variável, coeficiente global de transferência de calor teórico ($U_{teórico} = 1160 W m^{-2} K^{-1}$) e Viscosidade Independente da Temperatura num canal com um plano de simetria;
- Fluxo de Calor Variável, coeficiente global de transferência de calor teórico e Viscosidade Dependente da Temperatura num canal com um plano de simetria;
- Fluxo de Calor Variável, coeficiente global de transferência de calor experimental ($U = 777,4 W m^{-2} K^{-1}$) e Viscosidade Independente da Temperatura num canal com um plano de simetria;
- Fluxo de Calor Variável, coeficiente global de transferência de calor experimental e Viscosidade Dependente da Temperatura num canal com um plano de simetria;
- Fluxo de Calor Variável, coeficiente global de transferência de calor teórico e Viscosidade Independente da Temperatura num corte com um plano de simetria;
- Fluxo de Calor Variável, coeficiente global de transferência de calor experimental e Viscosidade Dependente da Temperatura num corte com um plano de simetria.

De referir que nos problemas em que se considerou fluxo de calor constante apenas se efectuou a simulação com a viscosidade independente da temperatura por ser a situação menos real, como se pode verificar por observação da Figura 3.11, e pela morosidade das simulações em que se considerou essa dependência.

3.5 Resultados Numéricos

Os resultados numéricos obtidos foram analisados através de um pós-processador denominado FIELDVIEW, o que permitiu visualizar os perfis das várias variáveis do sistema e determinar os seus valores médios em qualquer plano da geometria.

Após análise dos resultados de alguns parâmetros, verificou-se que o comportamento quantitativo diferia de simulação para simulação sendo no entanto, qualitativamente, o mesmo. Assim, neste capítulo apresentam-se resultados numéricos de todas as simulações mas apenas se ilustram os perfis de temperatura, velocidade, taxa de deformação e pressão no caso em que se considerou o fluxo de calor variável, coeficiente global de transferência de calor experimental ($U=777,4 W m^{-2} K^{-1}$) e viscosidade dependente da temperatura, uma vez que este caso se aproximará mais da realidade do que os restantes. Apresentam-se ainda perfis obtidos na simulação do escoamento no corte, de forma a avaliar-se o comportamento em torno dos pontos de contacto, estando os restantes representados no Apêndice B.

Dado que houve necessidade de efectuar simulações em que a viscosidade era considerada independente da temperatura, registaram-se os valores obtidos nessas simulações, tendo-se concluído que apenas os perfis de temperatura diferiam de simulação para simulação. Tal facto pode ser constatado, analisando as Tabelas 3.5 a 3.7.

Tabela 3.5: Resultados médios para Fluxo de Calor Constante.

| | Viscosidade Independente da Temperatura | | |
|-----------------------------|---|----------------------|---------|
| | Entrada ($x = 0$) | Saída ($x = 0,13$) | $y = 0$ |
| T (K) | 314,15 | 290,43 | 300,40 |
| p (Pa) | 7549,83 | 8,422 | 3754,24 |
| η (Pa s) | 0,423 | 0,531 | 0,515 |
| $\dot{\gamma}$ (s^{-1}) | 67,644 | 49,782 | 60,674 |

O valor obtido para a temperatura de saída do iogurte, levando ou não em conta a dependência da viscosidade desse fluido com a temperatura, é próximo do valor experimental determinado por Afonso et al. ($T = 293,64K$), obtendo-se um erro relativo que varia entre 10 a 12%.

Tabela 3.6: Resultados para Fluxo de Calor Variável e $U_{teórico} = 1160 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

| | Viscosidade Independente da Temperatura | | | Viscosidade Dependente da Temperatura | | |
|-----------------------------|---|----------------------|---------|---------------------------------------|----------------------|---------|
| | Entrada ($x = 0$) | Saída ($x = 0,13$) | $y = 0$ | Entrada ($x = 0$) | Saída ($x = 0,13$) | $y = 0$ |
| T (K) | 314,15 | 291,01 | 298,83 | 314,15 | 290,22 | 297,90 |
| p (Pa) | 7549,83 | 8,422 | 3754,24 | 6038,89 | 8,840 | 3355,34 |
| η (Pa s) | 0,423 | 0,531 | 0,515 | 0,194 | 0,773 | 0,654 |
| $\dot{\gamma}$ (s^{-1}) | 67,644 | 49,782 | 60,674 | 68,278 | 50,192 | 60,179 |

O menor erro relativo (9,98%) foi obtido admitindo o fluxo de calor variável, coeficiente global de transferência de calor experimental e a viscosidade do iogurte dependente da temperatura, o que parece reforçar a ideia de que estes pressupostos serão os que mais se aproximam da realidade (Tabela 3.7).

Tabela 3.7: Resultados para Fluxo de Calor Variável e $U = 777,4 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

| | Viscosidade Independente da Temperatura | | | Viscosidade Dependente da Temperatura | | |
|-----------------------------|---|----------------------|---------|---------------------------------------|----------------------|----------|
| | Entrada ($x = 0$) | Saída ($x = 0,13$) | $y = 0$ | Entrada ($x = 0$) | Saída ($x = 0,13$) | $y = 0$ |
| T (K) | 314,15 | 297 | 303,28 | 314,15 | 296,57 | 302,853 |
| p (Pa) | 7549,83 | 8,422 | 3754,24 | 5047,36 | 7,015 | 32728,89 |
| η (Pa s) | 0,423 | 0,531 | 0,515 | 0,195 | 0,553 | 1,847 |
| $\dot{\gamma}$ (s^{-1}) | 67,644 | 49,782 | 60,674 | 68,055 | 50,005 | 60,02 |

Compreensivelmente, as temperaturas mais reduzidas foram obtidas quando se considerou o coeficiente global de transferência de calor mais elevado ($U_{teórico} = 1160 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$), resultando daí uma maior eficiência do permutador e, conseqüentemente, um maior arrefecimento do iogurte.

Relativamente à temperatura, pode verificar-se pela Figura 3.12 que a mesma diminui ao longo do canal de forma não linear, assumindo valores mais reduzidos junto à parede ($z = 0,036$), podendo observar-se na Figura 3.13 o comportamento da temperatura no plano em que se situam os pontos de contacto ($y = 0$). Conclui-se através da Figura 3.13 que os valores mais elevados têm lugar nas zonas em que o canal apresenta ao fluido uma maior área de secção transversal, diminuindo à medida que essa área diminui, ou seja, onde existe uma maior proximidade entre as placas. Atingem-se assim valores mais reduzidos para a temperatura nas imediações dos pontos de contacto.

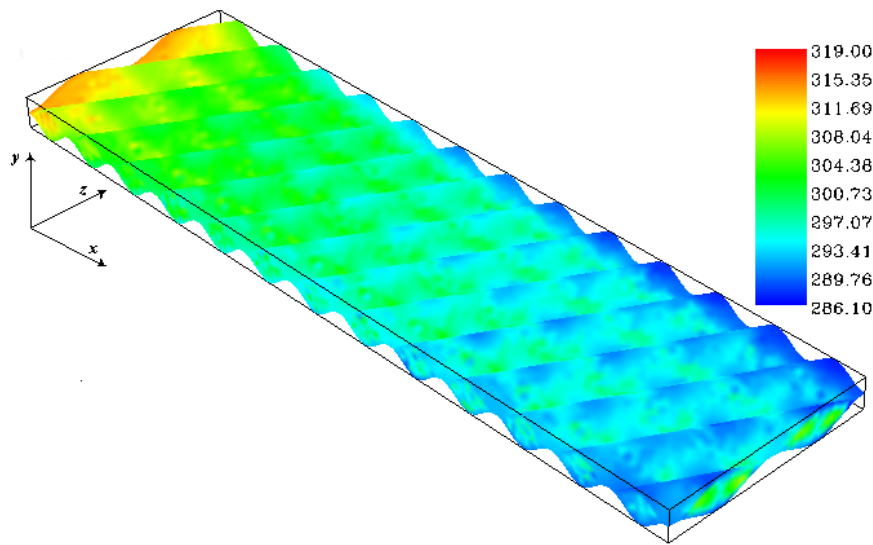


Figura 3.12: Perfil de Temperatura ao longo do canal.

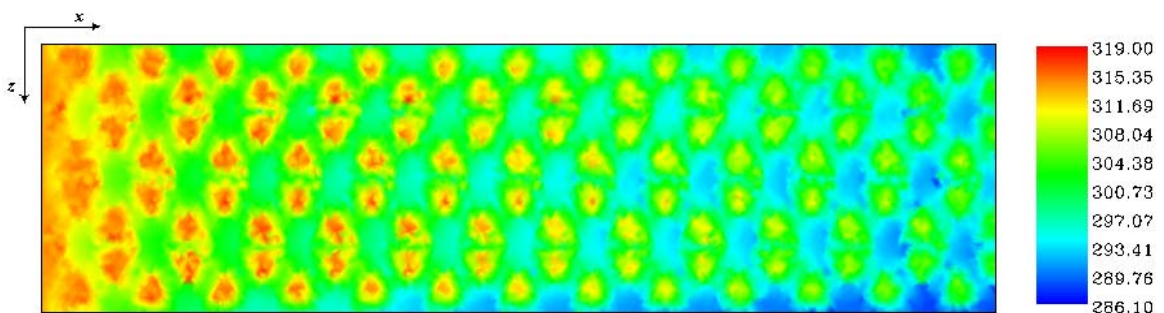


Figura 3.13.: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0258 \text{ ms}^{-1}$.

Na simulação efectuada no corte (Figura 3.14) torna-se mais clara a situação descrita anteriormente, no que diz respeito à zona envolvente dos pontos de contacto (zonas azuladas). Temperaturas do iogurte mais baixas nessas regiões são explicadas pelo facto do fluido circular a

velocidades reduzidas nas proximidades das placas, estas com temperatura sempre menor do que a do fluido que as contacta.

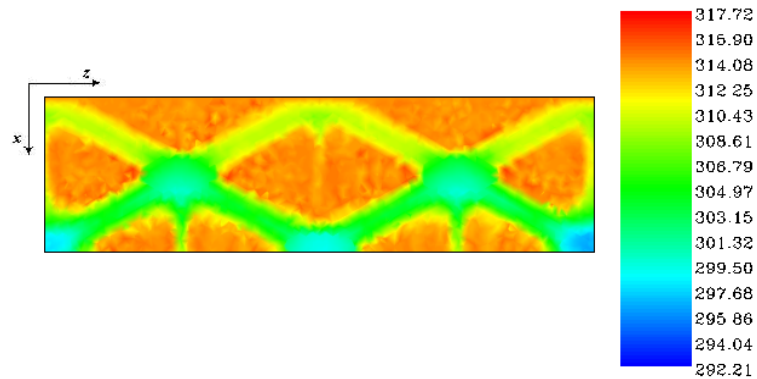


Figura 3.14: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) do Corte.

Observando a Figura 3.15 pode concluir-se que no plano apresentado ($y = 0$) existem regiões de velocidade nula nas imediações dos pontos de contacto, situação que é corroborada pelo perfil de velocidade obtido na simulação efectuada no corte (Figuras 3.16 e 3.17).

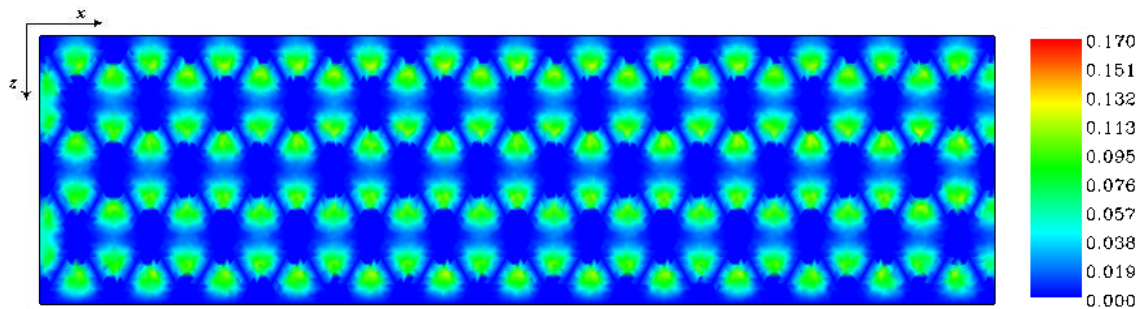


Figura 3.15: Velocidade no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0258 \text{ ms}^{-1}$.

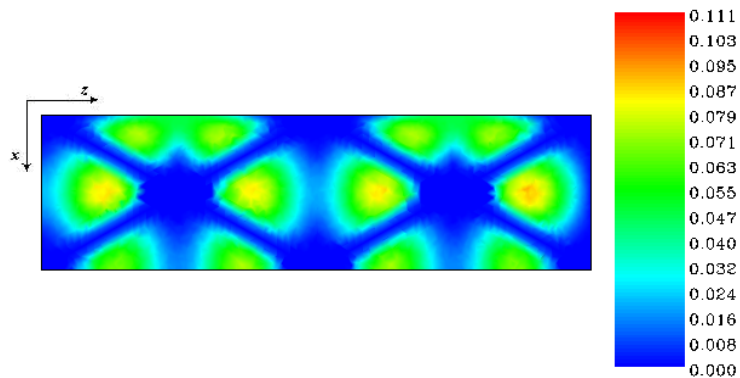


Figura 3.16: Velocidade no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) do Corte.

Assim, representando os vectores velocidade no plano dos pontos de contacto (Figura 3.17) é possível observar-se a região de estagnação do iogurte em torno dos mesmos.

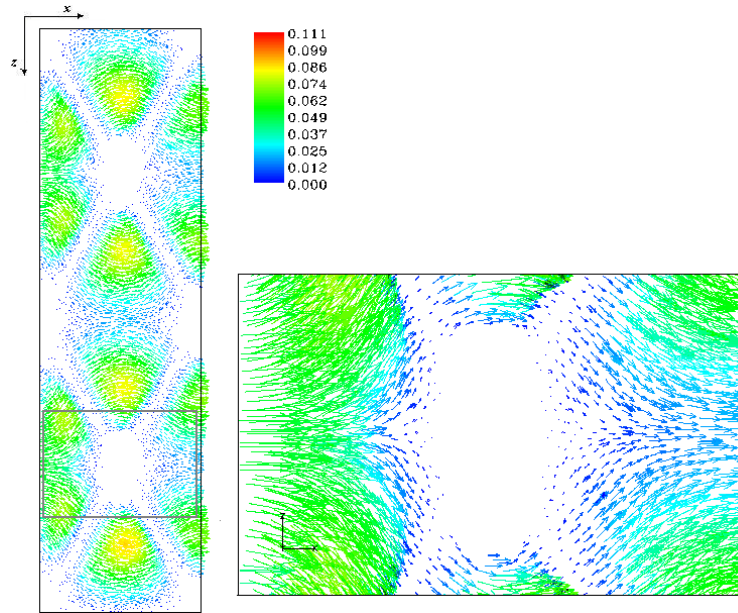


Figura 3.17: Vectores Velocidade no plano $y = 0$ e ampliação de zona envolvente de ponto de contacto.

Relativamente à taxa de deformação (Figura 3.18), pode observar-se que esta atinge valores mais baixos na zona envolvente aos pontos de contacto.

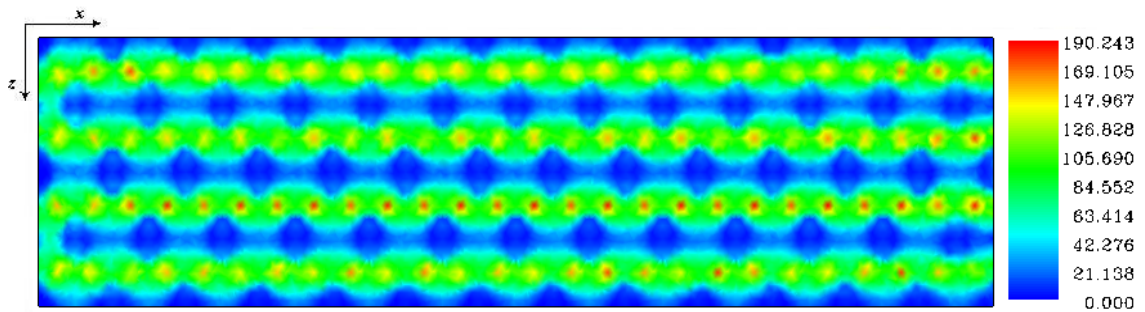


Figura 3.18: Taxa de Deformação no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0258 \text{ ms}^{-1}$.

As regiões amarelas/vermelhas da figura anterior correspondem aos máximos da taxa de deformação, ou seja, são as zonas onde a variação espacial da velocidade é mais elevada.

Mais uma vez, a simulação efectuada no corte permite visualizar mais pormenorizadamente o que se passa em torno dos pontos de contacto, podendo observar-se das Figuras 3.19 e 3.16 que as taxas de deformação mais elevadas correspondem às regiões em que a velocidade sofre uma maior variação e que é nula em torno dos pontos de contacto.

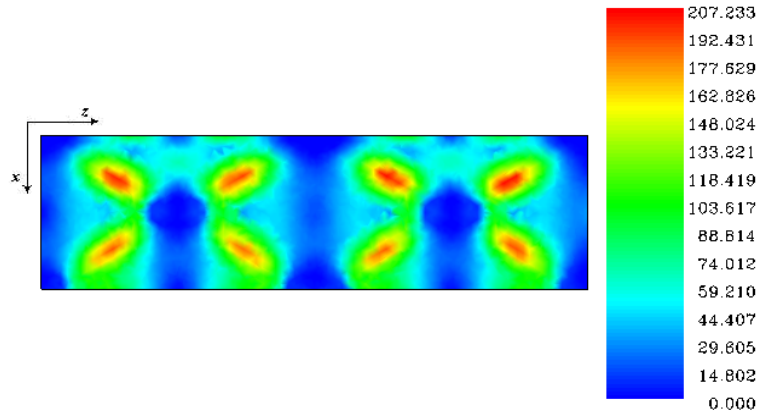


Figura 3.19: Taxa de Deformação no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) do Corte.

Estudando o comportamento da taxa de deformação na intersecção do plano dos pontos de contacto com qualquer plano de equação $z = c$, pode concluir-se que a mesma apresenta um comportamento sinusoidal. Este facto é ilustrado pela Figura 3.20, com $c = 0,02$, onde pode observar-se que a amplitude da curva não apresenta uma tendência de variação ao longo do canal.

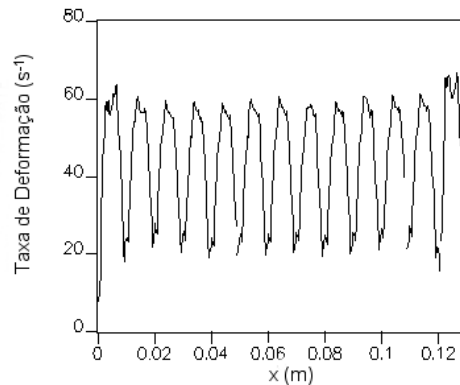


Figura 3.20: Taxa de Deformação na intersecção dos planos $y = 0$ e $z = 0,02$.

Fazendo uma abordagem similar para a viscosidade pode observar-se na figura seguinte que esta apresenta também um comportamento sinusoidal, mas de amplitude crescente ao longo do canal.

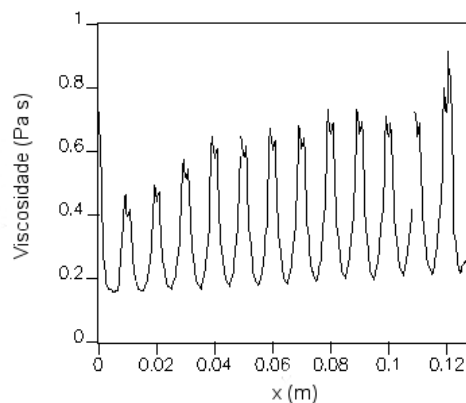


Figura 3.21: Viscosidade na intersecção dos planos $y = 0$ e $z = 0,02$.

Comparando as Figuras 3.20 e 3.21 constata-se que a relação taxa de deformação/viscosidade prevista pela equação constitutiva associada a este escoamento se verifica, isto é, um aumento local da taxa de deformação leva a uma diminuição da viscosidade. Contudo, esta relação não explica o aumento da amplitude da curva da viscosidade, podendo concluir-se que o seu aumento, da entrada para a saída do canal, se deve exclusivamente à influência da temperatura.

A pressão apresenta uma queda acentuada da entrada para a saída do canal ($\Delta p = 5040,345 Pa$), o que é característico dos permutadores de placas. Tal facto deriva da existência de variações acentuadas de área de secção transversal oferecida ao fluido, assim como das mudanças bruscas de trajectória a que o iogurte é obrigado.

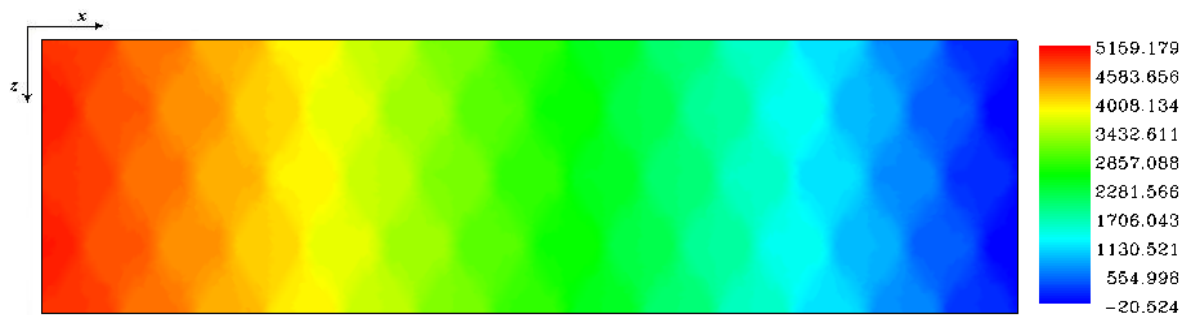


Figura 3.22: Pressão no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0258 \text{ ms}^{-1}$.

Capítulo 4

Simulação Numérica Viscoelástica

Reologicamente, o iogurte batido pode classificar-se como um líquido viscoso com componente elástica. Por forma a avaliar a influência desta propriedade no escoamento no interior do permutador de placas, tentou efectuar-se a simulação viscoelástica de um escoamento isotérmico em estado estacionário num canal convergente/divergente. A simulação foi efectuada fazendo uso do POLYFLOW e consistiu em:

- Definição de uma geometria em duas dimensões que aproximasse o escoamento tridimensional em estudo, devido a limitações do *software* utilizado (ver Secção 4.1);
- Determinação das condições de fronteira associadas ao novo escoamento;
- Resolução numérica do problema de elementos finitos.

De referir que devido ao cariz tridimensional do escoamento estabelecido no interior de um permutador de placas esta simulação teria apenas como intuito avaliar o comportamento do iogurte face a expansões e estrangulamentos bruscos, nunca o seu comportamento na fase de arrefecimento a que é submetido durante o seu fabrico.

4.1 Domínio Geométrico e Geração de Malha

A simulação viscoelástica integral não pôde ser efectuada para o escoamento tridimensional uma vez que o POLYFLOW não permite que se efectue este tipo de simulações. Assim, houve necessidade de definir uma geometria bidimensional que permitisse avaliar de forma aproximada o escoamento no interior do permutador de placas.

Uma das características mais marcantes da geometria tridimensional associada ao escoamento em estudo é a existência de estrangulamentos e expansões bruscas, pelo que em duas dimensões se desenhou um canal convergente/divergente de dimensões $D = 5mm$, aproximadamente igual

ao espaçamento máximo entre as placas do permutador ($5,2mm$), $d = 0,5mm$, de modo a obter uma razão $\frac{D}{d} = 10^1$ e $x = 30mm$ (Figura 4.1).

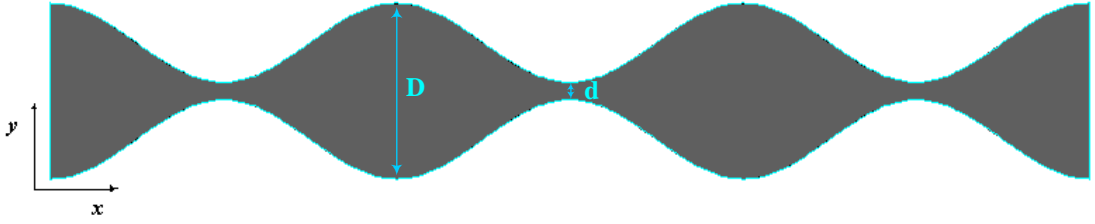


Figura 4.1: Geometria Bidimensional.

A construção desta geometria foi efectuada, à semelhança do apresentado para a geometria tridimensional, partindo da equação de uma curva sinusoidal, equação (3.1), admitindo agora $a_p = 1,125 \times 10^{-3}m$:

$$y = 1,125 \times 10^{-3} \sin(500\pi x - 0,5\pi) + 1,125 \times 10^{-3},$$

com y e x dados em metros.

A discretização deste domínio geométrico foi efectuada tendo em conta que nas regiões imediatamente antes e depois dos estrangulamentos o escoamento poderia apresentar um comportamento distinto do que se passa no resto do canal, por exemplo, existência de recirculação. Assim, consideraram-se duas regiões distintas (Figura 4.2) para a geração da malha.

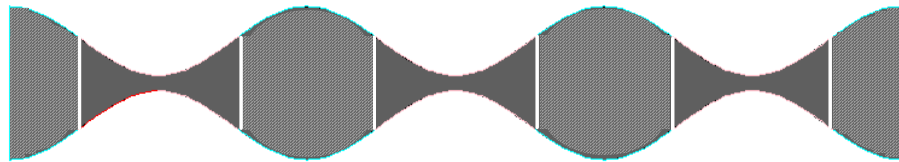


Figura 4.2: Regiões distintas para geração da malha.

A geração da malha bidimensional foi efectuada partindo da discretização das arestas que delimitam a geometria. Uma vez que as zonas de maior interesse são aquelas em que se situam os estrangulamentos, o espaçamento nodal utilizados nessas regiões foi inferior ao utilizado nas arestas adjacentes às regiões a tracejado (Figura 4.2) mantendo-se fixa a distância entre os nós nas arestas verticais ($x = 0$ e $x = 3 \times 10^{-2}$).

Após discretização das arestas, efectou-se a geração da malha bidimensional a partir dos nós criados, utilizando elementos quadriláteros com 4 nós.

¹Testaram-se geometrias com razões mais elevadas mas não se verificaram alterações, a nível qualitativo, nos resultados numéricos obtidos. Assim, optou-se por este valor uma vez que conduzia a um menor esforço computacional.

Por forma a testar a independência dos resultados numéricos com a malha gerada, construíram-se três malhas distintas em que os nós nas arestas verticais e das regiões a tracejado distavam $0,25 \times 10^{-3}$ e $0,46 \times 10^{-3}$, respectivamente, e a distância nodal nas regiões dos estrangulamentos diferiu entre as três discretizações tomando os valores: $0,0175 \times 10^{-3}$, $0,14 \times 10^{-3}$ e $0,28 \times 10^{-3}$.

Posteriormente efectuaram-se três simulações com iguais condições fronteira usando, em cada uma delas, uma das três malhas geradas, tendo-se constatado que os resultados numéricos obtidos nas várias simulações não diferiam entre si. Assim, optou-se por utilizar a malha em que o espaçamento nodal na região dos estrangulamentos toma o valor $0,28 \times 10^{-3}$ (Figura 4.3) uma vez que possui um menor número de elementos e, conseqüentemente, requer um menor esforço computacional na resolução do problema de elementos finitos que é constituído por 2000 elementos e 2121 nós.

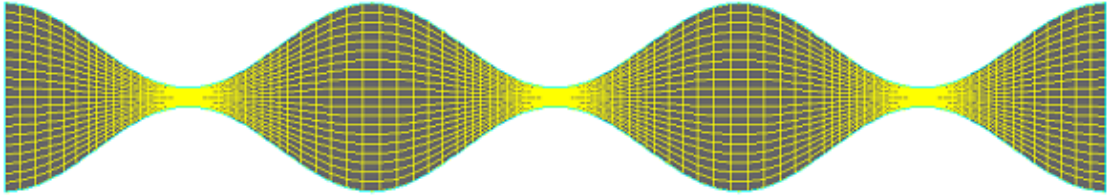


Figura 4.3: Malha Bidimensional.

4.2 Condições de Fronteira

O escoamento agora simulado é um escoamento isotérmico em estado estacionário, pelo que a única condição de fronteira a estabelecer é o caudal volumétrico de iogurte que entra no sistema.

De modo a aproximar as características de escoamento no interior do canal bidimensional às determinadas para o permutador, efectuaram-se simulações viscosas com caudais volumétricos distintos por forma a determinar um caudal que conduzisse a um valor médio de taxas de deformação da ordem de grandeza dos obtidos na simulação tridimensional ($\cong 60s^{-1}$). Este processo levou a que se adoptasse um caudal volumétrico de entrada de $7,5 \times 10^{-5}m^3s^{-1}$, para o qual se obteve uma taxa de deformação média de $63,81s^{-1}$.

4.3 Resolução Numérica

A etapa principal da simulação numérica do escoamento do iogurte no canal bidimensional consiste na resolução numérica das equações de continuidade, (2.40), e conservação de momento, (2.48), juntamente com a equação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \exp\left(-\alpha\sqrt{\beta I_{\mathbf{B}} + (1-\beta)II_{\mathbf{B}} - 3}\right) \mathbf{B}(t-t') dt'.$$

Este modelo está implementado no *software* e o utilizador apenas tem “liberdade” de alterar os parâmetros reológicos α e β . Para o fluido em estudo estes tomam os valores $\alpha = 0,23$ e $\beta = 0,1$, resultantes da modelação viscoelástica efectuada no presente trabalho (Secção 2.1.2).

Numericamente, implementou-se um processo evolutivo que permitia inicializar o problema como escoamento de um fluido puramente viscoso e que, progressivamente, ia contabilizando o seu cariz viscoelástico. Este processo define-se através da expressão [31, p. 9-29]:

$$\boldsymbol{\sigma}(\varpi) = \varpi \boldsymbol{\sigma} + (1 - \varpi) \boldsymbol{\sigma}_E, \quad (4.1)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_E$ é o tensor das tensões para fluidos puramente viscosos, $\boldsymbol{\sigma}_E = 2\eta_E \mathbf{D}$, e ϖ um escalar função do parâmetro evolutivo S conforme se ilustra na Figura 4.4.

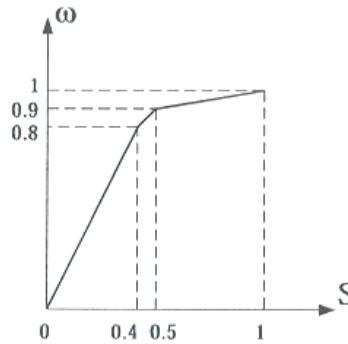


Figura 4.4: Relação ϖ vs. S [31, p. 9-30].

Na definição dos parâmetros necessários ao processo evolutivo, η_E e S , considerou-se η_E constante, sendo o seu valor dado por:

$$\eta_E = \sum_{k=1}^3 \eta_k, \quad (4.2)$$

com $\eta_k = \lambda_k G_k$ (Tabela 2.1). O parâmetro S variava de iteração para iteração², sendo que $0 \leq S \leq 1$, ou seja, inicializava-se o cálculo admitindo um escoamento puramente viscoso ($S = 0$) e o processo evolutivo deveria ter conduzido a uma resposta viscoelástica que corresponderia a $S = 1$. Por forma a que a transição da resposta viscosa para a viscoelástica não fosse muito brusca, utilizaram-se valores de ΔS_{ini} ³ reduzidos ($< 10^{-2}$), tendo-se verificado que o *software* não conseguiu, em qualquer caso, contabilizar a viscoelasticidade, isto é, apenas levava a cabo a 1ª iteração, correspondente ao escoamento de um fluido Newtoniano.

O facto do *software* não conseguir implementar o processo numérico descrito inviabilizou a realização da simulação viscoelástica integral, o que poderá dever-se às aproximações efectuadas

²O processo de determinação de S ao longo do processo evolutivo é igual ao apresentado no Capítulo 3.

³ $S_1 = S_{ini} + \Delta S_{ini}$ (ver descrição do esquema evolutivo no Capítulo 3, pag.79.)

ao escoamento tridimensional, isto é, domínio geométrico considerado e condições de fronteira estabelecidas. Na origem deste problema poderão ainda estar a malha gerada e a uma forte componente elástica do fluido.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Conclusões

Neste trabalho simulou-se numericamente o escoamento do iogurte entre duas placas de um permutador de calor. A simulação envolveu a resolução simultânea de dois problemas de condução de calor nas placas e do fluxo não-isotérmico do iogurte no canal por elas formado. O iogurte apresentava um comportamento Não-Newtoniano e o seu escoamento processava-se em estado estacionário. Para a simulação do problema descrito utilizou-se o *software* POLYFLOW, recorrendo este ao método de elementos finitos.

O domínio geométrico do problema foi construído conhecendo-se as propriedades geométricas das placas, o que conduziu à implementação de uma função sinusoidal para a descrição das corrugações existentes nas mesmas. A geometria construída era constituída por três unidades tridimensionais: placa superior, placa inferior e canal por elas delimitado.

Após definição do domínio procedeu-se à sua discretização, gerando-se a malha que constituiu a base para a aplicação do método de elementos finitos. Atendendo às características do canal construído, estrangulamentos e expansões bruscas, optou-se por construir uma malha que utiliza preferencialmente elementos tetraédricos mas, sempre que necessário, recorre a elementos hexaédricos, prismas e pirâmides. Por forma a testar a independência dos resultados relativamente à malha gerada construíram-se malhas com a característica enunciada que diferiam entre si na distância existente entre os nós resultantes da discretização das arestas. Com este processo conclui-se que este tipo de malha se mostrava adequado para geometrias desta natureza, canais convergentes/divergentes, e que uma distância de $1mm$, para o canal em estudo, conduzia a uma malha que não influenciava os resultados obtidos, pois uma redução daquele valor para metade (simulação efectuada no corte) conduzia a resultados qualitativamente iguais.

Por forma a caracterizar os três problemas envolvidos neste escoamento foram levados em

consideração valores experimentais disponíveis, o que permitiu, simultaneamente, a validação dos pressupostos e procedimentos estabelecidos ao longo do trabalho.

Uma vez que o problema fulcral a resolver diz respeito ao escoamento não-isotérmico do iogurte em estado estacionário, foi necessário definir as propriedades do fluido e as condições de fronteira necessárias à resolução das equações de Navier-Stokes.

No que diz respeito às propriedades do iogurte, assumiram-se independentes da temperatura, com exceção da viscosidade que é dada por uma expressão do tipo:

$$\eta(\dot{\gamma}, T) = \eta(\dot{\gamma}) H(T), \quad (5.1)$$

onde $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função que contabiliza a influência da taxa de deformação e $H(T)$ o efeito da temperatura nesta propriedade reológica. Para as condições de operação que se admitiram inicialmente existir no interior do canal, $\sigma > 6, 7Pa$, e que se comprovaram posteriormente através dos resultados obtidos, as funções citadas tomam a forma:

$$\eta(\dot{\gamma}) = k_2 \dot{\gamma}^{n-1}, \quad (5.2)$$

$$H(T) = \exp\left(\frac{E_a}{RT}\right). \quad (5.3)$$

Na resolução numérica deparou-se, inicialmente, com uma situação de divergência na resolução das equações de Navier-Stokes (2.59) conjuntamente com a equação (5.1). Este facto resultava do baixo valor do índice de comportamento de fluxo, n , e do alto valor da energia de activação, E_a . De modo a eliminar a tendência introduzida por estes dois parâmetros em (5.1), $\eta \rightarrow \infty$, começou por simular-se o escoamento não considerando $H(T)$ em (5.1) e, posteriormente, fazendo uso dos resultados assim obtidos, simulou-se o escoamento com a viscosidade dependente da temperatura.

Na simulação em que a lei constitutiva se reduziu à lei da potência, equação (5.2), o método das iterações de Picard revelou-se eficiente na resolução do problema de valor inicial associado. Quanto à 2^a etapa da resolução numérica, houve necessidade de recorrer a um processo evolutivo aplicado à energia de activação. Neste processo gerou-se uma sequência de problemas em que E_a aumentava progressivamente de problema em problema até atingir o valor real.

Uma vez que as equações de Navier-Stokes correspondem a um sistema de equações diferenciais, a determinação de condições de fronteira que descrevam correctamente o comportamento do sistema nos seus limites é extremamente importante. Neste estudo definiu-se o caudal volumétrico e temperatura de entrada do iogurte no sistema, valores que se obtiveram dos dados experimentais disponíveis, e uma condição térmica que descrevia o modo como se processa a transferência de calor do iogurte para a água que circulava nos canais adjacentes ao canal visado neste trabalho.

Considerou-se que a condição que descreve de forma mais realista a transferência de calor consiste em admitir um fluxo de calor variável ao longo da superfície das placas. Com base em conceitos teóricos e dados experimentais conhecidos, deduziu-se uma expressão que permitiu determinar o fluxo de calor em qualquer ponto das placas,

$$q(x) = U (T_{i,e} - T_{a,s}) \exp \left[U l \rho x \left(\frac{1}{M_a C_{p,a}} - \frac{1}{M_i C_{p,i}} \right) \right], \quad (5.4)$$

na qual se utilizaram dois valores distintos de coeficiente global de transferência de calor, um experimental ($U = 777,4 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$) e um denominado “teórico” ($U_{teórico} = 1160 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$). Devido a limitações do *software*, as duas expressões obtidas a partir de (5.4) para o fluxo de calor foram linearizadas, tendo-se verificado que este procedimento introduzia um erro relativo máximo de 5%. Admitiu-se ainda, no que diz respeito ao fluxo de calor, apesar de se considerar que esta situação será menos realista, que este poderia ser constante ao longo das placas.

Após análise dos resultados das simulações efectuadas, constatou-se que o erro relativo, no que diz respeito à temperatura do iogurte à saída do canal, varia entre os 10 a 12%, o que nos parece conferir validade ao procedimento estabelecido neste estudo tendo em conta as aproximações envolvidas.

Como seria de prever, constatou-se ainda que a temperatura de saída do iogurte no caso em que se considerou o valor de $U_{teórico}$ era mais baixa do que a obtida com o valor experimental, facto que se explica por um coeficiente global de transferência de calor mais elevado corresponder a uma maior eficiência do permutador.

Os resultados que mais se aproximaram dos experimentais foram os obtidos na simulação em que se admitiu fluxo de calor variável ao longo das placas e o coeficiente global de transferência de calor experimental, vindo este facto de encontro ao esperado, pois este coeficiente contabiliza eventuais perdas de energia existentes no sistema de arrefecimento e que não são tidas em consideração na dedução de $U_{teórico}$.

Nas diferentes simulações efectuadas obtiveram-se resultados qualitativamente iguais. Assim, a temperatura diminuiu de forma não linear ao longo do canal, conduzindo este facto a um aumento da viscosidade. Verificou-se a existência de zonas de estagnação em torno dos pontos de contacto o que conduziu à obtenção de temperaturas mais reduzidas nessas regiões.

Neste estudo, tentou ainda efectuar-se a simulação viscoelástica integral do iogurte num canal convergente/divergente. Este estudo não pôde ser efectuado para o escoamento no permutador de calor, objectivo deste trabalho, pois o POLYFLOW não permite que sejam efectuadas simulações viscoelásticas integrais em geometrias tridimensionais.

Esta simulação consistiria na resolução de um problema isotérmico bidimensional em estado

estacionário, e tinha como objectivo avaliar a influência da elasticidade do fluido no seu escoamento.

O domínio geométrico foi definido de modo a que o escoamento bidimensional estabelecido fosse o mais próximo possível do existente no interior do permutador. A sua construção foi levada a cabo, de forma análoga ao que se efectuou para a geometria tridimensional, por implementação de uma função sinusoidal.

A discretização deste domínio consistiu na geração de uma malha bidimensional constituída por elementos quadriláteros, tendo-se efectuado, posteriormente, o teste de independência de resultados/malha de modo a escolher a mais adequada.

O caudal volumétrico do iogurte na entrada do canal, única condição de fronteira a estabelecer nesta simulação, foi ajustado (com base em simulações viscosas) de modo a que se estabelecessem taxas de deformação da ordem de grandeza das determinadas para o escoamento tridimensional.

A simulação deste escoamento consistiria na resolução das equações de continuidade e conservação de momento juntamente com a equação constitutiva:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t M(t-t') \exp\left(-\alpha\sqrt{\beta I_{\mathbf{B}} + (1-\beta) II_{\mathbf{B}} - 3}\right) \mathbf{B}(t-t') dt'. \quad (5.5)$$

Este modelo mostrou-se adequado para descrever reologicamente o iogurte para valores de $\dot{\gamma} > 10s^{-1}$ e deduziu-se considerando um espectro com três tempos de relaxação.

Numericamente implementou-se um processo evolutivo que tinha como objectivo converter gradualmente uma resposta viscosa em viscoelástica, o que, contudo, não permitiu alcançar resultados numéricos. Para tentar ultrapassar esta dificuldade atribuíram-se valores reduzidos ao parâmetro evolutivo que determinava a “velocidade” com que se efectuava a transição da resposta viscosa para a viscoelástica. No entanto, a resolução continuou a não ser efectuada.

Assim, julga-se que as aproximações efectuadas ao escoamento tridimensional, isto é, domínio geométrico considerado e condições de fronteira estabelecidas, juntamente com a triangulação do domínio e a forte componente elástica do fluido, tenham sido as responsáveis pela incapacidade de resolução do problema de elementos finitos apresentada pelo *software*.

5.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

No presente trabalho não foi possível efectuar a simulação viscoelástica integral do escoamento do iogurte no permutador de placas devido a limitações do POLYFLOW. Assim sugere-se que se recorra a outro *software* da área de CFD que possibilite este tipo de simulações por forma a estudar a influência da componente elástica do fluido neste escoamento.

A região de entrada das placas não foi levada em conta neste estudo. Sugere-se assim que se estude a influência dos distribuidores nas características do escoamento, considerando a totalidade da placa na simulação.

Sugere-se ainda que se estabeleça com base nos dados experimentais disponíveis um perfil de temperaturas nas placas, do lado da água de arrefecimento. Deste modo poderá efectuar-se a simulação utilizando este perfil como condição de fronteira.

Bibliografia

- [1] Doraiswamy, D., *The Origins of Rheology: A Short Historical Excursion*, Rheology Bulletin, Vol.71, N° 1, January 2002.
- [2] Walters, K., *Lessons from history*, Korea-Australia Rheology Journal, Vol. 11, N° 4, December 1999, 265-268.
- [3] Chandrasekharaiah, D.S., Debnath, L., *Continuum Mechanics*, Academic Press, London, 1994.
- [4] Castro, A. G., Covas, J. A., Diogo, A. C., *Reologia e Suas Aplicações Industriais*, Instituto Piaget, Lisboa, 2001.
- [5] Fay, J.A., *Introduction to Fluid Mechanics*, MIT Press, London, 1994.
- [6] Mackosco, C. W., *Rheology: Principles, Measurements and Applications*, Wiley/VCH, Munich, 1994.
- [7] Steffe, J.F., *Rheological Methods in Food Process Engineering*, 2nd ed., Freeman Press, East Lansing, 1996.
- [8] Mase, G. E., *Schaum's Outline of Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, 1969.
- [9] Barnes, H. A., Hutton, J. F., Walters, W., *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
- [10] Heinbockel, J. H., *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, Trafford, 2001.
- [11] Wilkinson, W. L., *Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, London, 1960.
- [12] Wilson, J. R., *Linear System Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [13] Driessen, F. M., *Modern Trends in Manufacture of Yogurt*, IDF Bulletin Vol. 179, 107-115.

- [14] Rönnegård, E., Dejmek, P., *Development and Breakdown of Structure in Yogurt Studied by Oscillatory Rheological Measurements*, Lait, Vol. 73, 1993, 371-379.
- [15] Afonso, I. M., *Caracterização da Reologia e da Transferência de Calor no Processamento de Iogurte*, Tese de Mestrado, Universidade do Minho, Braga, 1999.
- [16] Noel, Y., *Rheological Methods for the Examination of Yogurt*, IDF Bulletin, Vol. 227, 127-128.
- [17] Marle, M. E., Ende, D., Kruif, C. G., Mellema, J., *Steady-shear Viscosity of Stirred Yogurts with Varying Ropiness*, Journal of Rheology, Vol. 43, 1999, 1643-1661.
- [18] Afonso, I. M., Hes, L., Maia, J. M., Melo, L. M., *Heat Transfer and Rheology of Stirred Yogurt During Cooling in Plate Heat Exchangers*, Journal of Food Engineering, Vol. 57, April 2003, 179-187.
- [19] Benezech, T., Maingonnat, J. F., *Flow Properties of Stirred Yogurt: Structural Parameter Approach in Describing Time-Dependency*, Journal of Texture Studies, Vol. 24, 1993, 455-473.
- [20] Benezech, T., Maingonnat, J. F., *Flow Properties of Stirred Yogurt: Modelling and Influence of Cooling Conditions*, Theoretical and Applied Rheology (Moldenaers P., Keunings, R., coord.) Proc XIth Int. Congr. on Rheology, Brussels, Belgium, Elsevier, 1992.
- [21] Coulson, J. M., Richardson, J. F., *Tecnologia Química*, Vol. I, Fundação Calouste Glubenkian, Lisboa, 1975.
- [22] Çengel, Y. A., *Heat Transfer: a Practical Approach*, WCB/McGraw-Hill Companies, International Edition, 1998.
- [23] Rohsenow, W. M., Hartnett, J. P., Cho, Y. I., *Handbook of Heat Transfer*, 3th ed., McGraw-Hill, 1998.
- [24] Leuliet, J. C., Maingonnat, J. F., Lalande, M., *Etude de la Perte de Charge dans de Échangeurs de Chaleur à Plaques Traitant des Produits Non-Newtoniens*, Revue Générale de Thermique, n° 308-309, Août-Septembre 1987, 445-450.
- [25] Smith, E. M., *Thermal Design of Heat Exchangers: A Numerical Approach*, John Wiley & Sons, International Edition, 1997.
- [26] René, F., Lalande, M., *Échangeur de Chaleur à Plaques et Joints. Résolution Numérique des Équations D'échange Thermique entre les Différents Canaux*, Revue Générale de Thermique, n° 311, Novembre 1987, 577-583.

- [27] Antonini, G., François, O., Shuai, X. S., *Corrélatios Transfert/ Facteur de Frottement pour le Chauffage/ Refroidissement d'un Fluid Visqueux à Forte Dépendance Thermorhéologique en Écoulement de Conduite en Régime Laminaire*, Revue Générale de Thermique, n° 308-309, Août-Septembre 1987, 427-431.
- [28] Leuliet, J. C., Maingonnat, J. F., Lalande, M., *Écoulements et Transferts de Chaleur dans le Échangeurs à Plaques Traitant des Produits Visqueux Newtoniens et Pseudoplastiques*, The Canadian Journal of Chemical Engineering, Vol. 68, 1990, 220-229.
- [29] Mehrabian, M. A., Poulter, R., *Hydrodynamics and Thermal Characteristics of Corrugated Channels: Computacional Approach*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 24, 2000, 343-364.
- [30] Ciarlet, P. G., Lions, J. L., *Handbook of Numerical Analysis*, Vol II: Finite Element Methods (Part I), North- Holland, Amsterdam, 1993.
- [31] Fluent , *POLYFLOW 3.9 User's Guide*, Fluent Inc., 2001.
- [32] Burden, Richard L., Faires, J. Douglas, *Numerical Analysis*, 7th ed., Brooks/Cole, USA, 2001.

Apêndice A - *Estrutura do POLYFLOW*

Neste Apêndice apresenta-se um diagrama por forma a elucidar o modo como interagem os diversos “componentes” do POLYFLOW.

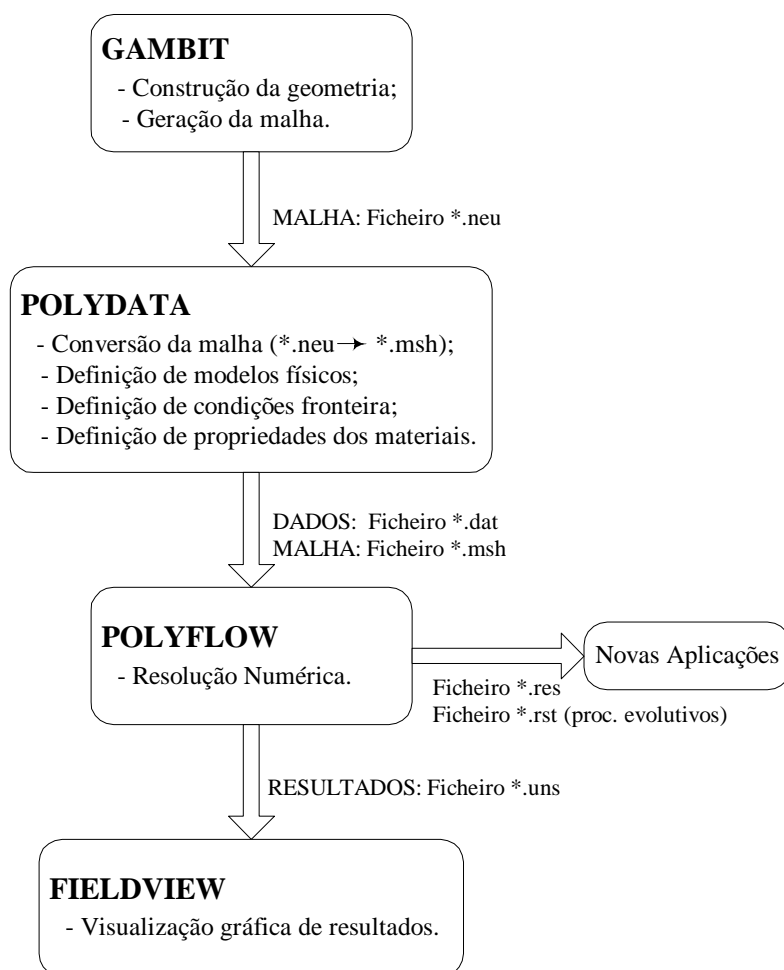


Figura A.1: Estrutura Simplificada do POLYFLOW (adaptado de [31, p. 1-3]).

Apêndice B - *Resultados Numéricos*

Neste Apêndice apresentam-se os resultados numéricos obtidos nas várias simulações e um exemplo de um ficheiro de listagem de resultados. Uma vez que os resultados obtidos no caso das simulações em que se considera a viscosidade independente da temperatura são iguais para os três casos estudados, excepto no que diz respeito à temperatura, apenas se apresentarão os perfis referentes a esta variável nos casos de fluxo de calor variável.

B.1 Fluxo de Calor Constante

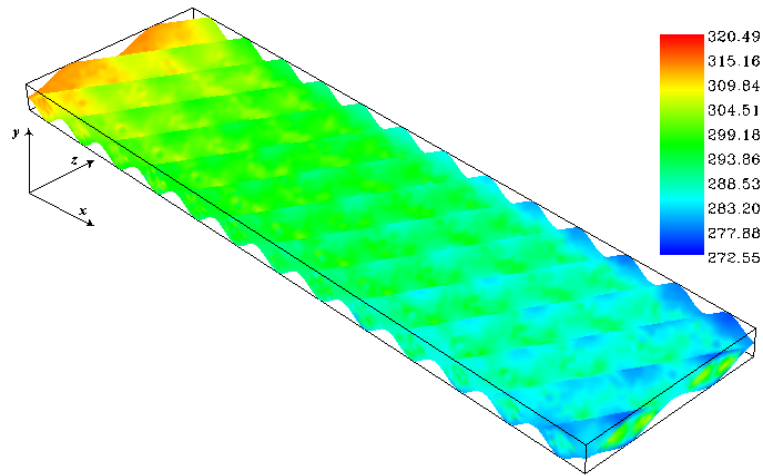


Figura B.1: Perfil de temperatura ao longo do canal.

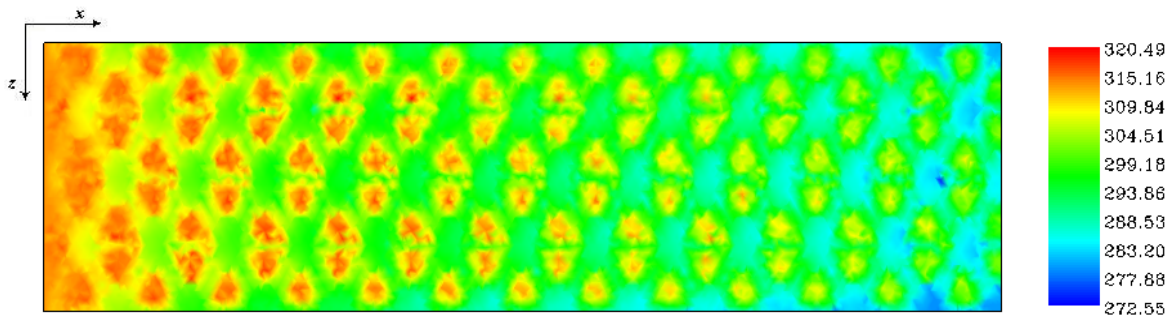


Figura B.2: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0255 \text{ ms}^{-1}$.

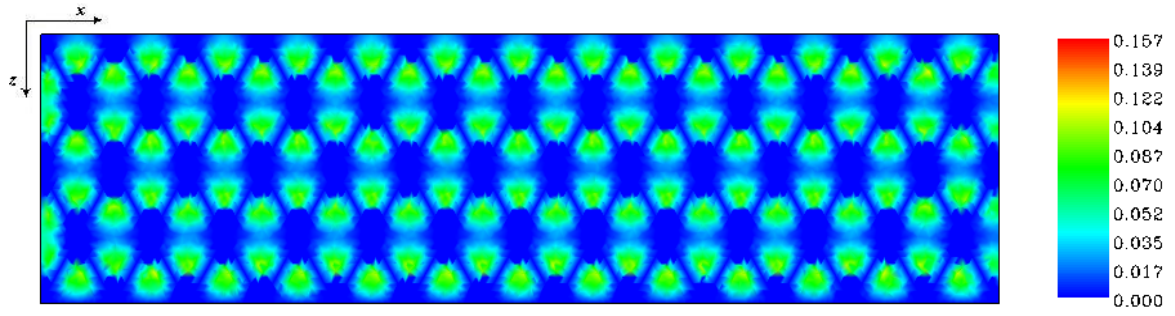


Figura B.3: Velocidade no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{m\acute{e}dia} = 0,0255 \text{ ms}^{-1}$.

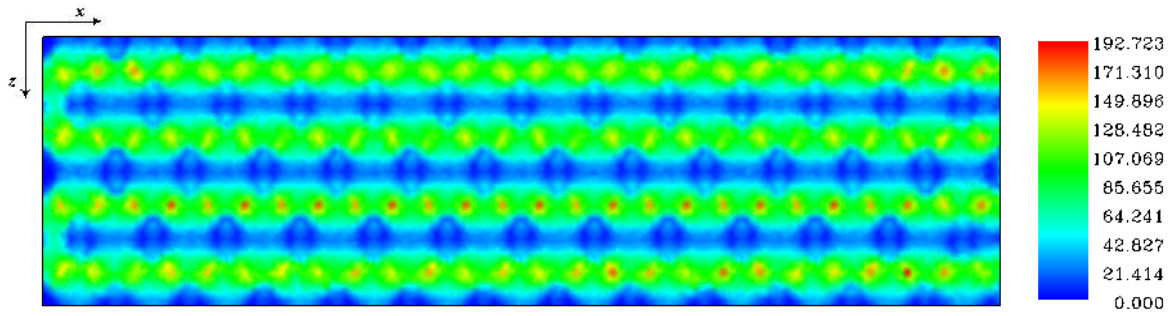
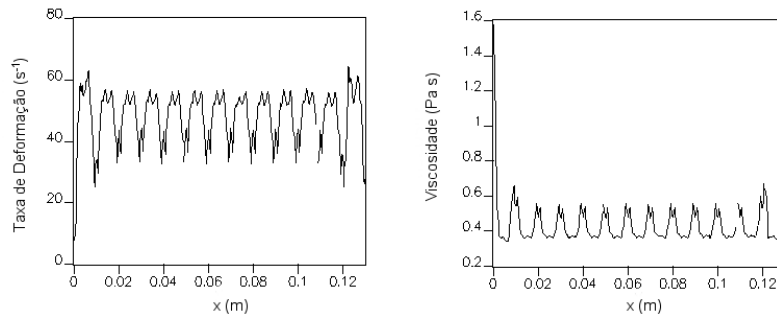


Figura B.4: Taxa de deformação no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{m\acute{e}dia} = 0,0255 \text{ ms}^{-1}$.



(a)

(b)

Figura B.5: Taxa de Deformação (a) e Viscosidade (b) na intersecção dos planos $y = 0$ e $z = 0,02$.

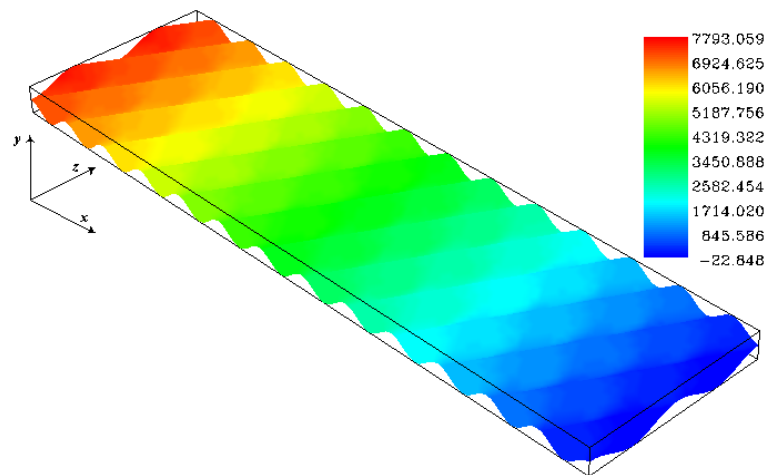


Figura B.6: Perfil de pressão ao longo do canal.

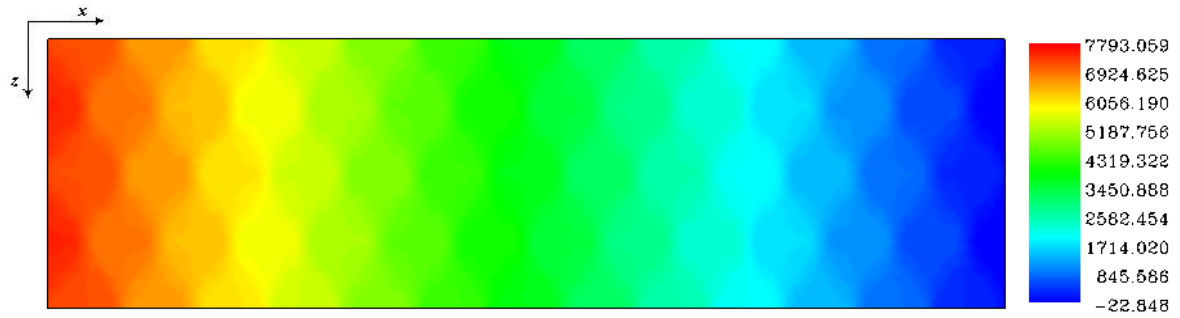


Figura B.7: Pressão no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0255 \text{ ms}^{-1}$.

B.2 Fluxo de Calor Variável com $U_{teórico} = 1160 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

Viscosidade Independente da Temperatura

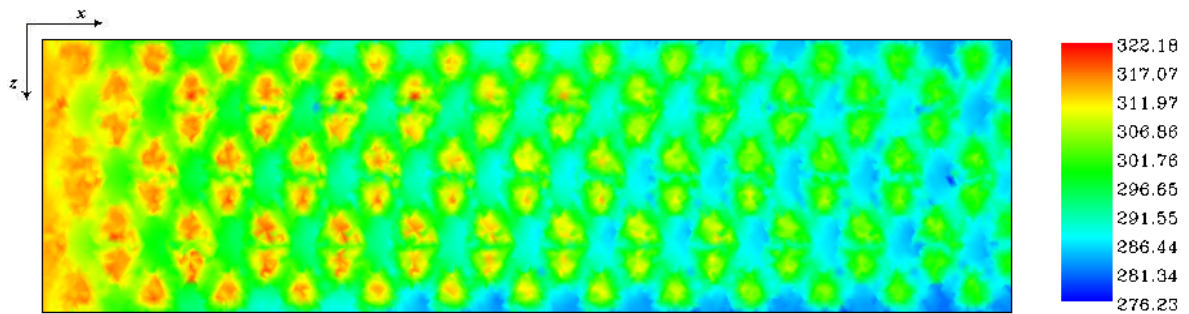


Figura B.8: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0255 \text{ ms}^{-1}$..

Viscosidade Dependente da Temperatura

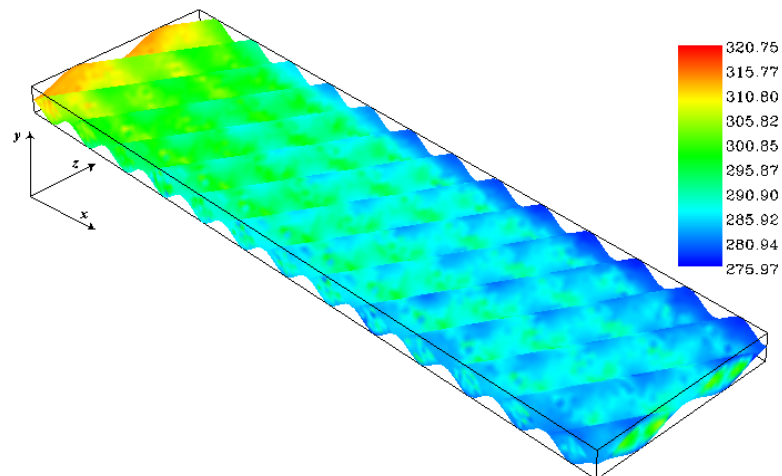


Figura B.9: Perfil de temperatura ao longo do canal.

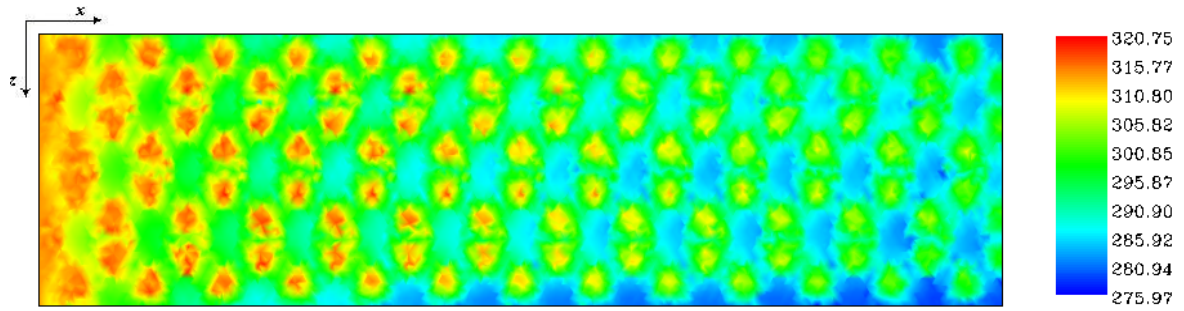


Figura B.10: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0259 \text{ ms}^{-1}$.

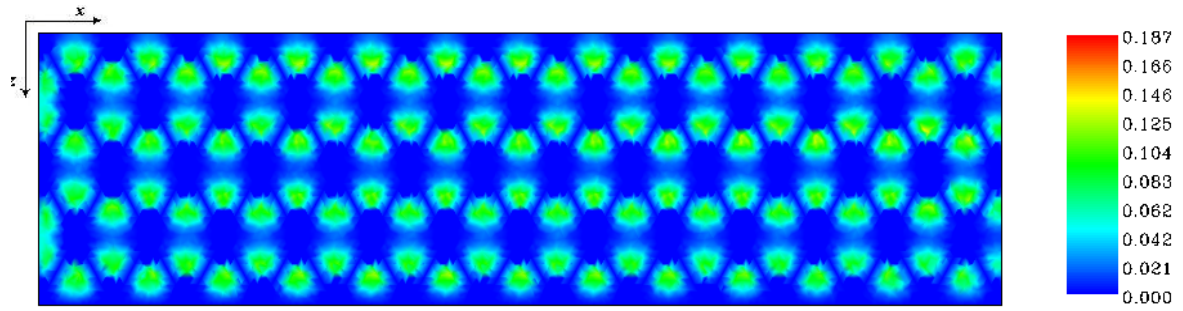


Figura B.11: Velocidade no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0259 \text{ ms}^{-1}$.

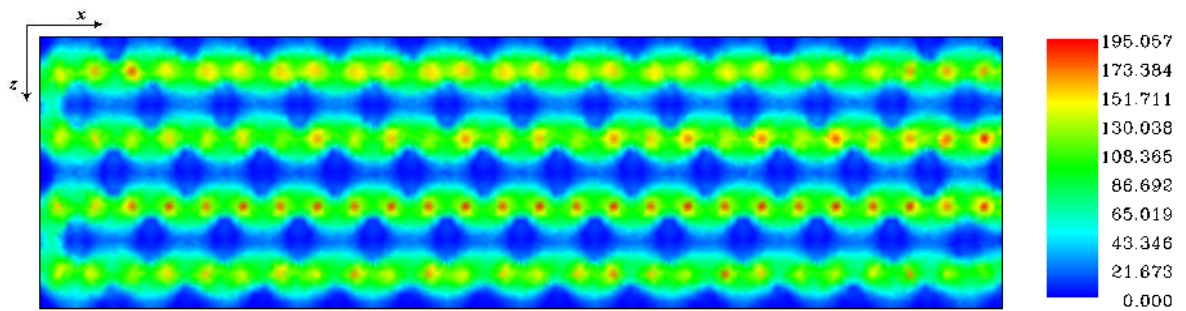


Figura B.12: Taxa de deformação no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0259 \text{ ms}^{-1}$.

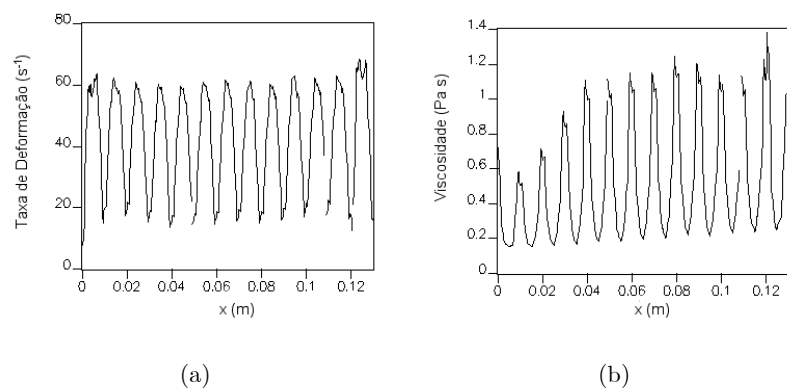


Figura B.13: Taxa de Deformação (a) e Viscosidade (b) na intersecção dos planos $y = 0$ e $z = 0,02$.

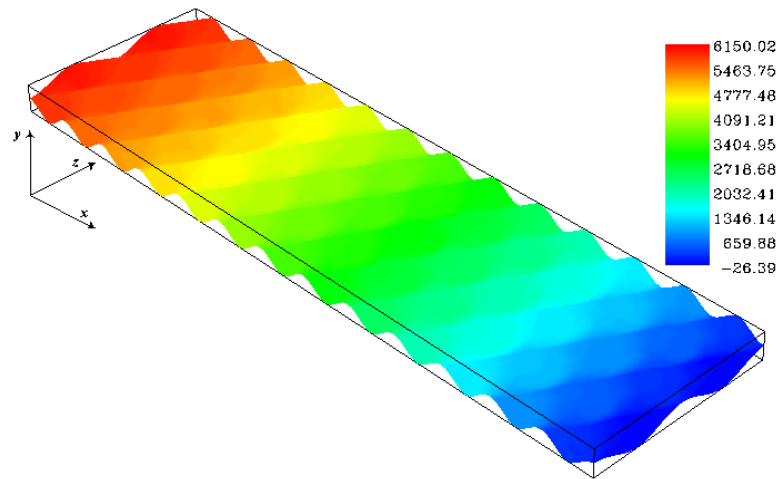


Figura B.14: Perfil de pressão ao longo do canal.

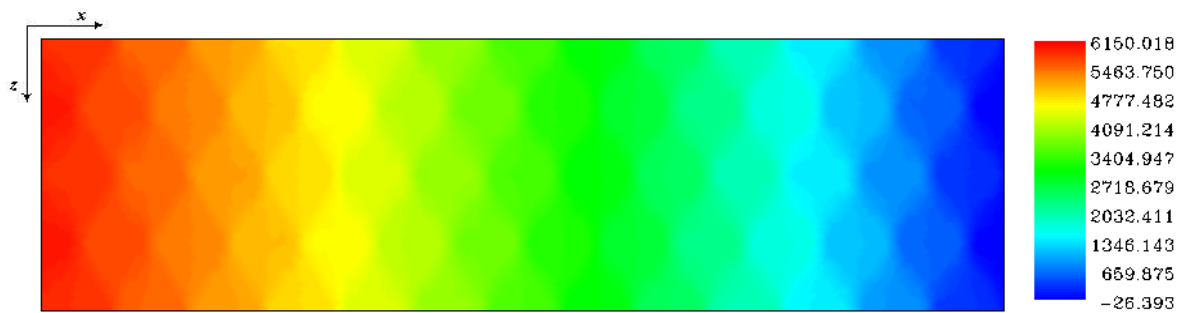


Figura B.15: Pressão no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0259 \text{ ms}^{-1}$.

B.3 Fluxo de Calor Variável com $U = 777,4 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

Viscosidade Independente da Temperatura

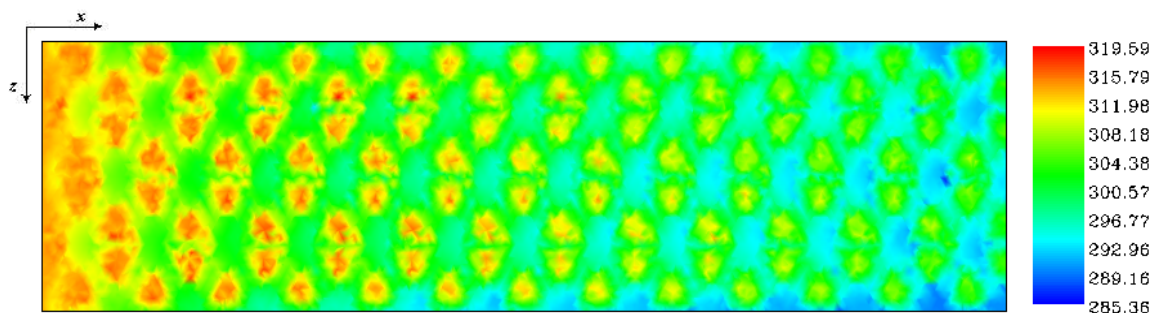


Figura B.16: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$) com $v_{média} = 0,0258 \text{ ms}^{-1}$.

B.4 Corte com Fluxo de Calor Variável, $U_{\text{teórico}} = 1160 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$

Viscosidade Independente da Temperatura

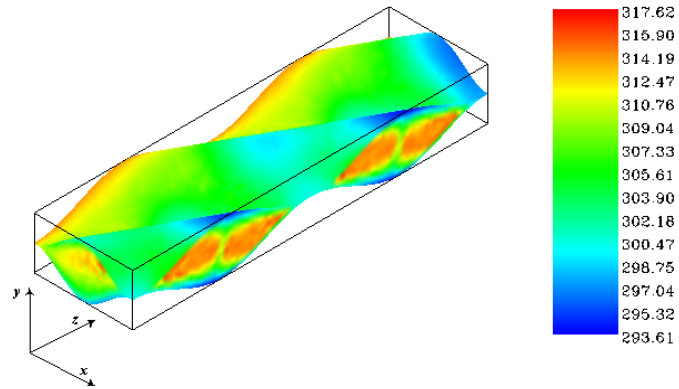


Figura B.17: Perfil de temperatura ao longo do canal.

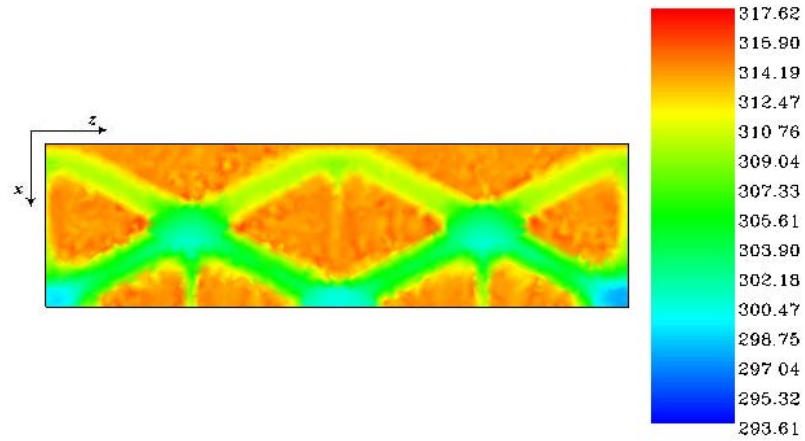


Figura B.18: Temperatura no plano dos pontos de contacto ($y = 0$).

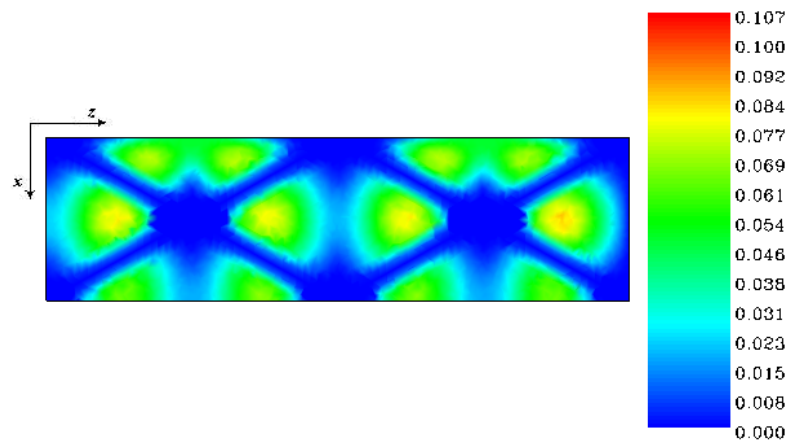


Figura B.19: Velocidade no plano dos pontos de contacto ($y = 0$).

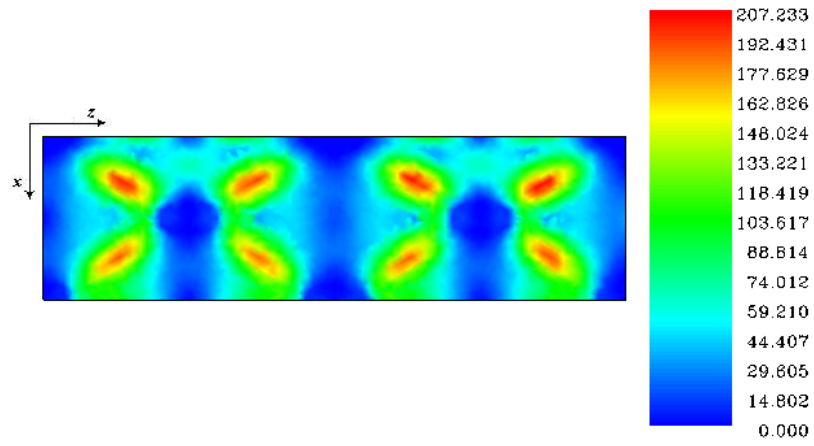


Figura B.20: Taxa de deformação no plano dos pontos de contacto ($y = 0$).

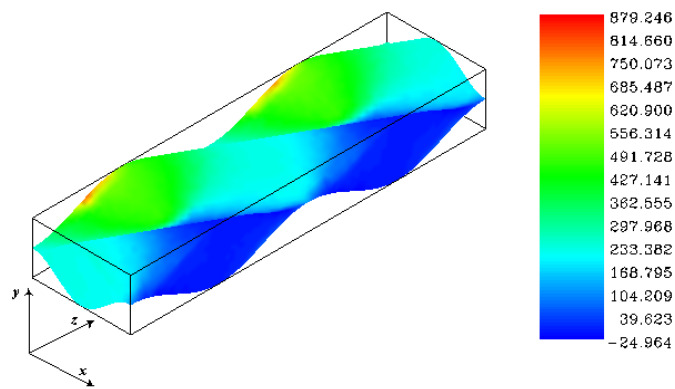


Figura B.21: Perfil de pressão ao longo do canal.

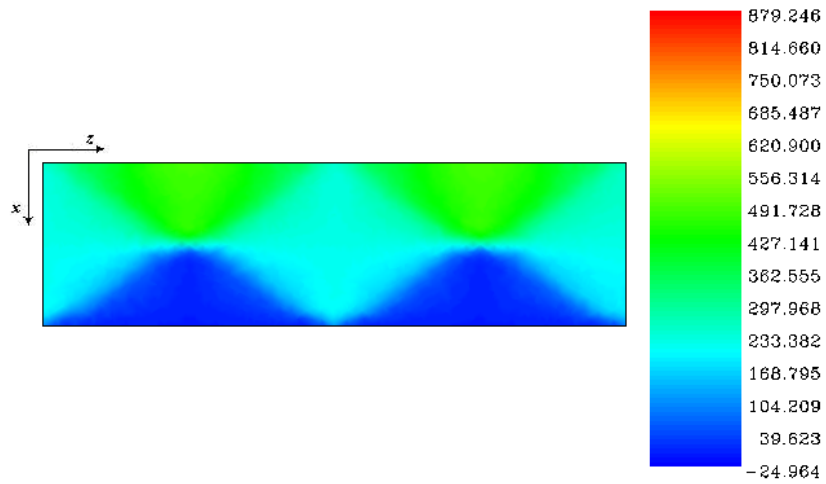


Figura B.22: Pressão no plano dos pontos de contacto ($y = 0$).

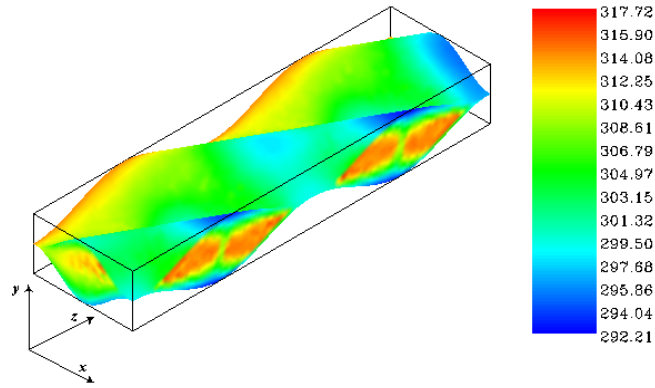


Figura B.23: Perfil de temperatura ao longo do canal.

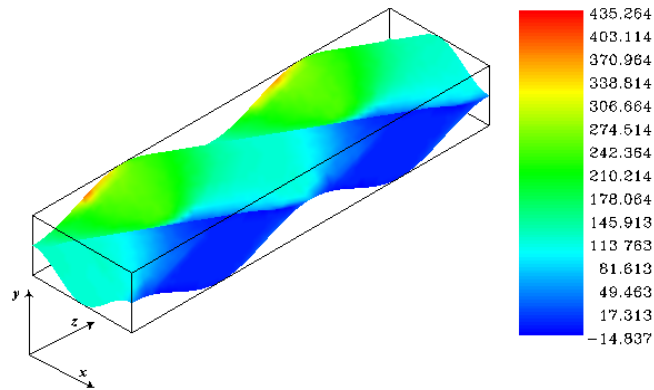


Figura B.24: Perfil de pressão ao longo do canal.

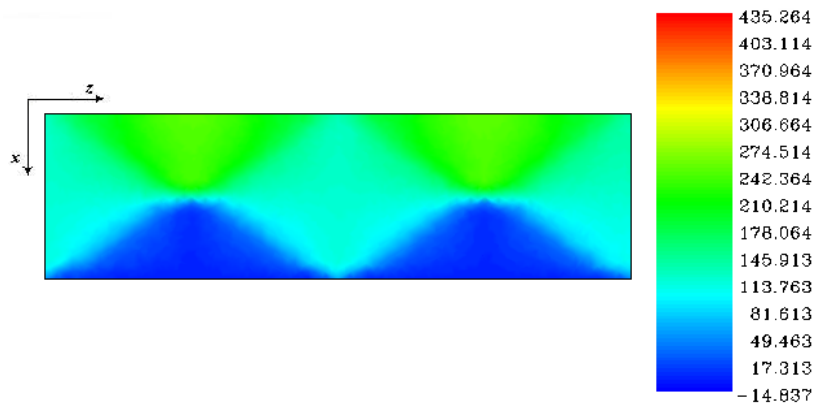


Figura B.25: Pressão no plano dos pontos de contacto ($y = 0$).

B.5 Exemplo de um ficheiro de listagem de resultados

Apresenta-se, a título ilustrativo, o ficheiro de listagem de resultados (*.lst) relativo ao fluxo de calor variável, $U = 777,4 \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$ e viscosidade dependente da temperatura.

Startup file is c:\fluent.inc\polyflow3.92\ntx86/.p3rc

Polyflow running on LC1 with 1 processor
Arguments of Polyflow :

```

PPPPPP 00000 LL YY YY FFFFFFFF LL 00000 WW WW
PP PP 00 00 LL YY YY FF LL 00 00 WW WW
PP PP 00 00 LL YY YY FF LL 00 00 WW WW
PPPPPP 00 00 LL YY YY FFFFFF LL 00 00 WW WW
PP 00 00 LL YYYF FF LL 00 00 WW W WW
PP 00 00 LL YY FF LL 00 00 WW W WW
PP 00 00 LL YY FF LL 00 00 WWW WWW
PP 00000 LLLLLLL YY FF LLLLLLL 00000 WW WW

```

```

*****
*
* Polyflow s.a.
* Avenue Pasteur, 4
* B-1300 WAVRE
* BELGIUM
*
* TEL : 32-(0)10-452861
* FAX : 32-(0)10-453009
*
* URL : www.fluent.com
* www.polyflow.be
*
* Users Services Center :
* www.fluentusers.com
*
*****

```

```

*****
*
* Version 3.9.2
*
*****

```

```

*****
*
* TOPO
*
*****

```

root mesh

```

Space Dim. : 3
Num. of bricks: 161474
Num. of faces : 337558
Num. of segm. : 210456
Num. of nodes : 34373

```

U_exp+LA

```
*****  
*                               *  
*      PROBLEMS                 *  
*                               *  
*****
```

Navier-Stokes 3D

```
Support      : S1.  
Coordinates : COORDINATES  
Input Fields : -  
Output Fields : VELOCITIES  
                TEMPERATURE  
                PRESSURE
```

Navier-Stokes 3D

non isothermal flow problem
generalized newtonian fluid

no streamline upwinding in momentum equation
no streamline upwinding in energy equation
picard iteration for viscosity law

viscosity function : $\nu = F(g) \cdot H(T)$

shear-rate dependence of the viscosity : $F(g)$

viscosity law : power law :

$$F(g) = \text{fac} * (\text{tnat} * g)^{(\text{expo}-1)}$$

fac = 3.65000E+00 , tnat = 1.00000E+00
expo = 4.20000E-01

temperature dependence of the viscosity : $H(T)$

Arrhenius law :

$$H(T) = \exp\left(\frac{\text{alfa}}{T-T_0} - \frac{\text{alfa}}{T_{\text{alfa}}-T_0}\right)$$

alfa = 3.39432E+03
Talfa = 2.93150E+02 , T0 = 0.00000E+00

specific mass : $\rho = 1.06800E+03$

gravity field neglected
inertia terms neglected in momentum equation

coefficients of conductivity law :

$$\text{condu} = a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)^2 + d * (t-t_0)^3$$

a = 5.23000E-01
b = 0.00000E+00
c = 0.00000E+00
d = 0.00000E+00
t0 = 0.00000E+00

coefficients of heat capacity law :

$$C_p = a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)^2 + d * (t-t_0)^3$$

a = 3.53000E+03
b = 0.00000E+00
c = 0.00000E+00
d = 0.00000E+00
t0 = 0.00000E+00

buoyancy force (Boussinesq approximation) :

coefficient of volumetric expansion : $\beta = 0.00000E+00$
reference temperature for density : $t_{\beta} = 0.00000E+00$

viscous heating neglected

compressibility neglected

U_exp+LA

Inflow

Support : (S1*B1).
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : Flow rate
 Output Fields : VELOCITIES
 TEMPERATURE
 Pressure
 Grad P

Navier-Stokes 2D and 2D 1/2
 non isothermal flow problem
 generalized newtonian fluid
 plane geometry

channel flow
 no streamline upwinding in momentum equation
 no streamline upwinding in energy equation
 picard iteration for viscosity law

viscosity function : $\nu = F(g) \cdot H(T)$

shear-rate dependence of the viscosity : $F(g)$
 viscosity law : power law :
 $F(g) = \text{fac} \cdot (\text{tnat} \cdot g)^{(\text{expo}-1)}$
 fac = 3.65000E+00 , tnat = 1.00000E+00
 expo = 4.20000E-01

temperature dependence of the viscosity : $H(T)$
 Arrhenius law :
 $H(T) = \exp(\text{alfa}/(T-T0) - \text{alfa}/(\text{Ta} \text{alfa}-T0))$
 alfa = 3.39432E+03
 Ta alfa = 2.93150E+02 , T0 = 0.00000E+00

specific mass : $\rho = 1.06800E+03$
 gravity field neglected
 inertia terms neglected in momentum equation

coefficients of conductivity law :
 $\text{condu} = a + b \cdot (t-t0) + c \cdot (t-t0)^{**2} + d \cdot (t-t0)^{**3}$
 a = 5.23000E-01
 b = 0.00000E+00
 c = 0.00000E+00
 d = 0.00000E+00
 t0 = 0.00000E+00

coefficients of heat capacity law :
 $C_p = a + b \cdot (t-t0) + c \cdot (t-t0)^{**2} + d \cdot (t-t0)^{**3}$
 a = 3.53000E+03
 b = 0.00000E+00
 c = 0.00000E+00
 d = 0.00000E+00
 t0 = 0.00000E+00

buoyancy force (Boussinesq approximation) :
 coefficient of volumetric expansion : $\beta = 0.00000E+00$
 reference temperature for density : $t_{\beta} = 0.00000E+00$

viscous heating neglected

compressibility neglected

Neumann for 3D

Support : (S1*S2).
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : -
 Output Fields : TEMPERATURE

U_exp+LA

natural boundary conditions 3D

Neumann for 3D

Support : (S1*S3).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : -
Output Fields : TEMPERATURE

natural boundary conditions 3D

Navier-Stokes 3D

Support : S2.
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : -
Output Fields : TEMPERATURE

Navier-Stokes 3D
thermal problem

specific mass : $\rho_0 = 0.00000E+00$

coefficients of conductivity law :

$$\text{condu} = a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)**2 + d * (t-t_0)**3$$

a = 1.63000E+01
b = 0.00000E+00
c = 0.00000E+00
d = 0.00000E+00
t0 = 0.00000E+00

coefficients of heat capacity law :

$$C_p = a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)**2 + d * (t-t_0)**3$$

a = 0.00000E+00
b = 0.00000E+00
c = 0.00000E+00
d = 0.00000E+00
t0 = 0.00000E+00

compressibility neglected

Neumann for 3D

Support : (S2*S1).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : -
Output Fields : TEMPERATURE

natural boundary conditions 3D

Neumann for 3D

Support : (S2*B4).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : Heat flux
Output Fields : TEMPERATURE

natural boundary conditions 3D

density of boundary heat fluxes imposed

Navier-Stokes 3D

Support : S3.
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : -
Output Fields : TEMPERATURE

U_exp+LA

Navier-Stokes 3D
thermal problem

specific mass : ro = 0.00000E+00

coefficients of conductivity law :

condu = a + b * (t-t0) + c * (t-t0)**2 + d * (t-t0)**3
a = 1.63000E+01
b = 0.00000E+00
c = 0.00000E+00
d = 0.00000E+00
t0 = 0.00000E+00

coefficients of heat capacity law :

Cp = a + b * (t-t0) + c * (t-t0)**2 + d * (t-t0)**3
a = 0.00000E+00
b = 0.00000E+00
c = 0.00000E+00
d = 0.00000E+00
t0 = 0.00000E+00

compressibility neglected

Neumann for 3D

Support : (S3*S1).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : -
Output Fields : TEMPERATURE

natural boundary conditions 3D

Neumann for 3D

Support : (S3*B3).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : Heat flux
Output Fields : TEMPERATURE

natural boundary conditions 3D

density of boundary heat fluxes imposed

Flow Rate

Support : (S1*S2).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : FLOW_RATE

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the flow rate through the current boundary part is obtained
from the integration of the velocity field

plane geometry

Flow Rate

Support : (S1*S3).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : FLOW_RATE

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the flow rate through the current boundary part is obtained
from the integration of the velocity field

U_exp+LA

plane geometry

Flow Rate

Support : (S1*B1).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : FLOW_RATE

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the flow rate through the current boundary part is obtained
from the integration of the velocity field

plane geometry

Flow Rate

Support : (S1*B2).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : FLOW_RATE

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the flow rate through the current boundary part is obtained
from the integration of the velocity field

plane geometry

Flow Rate

Support : (S1*B5).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : FLOW_RATE

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the flow rate through the current boundary part is obtained
from the integration of the velocity field

plane geometry

Flow Rate

Support : (S1*B6).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : FLOW_RATE

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the flow rate through the current boundary part is obtained
from the integration of the velocity field

plane geometry

Viscosity

Support : S1.
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
Output Fields : TEMPERATURE
Output Fields : VISCOSITY

algebraic post-processor 3D
the mean least square technique is applied for computing
the viscosity $\mu(IId, t)$

viscosity function : $\text{visc} = F(g) \cdot H(T)$

U_exp+LA

shear-rate dependence of the viscosity : F(g)
 viscosity law : power law :
 $F(g) = fac * (tnat*g)^{(expo-1)}$
 fac = 3.65000E+00 , tnat = 1.00000E+00
 expo = 4.20000E-01

temperature dependence of the viscosity : H(T)
 Arrhenius law :
 $H(T) = \exp(alfa/(T-T0) - alfa/(Talfa-T0))$
 alfa = 3.39432E+03
 Talfa = 2.93150E+02 , T0 = 0.00000E+00

Shear rate

Support : S1.
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES
 Output Fields : LOCAL SHEAR-RATE

algebraic post-processor 3D
 the mean least square technique is applied for computing
 the local shear rate 'gamma-dot'

Viscous heating

Support : S1.
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES
 TEMPERATURE
 Output Fields : VISCIOUS HEATING

algebraic post-processor 3D
 the mean least square technique is applied for computing
 the viscous heating T:d

viscosity function : visc = F(g) . H(T)

shear-rate dependence of the viscosity : F(g)
 viscosity law : power law :
 $F(g) = fac * (tnat*g)^{(expo-1)}$
 fac = 3.65000E+00 , tnat = 1.00000E+00
 expo = 4.20000E-01

temperature dependence of the viscosity : H(T)
 Arrhenius law :
 $H(T) = \exp(alfa/(T-T0) - alfa/(Talfa-T0))$
 alfa = 3.39432E+03
 Talfa = 2.93150E+02 , T0 = 0.00000E+00

scaling factor : scal fc = 1.00000E+00

Dissipated power

Support : S1.
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES
 TEMPERATURE
 Output Fields : Dissip_Power

algebraic post-processor 3D
 the mean least square technique is applied for computing
 the total power consumption

Convected Heat

Support : (S1*S2).
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES

U_exp+LA
TEMPERATURE
Output Fields : CONV_HEAT

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the mean least square technique is applied for computing
the convected heat flux defined as the integral

/
| ro Cp V (T-Tref) dS , where :
/

ro (specific mass) = 1.06800E+03 ,
Cp (heat capacity) =
a + b * (t-t0) + c * (t-t0)**2 + d * (t-t0)**3, with
a = 3.53000E+03 , c = 0.00000E+00 ,
b = 0.00000E+00 , d = 0.00000E+00 , and
t0 = 0.00000E+00 ,
Tref (surrounding temperature) = 0.00000E+00

plane geometry

Convected Heat

Support : (S1*S3).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
TEMPERATURE
Output Fields : CONV_HEAT

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the mean least square technique is applied for computing
the convected heat flux defined as the integral

/
| ro Cp V (T-Tref) dS , where :
/

ro (specific mass) = 1.06800E+03 ,
Cp (heat capacity) =
a + b * (t-t0) + c * (t-t0)**2 + d * (t-t0)**3, with
a = 3.53000E+03 , c = 0.00000E+00 ,
b = 0.00000E+00 , d = 0.00000E+00 , and
t0 = 0.00000E+00 ,
Tref (surrounding temperature) = 0.00000E+00

plane geometry

Convected Heat

Support : (S1*B1).
Coordinates : COORDINATES
Input Fields : VELOCITIES
TEMPERATURE
Output Fields : CONV_HEAT

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
the mean least square technique is applied for computing
the convected heat flux defined as the integral

/
| ro Cp V (T-Tref) dS , where :
/

ro (specific mass) = 1.06800E+03 ,
Cp (heat capacity) =
a + b * (t-t0) + c * (t-t0)**2 + d * (t-t0)**3, with
a = 3.53000E+03 , c = 0.00000E+00 ,
b = 0.00000E+00 , d = 0.00000E+00 , and
t0 = 0.00000E+00 ,
Tref (surrounding temperature) = 0.00000E+00

plane geometry

U_exp+LA

Convected Heat

Support : (S1*B2).
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES
 TEMPERATURE
 Output Fields : CONV_HEAT

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
 the mean least square technique is applied for computing
 the convected heat flux defined as the integral

$$\int \rho C_p V (T-T_{ref}) dS, \text{ where :}$$

ρ (specific mass) = 1.06800E+03 ,
 C_p (heat capacity) =
 $a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)**2 + d * (t-t_0)**3$, with
 $a = 3.53000E+03$, $c = 0.00000E+00$,
 $b = 0.00000E+00$, $d = 0.00000E+00$, and
 $t_0 = 0.00000E+00$,
 T_{ref} (surrounding temperature) = 0.00000E+00

plane geometry

Convected Heat

Support : (S1*B5).
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES
 TEMPERATURE
 Output Fields : CONV_HEAT

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
 the mean least square technique is applied for computing
 the convected heat flux defined as the integral

$$\int \rho C_p V (T-T_{ref}) dS, \text{ where :}$$

ρ (specific mass) = 1.06800E+03 ,
 C_p (heat capacity) =
 $a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)**2 + d * (t-t_0)**3$, with
 $a = 3.53000E+03$, $c = 0.00000E+00$,
 $b = 0.00000E+00$, $d = 0.00000E+00$, and
 $t_0 = 0.00000E+00$,
 T_{ref} (surrounding temperature) = 0.00000E+00

plane geometry

Convected Heat

Support : (S1*B6).
 Coordinates : COORDINATES
 Input Fields : VELOCITIES
 TEMPERATURE
 Output Fields : CONV_HEAT

algebraic post-processor 2D and 2D 1/2
 the mean least square technique is applied for computing
 the convected heat flux defined as the integral

$$\int \rho C_p V (T-T_{ref}) dS, \text{ where :}$$

ρ (specific mass) = 1.06800E+03 ,
 C_p (heat capacity) =
 $a + b * (t-t_0) + c * (t-t_0)**2 + d * (t-t_0)**3$, with
 $a = 3.53000E+03$, $c = 0.00000E+00$,
 $b = 0.00000E+00$, $d = 0.00000E+00$, and
 $t_0 = 0.00000E+00$,
 T_{ref} (surrounding temperature) = 0.00000E+00

plane geometry

```

*****
*                               *
*           SOLVERS             *
*                               *
*****

```

```

==> Starting Evolution
    at S-ini = 0.100000E+00
=====

```

```

*****
*** Starting Step      1      ***
*****

```

```

Evolution parameter = 0.100000E+00
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000
Parameter al fa      = 339.432000000000

```

Solver : Preprocessors

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.100000E-03

Solver : F.E.M. Task 1

```

Buffering on Disk in C:\DOCUME~1\carla\LOCALS~1\Temp
Alternate path: $TMPDIR (unix) or %TMP% (Windows)
Convergence assumed : Rel. var. LT 0.100000E-03

```

Solver : Postprocessors

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.100000E+09

Flow rates

```

Flow rate = 0.000000E+00 on (S1*S2).
Flow rate = 0.000000E+00 on (S1*S3).
Flow rate = -0.249400E-05 on (S1*B1).
Flow rate = 0.249400E-05 on (S1*B2).
Flow rate = 0.000000E+00 on (S1*B5).
Flow rate = 0.000000E+00 on (S1*B6).

```

Convected heat

```

Convected heat = 0.000000E+00 on (S1*S2).
Convected heat = 0.000000E+00 on (S1*S3).

```

Convected heat = -0.2953789E+04 on (S1*B1).
Convected heat = 0.2826165E+04 on (S1*B2).
Convected heat = -0.1961818E-43 on (S1*B5).
Convected heat = 0.0000000E+00 on (S1*B6).

U_exp+LA

Sol ver : Postprocessors

Sol ver : Postprocessors

Sol ver : Postprocessors

Sol ver : Postprocessors

Total di ssi pated power

Di ssi pated power = 0.1762748E-01 on S1.

```
*****  
*                               *  
*   Post-Processors           *  
*                               *  
*****
```

Total fl ux

Fl ux on (S1*S2).

fl ux = 0.5331271E+02

Fl ux on (S1*S3).

fl ux = 0.5257889E+02

Fl ux on (S1*B1).

fl ux = 0.4648662E+00

Fl ux on (S1*B2).

fl ux = 0.0000000E+00

Fl ux on (S1*B5).

fl ux = 0.0000000E+00

Fl ux on (S1*B6).

fl ux = 0.0000000E+00

U_exp+LA

*** Step size information : ***

```
=====
S          = 0.1000000E+00, step #      1
dSnew     = 0.3750000E+00, okincr :    T
tests     = 0.5665340E-04
```

```
*****
***      Starting Step      2      ***
*****
```

```
Evolution parameter = 0.4750000E+00
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
Parameter alfa      = 1612.30200000000
```

Solver : Preprocessors

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.1000000E-03

Solver : F.E.M. Task 1

Buffering on Disk in C:\DOCUME~1\carla\LOCALS~1\Temp
Alternate path: \$TMPDIR (unix) or %TMP% (Windows)
Convergence assumed : Rel. var. LT 0.1000000E-03

Solver : Postprocessors

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.1000000E+09

Flow rates

```
Flow rate = 0.0000000E+00 on (S1*S2).
Flow rate = 0.0000000E+00 on (S1*S3).
Flow rate = -0.2494000E-05 on (S1*B1).
Flow rate = 0.2494000E-05 on (S1*B2).
Flow rate = 0.0000000E+00 on (S1*B5).
Flow rate = 0.0000000E+00 on (S1*B6).
```

Convected heat

```
Convected heat = 0.0000000E+00 on (S1*S2).
Convected heat = 0.0000000E+00 on (S1*S3).
Convected heat = -0.2953789E+04 on (S1*B1).
Convected heat = 0.2826863E+04 on (S1*B2).
Convected heat = -0.1821688E-43 on (S1*B5).
Convected heat = 0.0000000E+00 on (S1*B6).
```

Sol ver : Postprocessors

Sol ver : Postprocessors

Sol ver : Postprocessors

Sol ver : Postprocessors

Total di ssi pated power

Di ssi pated power = 0.1510290E-01 on S1.

```
*****  
*                               *  
*   Post-Processors           *  
*                               *  
*****
```

Total fl ux

Fl ux on (S1*S2).

fl ux = 0.5328769E+02

Fl ux on (S1*S3).

fl ux = 0.5259461E+02

Fl ux on (S1*B1).

fl ux = 0.4691833E+00

Fl ux on (S1*B2).

fl ux = 0.0000000E+00

Fl ux on (S1*B5).

fl ux = 0.0000000E+00

Fl ux on (S1*B6).

fl ux = 0.0000000E+00

U_exp+LA

*** Step size information : ***

=====

| | | | | |
|-------|---|----------------|-----------|---|
| S | = | 0.4750000E+00, | step # | 2 |
| dSnew | = | 0.5250000E+00, | okinc r : | T |
| tests | = | 0.8714375E-04 | | |

*** Starting Step 3 ***

Evolution parameter = 0.1000000E+01

| | | |
|----------------|---|------------------|
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |
| Parameter alfa | = | 3394.32000000000 |

Solver : Preprocessors

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.1000000E-03

Solver : F.E.M. Task 1

Buffering on Disk in C:\DOCUME~1\carla\LOCALS~1\Temp

Alternate path: \$TMPDIR (unix) or %TMP% (Windows)

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.1000000E-03

Solver : Postprocessors

Convergence assumed : Rel. var. LT 0.1000000E+09

Flow rates

| | | |
|-------------|----------------|-------------|
| Flow rate = | 0.0000000E+00 | on (S1*S2). |
| Flow rate = | 0.0000000E+00 | on (S1*S3). |
| Flow rate = | -0.2494000E-05 | on (S1*B1). |
| Flow rate = | 0.2494000E-05 | on (S1*B2). |
| Flow rate = | 0.0000000E+00 | on (S1*B5). |
| Flow rate = | 0.0000000E+00 | on (S1*B6). |

Convected heat

| | | |
|------------------|----------------|-------------|
| Convected heat = | 0.0000000E+00 | on (S1*S2). |
| Convected heat = | 0.0000000E+00 | on (S1*S3). |
| Convected heat = | -0.2953789E+04 | on (S1*B1). |
| Convected heat = | 0.2827838E+04 | on (S1*B2). |
| Convected heat = | -0.1541428E-43 | on (S1*B5). |
| Convected heat = | 0.0000000E+00 | on (S1*B6). |

Solver : Postprocessors

Solver : Postprocessors

Solver : Postprocessors

Solver : Postprocessors

Total dissipated power

Dissipated power = 0.1233204E-01 on S1.

*** Step size information : ***

```
=====
S      = 0.1000000E+01, step #      3
dSnew = 0.5000000E+00, okincr :    T
tests  = 0.8600392E-04
```

====> Sfin has been reached. Stop.

=====

```
*****
*                               *
*   Post-Processors           *
*                               *
*****
```

Total flux

Flux on (S1*S2).

flux = 0.5325966E+02

Flux on (S1*S3).

flux = 0.5261197E+02

Flux on (S1*B1).

flux = 0.4782420E+00

Flux on (S1*B2).

flux = 0.0000000E+00

Flux on (S1*B5).

flux = 0.0000000E+00

U_exp+LA

Flux on (S1*B6).

flux = 0.0000000E+00

Memory information :

| | | |
|--|---|-------------|
| Total Memory requirement | : | 431. Mbytes |
| Memory requirement for buffering | : | 585. Mbytes |
| Memory requirement for active matrices | : | 34. Mbytes |

Cost information :

Maximum elimination cost : 147804. * 1E+06 floating operations

Time information :

| | | |
|--------------|---|--------------|
| CPU time | : | 43834.1 sec. |
| Elapsed time | : | 43834.0 sec. |

Stop. Normal end of Polyflow

Polyflow running on LC1 with 1 processor
Arguments of Polyflow :

```
*****  
* Summary of the simulation *  
*****
```

The computation succeeded.

```
*****  
* Expert tool advice in order to optimize the simulation *  
*****
```

During the evolution no step has failed. The next time you run a similar calculation, maybe it could be interesting to start the evolution with a larger initial step size and a larger maximum step size.