UNIVERSIDADE DO MINHO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO E PSICOLOGIA

OS FUTUROS PROFESSORES DO 2º CICLO E A ESTOCÁSTICA

Dificuldades Sentidas e o Ensino do Tema

Paula Maria Pereira de Barros

**Dissertação submetida à Universidade do Minho
como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Educação
na Área de Especialização em
Supervisão Pedagógica em Ensino da Matemática**

Sob a orientação do Doutor José António Fernandes

Braga, 2003

É autorizada a reprodução integral desta tese, apenas para efeitos de investigação, mediante declaração escrita do interessado, que a tal se compromete.

A autora

RESUMO

A estatística e as probabilidades têm adquirido visibilidade nos currículos escolares desde os níveis mais elementares. Deste modo, considerando a necessidade de formar estudantes habilitados a raciocinar estocasticamente, torna-se necessário reflectir sobre a formação que possuem os futuros professores que vão ensinar essas temáticas. O presente estudo surgiu na senda desta preocupação e teve como objectivos orientadores: (a) Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades; (b) Identificar dificuldades de futuros professores no planeamento e execução de aulas sobre o tema; (c) Descobrir os factores subjacentes às opções que os futuros professores adoptam na sua prática lectiva; (d) Compreender de que forma as dificuldades sentidas influenciam a sua prática e (e) Averiguar se a prática induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio.

O estudo desenvolveu-se em duas fases, cada uma com uma metodologia diferenciada. Na primeira fase, em que se seguiu uma metodologia essencialmente quantitativa, uma turma de 37 alunos do 4º ano do curso de Professores de Ensino Básico, variante Matemática e Ciências da Natureza, futuros professores do 1º e 2º ciclos do ensino básico, respondeu a um questionário cujas questões se reportavam a conceitos elementares de estatística e probabilidades.

Na segunda fase, em que se seguiu uma metodologia de estudo de caso, seleccionaram-se três dos participantes da primeira fase tendo como critério fundamental que fossem leccionar a unidade didáctica de Estatística de 6º ano, durante a Prática Pedagógica II (estágio). Através de entrevistas semi-estruturadas, conversas informais, observação de aulas e recolha de documentos escritos acompanhou-se o seu percurso nesta etapa. Estes três participantes, após terem leccionado a unidade, analisaram, ainda, as respostas dadas ao questionário administrado na primeira fase e indicaram as alterações que fariam em termos de respostas e de raciocínios.

O estudo realizado permite concluir que, embora os participantes estivessem na fase final da sua formação, persistiam, ainda, algumas dificuldades. Por exemplo, o cálculo da média a partir de um gráfico de barras originou muitas dificuldades assim como a sua aplicabilidade a variáveis qualitativas. De entre as medidas de tendência central, destaca-se a mediana como o conceito que levantou mais problemas. Já no que se refere aos acontecimentos certos, os alunos revelaram muitas dificuldades quando trabalharam com este tipo de acontecimento em situações não rotineiras. Observou-se, ainda, em várias situações, que utilizaram fórmulas sem ter em conta o contexto e, perante resultados absurdos, não avaliaram a sua razoabilidade.

No que diz respeito à prática pedagógica, os participantes na segunda fase do estudo, revelaram algumas dificuldades comuns, nomeadamente em encontrar estratégias diversificadas e alguma insegurança em termos conceptuais.

Verificou-se, ainda, que as opções metodológicas foram, essencialmente, influenciadas pelos manuais escolares, pelos constrangimentos inerentes à condição de aluno estagiário, pela experiência enquanto aluno, pelo tempo disponível para dedicar aos conteúdos, pelas características da turma e por dificuldades a nível do conhecimento científico e didáctico. Tendo estas últimas uma influência preponderante na selecção de determinadas tarefas em detrimento de outras.

Em termos gerais, constatou-se que, do ponto de vista científico, a prática nem sempre induziu a uma reflexão sobre as dificuldades, pois, por vezes, esta atitude introspectiva teve de ser provocada pela investigadora.

Face às dificuldades manifestadas pelos participantes do estudo, que de certo modo afectaram as suas escolhas em termos de ensino, tornando mais pobre a exploração do tema, evidencia-se a necessidade de desenvolver nos futuros professores uma atitude reflexiva de modo a consciencializá-los das suas dificuldades e, consequentemente, a motivá-los para colmatar lacunas tanto do ponto de vista científico como didáctico.

ABSTRACT

Statistics and probabilities have been acquiring visibility in the scholastic curriculum since the most elementary levels. Consequently, considering the need to enable students to reason stochasticly, it becomes necessary to reflect about the trainig of the future teachers that will teach these subjects. The present study, based on this concern, aims at:

(a) Identifying difficulties and reasoning processes of future teachers related to statistics and probabilities;

(b) Identifying difficulties of future teachers in the planning and execution of classes about these subjects;

(c) Discovering the factors underlying the teaching choices of future teachers;

(d) Understanding the way experienced difficulties influence their practice; and

(e) Inquiring if practice leads to a reflection about difficulties and to reasoning changes.

The study comprises two stages, each one with a distinct methodology. In the first stage an essentially quantitative methodology was followed. A class of 37 students of the 4th grade of Mathematics and Natural Sciences Teachers Course - future teachers of the 1st and 2nd basic levels of teaching - answered to a questionnaire about elementary concepts of statistics and probabilities.

In the second stage, a case study methodology was followed. Three participants of the first sample, who were going to teach 6^{th} grade statistics during their Pedagogic Practise (supervised training), were selected. Their practice was followed through semi-structured interviews, informal talks, classroom observation and written documents collection. These 3 participants, after having taught 6^{th} grade statistics, analysed the answers given to the questionnaire on the first stage and pointed out the changes that they would make in terms of answers and reasonings.

The present study shows that although the participants were in the final stage of their training there were still some difficulties. For instance, the mean estimation obtained from a bar graph and its applicability to qualitative variables originated several difficulties.

Among the central tendency measures, the median was the most problematic concept. As far as certain events are concerned, students showed several difficulties when working with this kind of events in non customary situations.

Additionally, formulas were used in several situations without considering the context and there was no evaluation of absurd results' reasonability.

Concerning the pedagogic practice, the participants of the second stage of the study revealed some common difficulties, namely in finding diversified strategies, and some insecurity in conceptual terms.

It was also verified that the methodological options were essentially influenced by the school manuals, the inherent constraints of being under supervised training, the experience as student, the available time to devote to contents, the group characteristics, and by difficulties concerning scientific and didactic knowledge. The last ones had a preponderant influence in the discrimination of certain tasks.

In general, and from the scientific point of view, it was verified that practice not always led to a reflexion about the difficulties. In fact, sometimes this introspective attitude had to be provoked by the investigator.

The difficulties showed by the participants of this study, that influenced their teaching choices, impoverishing the exploration of the subject, underscore the need to develop a reflexive attitude that can make future teachers aware of their difficulties and, consequently, motivate them to fill scientific and didactic gaps.

Ao José Miguel

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor José António Fernandes, pela forma interessada e disponível com que sempre acompanhou este trabalho, pela pertinência dos seus comentários e sugestões e pelos estímulos constantes.

A todos os alunos que participaram nesta investigação, pela sua colaboração. Em especial às três estagiárias mais directamente envolvidas no estudo, pelo seu empenho e disponibilidade.

Às professoras das escolas, pelo seu simpático acolhimento.

À Elsa, pela cedência da turma para aplicação do questionário e pelo incentivo.

Ao Carlos e à Drª Helena, pela revisão do questionário.

À Cláudia, pelo empenho demonstrado na tradução do resumo, ao Gil, pelo seu contributo nesta tarefa, e à Rute, pela respectiva revisão.

À Célia e ao Manuel, pelo apoio, incentivo e partilha de ideias.

À Cristina, pelo estímulo, apoio, partilha de ideias e, especialmente, pela ajuda nos momentos críticos.

A todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

À minha família, pela ajuda a todos os níveis que sempre me dispensaram, em especial à Maria João, pela paciência que teve na revisão do texto da dissertação.

Ao Neves, pelo apoio, compreensão e por tantas vezes ter abdicado da minha presença.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, para além de se apresentarem os objectivos do estudo realizado, mencionam-se as razões que determinaram a escolha do tema, a sua relevância para a investigação na área da formação inicial de professores e faz-se uma breve descrição da estrutura da dissertação.

1.1. Objectivos do estudo

O estudo que se apresenta realizou-se no âmbito da formação inicial de professores e, através dele, pretendeu-se reflectir sobre a formação dos futuros docentes no que se refere a aspectos ligados ao conhecimento científico de estatística e probabilidades e à sua didáctica.

A investigação foi desenvolvida com alunos do 4º ano do curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, futuros professores dos 1º e 2º ciclos do ensino básico, e desenrolou-se em duas fases distintas, embora directamente interligadas: na primeira fase, os participantes eram apenas alunos da instituição de formação e, na segunda fase, para além de alunos, adquiriram o estatuto de professores estagiários, pois esta realizou-se no contexto da disciplina de Prática Pedagógica II (estágio).

Mais concretamente, o estudo centrou-se essencialmente nos temas de estocástica ligados ao programa de Matemática do 2º ciclo do ensino básico e teve como objectivos orientadores:

(a) Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades;

(b) Identificar dificuldades de futuros professores no planeamento e execução de aulas sobre o tema;

(c) Descobrir os factores subjacentes às opções que os futuros professores adoptam na sua prática lectiva;

(d) Compreender de que forma as dificuldades sentidas influenciam a sua prática;

(e) Averiguar se a prática induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio.

1.2. Relevância do estudo

"A competência matemática que todos devem desenvolver inclui conhecimentos de estatística e de probabilidades, os quais constituem uma ferramenta imprescindível em diversos campos de actividade científica, profissional, política e social" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.94).

Consequentemente, dada a sua importância na sociedade actual, não é de admirar que a estatística e as probabilidades tenham adquirido visibilidade nos currículos de todos os níveis de ensino, fazendo mesmo parte dos níveis mais elementares. Por exemplo, tópicos ligados à estatística e às probabilidades aparecem explicitamente no currículo do 2º ciclo e aspectos relacionados com a organização de dados estão implícitos no currículo do 1º ciclo.

Estas temáticas, pelas suas características específicas, permitem relacionar as diversas áreas de ensino assim como fazer a ligação directa a situações da vida real, permitindo motivar os alunos ao trabalhar com assuntos do seu interesse. Para além disso, face aos avanços tecnológicos, é possível diversificar os casos e os problemas, permitindo que o ensino se centre mais na interpretação do que no cálculo.

Todavia, para se tirar partido do potencial de exploração que a estocástica oferece, é necessário que os professores consigam trabalhar esta temática em diversos contextos pedagógicos, que se libertem das aulas rotineiras e que levem os alunos a pensar para além do cálculo e da aplicação dos algoritmos.

Assim, é preciso que os próprios professores desenvolvam essas capacidades pois como concluem Ponte, Matos e Abrantes (1998), com base na revisão de diversos estudos, "a investigação educacional tem mostrado que o corpo docente que lecciona Matemática nas escolas dos diversos níveis de ensino revela deficiências na sua formação científica, educacional e didáctica" (p.326). Por exemplo, algumas investigações (Canavarro, 1994; Carpenter, Fennema e Peterson, 1989; Putnam *et al.*, 1992) revelam que os professores manifestam dificuldades em implementar e diversificar a sua prática pedagógica devido a dificuldades relativamente a certos conceitos, o que pode ter consequências na aprendizagem dos alunos. Fennema e Franke (1992) referem também que "as decisões que o professor toma antes, durante e após o ensino têm uma influência dominante no que os estudantes aprendem" (p.156).

No que se refere à estocástica, existem igualmente algumas investigações (Azcaráte, Cardeñoso e Porlán, 1998; Batanero, Godino e Navas, 2000; Mevarech, 1983; Pollatsek, Lima e Well, 1981) que evidenciam dificuldades de estudantes do ensino superior, alguns dos quais futuros professores, relativamente a conceitos elementares de estatística e probabilidades que, nalguns casos, não diferem muito das dificuldades sentidas por alunos de níveis mais elementares.

Perante este panorama, e atendendo ao peso crescente que se tem dado à estatística e probabilidades nos vários níveis de ensino e às características específicas do raciocínio e conhecimento estocástico, em relação a outros temas do currículo de Matemática, "a problemática da formação de professores sobre este campo reveste-se de um interesse particular" (Godino, Batanero e Flores, 1999, p.2). Assim, "há que garantir que a formação inicial assuma padrões de qualidade aceitáveis, de modo a que os professores que se integram de novo no sistema contribuam para a sua melhoria e não para a sua degradação" (Ponte, Matos e Abrantes, 1998, p.329).

Nesta perspectiva, coloca-se a questão de saber se os futuros professores, que têm de ensinar os temas de estatística e probabilidades, os compreendem de forma adequada e possuem os conhecimentos necessários para levar os alunos a raciocinar correctamente sobre os vários assuntos a eles ligados.

Deste modo, enquanto formadores de professores, devemos reflectir sobre a formação inicial que lhes proporcionamos e, consequentemente, procurar identificar e compreender os factores que melhor possam contribuir para a sua preparação, de forma a que esta esteja de acordo com as tendências curriculares vigentes.

Face à reduzida (ou inexistente) investigação em Portugal sobre a formação inicial de professores no âmbito da estocástica, parece óbvio que os estudos nesta área são fundamentais, pois podem contribuir de modo significativo para orientar a formação inicial de professores tanto no contexto da supervisão pedagógica como no campo de acção de disciplinas que englobem o tratamento dos temas de estatística e/ou probabilidades. Assim, do ponto de vista científico e didáctico, a realização de estudos sobre estes temas pode constituir também um ponto de partida para melhorar o processo de ensino e aprendizagem.

1.3. Estrutura da dissertação

A dissertação está organizada em seis capítulos. No capítulo I – *Introdução* – para além de se descrever o que consta de cada um dos capítulos que compõem o relato desta tese, mencionam-se os objectivos do estudo e evidencia-se a relevância da investigação no contexto da formação inicial de professores.

No capítulo II – *Enquadramento Teórico* – faz-se referência a diversos documentos e resultados de investigações relacionadas com o estudo desenvolvido. Este capítulo encontra-se dividido em três subcapítulos. No primeiro, *A importância da estocástica*, mencionam-se algumas razões que justificam o interesse do conhecimento estocástico para todos os cidadãos, dando-se uma ênfase particular à importância do ensino e aprendizagem deste tema no contexto escolar. No segundo subcapítulo, *O ensino e aprendizagem da estocástica*, analisam-se os programas de Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino básico, no que diz respeito aos temas estocásticos contemplados e às orientações metodológicas, e indicam-se as orientações presentes no *Currículo Nacional do Ensino Básico* alusivas a esta temática. Tecem-se, ainda, com base na opinião de diversos autores, algumas considerações sobre o ensino da estocástica. Finalmente, exibe-se uma revisão de vários estudos que retratam investigações sobre dificuldades de alunos de vários níveis de ensino no que concerne a conceitos elementares de estatística e probabilidades. No terceiro subcapítulo, *A prática* *pedagógica dos docentes*, faz-se um levantamento das dificuldades dos professores principiantes na prática docente, apontadas em diversos estudos, e apresentam-se resultados de algumas investigações sobre factores que influenciam a prática pedagógica dos professores.

No capítulo III – *Metodologia* – fundamentam-se as opções metodológicas, apresentam-se os participantes na primeira fase do estudo (alunos do 4º ano do curso de Professores do Ensino Básico, variante Matemática e Ciências da Natureza) e os critérios usados para a selecção dos intervenientes na segunda fase do estudo (três dos participantes na primeira fase que leccionem, no estágio, a unidade didáctica de estatística de 6º ano). Referem-se, também, os métodos de recolha de informação onde, para além de se relatar de forma sumária o percurso efectuado nas duas fases do estudo, se apresentam os instrumentos de recolha de dados (questionário, entrevistas, observação de aulas e documentos escritos), e se evidencia de que forma e em que contextos foram utilizados.

Em termos globais, neste capítulo explicitam-se os procedimentos seguidos nas duas fases da investigação e refere-se a metodologia diferenciada que foi adoptada em cada uma delas. Isto é, na primeira fase recorreu-se a um questionário, tendo-se optado por uma abordagem quantitativa, no sentido descritivo, e na segunda fase utilizou-se uma metodologia qualitativa de estudo de casos: o caso da Joana, o caso da Teresa e o caso da Maria.

No IV capítulo – *Apresentação e análise dos dados do questionário* – expõem-se os resultados referentes à primeira fase da investigação, isto é, apresentam-se e analisam-se as respostas e os raciocínios obtidos em cada uma das questões do questionário no sentido de atingir o primeiro objectivo do estudo: "Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades."

No capítulo V – *Os futuros professores* – apresentam-se os resultados da segunda fase do estudo, que visava a consecução dos seguintes objectivos: Identificar dificuldades de futuros professores no planeamento e execução de aulas sobre o tema; Descobrir os factores subjacentes às opções que os futuros professores adoptam na sua prática lectiva; Compreender de que forma as dificuldades sentidas influenciam a sua prática; Averiguar se a prática induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio.

Assim, acompanhou-se o percurso de três estagiárias, a Joana, a Teresa e a Maria, em situação de prática pedagógica, durante a leccionação da unidade didáctica de Estatística de 6º ano. Por conseguinte, este capítulo está dividido em três subcapítulos, correspondendo cada um deles a um dos casos estudados. Todos os casos são descritos seguindo a mesma estrutura organizacional, tentando simultaneamente enquadrar nesta as particularidades de cada um.

Os principais tópicos referenciados em cada subcapítulo são: a relação dos participantes com a estocástica, onde se menciona a sua formação nesta área e se alude às ideias que associam à estatística e probabilidades e ao seu ensino; a prática pedagógica em que, para além de se mencionar a influência dos orientadores e se descrever os procedimentos e recursos usados na planificação da unidade e preparação de aulas, se faz uma resenha dos recursos e tarefas utilizados durante a prática lectiva, descrevendo-se ainda as dificuldades sentidas durante todo o processo que envolveu a prática pedagógica; o questionário, onde se descrevem e analisam as respostas e os raciocínios que as estagiárias utilizaram na resolução do questionário antes (primeira fase do estudo) e após leccionarem a unidade didáctica de Estatística.

No capítulo VI – *Conclusões* – faz-se um sumário da investigação realizada, apresentam-se as interpretações e reflexões finais que se consideram responder aos objectivos que presidiram a este estudo, identificam-se as principais limitações deste e tecem-se algumas considerações didácticas e recomendações para estudos futuros.

Finalmente, esta dissertação termina com a apresentação das referências bibliográficas e dos anexos. Estes incluem os instrumentos que foram utilizados para a recolha de dados, ou seja, o questionário, os guiões das entrevistas semi-estruturadas e as questões abertas, material que se considerou relevante para um possível esclarecimento de alguns dos aspectos tratados.

C A P Í T U L O I I

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Neste capítulo, que está organizado em três secções, referenciam-se diversos documentos, trabalhos e resultados de investigações relacionadas com o estudo desenvolvido.

Na primeira secção – A importância da estocástica – mencionam-se algumas razões que justificam o interesse do conhecimento estocástico para todos os cidadãos, dando-se uma ênfase particular à importância do ensino e aprendizagem deste tema no contexto escolar.

Na segunda secção – O ensino e aprendizagem da estocástica – começa-se por fazer uma abordagem aos programas de Matemática do 1º e 2º ciclos do ensino básico no que se refere aos temas estocásticos contemplados e às orientações metodológicas. Indicam-se, ainda, as orientações presentes no *Currículo Nacional do Ensino Básico* alusivas à estatística e probabilidades. Seguidamente, tecem-se alguns comentários relativos ao ensino da estocástica. E, por último, apresenta-se uma revisão de diversos estudos que incidem sobre as dificuldades dos alunos de vários níveis de ensino relativamente a conceitos elementares de estatística e probabilidades.

Na terceira secção – A prática pedagógica dos docentes – abordam-se alguns estudos que focam as dificuldades de professores principiantes na prática docente. Apresentam-se, também, resultados de algumas investigações sobre factores que influenciam a prática pedagógica dos professores.

2.1. A importância da estocástica

"Estamos rodeados por números, engolidos por eles, talvez mesmo afogando-nos debaixo deles" (Scheaffer, 2000, p.158), pelo que a vida dos cidadãos é cada vez mais regulada por indicadores numéricos, muitos dos quais gerados por processos que têm como base procedimentos estocásticos. Os meios de comunicação social usam a linguagem, as técnicas e os processos estatísticos para sustentar afirmações nos mais diversos domínios. Os "jogos de azar" estão cada vez mais presentes no dia-a-dia, podendo dar uma falsa imagem de lucro fácil a cidadãos menos informados. Além disso, a estocástica constitui uma poderosa ferramenta ao serviço da realização de projectos e investigações nas mais variadas áreas.

O pensamento estatístico e probabilístico apresenta, assim, uma enorme expansão e desenvolvimento no mundo actual, tendo uma importância crescente na sociedade, colocando-se a qualquer cidadão o desafio de gerir e utilizar a informação que lhe chega para tomar as suas decisões conscientemente, pelo que se torna imprescindível que adquira competências nessa área. Nesta perspectiva, a estocástica "desempenha um papel fundamental na formação para a cidadania" (Ponte e Fonseca, 2000, p.179). Como o exercício de uma cidadania crítica, reflexiva e participativa deve ser desenvolvido desde cedo, pois as crianças também convivem com dados estocásticos, "desenvolver o pensamento estatístico e probabilístico ao longo da escolaridade constitui um aspecto importante da formação que a escola deve proporcionar" (Abrantes, Serrazina e Oliveira, 1999, p.94).

Corroborando esta afirmação, há vários autores que apresentam diversas razões importantes para o ensino e aprendizagem da estocástica no contexto escolar.

Por exemplo, Pereira-Mendoza e Swift (1989, 1992) defendem que a estatística e as probabilidades devem ser incluídas no currículo escolar pela sua utilidade para a vida das pessoas enquanto cidadãos; pelo seu interesse para estudos posteriores, qualquer que seja o campo científico, já que em muitas profissões são necessários conhecimentos básicos sobre o tema e por razões estéticas. Argumentam que as considerações estéticas têm um papel importante na apreciação da beleza do assunto, já que a atracção estética, para além de proporcionar uma apreciação do poder das técnicas, proporciona também um conhecimento da responsabilidade da sua aplicação e está estritamente ligada à selecção de materiais que contribuem para desenvolver uma apreciação da matemática.

Shulte e Smart (1992) consideram igualmente que os tópicos de estatística e probabilidades são apropriados no currículo de matemática escolar, pois, no seu entender,

> "providenciam aplicações significativas da matemática a todos os níveis; proporcionam métodos para lidar com a incerteza; dão-nos alguma compreensão dos argumentos estatísticos, bons e maus, com os quais somos continuamente bombardeados; ajudam os consumidores a distinguir entre utilizações correctas de procedimentos estatísticos de utilizações incorrectas ou falaciosas; são tópicos inerentemente interessantes, excitantes e motivantes para muitos estudantes" (p. ix).

Nunes (1989), numa perspectiva utilitarista, defende que é necessário compreender e interpretar o que se passa à nossa volta e incluir na nossa bagagem cultural as armas necessárias para nos defendermos de forma a evitar os erros por vezes veiculados nas informações que recebemos. Também Borralho (2000) considera fundamental que a escola promova o desenvolvimento de capacidades de análise, de argumentação, de crítica e de intervenção sobre a informação.

Embora as situações de tipo aleatório tenham uma forte presença no nosso meio envolvente, segundo Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Fischbein (1975) a escola tem privilegiado o pensamento determinista, pelo que consideram que há necessidade de dar aos alunos uma visão menos determinista e mais equilibrada da realidade.

No mesmo sentido, Bernardes (1987), assumindo a estocástica como parte integrante da disciplina de Matemática, refere que "sem a teoria das probabilidades e a estatística, o ensino da Matemática reduz-se ao verdadeiro e ao falso das proposições matemáticas" (p.13), contribuindo para que os alunos acabem por ter uma visão deformada da matemática.

Assim, o ensino da estatística e das probabilidades, fornecendo uma perspectiva não determinista, permite ampliar a imagem que os alunos têm da matemática. Essa imagem também pode ser reforçada através da contextualização das aprendizagens e da sua ligação à realidade pois a estocástica tem múltiplas aplicações em variados contextos e, como não requer técnicas matemáticas muito sofisticadas, proporciona a oportunidade de mostrar aos estudantes as aplicações da matemática para resolver problemas reais (Nunes, 2000; Batanero, 2001).

Outra razão para promover o ensino da estocástica, referida por Shulte e Smart (1992) e por Nunes (1989) é a sua contribuição para a motivação dos alunos, já que se podem abordar assuntos que fazem parte do seu meio envolvente e eventualmente do seu leque de interesses, permitindo ainda integrar no programa uma componente lúdica e actividades capazes de proporcionar o prazer da descoberta.

Numa perspectiva curricular, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) argumentam que os conceitos de estatística e probabilidades ajudam a compreender outros tópicos do currículo de Matemática, ligados aos números, às medidas ou às representações gráficas, e evidenciam diversas conexões matemáticas, entre outras, noções relativas a fracções, percentagens, proporções e números decimais.

O nosso quotidiano é invadido por informações estocásticas provenientes dos mais diversos domínios e das mais diversas fontes, fornecendo um campo alargado e de fácil acesso para o desenvolvimento de hábitos de consulta e de pesquisa. Como o campo de aplicação da estocástica é muito diversificado e possibilita a ligação com várias áreas disciplinares, permite também abrir horizontes nas aplicações da matemática como, por exemplo, promover a elaboração de projectos e abrir caminho para a interdisciplinaridade. Esta diversidade, como diz Nunes (1989), "é capaz de elevar o trabalho em grupo à categoria de forma organizativa mais própria e natural" (p.1).

Em suma, a estocástica, para além de desenvolver o conhecimento dos conceitos e das técnicas que lhe são inerentes, é um bom veículo para desenvolver as capacidades de comunicação, de resolução de problemas e de interpretação do real, o trabalho com computadores ou calculadoras e o trabalho em grupo e interdisciplinar, aspectos da maior importância nos actuais currículos dos vários níveis de ensino.

2.2. O ensino e aprendizagem da estocástica

2.2.1. A estocástica no currículo do 1º e 2º ciclos do ensino básico

Os temas estocásticos contemplados nos programas de Matemática

O programa do 1º ciclo, relativamente à Matemática, está organizado em três blocos de conteúdos, *Números e Operações*, *Grandezas e Medidas* e *Espaço e Forma*, a que se junta uma componente de *Suportes de aprendizagem*. Não apresenta nenhum bloco de aprendizagem especificamente dedicado a temas estatísticos ou probabilísticos, embora o objectivo geral "recolher dados simples e organizá-los de forma pessoal recorrendo a diferentes tipos de representação" (p.128) pressuponha algum desenvolvimento estatístico no âmbito da recolha e organização de dados.

É na componente de *Suportes de aprendizagem*, mais propriamente na parte referente à *Linguagem e representação*, que se encontra uma referência mais directa a assuntos ligados à estatística. Aí, além de se referir que a utilização de setas, diagramas, tabelas, esquemas e gráficos contribuirá para ler e interpretar informação com maior facilidade, também se recomenda que, ao longo dos quatro anos do 1º ciclo, a utilização dos símbolos convencionais deverá decorrer a par de actividades de construção e utilização de tabelas e gráficos de barras, entre outras.

Embora de forma menos explícita, também se pode considerar que actividades promotoras do pensamento estatístico e probabilístico são recomendadas no tópico *Actividades recorrentes*, entendidas como actividades que, "promovendo o desenvolvimento de competências lógicas elementares, são fundamentais não apenas para a compreensão de ideias matemáticas mas também para a apreensão de noções de outras áreas" (Ministério da Educação, 1990, p.130). Neste sentido, sugere-se que, na abordagem de vários tópicos de todos os capítulos, as crianças deverão realizar, entre outras, actividades de classificação e de ordenação de objectos segundo um determinado critério, assim como actividades que permitam prever o resultado possível de uma acção ou acontecimento. Estas actividades, quando abordadas numa determinada perspectiva, podem-se considerar como actividades básicas para o desenvolvimento da futura compreensão de alguns conceitos estocásticos.

Também o objectivo "registar a duração de algumas actividades" (p.148), do bloco Grandezas e Medidas, se for visto numa perspectiva mais abrangente, pode originar alguma discussão elementar sobre recolha de dados, formas de registo e análise de dados.

Conclui-se, assim, que as orientações nesta área são bastante limitadas e pouco explícitas, ficando ao critério do professor a escolha dos conceitos a abordar e a sua profundidade. Nalguns casos, esta orientação pode ser benéfica pela liberdade de acção que confere ao professor, mas noutros pode conduzir ao esquecimento ou mesmo à omissão voluntária de focar estes temas por não serem considerados relevantes para este nível de ensino.

O programa do 2º ciclo do ensino básico contempla o tema Estatística, em que são incluídos os conteúdos de aprendizagem: recolha, organização e interpretação de dados, frequência absoluta, representação da informação em tabelas e gráficos de barras, moda e média aritmética. O programa indica ainda que os alunos devem tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade (Ministério da Educação, 1991a). Os gráficos circulares também são parte integrante do programa, mas são mencionados na unidade de Proporcionalidade directa.

De notar que, de acordo com o Plano de organização do ensino aprendizagem, documento programático de apoio ao programa, os conteúdos média e moda aritmética são específicos do 6º ano, assim como as experiências relacionadas com o conceito de probabilidade. Neste documento prevêem-se 9 aulas para a unidade de Estatística (11% do total anual), no 5º ano, e 11 aulas (13% do total anual), no 6º ano, sendo em ambos os anos escolares o tema que menos peso tem relativamente aos outros.

As orientações metodológicas nos programas de Matemática

No caso do 1º ciclo, para além do que foi referido, não há nenhuma orientação metodológica que se refira directamente ao tema estatística e probabilidades.

Relativamente ao 2º ciclo, o programa recomenda que a iniciação às técnicas de recolha, organização e representação de dados estatísticos seja feita a partir de actividades ligadas aos interesses dos alunos, a temas da actualidade e a outras disciplinas, nomeadamente História e Geografia de Portugal (Ministério da Educação, 1991a). O documento de apoio ao programa sugere que o estudo de algumas situações pode ser feito a partir de dados obtidos pelos alunos através da realização de inquéritos na turma, na escola ou no bairro e que os alunos podem procurar informação eventualmente já organizada em jornais e revistas relativas à defesa do consumidor, à distribuição da população portuguesa nas últimas décadas, a consumos alimentares em diversos países, ao clima, a movimentos demográficos, ao turismo, etc., e fazer estudos comparativos.

O programa refere, no entanto, que a interpretação da informação estatística se limitará a casos simples e que a exploração de situações estatísticas deverá contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico dos alunos face à informação com que contactam diariamente através dos jornais, da televisão e da publicidade, nomeadamente no que se refere aos apelos ao consumo. Menciona-se, ainda, que o tema favorece a realização de trabalhos de grupo, dentro e fora da sala de aula, dando oportunidade a que os alunos tomem iniciativas e se responsabilizem por elas. Assim, para o 5º ano, o documento de apoio ao programa sugere a realização de trabalhos estatísticos empregando unidades de tempo (tempos ligados ao desporto, tempos de anúncios publicitários, tempo passado a ver televisão,...) e, para o 6º ano, refere a realização de pequenos trabalhos de projecto, considerando que o computador poderá ser um bom auxiliar do estudo deste tema.

Ainda relativamente ao 6º ano, no que se refere aos acontecimentos, recomendam-se actividades com dados, moedas, “rapas” e roletas, com sectores iguais ou diferentes, para que os alunos se vão sensibilizando com o papel da matemática no estudo da previsão de alguns acontecimentos. Salienta-se, no entanto, que não se pretende que seja atribuído um valor numérico às probabilidades dos acontecimentos observados e, para além disso, sugere-se que a realização de jogos, em que a possibilidade de ganhar seja ou não a mesma para todos os jogadores, e a discussão baseada nos resultados obtidos permitirá que os alunos se vão familiarizando com termos, tais como certo, possível, impossível e provável (Ministério da Educação, 1991b).

O Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais

A publicação do Decreto-Lei nº6/2001 de 18 de Janeiro estabelece como currículo nacional o conjunto de aprendizagens e competências, integrando os conhecimentos, as capacidades, as atitudes e os valores, a desenvolver ao longo do ensino básico. No âmbito da reorganização curricular aí proposta, foi editado pelo Departamento de Educação Básica o documento *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*, que apresenta o "conjunto de competências consideradas essenciais no âmbito do currículo nacional" (DEB, 2001, p.9). Este documento inclui as competências de carácter geral, a desenvolver ao longo de todo o ensino básico, e as competências específicas de cada uma das áreas disciplinares e disciplinas, no conjunto dos três ciclos do ensino básico e em cada um deles.

No que concerne às competências de carácter geral, a competência "pesquisar, seleccionar e organizar informação para a transformar em conhecimento mobilizável" (p. 6), que o aluno deverá adquirir até ao fim da educação básica, é a que se relaciona de forma mais explícita com a área de estatística e probabilidades, embora o ensino destes temas também possa concorrer para a aquisição das restantes competências gerais.

Com o intuito de levar os alunos a desenvolver essa competência, recomenda-se que o professor organize o ensino prevendo a pesquisa, selecção e tratamento de informação e ainda a utilização de fontes de informação diversas e das tecnologias da informação e comunicação. Nesta perspectiva, o professor deve promover actividades dirigidas "à pesquisa, selecção, organização e interpretação de informação assim como "actividades integradoras dos conhecimentos, nomeadamente a realização de projectos" (p. 22).

No âmbito da Matemática, mais especificamente no contexto da estatística e probabilidades, o currículo nacional recomenda que a competência matemática que se deve desenvolver, ao longo de todos os ciclos, inclua os seguintes aspectos:

> "A predisposição para recolher e organizar dados relativos a uma situação ou a um fenómeno e para os representar de modos adequados, nomeadamente através de tabelas e gráficos e utilizando novas tecnologias; a aptidão para ler e interpretar tabelas e gráficos à luz das situações a que dizem respeito e para comunicar os resultados das interpretações feitas; a tendência para dar resposta a problemas com base na análise de dados recolhidos e de experiências

planeadas para o efeito; a aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e a elaboração de conclusões; a aptidão para usar processos organizados de contagem na abordagem de problemas combinatórios simples; a sensibilidade para distinguir fenómenos aleatórios e fenómenos deterministas e para interpretar situações concretas de acordo com essa distinção e o sentido crítico face ao modo como a informação é apresentada" (p. 64).

Os aspectos específicos para o 2º ciclo são:

"A compreensão das noções de frequência absoluta e relativa, assim como a aptidão para calcular estas frequências em situações simples; a compreensão das noções de moda e de média aritmética, bem como a aptidão para determiná-las e para interpretar o que significam em situações concretas; a sensibilidade para criticar argumentos baseados em dados de natureza quantitativa" (p. 65).

No que diz respeito ao 1º ciclo, nesse documento, não é feita qualquer referência específica aos temas de estatística e probabilidades.

2.2.2. O ensino da estocástica

Há cerca de duas décadas que, em Portugal, a estatística e as probabilidades integram os currículos de Matemática dos ensinos básico e secundário. Porém, a sua introdução nos currículos não foi atempadamente acompanhada de uma preparação cuidada dos professores (Turkman e Ponte, 2000), pelo que não é de admirar que, no seu ensino, se tenham valorizado essencialmente os aspectos teóricos e técnicos (Holmes, 2000).

O relatório do projecto *Matemática 2001* vem, de certa forma, corroborar esta ideia já que os seus autores constataram, ao analisar os dados relativos às práticas lectivas dos professores do 2º e 3º ciclos e ensino secundário, que o trabalho de projecto raramente é utilizado nos diversos níveis de escolaridade. Apenas 24% dos professores recorre a esta metodologia em algumas aulas. O trabalho de grupo é indicado como o modo de trabalho com os alunos menos utilizado. "Mais de 26% dos professores indicam que nunca ou raramente utilizam esta forma de trabalho e só 12% a referem como usada com muita frequência, não havendo diferenças significativas entre os vários ciclos" (p.35). Segundo Porfírio (2000), este facto poderá sugerir que o ensino da Estatística incide mais sobre a prática de exercícios que visam o treino de procedimentos de cálculo ou de representações gráficas.

Ponte, Matos e Abrantes (1998) argumentam também que "as aulas teóricas de exposição de matéria e as aulas práticas de resolução de exercícios são ainda a imagem de marca do ensino em Portugal" (p.327).

Da mesma forma, no relatório do projecto *Matemática 2001* é referido que os exercícios são a situação de trabalho na aula mais frequente desde o 2º ciclo até ao ensino secundário, pois cerca de 93% dos professores usam-nos sempre ou em muitas aulas. A exposição pelo professor é também muito usada, aumentando de importância à medida que se avança no nível de escolaridade: 52% dos professores do 2º ciclo, 69% do 3º ciclo e 81% do ensino secundário utilizam esse método sempre ou em muitas aulas.

No que diz respeito à utilização das tecnologias, há diferenças acentuadas no uso da calculadora entre os vários ciclos, já que quanto mais baixo é o nível de escolaridade menor é a frequência de utilização da calculadora. No 1º ciclo a sua frequência de utilização é relativamente baixa, pois cerca de 56% dos professores nunca ou raramente utilizam a calculadora, no 2º ciclo essa percentagem é de cerca de 25% e no ensino secundário essa categoria é inferior a 5%. A utilização dos computadores, por sua vez, tem uma frequência muito pouco significativa, visto que a grande maioria dos professores (86% do 1º ciclo e 88% dos 2º, 3º ciclos e ensino secundário) declara nunca ou raramente os utilizar (Precatada *et al.*,1998).

Perante este panorama, pressupõe-se, principalmente no âmbito do ensino da Estatística nos níveis mais elementares, que muito do tempo das aulas é dedicado aos procedimentos ligados ao cálculo e a aspectos técnicos, desviando a atenção dos alunos de aspectos fundamentais como a análise e interpretação dos dados.

Porém, o conhecimento das regras de cálculo pelos estudantes não implica necessariamente uma compreensão real dos conceitos que lhes estão subjacentes (Batanero, Godino, Vallecillos, Green e Holmes, 1994), pois, desta forma, adquirem apenas um conhecimento instrumental dos conceitos, ou seja, dominam um conjunto isolado de regras e procedimentos aprendidos através da repetição e da rotina, o que só lhes permite resolver um conjunto limitado de tarefas semelhantes (Skemp, 1987).

No entanto, o que se pretende com o ensino da estocástica é que os alunos adquiram, essencialmente, um conhecimento relacional, ou seja, como diz Skemp (1987), um conhecimento que permita construir um esquema do conceito que se possa actualizar sempre que novas situações o exijam.

Cunha e Almeida (1996) consideram, ainda, que embora o estudo da unidade de Estatística pressuponha uma razoável capacidade de articulação de conhecimentos muito diversificados, "a transmissão e a aquisição de conhecimentos escolares é feita através de múltiplas disciplinas estanques e compartimentadas" (p.28).

Num sentido similar, Nunes (2000) alerta para a escassez, em termos programáticos, de referências às conexões que se podem estabelecer, inclusivamente, entre assuntos matemáticos do mesmo programa. Acrescenta ainda, em relação à estatística, que nem a tradição de ensino, nem a articulação horizontal e vertical dos programas apontam para uma "contextualização, com o estabelecimento de conexões fortes e significativas, que o ensino da estatística pode propiciar" (p.60).

No que diz respeito à avaliação, Garfield (1993) chama a atenção para o tipo de questões que aparecem nos testes tradicionais, como, por exemplo, calcular a média e a mediana e fazer a leitura de um gráfico. Na sua opinião, os testes compostos por estes itens testam apenas os *skills* isolados do contexto do problema e, para além de não testarem a compreensão dos estudantes no que concerne à interpretação das medidas estatísticas, também falham na avaliação das habilidades dos alunos para integrar o conhecimento estatístico ao resolver um problema e para comunicar usando linguagem estatística. Assim, esta autora considera que são necessárias formas alternativas de avaliação da aprendizagem da estatística, defendendo uma avaliação que permita aos professores serem informados das capacidades dos alunos para comunicar usando linguagem estatística, compreender estatística como um conjunto de ideias interrelacionadas e interpretar um conjunto particular de dados.

Do ponto de vista curricular, Ponte e Fonseca (2000), com base na comparação dos documentos *National Curriculum for Maths, Principles and Standards for School Mathematics: working draft* e dos programas de Matemática portugueses dos diversos níveis de ensino, concluem que os programas portugueses em vigor apresentam, "de um modo geral, uma abordagem mais pobre e mais limitada da estatística do que a que é proposta pelos outros dois documentos analisados" (p.193).

Por exemplo, no que se refere ao 2º ciclo do ensino básico, estes autores concluem que os currículos americano e inglês dão grande importância ao processo de investigação (começando com a formulação de questões e terminando com as conclusões) enquanto que o português apresenta uma visão truncada desse processo (como se começasse na recolha de dados e terminasse na sua interpretação). Apesar disso, actualmente, dá-se ênfase no *Currículo Nacional do Ensino Básico* à "aptidão para realizar investigações que recorram a dados de natureza quantitativa, envolvendo a recolha e análise de dados e a elaboração de conclusões" (DEB, 2001, p.64), que deve ser desenvolvida ao longo de todos os ciclos. O currículo americano é o que recomenda uma maior variedade de formas de representação (tabelas, gráficos de barras, de pontos, de caule e folhas, circulares e de linhas) e o português uma menor variedade (tabelas e gráficos de barras); o americano e o inglês apontam para a importância de compreender as características globais de um conjunto de dados, enquanto que o português se centra exclusivamente nas medidas de tendência central (dando apenas ênfase à moda e à média); o americano é o único que inclui referências ao conceito de amostra, ao processo de fazer inferências a partir de amostras e a comparações entre vários conjuntos de dados.

Já no que concerne às probabilidades, embora este conceito propriamente dito só seja proposto como tema do currículo em Portugal no 3º ciclo, mais tardiamente do que nos outros dois países, é tratado de modo mais avançado no ensino secundário português. Porém, no que se refere ao 2º ciclo, "os currículos americano e inglês são muito semelhantes no que se refere à aprendizagem das noções elementares de probabilidades e muito mais explícitos e desenvolvidos que o português" (Ponte e Fonseca, 2000, p.186). Enquanto o programa português refere apenas que os alunos devem tirar conclusões de experiências simples relacionadas com o conceito de probabilidade, nos outros dois países já é recomendado, por exemplo, que os alunos comecem a situar probabilidades de acontecimentos numa escala de 0 a 1.

Segundo Ponte e Fonseca (2000),

> "em Portugal, o currículo de estatística precisa de uma profunda revisão, no sentido de integrar plenamente o ensino deste tópico com a análise de dados, para favorecer um desenvolvimento dos respectivos conceitos mais orientado para a compreensão. Impõe-se proporcionar aos alunos do ensino básico um maior contacto com os conceitos de estatística, incluindo as ideias de

> amostragem e as distribuições bivariadas, bem como o domínio de uma maior diversidade de formas de representação de dados. Impõe-se, também, proporcionar aos alunos um contacto desde mais cedo com diversos aspectos do conceito de probabilidade (p.194).

Da mesma forma, há autores que propõem algumas mudanças no que respeita à introdução dos conceitos estocásticos em termos de níveis de ensino. Por exemplo, antes dos actuais programas para o 2º ciclo entrarem em vigor, já Inácio (1987) propunha para este nível de ensino, para além do que é agora recomendado pelos programas, o cálculo de frequências relativas, na forma fraccionária ou na forma percentual; a introdução da noção de mediana, como sendo o valor abaixo do qual há metade das observações e acima do qual há metade das observações e uma primeira abordagem à organização de dados em classes, conceitos que, para além da frequência relativa cuja introdução já é recomendada no *Currículo Nacional do Ensino Básico,* ainda não constam das orientações curriculares para o 2º ciclo.

Também, para Matias (1996) as medidas de dispersão não deviam ser apenas analisadas no 10º ano já que, na sua opinião, o conceito de amplitude amostral é de fácil apreensão para uma criança que frequente o 6º ano de escolaridade. Além disso, considera que é possível e benéfico ensinar à criança o cálculo da probabilidade de acontecimentos simples logo após esta ter aprendido a trabalhar com fracções, o que, segundo os programas actuais, acontece no 5ºano.

No que se refere ao ensino da estatística, Masjoan e Thio (1999) consideram que é necessário romper radicalmente com o seu tratamento clássico, centrado na elaboração de tabelas e gráficos e no cálculo de parâmetros a partir de dados fornecidos no manual escolar e quase sempre inventados.

Na mesma linha, Batanero (2000b) afirma que se torna necessário experimentar e avaliar métodos de ensino adaptados à natureza específica da estatística pois, para o seu ensino, nem sempre se podem transferir os princípios gerais do ensino da matemática. Na sua perspectiva, como estamos em presença de uma ciência que muda rapidamente, o que é importante não são os conteúdos específicos, mas o desenvolvimento nos alunos de uma atitude favorável, uma forma de raciocínio e um interesse por completar posteriormente a sua aprendizagem. Defende, assim, que, para levar os alunos a valorizarem o papel da probabilidade e da estatística, é importante que se trabalhem nas aulas exemplos diversificados, incluindo aplicações do mundo biológico, físico, social e político, para que estes vejam, de forma mais ampla possível, as aplicações destas temáticas.

Argumenta, ainda, que os projectos estatísticos têm um papel primordial na medida em que permitem aos alunos eleger um tema do seu interesse no qual precisam de definir os objectivos, escolher ou construir os instrumentos de recolha de dados, seleccionar as amostras, recolher, codificar, analisar e interpretar os dados para dar resposta às perguntas planeadas. Deste modo, os alunos são introduzidos no método de investigação, o que lhes permite apreciar a dificuldade e a importância do trabalho estatístico e os leva a interessar-se pela estatística como meio de abordar diversos problemas da vida real.

Da mesma forma, Masjoan e Thio (1999) recomendam que se deve apresentar o trabalho estatístico de uma forma global, deixando claro um princípio (recolha de dados) e um final (tirar conclusões).

Ortín (s/d) é igualmente desta opinião, ao realçar a necessidade do trabalho de estatística, que se faz nas aulas, se centrar na participação activa dos alunos no processo completo, desde a formulação de perguntas-chave, passando pela recolha, organização e representação e análise de dados e elaboração de conjecturas, até à comunicação da informação obtida de uma maneira clara e precisa. Esta perspectiva é corroborada por Scheaffer (2000) ao afirmar que "todo o processo estatístico é melhor aprendido num ambiente activo" (p.159).

Godino (1995), para além de apontar a importância de levar os alunos a trabalhar com dados provenientes do seu contexto real, acrescenta, ainda, que uma maneira de integrar o estudo da estatística e das probabilidades é trabalhar com dados provenientes de experiências aleatórias realizadas na aula. Esta opinião está em sintonia com a ideia de Masjoan e Thio (1999) de que a probabilidade e a estatística se devem introduzir paralelamente.

Na mesma perspectiva, Godino, Batanero, Cañizares e Vallecillos (1998) argumentam que estatística e probabilidades são duas faces de uma mesma moeda, pois se só se realizarem algumas experiências separadas, a única coisa que se pode aprender é que os seus resultados são imprevisíveis. Assim, tendo em atenção que a repetição de uma experiência aleatória não serve para comprovar um resultado e que a análise de uma experiência aleatória requer a consideração do espaço amostral a ela relativo, os autores consideram essencial estabelecer um sistema de registo que permita reflectir sobre as experiências e delinear outras novas com elas relacionadas. Em consequência, o estudo das experiências aleatórias implica a organização de uma situação de recolha e análise de dados estatísticos. De igual modo, se se partir "de uma aula de estatística (situação de análise de dados) será difícil olvidar completamente os problemas de variabilidade, amostra, população, generalização das conclusões, possibilidade de predição, aleatoriedade" (p.3).

Nunes (2000), referindo-se ao ensino básico, realça a importância de ligar as actividades estatísticas a outros conteúdos matemáticos, nomeadamente a nível dos números e medidas, ampliando as competências dos alunos a nível da resolução de problemas e da comunicação. Na sua perspectiva, "os próprios alunos podem identificar perguntas e problemas que serão investigados explorando conceitos estatísticos e probabilísticos (…) utilizando formas de recolha e representação de dados e recorrendo a materiais diversificados (manipulativos, papel e lápis, calculadora e computador)" (p.60). Chama, no entanto, a atenção de que as técnicas e processos devem ser utilizados criteriosamente e com o fim de desenvolver competências mais abrangentes.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) enfatizam a utilização das tecnologias, nomeadamente a utilização da calculadora e do computador no âmbito da estocástica, argumentando que estes meios, ao permitirem trabalhar com dados reais e fazer simulações, trazem novas possibilidades para a aprendizagem deste tema. Para além disso, opinam que "as capacidades destas tecnologias na organização e visualização de dados e na execução de cálculos, assim como o retorno, quase imediato dos efeitos das decisões tomadas, tornam possível uma ênfase na compreensão e exploração de conceitos, na interpretação da informação e na avaliação de argumentos" (p.95).

Em termos globais, o NCTM (1994) advoga que a introdução da tecnologia permite dar uma ênfase acrescida ao desenvolvimento de conceitos matemáticos, abrindo aos alunos "acesso a meios poderosos de explorar os conceitos com um nível de profundidade que não tinha sido possível no passado" (p.138).

No entanto, convém que o uso de calculadoras e computadores no ensino das probabilidades e estatística não provoque o abandono completo de outras representações mais concretas de experiências estocásticas. Shaugnessy (1992), embora admitindo não ter conhecimento de qualquer evidência formal de pesquisa neste campo, opina que parece ser muito importante para alguns estudantes terem experiências de gerar e colher os seus dados fisicamente com instrumentos aleatórios, como dados ou roletas, antes de entenderem ou aceitarem simulações de computador.

Bratton (1999), exemplificando para o caso do cálculo combinatório, defende que actividades apropriadas de papel e lápis devem preceder qualquer referência às fórmulas pois, no seu entender, escrever listas ou formar todos os subconjuntos possíveis ajuda os alunos a ver que as fórmulas calculam o que desejam. No entanto, este autor argumenta que, embora o cálculo manual seja importante em actividades iniciais ou exploratórias, é preciso cuidado para que não se lhes dê demasiada relevância, ao ponto de impedir que os alunos se foquem nos aspectos importantes.

Segundo Carvalho e César (2000), "o modo como os alunos trabalham na sala de aula com a estatística, com os colegas e o professor, as tarefas e as instruções de trabalho influenciam o que aprendem, como o aprendem e os seus desempenhos" (p.215).

Por exemplo, Carvalho e César (s/d) observaram que, no que respeita a uma tarefa de estatística no âmbito dos conceitos de média e mediana, proposta a alunos do 7º ano de escolaridade, o facto dos alunos trabalharem em díade lhes permitiu construir um conhecimento relacional dos conceitos, tendo concebido respostas mais elaboradas e progredindo em relação aos seus desempenhos.

Sousa (2002), num estudo sobre a concretização de uma investigação realizada por alunos do 6º ano de escolaridade, utilizando métodos quantitativos, concluiu que a realização da tarefa proposta "promoveu nos alunos um entendimento e compreensão da linguagem e dos conceitos e métodos estatísticos que ultrapassou a sua memorização" (p.94).

Para além disso, como se trabalharam de forma integrada conteúdos matemáticos dos domínios de estatística e de números e cálculo, a autora afirma que os números decimais deixaram de ser entidades abstractas para os alunos e ganharam significado, já que a sua manipulação num contexto significativo, envolvendo comparação, ordenação, agrupamento e operação, contribuiu para que os alunos melhorassem a sua compreensão global dos números.

Assim, com base na experiência realizada, a autora argumenta que as investigações estatísticas, para além de constituírem uma forma de ensinar os conteúdos estatísticos, são um modo privilegiado "de pôr em prática um ensino verdadeiramente integrado, proporcionando aos alunos contextos de aprendizagem significativos, onde estes podem discutir temas interessantes ao mesmo tempo que aprendem e treinam procedimentos matemáticos" (p.96).

2.2.3. Dificuldades em conceitos estocásticos

Diversas investigações revelaram dificuldades de alunos na aprendizagem de conceitos estocásticos, isto é, de estatística e probabilidades. Nesta secção faz-se uma revisão de alguns estudos realizados no âmbito de conceitos elementares de estatística e probabilidades.

Dificuldades em estatística

Embora a compreensão das medidas de tendência central seja aparentemente simples, há, no entanto, investigações que patenteiam dificuldades conceptuais e procedimentais relacionadas com estes conceitos em alunos de diferentes idades.

No caso do cálculo de uma média ponderada, Pollatsek, Lima e Well (1981) verificaram, em várias situações, que muitos estudantes universitários sentiram dificuldades no cálculo de uma média global a partir do conhecimento de duas médias parciais. Nestas situações, a maior parte das respostas incorrectas resultou de determinar a média simples dos valores das duas médias dadas, não afectando os seus valores com os pesos adequados. A não ponderação no cálculo da média foi também observada por Li e Shen (1994) quando foi pedido aos estudantes para calcularem a média a partir de uma tabela de frequências com dados agrupados em classes.

No sentido de ampliar a investigação de Pollatsek *et al.* (1981), Mevarech (1983) realizou um estudo com estudantes universitários que possuíam os conhecimentos pré-requisito de cálculo, pois todos reconheceram as fórmulas de cálculo da média simples e ponderada e da variância, tendo apenas um pequeno número (28%) manifestado dificuldades em calcular a média quando os dados eram apresentados numa tabela. No entanto, os conhecimentos de cálculo não se revelaram suficientes para a maioria dos estudantes adquirirem o esquema estatístico apropriado, ou seja, adquirirem o conjunto das estruturas conceptuais necessárias para a resolução dos problemas propostos. Por exemplo, no caso do cálculo da média, aproximadamente 65% dos estudantes usaram a lei do fecho no cálculo da média total de dois grupos de tamanho diferente (propriedade estudada por Pollatsek *et al.*, 1981), cerca de 80% aplicaram a propriedade associativa no cálculo da média total de três grupos, 60% não compreenderam a não existência de elemento inverso no cálculo de uma média aritmética e aproximadamente 30% consideraram o valor 0 (zero) como elemento neutro, isto é, o valor da média não se altera quando se acrescenta o valor zero ao conjunto de dados. No caso do cálculo da variância, observaram-se concepções erradas similares.

Para Mevarech (1983), os resultados obtidos sustentam a hipótese de que os estudantes conceptualizaram erradamente as operações de cálculo da média e da variância como duas operações binárias satisfazendo as quatro leis dos grupos aditivos, pois aqueles parecem considerar os valores da média e da variância como simples números, esquecendo que eles são medidas de tendência central e de dispersão.

Com o objectivo de verificar como é que as estratégias dos estudantes para resolver problemas de média ponderada mudam ao longo da escolarização, Gattuso e Mary (1998) realizaram um estudo com estudantes do 8º ao 10º ano (de 13 a 15 anos), tendo concluído que há melhoria com a instrução mas que esta não persiste no tempo. Os alunos do 10º ano tiveram a mais baixa percentagem de respostas correctas em 7 de 10 questões e os do 9º ano, que tinham recebido instrução recente sobre o tema, tiveram melhor desempenho do que os do 8º e do 10º na generalidade dos casos. Os resultados do 8º ano permitiram concluir que alguns destes alunos foram capazes de determinar uma média ponderada mesmo sem qualquer instrução específica.

No estudo de Gattuso e Mary, os alunos cometeram, entre outros, os seguintes erros: calcular o quociente da soma dos valores que toma a variável pela soma das frequências (resposta observada particularmente entre os alunos do 10º ano); usar a média aritmética simples ignorando o peso dos dados (resposta mais observada entre os alunos do 10º ano quando o problema era apresentado sob a forma de tabela) e utilizar o número de linhas ou de dados diferentes como denominador, com numeradores variados, como, por exemplo, $\left(\sum f_i \times \sum x_i\right)/5$. Estes erros traduzem uma certa incompreensão do cálculo da média ponderada, já que os alunos não ponderaram adequadamente os valores da variável ou inventaram fórmulas não adequadas.

Relativamente à média aritmética, Strauss e Bichler (1988) estudaram, em alunos dos 8 aos 14 anos, o desenvolvimento da compreensão de algumas das suas propriedades: (a) a média é um valor compreendido entre os extremos da distribuição; (b) a soma dos desvios dos dados relativamente à média é zero; (c) a média é influenciada pelo valor de cada um dos dados; (d) a média não tem que ser igual a um dos valores dos dados; (e) para a variável considerada, a média pode ser uma fracção que não tenha sentido na realidade; (f) tem que se ter em conta os valores nulos no cálculo da média; e (g) o valor da média é um "representante" dos dados a partir dos quais foi calculada.

Para cada uma destas propriedades, os autores utilizaram diversas tarefas variando o tipo de dados (contínuos e discretos) e os meios de apresentação (verbal, numérico e concreto), não tendo encontrado efeitos significativos relativamente ao tipo de dados ou aos meios de apresentação utilizados.

Os resultados que Strauss e Bichler (1988) obtiveram sugerem uma melhoria da compreensão das propriedades com a idade e indicam diferenças de dificuldade na compreensão das propriedades, tendo observado um melhor desempenho nas tarefas respeitantes às propriedades (a), (c) e (d) do que nas respeitantes às propriedades (b), (f) e (g).

Nas tarefas relativas à propriedade (b), poucos alunos deram respostas correctas. No caso da propriedade (f), aproximadamente 25% dos alunos de 8 anos, 20% dos de 10 anos, 45% dos de 12 anos e 60% dos de 14 anos resolveram correctamente as tarefas. A justificação incorrecta a 'adição do zero não altera a média', isto é, considerar zero como elemento neutro (concepção errada identificada por Mevarech, 1983), foi dada por 5%, 21%, 31% e 15% dos alunos de 8, 10, 12 e 14 anos, respectivamente.

No caso das tarefas relativas à propriedade (g), apenas alguns alunos de 8 anos, 25% de 10 anos e 60-65% dos de 12 e 14 anos as resolveram correctamente. Segundo os autores, o grande número de respostas não justificadas, mesmo dos que responderam correctamente, traduz que os alunos tiveram dificuldades em compreender as tarefas. As justificações que foram dadas para as respostas incorrectas foram variadas, sendo por vezes uma reafirmação da resposta dada. Uma das respostas incorrectas mais utilizada foi escolher o maior número dos dados como o mais representativo da distribuição, dizendo que esse número descreve melhor o grupo. Verificou-se também que algumas das crianças mais novas basearam-se em razões sociais para justificarem a sua resposta.

As propriedades (a), (b), (f) e (g) foram posteriormente investigadas por Leon e Zawojewski (1991) num estudo com estudantes do 4º e 8º anos e do ensino superior. As suas conclusões corroboram as de Strauss e Bichler (1988), já que concluíram que os sujeitos tiveram cerca do dobro das dificuldades na compreensão das propriedades (f) e (g) relativamente às propriedades (a) e (b). Leon e Zawojewski (1991) observaram também que a idade tem uma influência importante no aumento da compreensão destas propriedades e que a contextualização das tarefas facilita muito a sua resolução.

O algoritmo da média é, por vezes, também aplicado de forma mecânica, não mostrando os estudantes capacidades da sua aplicação flexível em situações-problema.

Num estudo com alunos do 6º ano de escolaridade, em que a maioria evidenciou conhecer o algoritmo de cálculo da média, Cai (1995) observou que apenas 50% dos alunos foram capazes de determinar um valor desconhecido num pequeno conjunto de dados, apresentado sob a forma de pictograma, para se obter um dado valor da média. Este resultado agrava-se ainda mais quando se analisam os métodos de raciocínio, pois, dos alunos que encontraram o valor desconhecido, apenas 59% o determinaram através de uma utilização compreensiva do algoritmo (multiplicar o valor da média pelo número total de valores e subtrair a soma dos valores dados), tendo 35% dos restantes recorrido a uma estratégia de tentativa e erro.

Quanto às respostas erradas, para além de erros não compreensíveis, Cai (1995) identificou quatro tipos de erros, que classificou como: erro menor, em que os alunos apresentaram processos de resolução correctos mas cometeram erros de cálculo ou deram como resposta o número total de efectivos (11%); violação da regra de paragem, em que os alunos usaram estratégias de tentativa/erro mas pararam quando o quociente não era a média dada, quando o resto não era zero ou quando o quociente não era a média dada e o resto não era zero (10%); uso incorrecto do algoritmo, em que os alunos aplicaram directamente o algoritmo mas de forma incorrecta (34%); manipulação simbólica injustificada, em que os alunos tomaram alguns números da tarefa e trabalharam com eles num caminho irrelevante para o contexto do problema (24%).

Com o objectivo de analisar algumas estratégias e dificuldades na aplicação dos conhecimentos estatísticos a situações da vida real, Cunha e Almeida (1996) realizaram uma experiência com dois grupos de alunos, de 4 elementos cada, um do 7º ano e outro do 10º ano, aos quais propuseram duas actividades, uma com dados numéricos e outra com gráficos. Ambas as actividades envolviam dados provenientes de situações reais e contemplavam questões abrangendo um maior ou menor leque de conhecimentos, consoante o ano a que se destinavam. As autoras do estudo concluíram que os alunos manifestavam dificuldades de natureza conceptual, linguística e relacional.

No campo conceptual, observaram que o grupo do 7º ano revelou uma deficiente compreensão dos conceitos de população e de variável. No primeiro caso, segundo as autoras, a dificuldade poderá dever-se ao facto do termo população, no uso comum, se reportar a pessoas; no segundo caso, a dificuldade poderá estar relacionada com a forma como a noção de variável foi abordada nos anos anteriores, já que a maioria dos estudantes considera que variável é sinónimo de incógnita, não aceitando, por isso, facilmente, a sua associação com uma característica bem determinada.

No que se refere ao conceito de mediana, o grupo do 7º ano incorreu no erro frequente de considerar a mediana como o valor médio das frequências. No 10ºano observaram que alguns alunos manifestaram dificuldades conceptuais a propósito da média aritmética, pois determinaram-na de um modo mecânico e automático e, face ao valor calculado, não reflectiram sobre o seu significado e a sua eventual representatividade, limitações que condicionaram a compreensão e a utilização do desvio padrão.

Do ponto de vista linguístico, todos os alunos se referiram à dificuldade em descreverem os seus processos de raciocínio e em redigirem relatórios.

No campo relacional, alguns alunos, dos dois grupos, manifestaram dificuldades em integrar conhecimentos de natureza diferenciada, ou seja, manifestaram uma capacidade deficiente de integração e de estruturação dos conhecimentos adquiridos na escola e/ou fora dela.

Sobre os conceitos de média, moda e mediana, Carvalho (1996) analisou as realizações de dois grupos de alunos do 7º ano, cada um numa tarefa distinta. Num dos grupos, foi dado um conjunto de dados que os alunos deviam organizar numa tabela de frequências; no outro, os dados foram apresentados através de um gráfico de barras.

No caso da construção da tabela, os alunos não tiveram dificuldades em determinar as frequências absolutas, mas só 21% dos alunos calcularam correctamente as frequências relativas, tendo os seus erros resultado de considerarem no denominador da fracção a frequência absoluta em vez do efectivo total dos dados. Este resultado, segundo a autora, demonstra que os alunos não interiorizaram realmente o conceito de frequência relativa, pois embora soubessem que tinham que fazer uma divisão não compreenderam qual o seu significado estatístico.

Quanto às medidas de tendência central, no conjunto das duas tarefas, determinaram correctamente a moda 57% dos alunos, a média 20% dos alunos e a mediana 12% dos alunos. Entre as duas tarefas, foi na tarefa estabelecida através do gráfico que os alunos revelaram mais dificuldades e foi também nessa tarefa que mais alunos tentarem responder.

Em relação às dificuldades dos alunos, Carvalho (1996) salienta que, no caso da tarefa em que se partiu dos dados, eles não tiveram em conta a frequência absoluta de cada valor no cálculo da mediana, quando usaram a tabela construída antes, ou não ordenaram os dados previamente à sua localização. No caso da tarefa em que se partiu do gráfico, os alunos não consideraram as frequências absolutas dos diferentes valores no cálculo da média, isto é, calcularam o quociente da soma dos diferentes valores presentes no eixo das abcissas pela dimensão da amostra. No cálculo da mediana, adicionaram as frequências absolutas (valores do eixo das ordenadas) e dividiram por 2. No caso da moda, em que se obteve o maior número de respostas correctas, a autora destaca a facilidade com que ela é visualizada num gráfico de barras, correspondendo ao valor com a 'barra mais alta'.

Com o fim de avaliar os desempenhos estatísticos dos alunos nos conceitos de média e mediana, identificando os conhecimentos instrumentais e os conhecimentos relacionais que utilizam nas suas respostas, Carvalho e César (2000) analisaram o desempenho de alunos do 7º ano trabalhando em 84 díades. Em termos de resultados, verificaram que a maioria das díades aplicou, com sucesso, o procedimento de cálculo da média (94%) e da mediana (89%). Tal como observou Carvalho (1996), também neste estudo, comparativamente com a média, a mediana levantou mais dificuldades.

Quando se tratou de seleccionar entre a média e a mediana enquanto estatística mais adequada à caracterização de um conjunto de dados, envolvendo uma compreensão relacional, em contraste com uma compreensão instrumental implicada na aplicação dos respectivos algoritmos de cálculo, acentuaram-se as discrepâncias anteriores. No caso da média, apenas 27% dos alunos apresentaram argumentos que não apelam para um significado matemático, e, no caso da mediana, 44% dos alunos não foram capazes de usar argumentos matemáticos que relacionem este conceito com as suas propriedades. Para estas autoras, a compreensão mais profunda do conceito de média explica-se pela sua frequente utilização nos mais variados contextos sociais, o que não acontece com o conceito de mediana.

Evidências relativas à maior dificuldade na compreensão do conceito de mediana foram também detectadas por Sousa (2002) e por Barr (s/d).

Sousa (2002), num estudo com uma turma de 6º ano, no contexto de uma tarefa de investigação, observou que, embora a identificação da moda e o cálculo da média se mostrasse acessível à maioria dos alunos, a determinação da mediana gerou mais dificuldades pois, por exemplo, alguns alunos procuraram o valor central mas esqueceram-se de ter em conta a frequência absoluta de cada valor e outros identificaram a mediana com a média dos extremos.

Barr (s/d), numa investigação com estudantes entre os 17 e 21 anos, observou que a maioria deles (68%) indicava correctamente a moda quando se partia de uma tabela de frequências, enquanto que no caso da determinação da mediana apenas 20% dos alunos davam uma resposta correcta.

No que respeita aos erros alusivos à identificação da moda, este autor revela ainda que alguns alunos escolheram como resposta o valor máximo das frequências e outros indicaram o maior valor que toma a variável sem ligar às frequências.

Relativamente à mediana, o erro mais frequente dos alunos foi determinar a mediana das frequências ordenadas, seguindo-se a determinação da mediana dos valores que toma a variável sem atender à sua frequência. Outros estudantes deram como resposta o valor central das frequências não ordenadas (conforme se apresentavam na tabela).

Segundo Barr (s/d), a ideia de que a mediana é o valor central de ‘algo’ está claramente interiorizada, pelo que o problema dos estudantes é compreender o que é que isso significa. O autor constata que estes têm dificuldade em compreender que a tabela é apenas um resumo de uma lista de dados, e que uma representação alternativa é passar para a lista de valores. Além disso, quando forneceu os dados em forma de lista, 50% dos estudantes já responderam correctamente, tendo a maioria usado a regra do valor central; contudo, ainda 21% dos alunos sugeriram o valor central da lista não ordenada.

Para Cobo e Batanero (2000) e Batanero *et al.* (1994), o facto do algoritmo de cálculo da mediana não ser único, já que depende do tipo de dados, da forma de apresentação dos mesmos e inclusivamente do seu número, e o valor obtido também nem sempre ser único explica problemas de compreensão dos estudantes, tornando o estudo da mediana mais complexo do que possa parecer à primeira vista.

Também no que se refere a alunos do ensino superior, alguns dos quais futuros professores do ensino primário espanhol, Batanero, Godino e Navas (s/d) detectaram a existência de erros conceptuais e dificuldades de aplicação prática dos conhecimentos sobre as medidas de tendência central.

Por exemplo, o tratamento de valores atípicos gerou dificuldades para alguns estudantes. Num item em que se pedia para estimar o peso real de um objecto, dado um conjunto de dados em que se introduziu um valor atípico muito extremo, 34,1% dos estudantes utilizaram-no no cálculo da média, embora fosse óbvio que se devia tratar de um erro de medição. Já noutro item, em que se pretendia calcular o número típico de perguntas feitas num dia por oito estudantes de uma turma, em que era dado um registo do número de perguntas feitas por cada estudante e onde se incluiu um valor atípico, 29,5% calculou a média desprezando o valor atípico. No entanto, neste caso, devido à variabilidade dos dados e ao efeito do valor atípico sobre a média, este devia incluir-se na análise, já que a sua supressão afectaria consideravelmente o valor "representativo" do conjunto de dados. Também neste item, 10,9% dos alunos consideraram zero como elemento neutro, isto é, não consideraram o valor zero no cálculo da média, dificuldade já observada por Mevarech (1983), Strauss e Bichler (1988) e Leon e Zawojewski (1991).

Na opinião de Batanero *et al.* (s/d), estas dificuldades apontam para a descontextualização do ensino da estatística que os alunos receberam nos seus estudos e para a falta de um conhecimento funcional do que aprenderam.

Outro ponto em que os estudantes manifestaram dificuldades foi no conhecimento das posições relativas entre a média, mediana e moda em distribuições não simétricas. Num item que envolvia uma distribuição cuja forma não era específica e em que era dado o valor da média, 57,4% dos alunos deram uma resposta que tinha por base a consideração de que o valor da moda era muito próximo da média, ou seja, consideraram que a frase mais correcta que correspondia à afirmação 'a média do número de crianças por família numa pequena cidade é 2.2' era 'o número mais comum de crianças de uma família é 2'. Num sentido similar, também Campbell (1974, cit. em Batanero, 2000a) refere que alguns alunos elegem invariavelmente a média como melhor representante dos dados sem ter em conta a simetria da distribuição.

Batanero *et al.* (s/d) consideram que na base destas escolhas pode estar a crença de que todas as distribuições são simétricas, o que, no seu entender, aponta possivelmente para a falta de contextos realistas no ensino. Também pensam que a alta percentagem de erros nos itens analisados se pode explicar pelo escasso ou nulo tratamento que se faz dos valores atípicos até ao ensino secundário e pelo ensino das medidas de tendência central se centrar habitualmente na apresentação dos algoritmos e fórmulas e sua aplicação a casos estereotipados, o que não permite que os alunos compreendam o significado integral dos conceitos.

A importância de uma compreensão relacional, face a uma compreensão apenas instrumental, é reforçada por Batanero (2000a) ao afirmar que a compreensão de um conceito, para além do conhecimento das definições e propriedades, inclui também o reconhecimento dos problemas em que ele deve ser utilizado. Assim, considera que de pouco serve conhecer as definições das medidas de posição central e saber calculá-las se não se reconhecem os problemas relacionados com estes conceitos.

Num problema proposto por Pollatsek *et al.* (1981), em que se pedia a pontuação esperada para o quinto estudante, de uma amostra aleatória de cinco estudantes (da qual se conheciam as pontuações dos quatro primeiros) retirada de uma população, da qual era dada a média, muitos estudantes determinaram a pontuação do quinto estudante de modo que adicionada às anteriores desse a média da população, tratando, assim, este problema como uma questão de média. Mesmo assim, alguns destes estudantes usaram um procedimento incorrecto para encontrar a pontuação do quinto estudante. Determinaram a média das pontuações conhecidas e consideraram que a média simples deste valor com a pontuação do quinto estudante iria dar a média conhecida da população, tendo determinado a pontuação esperada para o quinto estudante com base nesse pressuposto. Não reconheceram, portanto, que quatro dados devem ter mais peso que um só dado no cálculo de uma média global, algo já observado por estes autores noutros problemas e por Mevarech (1983), em que o objectivo imediato era o cálculo da média ponderada.

Eisenbach (1994, citado em Batanero, 2000a) questionou estudantes universitários de um curso introdutório de estatística sobre o significado da afirmação ‘Que quer dizer que o salário médio de um empregado é de 3600 dólares?’, tendo obtido respostas do tipo: ‘a maioria dos empregados ganha cerca de 3600 dólares’, ‘é o salário central’ e ‘os outros trabalhadores ganham mais ou menos 3600 dólares’. Estas respostas mostram a confusão terminológica entre as palavras ‘média’, ‘mediana’ e ‘moda’.

Numa perspectiva semelhante, Dreyfus e Levy (1996), num estudo com alunos de 11 e 12 anos, identificaram algumas concepções erradas a respeito da média. Uma das concepções frequentes consistiu em considerar a média como o valor central, o que denota uma confusão da média com a mediana. Outra concepção, embora menos frequente, consistiu em determinar a média adicionando os valores da variável e dividir por dois.

Estes autores também detectaram concepções erradas sobre as relações entre a média e a distribuição. Um número substancial de alunos afirmou que sendo a distribuição variada é impossível calcular a média, e muitos estudantes referiram não ser possível que, em duas turmas com a mesma média, os alunos falhem mais numa turma do que noutra. Para estes estudantes, se mais alunos falham, então a média da turma devia ser mais baixa.

O desenvolvimento de competências de leitura, elaboração e interpretação de gráficos ou tabelas é um dos aspectos importantes do currículo escolar na medida em que na sociedade esses meios de representação são frequentemente utilizados. No entanto, no que se refere à elaboração de gráficos e tabelas, segundo Batanero (2001), os professores frequentemente supõem que é um assunto muito fácil, dedicando assim pouco tempo ao seu ensino. Porém, elaborar uma tabela de frequências ou um gráfico supõe uma primeira redução estatística, já que se passa dos dados individuais à distribuição de frequências, conceito que, no entender da autora, se pode considerar complexo, pois refere-se ao agregado (população ou amostra) e não aos dados particulares.

De notar também que, numa tabela ou gráfico, podem aparecer distintos tipos de frequências: absoluta, relativa e frequências acumuladas, o que exige uma compreensão prévia do seu significado.

Li e Shen (1994), num estudo em que examinaram os projectos de estudantes que participaram numa competição de projectos estatísticos, concluíram que alguns estudantes não reflectem sobre a necessidade de seleccionar cuidadosamente os diferentes tipos de gráficos de acordo com o propósito a que se destinam. Assim, observaram que há estudantes que fazem uma escolha incorrecta do tipo de gráficos, e revelam uma tendência para confiarem demais no *software* do computador, aceitando, por exemplo, a escala que o computador fornece, mesmo não sendo adequada, e parecem não pensar muito sobre as formas de apresentação.

Algumas falhas, de carácter técnico na representação gráfica, que os estudantes cometeram foram omitir as escalas de cada um dos eixos horizontal ou vertical ou em ambos, não especificar a origem das coordenadas, não proporcionar divisões suficientes nas escalas dos eixos e esquecer-se de atribuir nomes aos eixos.

Observaram também alguns erros conceptuais que consideram merecer uma atenção especial. Muitas vezes, os estudantes ignoraram a precisão requerida na representação gráfica. Por exemplo, usaram o mesmo sector do gráfico circular para representar duas percentagens diferentes e construíram gráficos circulares em que os sectores não eram proporcionais às frequências das categorias. Noutro caso, compararam quantidades heterogéneas num mesmo gráfico colocando, por exemplo, no mesmo gráfico de barras a produção de fio de fibra em kg e a produção de outros artigos têxteis em m^2, para estabelecerem comparações.

Segundo Li e Shen (1994), os erros encontrados nos projectos sugerem que "quando a estatística é ensinada como parte da matemática, o raciocínio abstracto matemático pode sobrepor-se ao pensamento estatístico e ao senso comum" (pp. 44-45).

A análise e a interpretação, aspectos que se consideravam mais importantes nos projectos, foi a parte que mais estudantes ignoraram. Em alguns projectos não há nenhuma interpretação, muitos gráficos são apresentados sem qualquer descrição, explicação ou interpretação, e noutros existe apenas uma descrição superficial. Foram muito poucos os estudantes que fizeram interpretações de grande alcance.

Dificuldades em probabilidades

São também diversos os estudos que revelam dificuldades dos alunos, alguns dos quais futuros professores, em probabilidades.

Azcaráte, Cardeñoso e Porlán (1998) num estudo com um grupo de 57 futuros professores do ensino primário espanhol verificaram que um grande número de sujeitos não reconheceu a aleatoriedade de vários fenómenos. Especificamente, 50,3% não reconheceram a aleatoriedade em situações relacionadas com o contexto meterológico; 54,4% não a reconheceram nas situações do contexto quotidiano e, nas situações de jogo, somente 7% das respostas reflectiram um não reconhecimento da aleatoriedade.

Já em investigações anteriores, no contexto de professores em formação, Serrano (1993) e Azcárate (1995, cit. em Azcaráte, Cardeñoso e Porlán,1998) concluíram que os sujeitos tinham uma débil compreensão sobre a noção de aleatoriedade. Analogamente observaram que em fenómenos relacionados com o jogo apresentaram argumentos que reflectem o reconhecimento da imprevisibilidade dos resultados, mas perante situações quotidianas de natureza imprevisível têm grandes dificuldades em reconhecer o seu carácter aleatório.

Num estudo com alunos entre os 10 e 14 anos, numa questão que envolvia a avaliação da equitatividade de um jogo, em que se partia de duas caixas, uma com 10 bolas brancas e 20 negras e outra com 30 bolas brancas e 60 negras, ganhando quem tirasse uma bola branca, Cañizares, Batanero, Serrano e Ortiz (1999) observaram que apenas cerca de 31% dos alunos responderam usando uma estratégia considerada pertinente, consistindo em estabelecer um critério de proporcionalidade numa fracção e aplicá-lo na outra fracção. Verificaram ainda que os argumentos incorrectos mais utilizados foram a comparação absoluta do número de casos favoráveis (escolher a caixa que tem mais) e a comparação absoluta do número de casos desfavoráveis (escolher a caixa que tem menos casos desfavoráveis ao acontecimento).

Cantero (1998) e Cantero e Batanero (1999) propuseram a alunos de 12 anos um conjunto de situações, em que tinham que escolher o jogo que lhes desse mais hipóteses de ganhar:

(1) sair um 1 num dado; sair um cubo de plástico num saco com 36 cubos de madeira e 4 de plástico;

(2) semelhante à anterior, só que na caixa há 30 cubos de madeira e 10 de plástico;

(3) sair cara atirando uma moeda ao ar; extrair um cubo roxo de uma caixa com 3 roxos e 3 brancos.

(4) extrair roxo de uma caixa com 5 cubos roxos e 5 de cores diferentes; tirar um taco com número par num conjunto de 10 tacos numerados de 1 a 10.

Cantero e Batanero (1999) concluíram que, se se atender exclusivamente à escolha correcta do jogo, a situação mais fácil foi a segunda (73% de escolhas correctas) e as restantes revelaram-se mais difíceis (44%, 38% e 39% de escolhas correctas). No entanto, só 2% e 3% dos alunos nas situações (1) e (2), respectivamente, acompanharam a escolha correcta com uma argumentação adequada, enquanto que nas situações (3) e (4) foram 16% e 20%, respectivamente. Estas percentagens indicam que os alunos participantes tiveram muitas dificuldades neste tipo de problemas.

Segundo Cantero (1998), uma característica geral dos argumentos consistiu em considerar uma parte dos dados disponíveis, frequentemente o dado que apoia a opção escolhida. Nesta base, os alunos usaram argumentos baseados nos casos favoráveis, nos casos desfavoráveis e nos casos possíveis, assim como, entre outros, argumentos com referência exclusivamente à sorte e a truques.

Green (1983) desenvolveu um estudo em larga escala em Inglaterra envolvendo 2930 alunos do 1º ao 5º ano de escolas secundárias (11-16 anos). Nos itens que requeriam apenas o conceito de contagem, todos os alunos obtiveram um nível de realização satisfatório. Já nos itens sobre aleatoriedade os alunos sentiram maiores dificuldades, assim como nos itens que requeriam o conceito de razão, que se revelaram particularmente difíceis, especialmente entre os alunos dos três primeiros anos.

Na generalidade dos itens, Green (1983) verificou um aumento das respostas correctas com o nível de escolaridade dos alunos e com o seu desempenho em matemática. Green observou também que os alunos equiparavam acontecimentos certos a acontecimentos com alta probabilidade de ocorrência, assim como acontecimentos impossíveis a acontecimentos com baixa probabilidade de ocorrência. Verificou, ainda, que estes atribuíam, espontaneamente, probabilidade de 50% a acontecimentos possíveis e a acontecimentos equiprováveis (quando existiam mais de 2 acontecimentos). Além disso, alega que a habilidade verbal dos alunos era muitas vezes inadequada para descrever situações probabilísticas com precisão.

Fischbein e Gazit (1984) num estudo com alunos do 5º ao 7º ano (10 a 13 anos), em que pretendiam analisar o efeito de um programa de ensino em probabilidades, observaram que a maioria dos alunos que frequentaram esse programa foi capaz de dar pelo menos um exemplo de cada categoria (certo, possível, impossível) de acontecimentos, tanto no caso em que não era referida nenhuma experiência como quando se partia de uma experiência aleatória predeterminada.

Porém, noutra questão em que dadas 4 bolas vermelhas, 3 verdes e 2 brancas se pedia para indicarem quantas bolas tinham de tirar para assegurar que saía uma bola de cada cor, verificou que os alunos revelaram bastantes dificuldades na sua resolução, mesmo os que tinham sido sujeitos ao programa de ensino. Neste caso, apenas 14,1% dos alunos do 5º ano, 31,5% do 6º ano e 53,8% do 7º ano deram uma resposta correcta. No caso dos alunos não sujeitos ao programa essas percentagens são ainda mais reduzidas: 2% para o 5º ano, 21,8% para o 6º e 45,5% para o 7º ano.

Nesta questão, as respostas erradas dadas pelos alunos foram variadas. No caso dos alunos do 5º ano ‘tirar 2 ou 1 bola’ foi a resposta mais frequente, nos do 6º ano foi ‘tirar 3 bolas’ e no caso do 7º ano foi ‘tirar 6 bolas’, tendo em todos os anos ocorrido estes três tipos de resposta. Houve, ainda, em todos os anos, embora em menor percentagem, alunos que responderam ‘tirar 7 bolas’.

Noutra questão que envolvia a comparação de probabilidades baseada na comparação de razões, em que era igual a razão entre o número de bolas brancas e pretas em cada caixa, Fischbein e Gazit (1984) constataram que os alunos do 5º e do 6º anos tiveram bastantes dificuldades na sua resolução. No 5º ano, apenas 21,1% dos estudantes do grupo experimental e 22,4% do grupo de controlo deram uma resposta correcta e, no 6º ano, essas percentagens foram, respectivamente, 42,9% e 51,5%. Já no 7º ano, a maioria dos alunos deu uma resposta correcta: 80,8% para o grupo experimental e 51,5% para o grupo de controlo. De acordo com os autores, o erro mais frequente foi considerarem como resposta correcta a caixa que tinha mais bolas o que, na sua opinião, significa que as quantidades absolutas ainda são decisivas quando se olha para a probabilidade de acontecimentos. Afirmam, também, que a instrução teve certamente um efeito negativo, já que, neste caso, o grupo de controlo teve melhor desempenho que o grupo experimental.

Em todas as questões descritas, Fischbein e Gazit (1984) verificaram, ainda, um aumento do desempenho com a idade.

Fischbein, Nello e Marino (1991) observaram, relativamente a alunos do 4º e 5º anos (9-11 anos) e do 6º, 7º e 8º anos (11-14 anos), que a maioria deles identificou acontecimentos certos, possíveis e impossíveis e reconheceram situações com mesma estrutura estocástica. Já no caso da comparação de probabilidades em experiências compostas, os alunos sentiram muitas dificuldades. De entre os vários tipos de acontecimentos, os alunos revelaram mais dificuldades na categoria dos acontecimentos certos e na formulação de acontecimentos relativamente à sua classificação.

No nosso país, Fernandes (1999) verificou também que alunos do 8º e 11º anos de escolaridade revelaram dificuldades em identificar acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos, na comparação de probabilidades em experiências simples que envolviam o conceito de razão e, mais acentuadas, na comparação de probabilidades em experiências compostas. Em termos de respostas correctas, observou um aumento sistemático das respostas correctas com o ano escolar e com o desempenho em matemática.

2.3. A prática pedagógica dos docentes

2.3.1. Dificuldades de professores principiantes na prática docente

De acordo com Brown e Borko (1992), os estudos de investigação sobre professores fornecem resultados que evidenciam diferenças em conhecimento, pensamento e acções entre professores experientes e principiantes (professores estagiários ou no 1º ano de ensino). Estas autoras, revendo vários estudos, concluíram que os professores experientes revelam maior conhecimento pedagógico, maior conhecimento do conteúdo e maior conhecimento do conteúdo pedagógico do que os professores principiantes. Além disso, os seus sistemas conceptuais, ou esquemas cognitivos, para organizar e armazenar este conhecimento, são mais elaborados, interligados e acessíveis do que nos professores principiantes.

Em consequência, os professores experientes mostraram-se mais eficientes do que os principiantes no seu processamento de informação tanto durante a planificação como nas fases interactivas de ensino, designadamente: (1) os experientes revelaram uma capacidade de planificação mental mais rápida e eficiente do que os principiantes; (2) enquanto os esquemas dos experientes incluem o armazenamento de explicações poderosas, demonstrações e exemplos para representar o conteúdo, os principiantes têm de desenvolver estas representações como parte do processo de planificação para cada lição; (3) o ensino interactivo dos experientes revela um maior uso de rotinas de ensino e de gestão do que os principiantes e a sua implementação requer pouca ou nenhuma explicação ou monitorização; (4) quando uma lição não está a decorrer bem, ou quando as questões ou comentários dos alunos os afastam dos seus esquemas mentais, os experientes são melhores do que os principiantes em alterarem com sucesso a direcção da lição, isto é, em improvisação.

Veenman (1988), partindo da revisão de 90 estudos internacionais acerca dos problemas dos professores principiantes (aquele que ainda não completou três anos de ensino depois de se ter licenciado), verificou que a disciplina na sala de aula é apontado como o aspecto mais problemático, seguindo-se a motivação dos alunos, o lidar com as diferenças individuais e a avaliação do trabalho dos alunos. Refere ainda que os problemas sentidos por estes professores afectam também os professores experientes.

Rodrigues e Esteves (1993), num estudo com 32 professores provisórios do ensino secundário, sem terem ainda a habilitação profissional para o exercício da profissão, concluíram que, embora os professores entrevistados tivessem idades e experiências de ensino diversificadas, manifestaram uma grande homogeneidade no que se refere às dificuldades sentidas no exercício diário da sua actividade profissional. As áreas problemáticas mais apontadas foram o controlo disciplinar e a avaliação dos alunos. Para estes professores, avaliar é motivo de dificuldade e insegurança, fonte de dilemas e problemas graves de consciência.

Foram ainda apontadas dificuldades na condução das aulas: quer na motivação dos alunos, quer na gestão da planificação e no uso de técnicas; na preparação científica; no relacionamento com os alunos e na planificação das aulas, nomeadamente no delinear de estratégias e definição de objectivos.

Silva (1997) identifica dificuldades similares num estudo de caso com seis professores de uma Escola Superior de Educação, no 1º ano de docência. No contexto da sala de aula, as dificuldades enumeradas por esses professores situam-se substancialmente nos seguintes domínios: relação pedagógica, avaliação e planificação. A partir das aulas que observou, situa a maior dificuldade dos professores no processo de comunicação com os alunos, na organização das aulas (salientando-se a dificuldade em variar as estratégias e as actividades a propor aos alunos) e na dificuldade em controlar a disciplina.

Flores (1999), analisando a forma como são vividos os três primeiros anos de experiência docente à luz da perspectiva dos professores principiantes recém-licenciados, salienta que, relativamente à dimensão problemas, as categorias com maior número de referências são, por ordem decrescente, o tempo, a indisciplina, a motivação, as características dos alunos, os programas, a atribuição de notas e os procedimentos de avaliação.

A primeira categoria assinalada representa para eles um grande problema, pois sentem-se pressionados com o cumprimento dos programas e com a abordagem das matérias, o que condiciona a sua actividade na sala de aula, sobretudo ao nível das estratégias e da profundidade dos conteúdos. Em relação à segunda categoria, aludem à falta de conhecimentos e de estratégias para ultrapassar os problemas disciplinares que lhes surgem.

Ponte, Galvão, Trigo-Santos e Oliveira (2001), num estudo com professores de Biologia-Geologia, Física- Química e Matemática, formados por uma Universidade, no seu primeiro ou segundo ano de actividade profissional identificaram a relação com os alunos, a resolução de problemas disciplinares e a avaliação dos alunos como áreas problemáticas. Para além disso, estes autores referem que vários dos jovens professores consideram que o conhecimento dos assuntos que ensinam é ainda insuficiente, reconhecendo a necessidade de uma actualização constante nesta área. Já no campo da didáctica (com excepção do que se refere à avaliação), a maior parte dos professores parece ter uma atitude de confiança, não se mostrando tão preocupados em melhorar a sua formação. Esta confiança, na opinião dos autores, pode constituir um problema a ter em atenção, já que pelo facto de o professor se sentir a controlar a situação não significa que os objectivos curriculares fundamentais estejam a merecer a devida atenção, que as tarefas propostas aos alunos sejam as mais relevantes e que os modos de trabalho usados sejam os mais adequados.

Alves (2001), num estudo em que acompanhou professores da variante de Português-Francês de uma escola superior de educação em contexto de prática pedagógica e no primeiro ano de docência, observou que as grandes dificuldades que as participantes manifestavam, enquanto estagiárias, se situavam predominantemente nos campos do saber (preparação, competências, currículo), do saber-fazer (desempenho, controlo da aprendizagem, motivação discente) e no campo do relacionar-se (relação estagiária-alunos, estagiária-supervisores). Conclui, ainda, que no primeiro ano de docência efectiva as dificuldades se agravaram ou aumentaram o seu leque. Assim as participantes experienciaram, "por ordem de gravidade decrescente, dificuldades a nível relacional (com alunos e também com colegas), sós ou associadas à dimensão curricular, dificuldades a nível do saber/metodologias de ensino, dificuldades pessoais, dificuldades a nível organizacional/escolar, dificuldades a nível da motivação/preparação dos alunos" (p.679).

Sanches e Silva (1998), num estudo respeitante às dificuldades que futuros professores de Português manifestaram durante o período de estágio, concluíram que, na fase de planeamento, estes evidenciaram as seguintes dificuldades: articulação dos objectivos, conteúdos e actividades; estruturação e organização lógica dos conteúdos disciplinares e sua consequente transformação didáctica; distinção entre objectivos gerais e específicos; articulação dos novos conteúdos com os conhecimentos prévios dos alunos; previsão do tempo pedagógico para a realização das actividades de aprendizagem. Na "fase de acção pedagógica em aula" revelaram dificuldades na orientação e clarificação do pensamento dos alunos e na improvisação de novos exemplos; na diferenciação pedagógica: transformação dos conteúdos de modo a ter em conta as características e saberes prévios dos alunos; na interacção intelectual com e entre os alunos e dificuldades na adequação do tempo previsto com o tempo real na aula.

Muitas das dificuldades mencionadas nos estudos citados são também sentidas pelos professores estagiários de Matemática. Por exemplo, num estudo realizado por

Sousa (2003), a indisciplina, a desmotivação dos alunos, a avaliação do trabalho dos alunos e as aulas assistidas são dificuldades enumeradas por todos os professores. Alguns deles focam, ainda, como aspectos problemáticos, lidar com diferenças e problemas individuais, lidar com alunos de diferentes culturas e níveis sócio-económicos, adequação do conteúdo e do discurso, determinação do nível de aprendizagem, supervisão inadequada, planificação de aulas, falta de tempo e controlo de situações imprevistas. Neste estudo, embora a investigadora tenha observado dificuldades dos professores ao nível do conteúdo matemático, para eles a sua formação matemática foi vista globalmente como suficiente.

A insuficiência de conhecimentos relativos à avaliação dos alunos e à didáctica da Matemática são também factores apontados no estudo de Guerreiro (1999). Para além disso, este autor refere que os estagiários da Escola Superior de Educação (ESE) enfatizam a insuficiência de conhecimentos científicos específicos, nomeadamente nos conteúdos abordados nas aulas, e os professores estagiários da Universidade a insuficiência de conhecimentos relativos à Geometria e ao Português.

A este conhecimento incipiente em termos conceptuais alia-se, por vezes, uma reduzida preocupação na ligação entre os diversos tópicos do currículo. Cabrita (1994) comprova este último facto num estudo realizado com futuras professoras de Matemática, no 4º ano da sua formação, lacuna que pode pôr em causa a capacidade destas promoverem uma boa compreensão, por parte dos seus futuros alunos, das conexões matemáticas. Mais directamente relacionado com a estatística, Bright (1995) alerta para as dificuldades dos professores em conectar as ideias estatísticas, levando-os a leccionar os conceitos estatísticos de uma forma isolada uns dos outros. Estas dificuldades, segundo o autor, podem inibir a capacidade dos professores para ajudar os estudantes a desenvolverem relações entre os conceitos, colocando-os em sério risco de não desenvolverem uma profunda compreensão de estatística, como seria desejável.

Apesar das dificuldades evidenciadas pela maior parte dos professores nos diversos estudos supracitados, verifica-se que, em termos de formação, a prioridade apontada pelos professores de Matemática, de acordo com o relatório *Matemática 2001*, foi a utilização das tecnologias. Quanto às restantes áreas, no 2º ciclo são ainda apontadas necessidades de formação relativas aos instrumentos de avaliação, didáctica da matemática e problemas comportamentais. Já no caso do 3º ciclo, as necessidades de formação incidem, essencialmente, nos seguintes domínios: didáctica da matemática, geometria, probabilidades e história da matemática. No ensino secundário foram referidos com maior frequência os temas de geometria, história da matemática, probabilidades e análise infinitesimal.

2.3.2. Factores que influenciam a prática pedagógica

Existem diversos factores que podem afectar as decisões que os professores tomam no desempenho da sua actividade docente, nomeadamente a nível da planificação das actividades de ensino e da sua acção na sala de aula.

Por exemplo, na perspectiva de Fennema e Franke (1992, p.156) “as crenças, o conhecimento, os julgamentos e os pensamentos dos professores têm efeitos profundos nas suas decisões, as quais, por seu lado, determinam em grande extensão o que os alunos aprendem na sala de aula”.

Também as experiências dos professores enquanto alunos, nomeadamente o ensino que observaram e de que foram alvo, transmitem mensagens sobre o que deve ser o processo de ensino e aprendizagem, influenciando, de modo consciente ou inconsciente, o seu comportamento profissional no momento em que se tornam efectivamente professores (Monteiro, 1992; NCTM, 1994; Pacheco e Flores, 1999).

De acordo com o NCTM (1994), no que concerne à matemática, essas experiências têm consequências profundas no conhecimento, concepções e atitudes que os professores desenvolvem em relação à matemática, aos alunos e ao ensino. Por exemplo, Serrazina e Oliveira (2002) referem que o seu estudo, com quatro professoras do primeiro ciclo em início de carreira, evidencia que a “formação inicial tem influência não só nas competências matemáticas que cada professor privilegia mas também no modo como perspectivam as situações de aprendizagem que são propostas aos alunos” (p.69). Assim, uma das professoras que considerou a sua formação inicial como ‘mais teórica’, a qual, na opinião das autoras, não permitiu que esta “construísse uma imagem de ser professora” (p.68), seguiu essencialmente o manual escolar nas suas aulas, recorreu muito pouco a materiais manipuláveis e dedicou um tempo especial ao ensino da matemática, como algo que deve ser separado das restantes áreas.

No que respeita às concepções, Ponte (1992) advoga que estas têm uma relação interactiva com as práticas: "As concepções influenciam as práticas, no sentido em que apontam caminhos, fundamentam decisões, etc. Por seu lado, as práticas, que são condicionadas por uma multiplicidade de factores, levam naturalmente à geração de concepções que com elas sejam compatíveis e que possam servir para as enquadrar conceptualmente" (p.198).

Porém, Monteiro (1992), com base em alguns exemplos de investigações levados a cabo no domínio das concepções, argumenta que parece haver uma tendência para se crer que são as concepções que determinam mais fortemente o modo como o professor age na sua prática pedagógica e não o contrário. O NCTM (1994) aponta também nesse sentido na medida em que refere que as concepções da matemática dos professores "determinam a escolha das tarefas matemáticas, os ambientes de aprendizagem que criam e o discurso que utilizam nas suas aulas" (p.136).

Thompson (1992), com o intuito de analisar a relação entre as concepções manifestadas pelos docentes e as sua práticas de ensino, conclui, com base na revisão de alguns estudos, que não existe uniformidade entre os vários resultados obtidos, pois embora alguns professores desenvolvessem as suas práticas de modo consistente com as suas concepções, noutros casos isso não acontecia.

A investigação de Vale (1993), que incide sobre as concepções e práticas relativas à resolução de problemas de matemática de dois alunos no último ano da sua formação inicial e no primeiro ano de exercício da docência, corrobora a afirmação anterior, visto que apenas as concepções de um dos participantes foram coerentes com a sua prática.

Segundo Thompson (1992), as inconsistências entre as concepções e as práticas mostram que estas não se encontram ligadas segundo uma simples relação de causa-efeito, mas que se trata de "uma relação complexa com muitas fontes de influência" (p.138). Entre elas, menciona (a) o contexto social (valores, crenças, expectativas dos alunos, pais, colegas, e responsáveis escolares; o currículo adoptado, as práticas de avaliação; os valores do sistema), (b) o clima político; e (c) a necessidade de uma grande quantidade de conhecimento para implementar com sucesso certos modelos de ensino da matemática.

A investigadora afirma, ainda, que a consistência entre as crenças e as práticas depende em larga medida da tendência dos professores para reflectirem sobre as suas acções:

> "É reflectindo nas suas visões e acções que os professores ganham consciência dos seus pressupostos tácitos, crenças e visões e de como elas se relacionam com a prática. É através da reflexão que os professores desenvolvem racionais coerentes para as suas visões, pressupostos e acções e se tornam conscientes das alternativas viáveis" (p.139).

Koehler e Grouws (1992) referem que, para além das concepções e crenças do professor sobre a matemática e o seu ensino, o comportamento deste é também influenciado pelo seu conhecimento sobre "(a) o conteúdo matemático a ser ensinado, (b) como os alunos podem aprender ou compreender esse conteúdo e (c) os métodos de ensino desse conteúdo" (p.118).

No mesmo sentido, Thompson (1992) declara que, por vezes, as inconsistências entre as concepções e as práticas dos professores são manifestações de que os seus ideais de ensino não podem ser realizados porque os professores não possuem os *skills* e conhecimentos necessários para os implementar.

Argumento que é confirmado pelo estudo de Putnam *et al.* (1992, citado em Correia, 1997) com quatro professoras do ensino elementar, em que se procura relacionar os seus conhecimentos de matemática com as respectivas práticas lectivas. Estes observaram que os conhecimentos matemáticos reduzidos ou insuficientes dos professores dificultaram, e por vezes impediram, que estes conseguissem pôr em prática um ensino em que acreditavam, pois apesar das professoras terem revelado concepções sobre o ensino e aprendizagem da matemática muito próximas das ideias expressas nos documentos de inovação curricular e terem procurado implementá-las nas suas aulas, os seus objectivos não foram alcançados.

Fazendo uma análise de diversos estudos efectuados no domínio da relação entre o conhecimento de matemática do professor e as suas práticas de ensino, Fennema e Franke (1992) citam a investigação realizada por Carpenter, Fennema e Peterson (1989) com uma professora do ensino elementar, cujas aulas, envolvendo assuntos onde o seu conhecimento do conteúdo era substancialmente diferente (a adição e subtracção e o tema das fracções), foram observadas ao longo de dois anos. Nas aulas, onde foram propostas tarefas relativas à resolução de problemas envolvendo a adição e a subtracção, a professora apresentou problemas de diferentes tipos, apelou à participação dos alunos e atendeu às suas intervenções, aproveitou as suas respostas, colocou-as à discussão na turma, tendo adaptado o seu ensino aos acontecimentos na sala de aula. Pelo contrário, quando trabalhou as fracções, apresentou problemas de um só tipo, as interacções entre os alunos não foram fomentadas e a professora assumiu a direcção de todos os trabalhos, pelo que, como comentam Fennema e Franke (1992, p.149), "ocorreu menos discussão e menos matemática".

Com base neste estudo e na revisão de outros em várias áreas disciplinares, Fennema e Franke (1992) chegaram à conclusão que o conhecimento do professor pode influenciar a instrução, pois nestas investigações o conteúdo de ensino parece estar, pelo menos parcialmente, dependente do conhecimento do professor, assim como o discurso na sala de aula. Embora concluam que o conhecimento não dita precisamente o que é dado, pensam que a riqueza do assunto a ser ensinado parece estar directamente relacionada com o conhecimento específico sobre a matéria a leccionar que o professor possui.

Também Canavarro (1994), num estudo com professores do 3º ciclo e ensino secundário, observou que o conhecimento matemático que possuía um dos participantes (professor estagiário, mas já com experiência de ensino), o qual qualificou como quantitativa e qualitativamente reduzido, influenciava as suas práticas de ensino, pelo menos nos seguintes aspectos: na forma como preparava as aulas – apenas a sugestão da orientadora conduziu a que a sua abordagem dos conteúdos não constituísse uma reprodução mais ou menos fiel da proposta do manual; na elaboração de planos de aula – os planos eram muito detalhados, apresentavam explicações minuciosas de tudo quanto ia fazer, incluindo o discurso oral previsto para a condução da aula; na forma como operacionalizava as suas aulas – o esforço por não sair do plano estabelecido levou a uma condução da aula em que a participação dos alunos foi praticamente inviabilizada para facilitar o controlo de situações desconfortáveis; o tipo de actividades propostas para trabalho dos alunos – estas eram todas de natureza fechada, muito directas e simples, estrategicamente escolhidas de modo a não proporcionar o aparecimento de dúvidas a que eventualmente não conseguisse dar resposta.

Do mesmo modo, a partir da análise de estudos realizados com futuros professores, Brown e Borko (1992) concluíram que os participantes que tinham boa preparação do conteúdo gastavam menos tempo e esforço na planificação diária, davam mais atenção às estratégias de ensino e menos ao conteúdo de aprendizagem, eram mais flexíveis no seu ensino e mais auto-confiantes, pelo que as autoras alegam que é fundamental uma sólida preparação numa área de conteúdo antes do ensino.

Com base na revisão de alguns estudos, Contreras e Blanco (2001) advogam também que um maior domínio do conteúdo é directamente proporcional à capacidade de gestão da turma e que as escolhas curriculares dependem desse domínio de conteúdo. Além disso, assinalaram igualmente que as habilidades para criar e suster um discurso produtivo na aula estão basicamente relacionadas com o domínio dos aspectos conceptuais da disciplina e o conhecimento de múltiplas representações e inter-relações entre as diferentes estruturas matemáticas, pois as deficiências nestas representações e relações causam problemas de gestão da aula ao situar o professor perante argumentos e esquemas de raciocínio imprevistos dos alunos e perante os quais aquele não tem os recursos cognitivos para dar uma resposta.

Os manuais escolares, dependendo da forma como são utilizados pelos professores, podem, igualmente, constituir uma influência preponderante no processo de ensino e aprendizagem pois, como refere Blanco (1994), "o manual escolar acompanha o ensino como um elemento indispensável – e às vezes único – que realiza a tradução das prescrições curriculares e as apresenta num nível de concretização apropriado para abordá-las nas aulas" (p.265).

Por exemplo, Martins (1991) afirma que "não são os programas de Matemática que contam na prática de ensino da Matemática, mas a leitura que deles fazem os autores dos manuais. De facto, poucos professores constroem o seu ensino directamente a partir dos programas produzidos pelo Ministério" (p.31). Também o NCTM (1991), através das *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar*, embora defenda que os manuais não devem guiar o ensino, refere que "estamos conscientes que o currículo em muitas escolas está subordinado ao livro escolar" (p.294).

Do mesmo modo, Zabalza (2000) observa que os professores, quando planificam, não trabalham directamente com o programa mas com mediadores como, por exemplo, o manual escolar. O autor afirma, ainda, que os manuais escolares, sendo os mediadores mais privilegiados e influentes, têm ultrapassado amplamente a sua função de intermediários entre o professor e o programa "para se converterem em autênticos guias de ensino, condicionando o 'quê', o 'como' e o 'quando' de cada passo" (p.49).

Esta ideia dos manuais como estruturadores das práticas docentes é também realçada por Blanco (1994, p.265): "os manuais escolares (…) regulam de modo muito estrito a acção dos docentes", por Pacheco (1997, p.1): "estamos perante um tipo de recurso que contribui, de foram incisiva, para o ritual escolar" e por Brito (1999, p.142):

> "Sabemos que algumas vezes, infelizmente, não é o professor a definir os objectivos do ensino, porque é o manual escolar, transformado num instrumento todo poderoso, que influencia e determina a prática pedagógica, às vezes, tomado por uns como uma bíblia, cujo conteúdo é totalmente assumido como única verdade".

A mesma perspectiva é assumida por Cabrita (1996) que considera que, apesar do desenvolvimento da investigação na área das Ciências da Educação ter favorecido o aparecimento no mercado de diversificados instrumentos pedagógicos e materiais didácticos, os manuais escolares mantêm a sua posição de relevo, exercendo um forte poder sobre o modo como o programa é implementado, determinando o trabalho escolar tanto a nível de conteúdo como em relação à metodologia de ensino.

As opiniões supracitadas relativamente ao papel dos manuais escolares como configuradores das práticas pedagógicas são, de certa forma, confirmadas por algumas investigações. Por exemplo, no estudo de Flores (1999), os professores principiantes recém-licenciados aludem aos manuais como ponto de partida na preparação das aulas e ainda como fonte de conhecimentos, tornando-se, assim, instrumentos importantes no desempenho das suas funções didácticas.

Também Sánchez e Valcárcel (2000), num estudo com 27 professores com mais de dois anos de experiência de ensino, concluíram que as suas principais referências para realizar a programação anual, para além das planificações de anos anteriores e dos programas oficiais, são os manuais escolares. No que concerne à selecção e sequencialização do conteúdo das unidades, quase todos utilizaram como referência básica o manual escolar do aluno ou do professor, sendo para uns o guia exclusivo e para outros um apoio fundamental.

Estes autores constataram, igualmente, que embora os professores seleccionem o conteúdo através do manual escolar, por vezes, realizam modificações essencialmente em função da importância que lhe concedem e do tempo disponível. Na maioria dos casos, essas modificações referem-se a uma redução dos conteúdos, à sua simplificação ou à troca de uma definição por outra mais adequada, não fazendo os professores mudanças substanciais aos esquemas conceptuais que se apresentam no manual escolar, nem propostas alternativas aos mesmos. Observaram, ainda, que o conhecimento que o professor tem do aluno incide escassamente na sua tomada de decisões durante o processo de planificação e que, embora atendam ao conhecimento global que o aluno tem sobre a disciplina, as concepções dos alunos sobre o conteúdo concreto das unidades didácticas não são, na generalidade, consideradas.

Num estudo com dois professores do 1º ciclo, Pires (2003) constatou que, na preparação das actividades lectivas, os manuais podem desempenhar, para os intervenientes, um papel de orientação, de complemento ou de substituição dos programas oficiais, pois fornecem indicações relativas à selecção de competências a desenvolver pelos alunos, à listagem e sequência de conteúdos a tratar ou à profundidade a seguir na respectiva abordagem. Para além disso, também funcionam "como um recurso onde podem, por exemplo, seleccionar textos, seguir estratégias, escolher tarefas para propor aos alunos, articular o trabalho com materiais manipuláveis ou tecnológicos, definir formas de avaliação dos desempenhos ou marcar o trabalho de casa" (p.122).

Quanto ao apoio ao trabalho dos professores na condução da aula, o autor indica que estes usaram os manuais escolares no acompanhamento das suas exposições ou explicações dos assuntos, na organização das actividades de aprendizagem e na ajuda da gestão da sala de aula.

No que se refere, especificamente, à área de matemática, Pires conclui que a forma de utilização mais frequentemente adoptada é o aproveitamento das tarefas contidas nos manuais escolares para ajudar a organizar o trabalho lectivo e para que sejam resolvidas pelos alunos como actividades da aula ou como trabalho de casa.

No relatório *Matemática 2001*, o manual adoptado na escola é indicado, pelos professores do 2º e 3º ciclos e ensino secundário, como um dos elementos de trabalho preferencialmente utilizado nas suas aulas, embora se verifique um ligeiro decréscimo na frequência da sua utilização no ensino secundário face aos outros ciclos. No que concerne ao 1º ciclo, uma larga maioria dos professores utiliza algum manual escolar para ensinar matemática.

De acordo com as referências quanto à forma de utilização do manual, este parece ser usado sobretudo para a realização de exercícios na aula ou como trabalho de casa.

Quanto à preparação de aulas, embora no 1º ciclo os apoios privilegiados sejam os programas, a experiência pessoal e as orientações curriculares a nível de escola, alguns professores também recorrem, por ordem de preferência, a outros manuais ou livros de recurso, aos manuais escolares dos alunos e a guias ou livros do professor.

Já no que diz respeito aos professores de outros ciclos de ensino, o manual escolar adoptado é usado sempre, ou muitas vezes, na preparação de aulas pela maioria dos professores inquiridos, seguindo-se o recurso a outros manuais escolares e às orientações dos programas.

Também no domínio da matemática, Cabrita (1999), através da aplicação de um questionário a professores do 7º ano com o intuito de recolher informações sobre o uso que estes fazem do manual escolar, principalmente no que concerne à unidade didáctica de Proporcionalidade directa, conclui que existe uma forte relação entre o professor de Matemática e o manual escolar. Na opinião da autora, este instrumento "continua a ter um papel fundamental no processo de ensino/aprendizagem (…) quer a nível da planificação das aulas, quer a nível da sua implementação, quer a nível das actividades extra escolares a propor aos alunos" (p.160).

No estudo de Canavarro (1994), embora o manual adoptado fosse um referencial importante para os três professores de Matemática que nele participaram, ele assumiu um papel diferenciado para cada um deles. Assim, para um dos participantes o manual funcionava sobretudo como um material de trabalho e consulta dos alunos, ao qual recorria esporadicamente, principalmente quando não tinha tempo para preparar atempadamente as aulas. Para o outro, o livro adoptado era um material de apoio que, na sua opinião, devia seguir para facilitar o estudo dos alunos. Finalmente, para o terceiro participante no estudo, o livro funcionou como o recurso no qual confiava, reproduzindo as abordagens aí apresentadas, sempre que não tinha outras fontes de informação que considerasse mais interessantes De notar que este participante se encontrava na situação de estagiário (embora já tivesse tempo de serviço) e manifestou durante o estudo alguma insegurança em termos de conhecimentos científicos.

Mais directamente no que se refere aos factores que influenciam as práticas dos professores estagiários, Guerreiro (1999), no âmbito da prática pedagógica de matemática de alunos de uma ESE, conclui que as atitudes destes "são influenciadas pela sua avaliação, pelos supervisores, pelos alunos, pelos conhecimentos adquiridos na Escola Superior de Educação e pelas representações que têm da prática pedagógica do 1º Ciclo" (p.190). No caso dos estagiários da Universidade, refere que as suas atitudes são influenciadas pela avaliação, pelos supervisores, pelos alunos e restante comunidade escolar e pela sua própria motivação.

A influência dos supervisores é também referida por Silva (1997) que, partindo das ideias manifestadas por professores no 1º ano de docência sobre a sua formação inicial numa ESE, conclui que o controlo exercido pelos professores cooperantes pode dar uma imagem irreal do que virá a ser a realidade profissional pois, embora o aluno em estágio pense ser ele a organizar e a conduzir as actividades pedagógicas, na maioria dos casos, as decisões são tomadas pelo professor responsável pela turma.

C A P Í T U L O I I I

METODOLOGIA

Neste capítulo, para além de se fundamentarem as opções metodológicas, identificam-se os participantes na investigação, o contexto em que foi realizado o estudo e descrevem-se os métodos de recolha de informação.

3.1. Opções metodológicas

Nas últimas décadas, para além de se discutirem as vantagens e os inconvenientes da utilização de métodos quantitativos e de métodos qualitativos em trabalhos de investigação, também tem sido encarada a possibilidades de articular ambos os métodos.

Por exemplo, Reichardt e Cook (1979, citado em Borg e Gall, 1989) afirmam que um investigador não tem obrigatoriamente que optar pelo emprego exclusivo de métodos quantitativos ou qualitativos, considerando que existem razões múltiplas para combinar os dois métodos de forma a satisfazer o mais eficazmente possível os propósitos da investigação. Indo de encontro a esta opinião, Fernandes (1991, p.66) refere que "há vantagens e desvantagens em cada um dos paradigmas da investigação e que dados de natureza quantitativa e qualitativa podem ser recolhidos, com claras vantagens, no processo de resolução do mesmo problema". Bryman (1992), partindo do pressuposto que as duas vertentes de investigação se devem tornar independentes das suas origens epistemológicas, afirma ainda que é a interligação das virtudes e defeitos de cada método que proporciona uma fundamentação lógica para integrar as duas vertentes.

De acordo com Arnal, Rincón e Latorre (1992), a natureza da área problemática e os objectivos da investigação devem determinar a escolha do método a adoptar. Todavia, o investigador deve pensar se há aspectos importantes do problema de investigação que serão ignorados se houver uma confiança exclusiva numa única vertente de investigação (Bryman, 1992).

Nesta perspectiva, tendo presente que este estudo abrange a formação inicial de professores no âmbito da estatística e probabilidades e tem como propósito alargado averiguar se os futuros professores compreendem de forma adequada o tema em questão, tanto do ponto de vista científico como metodológico, e tendo em consideração os objectivos desta investigação: (a) Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades; (b) Identificar dificuldades de futuros professores no planeamento e execução de aulas sobre o tema; (c) Descobrir os factores subjacentes às opções que os futuros professores adoptam na sua prática lectiva; (d) Compreender de que forma as dificuldades sentidas influenciam a sua prática e (e) Averiguar se a prática induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio, julgou-se conveniente optar por uma investigação que envolvesse uma metodologia quantitativa e qualitativa.

Assim, numa primeira fase em que se pretendia essencialmente identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores, o que envolvia todos os alunos de uma turma de 4º ano, optou-se por uma metodologia essencialmente quantitativa, pois “em investigação quantitativa é normalmente possível obter dados sobre um conjunto alargado de pessoas relativos a um certo número de questões pré-determinadas” (Fernandes, 1991, p.66). Neste caso, optou-se por uma abordagem no sentido descritivo e não orientada por hipóteses. Esta metodologia foi usada no primeiro objectivo da investigação, (a) Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades.

Na prossecução da investigação, tendo presente que os restantes objectivos se relacionam mais directamente com a prática de ensino, optou-se por uma vertente predominantemente qualitativa, pois, como diz Fernandes (1991), a investigação qualitativa permite identificar variáveis relevantes para o estudo do ensino e da aprendizagem que não são facilmente detectadas através da utilização dos métodos típicos da investigação quantitativa, fornecendo assim informação acerca do ensino e da aprendizagem que de outra forma não se pode obter. Além disso, nesta fase predominam as características da investigação qualitativa referidas por Bogdan e Biklen (1994, p.47-49), isto é, a fonte directa de dados é o ambiente natural, o investigador é o instrumento principal de recolha de dados, é uma investigação descritiva, há mais interesse pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos, os dados são analisados de forma indutiva e o significado é de importância vital.

Incluída na abordagem qualitativa, seguiu-se ainda uma metodologia de estudo de casos, pois o estudo de caso é a metodologia de investigação ideal para compreender e interpretar observações do fenómeno educacional (Merriam, 1988). Além disso, esta metodologia é especialmente adequada quando se quer responder às questões ‘como?’ e ‘porquê?’, quando se investiga um fenómeno actual no seu contexto real e em que o investigador tem muito pouco ou nenhum controlo sobre os acontecimentos (Yin, 1989). Dado que o estudo de caso é adequado quando o fenómeno em estudo não se pode isolar do seu contexto, permanece assim insubstituível nos domínios em que a experimentação não pode ter lugar ou em que é limitado o seu campo de aplicação (Matos e Carreira, 1994).

Ponte (1994, p.11) afirma que “os estudos de caso usam-se para compreender a especificidade de uma dada situação ou fenómeno, para estudar os processos e as dinâmicas da prática, com vista à sua melhoria”, tendo como objectivo fundamental proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico. Nesta perspectiva, os estudos de caso são, segundo Merriam (1988), particularísticos já que se focalizam numa situação, acontecimento, programa ou fenómeno particulares; o caso é importante pelo que revela acerca do fenómeno e daquilo que ele representa. Merriam (1988) menciona ainda mais três características que considera propriedades essenciais num estudo de caso qualitativo. Assim, considera que os estudos de caso são: descritivos – porque o produto final é uma descrição rica e completa do fenómeno que está a ser estudado; heurísticos – na medida em que “iluminam a compreensão do leitor acerca do fenómeno em estudo” (p.13) e indutivos – dado que a maior parte destes estudos tem como base o raciocínio indutivo. Generalizações, conceitos ou hipóteses emergem da análise dos dados, dados esses que estão presos ao contexto.

3.2. Participantes no estudo

Na primeira fase do estudo, em que foi usado um questionário, participou uma turma constituída por 37 alunos do 4º ano, do curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, de uma Escola Superior de Educação. Pretendeu-se identificar as suas dificuldades e os seus processos de raciocínio relativamente a aspectos elementares ligados à estatística e às probabilidades. Os discentes tinham idades compreendidas entre os 21 e os 39 anos, e cerca de 78% inseria-se na faixa etária dos 21 aos 23 anos. Só três alunos tinham leccionado o tema de estatística e probabilidades no 2º ciclo, dois deles durante a Prática Pedagógica II, que já tinham concluído, e um durante vários anos, pois já exercia a profissão de professor há 10 anos.

Todos os alunos tinham frequentado a disciplina de Probabilidades e Estatística no Ensino Superior; contudo, 19% dos discentes não tinham estudado, no ensino secundário, nem o tema de probabilidades nem o tema de estatística. Apenas três dos estudantes não tinham obtido aprovação na disciplina de Probabilidades e Estatística, sendo 12,4 valores e 12 valores a média e a mediana, respectivamente, das classificações dos que obtiveram aprovação na disciplina.

Na segunda fase, que consistiu na observação de aulas e em entrevistas, pretendeu-se compreender mais detalhadamente as dificuldades manifestadas e as suas causas, assim como verificar a sua permanência ou detectar outras dificuldades apresentadas pelos participantes, quando envolvidos em actividades relacionadas com a leccionação. Procurou-se, também, verificar em que medida as dificuldades sentidas influenciavam a escolha de estratégias, actividades e exercícios para o ensino da unidade de Estatística no 2º ciclo. Assim, foram seleccionados três alunos dos participantes da primeira fase do estudo, atendendo aos seguintes critérios: (a) leccionar durante o estágio a unidade estatística, no 6º ano; (b) possibilidade de assistência às aulas por parte da investigadora; (c) disponibilidade individual para participar no estudo; (d) desempenho no questionário.

Os critérios (a) e (b) impuseram um corte fulcral no número de participantes disponíveis para o estudo. Em relação ao primeiro, alguns dos alunos ficaram com turmas de 5º ano e, além disso, mesmo dos que ficaram com o 6º ano, como o estágio se desenvolve em grupos de dois, só um deles leccionou a unidade de Estatística. Em relação ao segundo, a investigadora teve que eliminar automaticamente estagiários que estagiassem em escolas fora da cidade assim como ter o cuidado de evitar trabalhar com participantes que leccionassem simultaneamente, pois pretendia assistir a todas as aulas da unidade de Estatística.

Dentro do limitado leque de possibilidades que impunha o cumprimento do critérios (a) e (b), tentou-se seleccionar participantes com diferente desempenho no questionário, que foi avaliado atendendo à correcção das respostas dadas.

Como nem todos os estagiários começaram a leccionar a unidade de Estatística ao mesmo tempo, optou-se por fazer uma escolha faseada dos participantes. Houve sete estagiários que ficaram disponíveis após o cumprimento dos critérios (a), (b) e (c), tendo quatro iniciado primeiro a unidade. Destes, seleccionou-se o que tinha melhor desempenho no questionário (Maria, com 20 respostas correctas, 2 parcialmente correctas, 4 incorrectas e 2 sem resposta) e o que tinha pior desempenho (Joana, com 15 respostas correctas, 1 parcialmente correcta, 9 incorrectas e 3 sem resposta). Dos três restantes, que iniciaram mais tarde a unidade, escolheu-se, também o que tinha pior desempenho (Teresa, com 16 respostas correctas, 4 parcialmente correctas, 5 incorrectas e 3 sem resposta).

Dos três estagiários escolhidos, dois deles tinham 22 anos e um 21 anos. Nenhum possuía experiência de ensino e realizaram o estágio pedagógico em escolas nas quais existe já alguma tradição de colaboração com a Escola Superior de Educação no âmbito do estágio integrado.

A investigadora efectuou um primeiro contacto com estes estagiários, informando-os sobre as finalidades e os objectivos do estudo, referindo, também, que, caso desejassem, poderiam desistir de colaborar em qualquer fase do estudo. A sua adesão foi imediata e comprometeram-se a prestar o seu contributo, na medida do possível. Nesse primeiro contacto, a investigadora garantiu ainda aos participantes que preservaria o seu anonimato (os nomes utilizados na descrição do estudo são fictícios) assim como não faria quaisquer comentários, alusivos às observações realizadas, com os professores orientadores do estágio.

Foram também contactados os professores das turmas em que os estagiários leccionaram no sentido de obter a sua permissão para que a investigadora assistisse às aulas. Autorização que, após tomarem conhecimento que os estagiários estavam de acordo, foi prontamente concedida. Foi ainda esclarecido com estes professores que o papel da investigadora seria de observadora e não de interveniente ou avaliadora.

3.3. Contexto do estudo

O curso frequentado pelos participantes no estudo, Professores do Ensino Básico variante de Matemática e Ciências da Natureza, tem a duração de quatro anos e confere o grau académico de Licenciatura, dando habilitações para leccionar no 1º ciclo do ensino básico e para leccionar as disciplinas de Matemática e Ciências da Natureza no 2º ciclo do ensino básico.

3.3.1. A prática pedagógica

Os alunos da variante de Matemática e Ciências da Natureza realizam, no 3º ano, a Prática Pedagógica I no 1º ciclo, de duração semestral, em que leccionam 3 dias por semana. No 4º ano realizam a Prática Pedagógica II (estágio) em que, após uma semana de observação, leccionam Matemática durante sete semanas, o mesmo acontecendo com a disciplina de Ciências da Natureza, com possível variação, dependendo da existência de ocorrências imprevistas. A responsabilidade directa pelo acompanhamento destes alunos é atribuída aos docentes da instituição de formação designados para o efeito – professores orientadores, competindo aos professores cooperantes (professores da turma onde se realiza a prática pedagógica) a orientação na própria escola.

A primeira fase do estudo realizou-se antes da Prática Pedagógica II e a segunda fase durante e após essa prática.

3.4. Métodos de recolha de informação

Apresenta-se de seguida, de forma sumária, o percurso efectuado.

Na primeira fase, foi pedido aos estudantes do 4º ano da Licenciatura de Matemática e Ciências da Natureza de uma Escola Superior de Educação que respondessem a um questionário.

Na segunda fase, seleccionaram-se três alunos dessa turma que fossem leccionar a unidade estatística no 6º ano, durante a Prática Pedagógica II. Escolheu-se o 6º ano porque os conteúdos propostos pelo programa são mais alargados que no 5º ano e incluem também uma breve referência a aspectos elementares ligados às probabilidades.

A estes estagiários fez-se uma primeira entrevista antes de começarem a leccionar a unidade Estatística e observaram-se todas as aulas que leccionaram sobre o tema, exceptuando a ficha de avaliação sumativa, quando realizada. Esta observação de aulas foi acompanhada de algumas conversas informais. Os estagiários forneceram ainda todo o material que realizaram para as aulas e para os orientadores.

Por fim, fizeram-se mais duas entrevistas aos estagiários, uma referente a alguns aspectos observados durante as aulas e relacionados com a prática pedagógica e outra mais directamente ligada à exploração das respostas dadas no questionário, a que responderam inicialmente, que visou perceber o tipo de raciocínios feitos e as alterações que, após a leccionação da unidade, achavam conveniente fazer.

Após a segunda entrevista foi, ainda, pedido às estagiárias que, quando tivessem disponibilidade, completassem afirmações alusivas à importância do estudo da estatística e das probabilidades e, relativamente às aulas dadas, comentassem o que fariam e não fariam do mesmo modo, explicitando as suas razões (Anexo III). Estes registos foram entregues por escrito, posteriormente, à investigadora.

Utilizaram-se, assim, diferentes métodos de recolha de dados: questionários, entrevistas semi-estruturadas, documentos escritos, conversas informais e observação de aulas.

3.4.1. Instrumentos de recolha de dados

O questionário

O questionário (Anexo I) é composto por 13 questões que foram elaboradas tendo em atenção os conteúdos recomendados no programa de Matemática do 2º ciclo do ensino básico, no que se refere à unidade de Estatística, os quais se espera que os futuros professores, no final da sua licenciatura, estejam preparados para desenvolver e explorar com os alunos.

Embora não faça parte do programa do 2º ciclo, julgou-se ainda conveniente formular questões relativas à mediana, pois também é uma medida de tendência central e, geralmente, é estudada conjuntamente com a moda e a média. Além disso, é um conceito que alguns professores do 2º ciclo não vêem qualquer problema em ser introduzido neste nível, em casos simples, se surgir a oportunidade.

O questionário tinha como objectivo identificar dificuldades e processos de raciocínio sobre aspectos elementares de estatística e probabilidades e foi aplicado no fim do primeiro semestre do 4º ano durante uma aula de duas horas, com a prévia autorização da professora da disciplina, que esteve sempre presente. Os alunos dispuseram de todo o tempo da aula para responder ao questionário, o que não ultrapassou uma hora e meia, embora grande parte tivesse acabado antes. Foram ainda fornecidas máquinas de calcular aos alunos que as solicitaram para usarem na resolução das questões.

Face à necessidade de identificar os participantes para seleccionar aqueles com que teria interesse prosseguir o estudo, foi pedido aos alunos que escrevessem o seu nome num canto da folha correspondente às informações pessoais, destinado para o efeito. Porém, para garantir o anonimato nesta fase inicial, a cada questionário foi atribuído um número e o canto da folha que continha o nome foi recortado na altura em que se recolheu o questionário. Foi, ainda, garantido aos discentes, antes de responderem ao questionário, que só seriam identificados caso fossem escolhidos para participar na segunda fase do estudo.

Tal como sugerem Carmo e Ferreira (1998) e Hill e Hill (2000), o questionário foi objecto de apreciação prévia por parte de professores de Matemática que leccionavam no Ensino Superior, na área de Matemática e/ou Metodologia, tendo alguns deles também experiência de ensino no 2º ciclo e de orientação de estágios nesse nível de ensino. Uma das professoras tinha, ainda, experiência de leccionação da disciplina de Estatística e Probabilidades numa Escola Superior de Educação.

Também foi ainda passada a versão corrigida do questionário, que resultou das sugestões dos professores, a alunos do 3º ano, do mesmo curso dos participantes, no final da disciplina de Estatística e Probabilidades ser leccionada, tendo-lhes sido solicitado que fizessem sugestões e que indicassem o que não percebiam nas questões. Estes eram os alunos que se encontravam em condições mais semelhantes à dos sujeitos que participaram no estudo.

As sugestões dadas pelos professores visaram essencialmente questões de formato como, por exemplo, não fazer várias perguntas na mesma alínea, e de linguagem no sentido de tornar mais claro o que se pretendia. Os alunos referiram-se, essencialmente, à extensão do questionário (o questionário inicial era composto por 15 questões), opinando que demorava muito tempo a responder pelo que se tornava aborrecido. Por outro lado, consideraram desnecessários os comentários ou as justificações pedidos nalgumas questões visto que, na sua opinião, quando se solicita que se determine ou calcule algo (por exemplo, questão 7 e 8) pedir para justificar a resposta torna-se confuso, assim como nalguns casos (questão 10 e 13) pedir para comentar as respostas é aborrecido porque é evidente.

As propostas foram na generalidade aceites, colocando-se apenas algumas excepções. Por exemplo, na questão 3 não houve consenso entre os vários avaliadores relativamente à linguagem, pois na pergunta "(…) indique qual destas medidas melhor representa o conjunto de dados recolhidos pelo Luís", a expressão "melhor representa" gerou alguma polémica. Na opinião de um dos professores, o termo "melhor" era ambíguo, sugerindo que houvesse uma explicitação mais evidente do que se pretendia. Foram, ainda, sugeridas as variantes: "qual destas medidas será mais representativa dos dados", e "qual destas medidas melhor caracteriza…". Porém, três dos professores não viram qualquer inconveniente na expressão proposta inicialmente. Dado que os alunos que responderam ao questionário não manifestaram qualquer dúvida relativamente à compreensão da questão, julgou-se conveniente manter a versão inicial.

Na questão 11 também não foi aceite a sugestão de um professor de colocar em cada figura um ‘b’ debaixo das bolas brancas e um ‘p’ debaixo das bolas pretas, com o intuito de melhor as identificar, em virtude das bolas brancas não terem efectivamente essa cor. Considerou-se, no entanto, que esse tipo de indicação iria lançar mais confusão do que clarificar a situação.

Para além da correcção dos aspectos de forma e de linguagem e da eliminação de alguns pedidos de justificação, foram ainda feitas algumas reformulações.

Assim, uma das questões que pretendia testar se os sujeitos recorriam incorrectamente à propriedade associativa no cálculo da média foi reformulada atendendo à opinião de dois professores que consideraram que a questão não estava formulada no melhor sentido para testar o que se propunha. Porém, quando os alunos responderam ao questionário, verificou-se que, mesmo com a reformulação, essa questão não permitia atingir os objectivos pretendidos e, como o questionário já era demasiado longo, foi eliminada.

A extensão do questionário determinou ainda a supressão de mais algumas questões e a reformulação de outras. Assim, eliminou-se uma questão através da qual se pretendia averiguar se os sujeitos distinguiam situações em que se recorre ou não à média aritmética, porque se afastava um pouco do contexto das outras.

Face às opções a tomar, considerou-se mais importante manter as questões alusivas à moda e à média em detrimento da mediana, pois são conteúdos que fazem parte do programa do 2º ciclo, pelo que se eliminou uma alínea da questão 1 que dizia respeito à determinação da mediana e reformulou-se a versão inicial da questão 2 que, em vez de se referir à moda e à mediana, passou a relacionar a moda e a média, o que permitiu dispensar outra questão do mesmo género que se referia apenas à média. Além disso, julgou-se conveniente desdobrar a pergunta em duas alíneas separadas, pois os alunos, quando responderam à versão inicial, embora não indicassem qualquer problema em termos de compreensão do enunciado, consideraram que havia muitos dados em que pensar ao mesmo tempo, o que tornava a questão confusa.

Depois destas reformulações, o questionário foi ainda discutido com um dos professores avaliadores iniciais e julgou-se conveniente acrescentar uma questão referente à interpretação do significado das medidas de tendência central num dado contexto, pois considerou-se que o questionário falhava um pouco neste ponto, surgindo então a questão 9.

Considerando assim as opiniões e sugestões dos vários intervenientes no processo de validação deste instrumento, resultou a versão definitiva do questionário, o qual se encontra no Anexo I.

As questões

Em termos globais, na generalidade das questões, pretende-se identificar as dificuldades sentidas e os processos de raciocínio utilizados aquando da sua resolução.

A questão 1 refere-se a uma variável qualitativa em que a distribuição é apresentada por um gráfico circular. Pretende-se averiguar de que forma os alunos transferem/aplicam os conceitos de moda (1.1) e de média (1.2) para o caso específico deste tipo de variáveis.

A questão 5 envolve a indicação da moda (5.2) e a determinação da média (5.1) e da mediana (5.3), tendo como base uma distribuição apresentada sob a forma de gráfico de barras e que se reporta a uma variável quantitativa discreta. Pretende-se identificar os processos de raciocínio e detectar possíveis dificuldades no cálculo destas medidas.

Tanto na questão 1 como na 5, visto que os dados são apresentados sob a forma gráfica, a sua resolução implica a leitura e interpretação prévia dos gráficos respectivos. Com estas questões, pretende-se, ainda, averiguar de que modo o tipo de representação usado influencia as respostas e os raciocínios utilizados.

Os gráficos circulares e de barras fazem parte integrante dos programas de 2º ciclo do ensino básico, embora normalmente não apareçam questões que envolvam a determinação da média directamente a partir de gráficos.

Questões semelhantes à 1 apareceram algumas vezes em frequências e/ou exames da disciplina de Probabilidades e Estatística do curso que os participantes no estudo frequentam e uma questão do mesmo género da 5 foi analisada por Carvalho (1996) com alunos do 7º ano de escolaridade.

Na questão 2, face a afirmações feitas relativamente às características de duas distribuições, solicita-se aos alunos para discutirem a validade das médias calculadas (2.1) e das modas indicadas (2.2). Pretende-se, assim, diagnosticar concepções no que diz respeito à influência das características da distribuição relativamente à média e à moda.

A questão 3 compara os conceitos de média, moda e mediana, pedindo-se aos sujeitos para tomarem uma decisão estatística. Esta questão foi idealizada a partir de uma pergunta, do estudo de Carvalho e César (2000) com alunos de 7ºano, que diz respeito à comparação da média e da mediana mas noutro contexto.

As questões 4, 6, 7 e 8 envolvem diferentes aspectos ligados ao conceito de média. Com a questão 4 pretende-se verificar como é que os sujeitos com base no conhecimento da média e do valor de um dos dados constroem uma possível distribuição.

As questões 6, 7 e 8 envolvem, em certa medida, o recurso à média ponderada. Assim, todas elas permitem diagnosticar os problemas dos alunos quando têm de ter em consideração a frequência absoluta dos valores da variável. Estas questões também pretendem detectar as concepções erradas no que concerne à atribuição de propriedades atribuídas incorrectamente à média aritmética, como a existência de elemento neutro (questão 6) e a lei do fecho (essencialmente a questão 8).

Para além disso, a questão 7 pretende testar a capacidade de determinar um dado desconhecido com base no conhecimento da média. Esta questão foi adaptada do manual escolar de Neves e Monteiro (1997), do 6º ano.

A questão 6 foi estabelecida a partir de uma questão proposta por Mevarech (1983), a alunos universitários, que envolvia uma situação completamente diferente mas que tinha por base o mesmo objectivo.

A questão 8 é mencionada por Batanero (2000a) e foi adaptada de Pollatsek *et al.* (1981), que estudaram problemas relacionados com a média ponderada com estudantes universitários. Problemas do género foram também estudados por Mevarech (1983), mas apresentando outras situações.

A questão 9 pretende diagnosticar a capacidade dos sujeitos interpretarem o significado das medidas de tendência central no contexto dos salários dos empregados de uma empresa.

As questões 10, 12 e 13 referem-se a acontecimentos. Assim, pretende-se verificar se os sujeitos têm dificuldades em classificar um acontecimento como certo, impossível, possível mas não certo (questão 10), em identificar um acontecimento certo numa experiência estocástica (questão 12) ou em darem exemplos de acontecimentos com base nos resultados de uma experiência aleatória (questão 13).

A questão 10 foi estudada por Fischbein *et al.* (1991) com sujeitos de vários níveis de ensino, entre os 9 e os 14 anos. A única diferença é que na classificação dos acontecimentos usaram o termo possível em vez de possível mas não certo, como é pedido no questionário. A questão 12 foi adaptada do estudo realizado por Fischbein e Gazit (1984) com alunos de 10 a 13 anos. Questão similar a esta, mas em que o número de bolas de cada cor é sempre o mesmo, aparece também no manual escolar de Neves e Monteiro (1997).

A questão 11 envolve situações de comparação de probabilidades em experiências simples, e foi estudada por Fernandes (1999) com alunos do 8º e 11º anos.

As entrevistas

Foram efectuadas entrevistas de dois tipos: conversas informais em que ocasionalmente se comentavam alguns aspectos referentes às aulas, quando a investigadora pedia algum esclarecimento ou quando a professora estagiária fazia alguma pergunta, e entrevistas semi-estruturadas, com o intuito de fazer perguntas mais focalizadas, e que decorreram antes e após a leccionação de toda a unidade didáctica.

As conversas informais, que ocorreram esporadicamente, realizaram-se antes ou após a assistência às aulas, quando a investigadora se encontrava com as estagiárias na sala de professores ou na própria sala de aula e os alunos não estavam presentes.

Como estas conversas eram normalmente curtas, a investigadora tomava notas após cada sessão.

Entrevistas semi-estruturadas

Como já anteriormente foi mencionado, realizaram-se três entrevistas a cada uma das participantes na segunda fase do estudo, sempre em horário previamente combinado e de acordo com as suas disponibilidades.

A primeira entrevista (Anexo II), realizada antes de começarem a leccionar a unidade didáctica de Estatística, visava a recolha de dados sobre a opção profissional dos inquiridos, assim como sobre a sua relação com a estocástica. Pretendia-se, ainda, detectar algumas dificuldades iniciais na preparação/planificação de aulas. Para além disso, esta entrevista serviu também para explicitar mais detalhadamente os objectivos do trabalho.

A segunda entrevista (Anexo II) focava essencialmente aspectos referentes às dificuldades sentidas na planificação de aulas e sua concretização, e à clarificação de determinadas opções pedagógicas relativamente ao ensino da estocástica no 2º ciclo.

Na terceira entrevista (Anexo II), os intervenientes leram as respostas dadas no questionário a que responderam na primeira fase do estudo e reformularam-nas sempre que julgaram conveniente. Quer num caso, quer noutro, justificaram as suas opções e designaram, ainda, as questões que, do seu ponto de vista, se adequariam ao 2º ciclo.

Apesar de ser intenção da investigadora obter opiniões de todos os participantes relativamente aos mesmos assuntos, as entrevistas semi-estruturadas permitiram que cada entrevistado progredisse ao seu ritmo e que percorresse caminhos que diferiram dos escolhidos pelos outros.

As entrevistas, conduzidas pela investigadora, decorreram no seu gabinete e foram audio-gravadas e posteriormente transcritas na íntegra. Os protocolos resultantes da transcrição das duas primeiras foram dados às estagiárias para que modificassem o que julgassem convenientes. Em geral, estas fizeram alterações à pontuação e completaram ideias, não surgindo qualquer situação em que as afirmações registadas não fossem aceites.

A observação de aulas

Como afirma Merriam (1988): “a observação é a melhor técnica para utilizar quando uma actividade, acontecimento ou situação podem ser observados em primeira mão, quando uma perspectiva nova é desejável, ou quando os participantes não são capazes ou não estão dispostos a discutir o tópico em estudo” (p.89).

A investigadora assistiu a todas as aulas da unidade didáctica de Estatística de cada uma das estagiárias. Durante essa observação tentou que a sua presença fosse o mais discreta possível, reservando-se um papel de observador não interveniente na actividade lectiva, acompanhando as aulas num lugar não ocupado da zona posterior ou lateral da sala, que nalgumas situações coincidiu com a mesa ocupada pelo professor da turma.

Nesta perspectiva, na medida em que "é o próprio investigador o instrumento principal de observação", a investigadora assumiu um papel de observador participante (Lessard-Hébert, Goyette e Boutin, 1990, p.155) mas na sua forma passiva, pois nesta forma de observação "o observador não participa nos acontecimentos desse meio mas assiste-lhes do exterior" (Everston e Green, 1986, citado em Lessard-Hébert *et al.*, 1990, p.156).

De uma forma geral, os alunos não manifestaram sinais evidentes de perturbação gerada pela presença da investigadora.

As observações foram realizadas sem recurso a grelhas ou outros instrumentos de observação. No entanto, foram tiradas notas e registados comentários que se centraram sobre os recursos educativos utilizados, as estratégias desenvolvidas e o método de resolução dos exercícios.

Os documentos escritos

As estagiárias forneceram todos os documentos relativos à planificação da unidade e das aulas, assim como fichas de trabalho e cópias dos acetatos utilizados, elementos esses que foram lidos e analisados.

Foram também analisados os comentários escritos que as estagiárias fizeram sobre a importância do estudo da estatística e probabilidades e sobre o que fariam do mesmo modo e de modo diferente, indicando as razões, relativamente às aulas dadas da unidade de Estatística. Os guiões para preenchimento foram fornecidos pela investigadora após a segunda entrevista e ficou combinado que cada estagiária entregaria as respostas mediante as suas disponibilidades.

3.5. Análise de dados

Após a recolha de dados, iniciaram-se os procedimentos para a sua análise. Estes procedimentos tiveram em conta os objectivos que orientavam o estudo e a natureza dos dados obtidos.

Assim, no caso do questionário, referente à primeira fase do estudo, depois de ler as respostas de todos os inquiridos a cada uma das perguntas definiram-se categorias com base nas respostas dadas e nos raciocínios utilizados. Nesta classificação, sempre que oportuno, tiveram-se, ainda, em atenção algumas categorias pré-definidas em estudos já realizados, quando estes envolviam o mesmo tipo de questões do questionário. À excepção da categoria *Não responde*, relativa às respostas, e da categoria *Sem justificação*, referente aos raciocínios, as outras categorias, na sua globalidade, são específicas de cada pergunta, havendo, em casos pontuais, no que se refere aos raciocínios, algumas categorias em comum. A descrição das categorias utilizadas é feita detalhadamente no capítulo IV referente à análise dos dados do questionário.

Na análise das respostas e dos raciocínios foram determinadas frequências relativas em percentagem e construídas as respectivas tabelas de frequências relativas separadamente para as respostas e para os raciocínios de cada pergunta.

Relativamente à segunda fase do estudo, definiram-se à partida as categorias seguintes: a relação com a estocástica, a prática pedagógica (incluindo obrigatoriamente como indicadores a planificação e preparação de aulas, a prática lectiva e as dificuldades sentidas) e o questionário. Estas categorias orientaram, de certo modo, o processo de recolha dos dados. Para além disso, como se foi fazendo uma análise superficial dos dados à medida que a sua recolha era feita, esta influenciou também a orientação de parte da recolha posterior. Por vezes, pedia-se aos participantes para clarificarem algum aspecto que tivesse ficado menos esclarecido e, sempre que algum deles falava num tópico que se considerasse relevante para o estudo, tentava-se auscultar a opinião dos outros relativamente ao mesmo assunto.

A análise e interpretação mais alargada e pormenorizada foram feitas após a recolha de todos os dados. Depois de ler e analisar todos os documentos: entrevistas, comentários da investigadora, questionários, registos da observação de aulas para cada um dos casos, foram emergindo as diversas subcategorias. Desta forma, definiu-se a orientação a dar à descrição dos vários casos, seguindo um modelo mais ou menos uniforme para todos, e tentando ir de encontro aos objectivos do estudo.

C A P Í T U L O I V

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS DO QUESTIONÁRIO

Neste capítulo apresentam-se e analisam-se as respostas e os raciocínios obtidos em cada uma das questões do questionário (Anexo I).

Na análise das respostas e dos raciocínios seguiram-se as seguintes convenções:

- Na categoria *Não responde,* das respostas, incluíram-se os sujeitos que não apresentaram qualquer tentativa de resposta e os que deram respostas do tipo não sei, não me lembro, não sei a fórmula. Os sujeitos que apresentaram algum raciocínio mas que não chegaram a uma resposta concreta não se consideraram nesta categoria.
- No raciocínio *Sem justificação* incluíram-se os sujeitos da categoria *Não responde* e os que, embora tenham dado alguma resposta, não a justificaram ou não apresentaram o seu raciocínio.

4.1. Estatística

Nesta secção analisam-se as questões do questionário que se referem, exclusivamente, à parte de estatística.

Questão 1. Nesta questão identifica-se a moda (**1.1**) e averigua-se a possibilidade de calcular a média (**1.2**) das preferências de clube desportivo dos 200 alunos de uma escola, cuja distribuição é apresentada sob a forma de um gráfico circular.

Sub-questão 1.1

Respostas. Observando as respostas obtidas na sub-questão 1.1, que constam da Tabela 1, verifica-se que a maior percentagem de alunos afirmou que a moda é o clube desportivo Porto, que é a resposta correcta. É de realçar, no entanto, que 21,6% dos alunos identificaram, incorrectamente, a moda com a frequência relativa apresentada no gráfico.

Tabela 1. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 1.1.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A moda é o clube desportivo Porto*	78,4
A moda é 29% (ou 0,29)	21,6

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 2.

No raciocínio *Referência à maior frequência* os alunos apresentaram, entre outros, argumentos do tipo: "é o que tem maior percentagem de preferências", "é o que se repete mais", "é o que tem maior frequência", "é o valor que se repete com maior frequência", "é o valor que aparece mais vezes". Este raciocínio nem sempre conduziu à resposta correcta, pois 22,9% dos alunos que o utilizaram identificaram a moda com a frequência relativa. Embora entre estes alunos haja alguns que referiram, nas suas justificações, o clube mais escolhido ou que tem maior percentagem/frequência, todos os que referiram que a moda "é o valor que..." responderam incorrectamente, associando o termo valor a um valor numérico, ou seja, à frequência relativa.

Tabela 2. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 1.1.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Referência à maior frequência	94,6
Sem justificação	5,4

Destes resultados depreende-se que, quando a variável em estudo é qualitativa, a identificação da moda apresenta ainda dificuldades para alguns alunos, já que, embora pareçam ter uma noção do seu significado, por vezes prevalece a ideia de que a moda tem que ser um número.

Sub-questão 1.2

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 3, verifica-se que apenas 37,8% dos alunos responderam correctamente, afirmando que não era possível calcular a média, e a maioria concluiu que a média era 20% ou a correspondente frequência absoluta.

Tabela 3. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 1.2.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Não é possível calcular a média*	37,8
A média é 20% (ou 40)	54,1
A média é o Sporting	2,7
A média é 0,005	2,7
Não responde	2,7

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. A análise dos raciocínios (ver Tabela 4) permite concluir que as dificuldades são mais acentuadas do que poderia parecer pelas respostas, já que somente 13,5% dos alunos justificaram a sua resposta com base no raciocínio *Alusão a variáveis qualitativas*. Neste raciocínio, considerado correcto, os alunos referiram explicitamente que se tratava de uma variável qualitativa ou afirmaram esse facto de forma menos directa alegando que "estamos em presença de nomes e não de números" ou que "não é possível atingir um valor numérico que expresse a média".

Tabela 4. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 1.2.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Alusão a variáveis qualitativas	13,5
Argumentos não matemáticos	8,1
Cálculo da média das frequências	59,5
Sem justificação	18,9

O raciocínio *Argumentos não matemáticos* também conduziu à resposta correcta, mas, neste caso, os alunos apresentaram razões que tinham a ver com o clube ou com a falta de dados: "estão vários clubes envolvidos", "foram os alunos a escolher o clube" e "não estão especificados os clubes representados por outros".

O raciocínio *Cálculo da média das frequências*, referido pela maioria dos alunos, consistiu na aplicação do algoritmo da média às frequências relativas ou absolutas. Destes alunos, 22,7% calculou o quociente da soma das frequências relativas pelo número de valores que tomava a variável, $\frac{10+29+25+23+13}{5}$, e 72,7% usaram as frequências absolutas em vez das frequências relativas. Embora, na generalidade, se tenha chegado à conclusão de que a média era 20% e 40, respectivamente, um dos alunos que calculou a média das frequências absolutas, escolheu como resposta o clube cuja frequência absoluta se aproximava mais da média obtida, concluindo que a média era o Sporting.

Outro aluno, que também se incluiu nesta categoria de raciocínio, adicionou as frequências relativas e dividiu a soma obtida pelo número total de inquiridos, $\frac{0{,}13+0{,}10+0{,}29+0{,}25+0{,}23}{200}$, tendo concluído que a média era 0,005.

Este raciocínio denota uma tendência para manipular os dados disponíveis de forma a aplicar uma fórmula sem reflectir sobre o seu sentido no contexto apresentado. Parece que o fundamental é encontrar um valor numérico que responda ao problema.

É de realçar que, dos alunos que não apresentaram qualquer justificação, 85,7% deram uma resposta correcta afirmando que não era possível calcular a média. Fica-se, assim, na dúvida se o raciocínio que utilizaram para responder à questão se baseou ou não em argumentos válidos.

Questão 2. Nesta questão, partindo de algumas afirmações relativamente às classificações finais a Matemática de duas turmas A e B: *as classificações mais altas foram obtidas na turma A; na turma A não existe qualquer aluno com a classificação de 14 valores; o João, da turma B, obteve a classificação de 16 valores; 50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores,* questiona-se a possibilidade das médias da turma *A* e *B* poderem ser 14 valores (**2.1**) e das modas das turmas *A* e *B* poderem ser 14 e 15 valores, respectivamente (**2.2**).

Sub-questão 2.1

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 5, verifica-se que a maior parte dos alunos respondeu correctamente, afirmando que ambas as médias podem assumir os valores calculados.

Na resposta *A média da turma B não pode assumir o valor calculado*, metade dos alunos não fez qualquer referência à turma *A* e outra metade afirmou que a média da turma *A* podia assumir o valor calculado.

Analisando as respostas a cada uma das turmas, verifica-se que a percentagem de respostas erradas foi maior para a turma *B* (21,6%) do que para a turma *A* (10,8%).

Tabela 5. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 2.1.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
As médias podem assumir os valores calculados*	70,3
A média da turma *B* não pode assumir o valor calculado	10,8
É impossível que as médias dêem o mesmo resultado	8,1
As médias não podem assumir os valores calculados	2,7
Não responde	8,1

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 6.

No raciocínio *Heterogeneidade dos dados*, os alunos basearam a sua resposta em argumentos relacionados com a possível discrepância das classificações como, por exemplo, "podem existir valores altos que vão compensar os mais baixos", "embora as notas não sejam homogéneas, umas compensam as outras", "pelo facto de uma turma ser heterogénea há variação de valores", "na turma *A* podem existir alunos com classificação inferior ou superior a 14 e, na turma *B*, verifica-se a mesma situação". Este raciocínio originou sempre a resposta correcta.

O raciocínio *Algoritmo da média* consistiu em mencionar o procedimento de cálculo da média ou em dar um exemplo concreto de uma situação que retratasse o que se pretendia. Os alunos, no primeiro caso, invocaram que a média resulta da "soma feita a todas as classificações a dividir pelo número total de alunos"; e, no segundo caso, arranjaram valores e aplicaram o algoritmo para exemplificar. Em ambas as situações chegaram à resposta correcta de que as médias podem assumir os valores calculados.

Tabela 6. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 2.1.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Heterogeneidade dos dados	29,8
Algoritmo da média	10,8
Concordância dos dados	10,8
Algoritmo da média e Heterogeneidade dos dados	10,8
Influência das classificações mais elevadas	8,1
Frequência 50%	5,4
Heterogeneidade dos dados e Frequência 50%	5,4
Sem justificação	18,9

No raciocínio *Concordância dos dados*, os alunos remeteram a sua justificação para o enunciado dizendo que "nenhuma das informações dadas impede que as médias estejam correctas". Esse raciocínio conduziu sempre à resposta correcta.

No raciocínio conjunto *Algoritmo da média* e *Heterogeneidade dos dados*, os alunos ou usaram o primeiro raciocínio para argumentar que a média da turma *A* pode assumir o valor calculado e o segundo para justificar que a média de *B* pode assumir o valor apresentado, ou justificaram conjuntamente a sua resposta, referindo a possível oscilação dos valores dos dados e o algoritmo de cálculo da média.

No raciocínio *Influência das classificações mais elevadas*, os alunos, induzidos pela afirmação do enunciado "as classificações mais altas foram obtidas na turma *A*", acharam-na relevante para o caso e concluíram que, devido a esse facto, a média não podia ser igual para as duas turmas, chegando um deles a afirmar que "neste caso a média da turma *A* terá que ser mais alta".

No raciocínio *Frequência 50%*, os alunos afirmaram que, pelo facto de 50% terem classificação inferior ou igual a 13 valores, a média da turma *B* não pode ser 14 valores. Neste raciocínio, que conduziu a uma resposta incorrecta, os alunos não se referem à turma A ou deram uma explicação confusa relativamente a essa turma.

No raciocínio conjunto *Heterogeneidade dos dados e Frequência 50%*, os alunos utilizaram a heterogeneidade dos dados para referir que a média da turma *A* pode estar correcta, visto poder haver alunos com nota superior a 14 e outros com nota inferior, e utilizaram a frequência 50% para dizerem que a média da turma *B* está mal calculada.

Os raciocínios *Heterogeneidade dos dados*, *Algoritmo da média*, *Algoritmo da média e heterogeneidade dos dados* e *Concordância dos dados,* usados pela maioria dos alunos (62,2%), consideram-se baseados em argumentos válidos e deram sempre origem à resposta correcta. Embora, no caso deste último, as justificações fossem pouco elaboradas, não acrescentando praticamente nada de novo relativamente ao enunciado.

Já os raciocínios *Frequência 50%* e *Influência das classificações mais elevadas* são baseados em argumentos que não se consideram válidos e conduziram sempre a respostas incorrectas. De notar que 13,5% dos alunos utilizaram estes raciocínios.

Sub-questão 2.2

<u>Respostas</u>. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 7, verifica-se que 37,9% dos alunos responderam que as modas não podem assumir os valores calculados, o que é correcto no caso da turma *A* e incorrecto no caso da turma *B*.

Tabela 7. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 2.2.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A moda da turma *A* não pode assumir o valor calculado*	21,6
A moda da turma *A* não pode assumir o valor calculado, a da *B* pode*	18,9
As modas não podem assumir os valores calculados	37,9
As modas podem assumir os valores calculados	10,8
A moda da turma *B* não pode assumir o valor calculado	8,1
A moda da turma *A* pode assumir o valor calculado	2,7

Nota: as respostas assinaladas com o asterisco (*) são as correctas.

Há alunos que, na sua resposta, só mencionam uma das turmas, não referindo o que pensam relativamente à outra turma. Assim, ao assinalar a resposta correcta partiu-se do pressuposto de que os alunos, ao não referirem a turma *B* e ao afirmarem que a "a moda da turma *A* não pode assumir o valor calculado", supuseram que a moda da turma *B* podia assumir o valor calculado e, como tal, não valeria a pena referi-la. Mesmo considerando esta hipótese, apenas 40,5% dos alunos responderam correctamente a esta questão.

Considerando as respostas referentes a cada uma das turmas, verifica-se que houve uma diferença elevada entre a percentagem de respostas incorrectas, já que 13,5% dos alunos responderam incorrectamente no caso da turma *A* e 46% deram uma resposta incorrecta no caso da turma *B*. Esta discrepância pode dever-se ao facto de que, para dar a resposta correcta no caso da turma *A*, bastava pensar directamente na definição de moda, o que não acontecia propriamente no caso da turma *B*, já que era necessário analisar e reflectir mais detalhadamente sobre os dados fornecidos.

<u>Raciocínios</u>. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 8.

Tabela 8. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 2.2.

		Turma A				
	Raciocínios (n = 37)	Inexistência de classificação igual à moda	Concordância dos dados	Referência à maior frequência	Sem justificação	Total
Turma B	Concordância dos dados	8,1	—	2,7	—	2,7
	Referência à maior frequência	2,7	—	—	—	10,8
	Heterogeneidade dos dados	2,7	—	—	—	2,7
	Frequência 50%	32,5	—	—	8,1	40,6
	Existência de clas. superior à moda	2,7	—	—	2,7	5,4
	Influência das clas. mais elevadas	2,7	—	—	—	2,7
	Insuficiência de dados	2,7	—	—	—	2,7
	Sem justificação	21,6	2,7	—	8,1	32,4
	Total	75,7	2,7	2,7	18,9	

O raciocínio *Inexistência de classificação igual à moda*, utilizado apenas na turma *A*, consistiu na argumentação de que na turma *A* não há qualquer aluno com a classificação de 14 valores, portanto a moda não pode tomar esse valor. Este raciocínio foi utilizado pela maioria dos alunos (75,7%) e justificou quase sempre a resposta correcta.

No raciocínio *Concordância dos dados*, os alunos remeteram a sua justificação para a comparação das afirmações dadas com as da tabela apresentada no enunciado. Assim, no caso da turma *A*, concluíram que "a moda não está correcta pois não existe qualquer tipo de concordância entre o enunciado e a tabela". No caso da turma *B*, argumentaram que "é possível que a moda seja 15 pois os dados não se contradizem". Assim, este tipo de raciocínio, embora pouco elaborado, conduziu em ambos os casos à resposta correcta.

No raciocínio *Referência à maior frequência*, os alunos justificaram a sua resposta referindo que a moda "é o valor que se repete mais". Este raciocínio conduziu à resposta correcta na turma *B*, em que é possível que a moda seja 15 valores, mas originou uma resposta incorrecta no caso da turma *A*, já que o argumento "a moda é o valor que mais vezes se repete, logo pode assumir o valor calculado", não tem em conta as afirmações feitas no enunciado.

No raciocínio *Heterogeneidade dos dados*, os alunos referiram-se à possível discrepância dos dados. Este raciocínio só foi usado no caso da turma B, em que os alunos argumentaram que, "supondo que houve notas superiores a 16, como os extremos estão muito afastados, pois houve notas inferiores a 15, a moda pode ser 15 valores", pelo que originou a resposta correcta.

O raciocínio *Frequência 50%* foi o mais usado no caso da turma *B*, já que 40,6% dos alunos argumentaram que, como metade das classificações são inferiores ou iguais a 13, a moda da turma *B* nunca poderia ser 15 valores. Alguns deles acrescentaram ainda comentários do género: "a moda teria que ser 13 ou menos", "a maioria dos alunos não tem essa nota", "os outros 50% teriam que ter 15 valores", o que denota uma certa incompreensão do real significado do conceito de moda.

No raciocínio *Existência de classificação superior à moda*, os alunos concluíram que o valor da moda da turma *B* não poderia ser 15 valores, mas teria que ser pelo menos 16 (um dos valores dados no enunciado – o João da turma *B* teve 16 valores).

Este raciocínio denota que há alunos que consideram que a moda não pode ser inferior ao valor de qualquer dos dados.

No raciocínio *Influência das classificações mais elevadas*, só usado no caso da turma B, os alunos concluíram que, como é a turma *A* que tem classificações mais altas, é pouco provável que a moda da turma *B* esteja correcta.

O raciocínio *Insuficiência de dados*, só usado no caso da turma *B*, teve como base a alegação de não haver dados suficientes para responder se a moda da turma *B* está ou não correcta, pelo que não tomaram qualquer decisão relativamente a esta turma.

No caso da turma *A*, os raciocínios *Inexistência de classificação igual à moda* e *Concordância dos dados*, utilizados por 78,4% dos alunos, são argumentos que se consideram válidos e conduziram sempre à resposta correcta.

No caso da turma *B*, houve uma maior variedade de raciocínios, mas os raciocínios *Referência à maior frequência*, *Heterogeneidade dos dados* e *Concordância dos dados,* utilizados apenas por 16,2% dos alunos, são os que se consideram baseados em argumentos válidos e conduziram sempre à resposta correcta.

É de notar a diferença entre a percentagem de alunos que usaram raciocínios válidos na turma *A* (78,4%), e na turma *B* (16,2%), tendo, portanto, havido muito mais dificuldades no caso desta última. Também se pode verificar que a percentagem de alunos que não deram qualquer justificação é mais elevada no caso da turma *B* (32,4%) do que na turma *A* (18,9%). Portanto, existe uma tendência mais acentuada em não referir a turma *B*, facto que também foi observada no caso das respostas. Assim, ou os alunos não julgaram necessário referir a turma *B*, porque consideraram a afirmação correcta, ou então tiveram mais dificuldades em exprimir a sua opinião no caso da turma *B*.

Questão 3. Nesta questão escolhe-se, entre a média, a moda e a mediana, a medida que melhor representa o valor que recebem de semanada os dez amigos do Luís.

Respostas. Como se pode verificar pelas respostas dadas (ver Tabela 9), apenas 43,3% dos alunos respondeu correctamente, considerando que a melhor medida era a mediana. Das respostas incorrectas, a mais escolhida foi "a melhor é a média", provavelmente pela referência mais frequente no dia-a-dia à média aritmética.

Tabela 9. Percentagem de alunos nas respostas da questão 3.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A melhor é a mediana*	43,3
A melhor é a média	29,7
A melhor é a moda	13,5
Não escolhe nenhuma das medidas	10,8
Não responde	2,7

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos usaram para justificar as respostas encontram-se na Tabela 10.

No raciocínio *Comparação das medidas*, os alunos falaram comparativamente das medidas estabelecendo uma relação com os dados. Os que escolheram a mediana referiram, por exemplo, "a média varia muito com os extremos, a moda varia com os números que se repetem mais vezes, a mediana é o intermédio", "a média é alterada pelos valores discrepantes de dois alunos receberem 6000$00" e "a média varia com os extremos, a moda não tem em conta os extremos". Pode considerar-se que este raciocínio tem referências implícitas à robustez da mediana, face a valores extremos, em relação à média e à moda.

Neste raciocínio também houve um aluno que escolheu a média como melhor representante porque só comparou esta medida com a moda. Afirmou, assim, que "a maior parte tem semanada muito inferior a 6000$00, por isso a moda seria um valor enganador", referindo que não se lembrava do que era a mediana.

No raciocínio *Amplitude amostral*, os alunos aludiram à diferença existente entre o maior e o menor valor dos dados e escolheram a mediana como melhor representante, argumentando, por exemplo, "a mediana, pois permite calcular os valores intermédios porque há uma grande diferença entre o maior valor e o menor" ou "a mediana porque entre 700 e 6000 há uma diferença muito grande". Este raciocínio conduziu sempre à resposta correcta e parece considerar, erradamente, a mediana como uma medida de dispersão dos dados.

Tabela 10. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 3.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Comparação das medidas	18,9
Amplitude amostral	8,1
Determinação das medidas	18,9
Facilidade de cálculo	16,2
Proximidade ao real	10,8
Atribuição de definições	10,8
Argumento de finalidade	2,7
Factores intrínsecos à medida	2,7
Sem justificação	5,4

O raciocínio *Determinação das medidas* consistiu em determinar ou tentar determinar a média, a moda e a mediana ou apenas uma delas. Neste raciocínio há alunos que não escolheram qualquer uma das medidas e, embora tenham determinado a média e a moda correctamente, tiveram dificuldades em determinar a mediana, porque não ordenaram os valores ou, tendo-os ordenado, não conseguiram chegar a uma conclusão. Dos outros alunos que usaram este raciocínio, os que calcularam as três medidas escolheram a mediana como melhor representante e os que só calcularam a média escolheram a média como melhor representante, não apresentando em ambos os casos qualquer outra justificação para a escolha.

O raciocínio *Facilidade de cálculo* consistiu em escolher a medida que melhor representa o conjunto de dados com base na facilidade que têm em a calcular. Assim, houve alunos que referiram, por exemplo, que a melhor é a moda argumentando que "basta contar os dados que se repetem. A mediana nunca podia ser porque os dados têm que estar agrupados", ou "pois é a que se verifica com maior frequência. Outros dizem que a melhor é a média, "pois apresenta-nos os dados todos discriminados", aludindo à forma de calcular a média. Este raciocínio nunca conduziu à resposta correcta, provavelmente porque a mediana é a medida que os alunos têm mais dificuldades em calcular ou em recordar como se determina.

O raciocínio *Proximidade ao real* consistiu em justificar a escolha da medida pela sua aproximação aos dados reais. Assim, os alunos referiram, por exemplo, "a melhor é a média porque ficamos a saber mais ou menos o valor dos dados recolhidos", "a média (...) representa o dinheiro que cada um recebe por semana", "a moda porque se torna mais real dos dados recolhidos". Este raciocínio nunca conduziu à escolha da resposta correcta.

No raciocínio *Atribuição de definições*, os alunos apresentam algumas definições que atribuem à medida que escolhem como melhor representante do conjunto de dados. Assim, dizem, por exemplo, "a melhor medida é a média, pois representa o valor intermédio das semanadas", "a média é sempre a medida que melhor representa qualquer tipo de conjunto de dados" ou "a mediana, pois corresponde ao valor médio".

No raciocínio *Argumento de finalidade*, um aluno referiu que a importância das medidas depende do ponto de vista a que se destinam, pelo que não escolheu qualquer uma delas.

No raciocínio *Factores intrínsecos à medida*, um aluno utilizou o valor da medida para tirar conclusões, respondendo que " a melhor medida é a mediana, pois não é muito baixa nem muito alta".

Em síntese, verifica-se que apenas 18,9% dos alunos utilizaram o raciocínio *Comparação das medidas*, que é aquele que se considera baseado em argumentos válidos e que, na generalidade, conduziu à resposta correcta.

Questão 4. Nesta questão, admitindo que a média dos pesos de nove pessoas é 78 quilogramas e sabendo que uma delas pesa 70 quilogramas, questiona-se sobre um peso possível para cada uma das restantes oito pessoas.

<u>Respostas</u>. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 11, verifica-se que as respostas foram variadas. Porém, a maioria dos alunos (59,5%) respondeu correctamente.

Tabela 11. Percentagem de alunos nas respostas da questão 4.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Vários pesos (entre 57 e 90 quilogramas)*	35,2
Cada uma pesa 79 quilogramas*	21,6
Uma pesa 86 quilos e as restantes sete 78 quilogramas*	2,7
Cada uma pesa 70,2 quilogramas	2,7
Cada uma pesa 69,25 quilogramas	2,7
Cada uma pesa 82 quilogramas	2,7
Cada uma pesa 78,9 quilogramas	2,7
Outras respostas	13,5
Não responde	16,2

Nota: as respostas assinaladas com o asterisco (*) são as correctas.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 12.

Tabela 12. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 4.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Algoritmo da média	37,9
Apresentação de série	32,4
Compensação	8,1
Tentativa e erro	2,7
Sem justificação	18,9

O raciocínio *Algoritmo da média*, consistiu em aplicar, de alguma forma, o algoritmo da média para tentar responder ao problema. Há, no entanto, neste raciocínio casos distintos a destacar:

- Utilização directa do algoritmo da média ponderada. Os alunos (42,9%) ou resolveram a equação $78 = \frac{70 + 8x}{9}$, em ordem a *x*, tendo concluído que as restantes 8 pessoas pesariam 79 quilogramas, ou limitaram-se a indicar a equação sem a resolver, o que pode significar que tiveram dificuldades na sua resolução ou que não tinham a certeza de que o raciocínio apresentado estivesse correcto.

- Cálculo do peso total das 9 pessoas. Os alunos (35,7%) utilizaram a fórmula $\frac{x}{9} = 78$, para obter o peso total das 9 pessoas. Seguidamente, um dos alunos partiu de 70 quilogramas (o peso conhecido) e adicionou vários pesos até perfazer o peso total e os restantes alunos determinaram a soma do peso das 8 pessoas (702-70 = 632) e dividiram-na por 8 (632:8), tendo concluído que 79 quilogramas era um peso possível para cada uma das restantes pessoas. Neste último caso, seguiu-se um caminho por etapas, semelhante ao que teriam efectuado se partissem da equação $78 = \frac{70 + x}{9}$. Embora essencialmente correcto, comparativamente com a resolução da equação, este raciocínio é mais primitivo e intuitivo.
- Compreensão incorrecta do significado dos termos do algoritmo. Procedimento utilizado por dois dos inquiridos. Um aluno utilizou a equação $78 = \frac{70 + x}{9}$, considerando que x seria o peso total das pessoas. Assim, dividiu o valor de x obtido por 9, obtendo como resultado 70,2 quilogramas. Outro aluno considerou o denominador incorrecto, $78 = \frac{70 + x}{8}$, concluindo que cada uma das restantes pessoas deveria pesar 69,25 quilogramas. Salienta-se que, em qualquer dos casos, uma breve reflexão poderia ser suficiente para concluir que, com o valor obtido, a média nunca poderia dar 78 quilogramas.
- Interpretação incorrecta do enunciado. Um aluno resolveu a equação $\frac{70 + 2x}{3} = 78$ e concluiu que as outras duas pessoas teriam um peso de 82 quilogramas cada, o que estaria correcto se a questão se reportasse apenas a três pessoas.

O raciocínio *Apresentação de série* consistiu em apresentar uma série de valores possíveis para o peso das restantes oito pessoas sem dar outro tipo de justificação. Este raciocínio deu origem ou à apresentação de vários pesos diferentes ou à resposta "cada uma pesar 79 quilos", ambas correctas. Parece estar na base de algumas destas respostas uma ideia de compensação em relação à média. Por exemplo, no caso 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86 existe uma compensação de 86 para 70, de 84 para 72 e assim sucessivamente, e noutros casos podem-se verificar compensações similares. Poderia eventualmente pensar-se que, quem respondeu 79 para peso de todas as restantes pessoas, também distribuiu a diferença 78–70 igualmente por todas elas. Embora não tenha sido apresentado, também podia ter sido aplicado o algoritmo da média, considerando que cada uma das 8 pessoas tinha o mesmo peso. De notar que, em qualquer um destes casos, também poderia ter sido usado um raciocínio de *Tentativa e erro*, embora não haja qualquer indicação nesse sentido, porque os alunos não explicitaram mais o seu raciocínio. Estas interpretações são meras suposições e, consequentemente, julgou-se preferível considerar este raciocínio separadamente.

No raciocínio *Compensação* consideraram-se os alunos que de alguma forma evidenciaram ter usado uma compensação entre os valores dos pesos. Por exemplo, um aluno afirmou "se um pesa 70 quilos, outro pode pesar 86 quilos e os restantes seis pesarem todos 78 quilos". A diferença 78–70 = 8 está presente, explícita ou implicitamente, nos seus argumentos, assim como a necessidade de distribuir esses oito quilogramas de alguma forma. No entanto, os restantes alunos que utilizaram este procedimento não apresentaram qualquer resposta final ao problema.

No raciocínio *Tentativa e erro*, um aluno arranjou um peso que considerava possível e verificou, utilizando o algoritmo da média ponderada, se a média dava 78 quilogramas. No entanto, parou quando a média dava 77,8 quilogramas, concluindo que os pesos possíveis eram todos de 78,9 quilogramas.

Todos os raciocínios se podem considerar válidos. Contudo, no caso do *Algoritmo da média*, como nem sempre foi usado de forma adequada à situação, nem sempre conduziu à resposta correcta. Também o raciocínio *Compensação* nem sempre levou a respostas conclusivas porque, por vezes, os alunos não completaram o seu raciocínio.

Questão 5. Nesta questão determina-se a média (**5.1**) e a mediana (**5.3**) e identifica-se a moda (**5.2**) do número de irmãos dos alunos de uma escola, cuja distribuição é apresentada sob a forma de gráfico de barras.

Sub-questão 5.1

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 13, verifica-se que a maioria dos alunos respondeu correctamente que a média é aproximadamente 1,9. Há, no entanto, uma grande percentagem de alunos (45,9%) que ainda respondem de forma incorrecta a esta questão.

Tabela 13. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 5.1.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A média é aproximadamente 1,9*	54,1
A média é 1,4	13,5
A média é 4,5	10,8
A média é 5,1	5,4
Entre 2 a 3 irmãos	2,7
A média é 3	2,7
Outras respostas	10,8

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 14.

No raciocínio *Algoritmo da média*, os alunos aplicaram o algoritmo da média ponderada, $\frac{6\times0+1\times7+2\times3+3\times8+2\times4+5\times2}{6+7+3+8+1+2}$, e chegaram à conclusão, correcta, de que a média era aproximadamente 1,9.

No raciocínio *Não relacionar o sistema de eixos*, os alunos determinaram o quociente da soma das frequências absolutas (eixo das ordenadas), com excepção do valor correspondente a zero irmãos, pela soma dos valores da variável (eixo das abcissas), $\frac{7+3+8+1+2}{15}$, e obtiveram o valor 1,4 para a média. Salienta-se que, embora alguns alunos tenham feito directamente esse quociente, outros adicionaram primeiro todos os valores da frequência absoluta e depois subtraíram a frequência correspondente a zero irmãos, 27 – 6 = 21. Este procedimento poderá relacionar-se com a consideração do valor zero como elemento neutro, pois a frequência absoluta respectiva não é considerada para o cálculo da média.

Tabela 14. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 5.1.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Algoritmo da média	54,1
Não relacionar o sistema de eixos	13,5
Cálculo da média das frequências	10,8
Denominador incorrecto do algoritmo	8,1
Tabela de frequências	5,4
Cálculo da média dos valores da variável	2,7
Outros raciocínios	2,7
Sem justificação	2,7

No raciocínio *Cálculo da média das frequências*, os alunos determinaram o quociente da soma das frequências absolutas pelo número de valores que toma a variável, isto é, $\frac{6+7+3+8+1+2}{6}$, e chegaram à conclusão de que a média era 4,5. Atentando nesta resposta, houve um aluno que considerou que o raciocínio não estava correcto mas referiu que não sabia calcular de outra forma.

No raciocínio *Denominador incorrecto do algoritmo*, os alunos ponderaram adequadamente os valores para calcular a média. No entanto, ou dividiram por 10 (valor máximo que aparece no eixo das ordenadas), chegando à conclusão de que a média era 5,1, $\frac{6\times0+1\times7+2\times3+3\times8+1\times4+\times5\times2}{10}$, ou dividiram pelo número de valores que toma a variável, $\frac{(6\times0)+(7\times1)+(3\times2)+(8\times3)+(1\times4)+(2\times5)}{6}$, não chegando a efectuar os cálculos. No caso do valor 5,1 da média, parece não ter havido qualquer verificação do resultado, pois trata-se de um valor absurdo relativamente aos dados do problema.

No raciocínio *Tabela de frequências*, os alunos fizeram a leitura do gráfico e construíram uma tabela onde colocaram, na 1ª coluna, o número de alunos e, na 2ª coluna, o correspondente número de irmãos. Contudo, ficaram por aqui, dizendo que não se recordavam como se calculava a média nesse caso. Assim, parece que estes alunos não tiveram dificuldades na interpretação do gráfico, mas no cálculo da média para dados agrupados.

O raciocínio *Cálculo da média dos valores da variável* foi utilizado por um aluno que determinou o quociente da soma dos valores que toma a variável pelo número respectivo desses valores, isto é, $\frac{0+1+2+3+4+5}{6}$ = 2,5, e respondeu que a média era entre 2 a 3 irmãos. Além da não ponderação dos valores no cálculo da média, o tipo de resposta parece traduzir também alguma relutância em considerar um valor não inteiro para valor da média.

Embora o aluno que respondeu que a média é 3 não tivesse dado qualquer justificação, pelo tipo de resposta pode conjecturar-se que houve alguma confusão entre a noção de média e a de moda, já que a moda neste caso é 3.

De notar que o raciocínio *Algoritmo da média*, que é o que se considera válido, apenas foi utilizado por 54,1% dos alunos. Quanto às dificuldades sentidas pelos alunos, algumas centraram-se na interpretação do gráfico, ou seja, o que significa e como estão relacionados cada um dos eixos, no contexto do problema. Esta limitação teve como consequência a não ponderação correcta dos valores no cálculo da média. Especificamente, verificou-se que alguns alunos só consideraram o eixo das abcissas, outros apenas o eixo das ordenadas e, finalmente, outros recorreram a ambos os eixos mas sem perceber a relação que lhes está subjacente.

Por vezes, fica-se com a ideia que os alunos manipulam os dados do gráfico, sem os interpretarem no respectivo contexto, de modo a obterem um valor numérico que lhes pareça dar resposta ao problema. A componente de cálculo na maioria dos raciocínios é a utilização do algoritmo da média mas de forma não significativa e, por vezes, recorrendo a "falsas fórmulas". Frequentemente, os alunos demonstram conhecer a fórmula sem lhe atribuir, no entanto, o significado adequado. Assim, embora muitos alunos conheçam o algoritmo da média, revelaram, todavia, uma compreensão muito limitada da sua aplicação.

Sub-questão 5.2

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão (Tabela 15), verifica-se que quase todos os alunos responderam correctamente que a moda era 3 irmãos.

Tabela 15. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 5.2.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A moda é 3 irmãos*	97,3
A moda é 8 alunos	2,7

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 16.

No raciocínio *Referência à maior frequência*, os alunos argumentaram que "a moda é o número de irmãos que mais vezes se repete" ou "mais frequente", ou "o valor a que corresponde maior frequência". Este raciocínio conduziu à resposta correcta na quase totalidade dos casos, à excepção de um aluno que respondeu que a moda era 8 alunos, confundindo-a com a respectiva frequência absoluta.

Tabela 16. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 5.2.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Referência à maior frequência	83,8
Referência à maioria	2,7
Sem justificação	13,5

O raciocínio *Referência à maioria* foi utilizado por um aluno que respondeu "a moda é 3 porque a maioria dos alunos tem três irmãos", usando, incorrectamente, o termo maioria provavelmente no mesmo sentido que mais frequente.

Sub-questão 5.3

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 17, verifica-se que apenas uma pequena percentagem de alunos deu a resposta correcta, a mediana é 2 irmãos. De notar a elevada percentagem de alunos que não responderam.

Tabela 17. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 5.3.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A mediana é 2 irmãos*	13,5
A mediana é 2,5 irmãos	24,3
A mediana é 3	16,2
A mediana é 14 (ou 13)	5,4
A mediana é 4	5,4
A mediana está entre o 2 e o 3	2,7
A mediana corresponde a ter menos de 1 irmão mas nunca mais de 3.	2,7
Não responde	29,8

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 18.

O raciocínio *Localização da posição* consistiu em identificar a posição da mediana utilizando fórmulas, por contagem ou por localização no gráfico. Os alunos que utilizaram fórmulas determinaram a localização da mediana pela fórmula $\frac{n+1}{2}$ ou $\frac{n}{2}$, concluindo que a mediana corresponde à posição 14. Os alunos que utilizaram a contagem, ordenaram os dados por ordem crescente, tendo em conta as frequências absolutas, e determinaram a posição da mediana. Os alunos que utilizaram a localização no gráfico, traçaram um segmento de recta vertical no fim da barra correspondente a 2 irmãos e afirmaram que o 2 corresponde a 50%. Todos estes alunos chegaram à conclusão correcta de que a mediana era 2 irmãos.

No raciocínio *Metade da amplitude dos dados*, os alunos calcularam o quociente da divisão da amplitude dos dados por 2, isto é, $\frac{5-0}{2}$, e concluíram que a mediana era 2,5.

O raciocínio *Cálculo da mediana dos valores da variável* consistiu em colocar os valores da variável por ordem crescente, sem ter em conta as frequências absolutas, e determinar a mediana desses valores. Observando que o número de valores que toma a variável é par, os alunos calcularam a média dos dois valores centrais, $\frac{2+3}{2}$, e afirmaram que a mediana era 2,5.

Tabela 18. Percentagem dos alunos nos raciocínios da sub-questão 5.3.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Localização da posição	13,5
Metade da amplitude dos dados	10,8
Cálculo da mediana dos valores da variável	8,1
Mediana como 50%	5,4
Zero como elemento neutro	5,4
Mediana como moda	2,7
Outros raciocínios	5,4
Sem justificação	48,7

No raciocínio *Mediana como 50%* identifica-se a mediana com o número correspondente a 50% dos inquiridos. Os alunos, através de uma regra de três simples em que o número total de inquiridos correspondia a 100%, calcularam o número de inquiridos correspondente a 50%, e chegaram à conclusão que era 13,5. Deste modo, um aluno respondeu que a mediana era 14 e outro que a mediana era 13, confundindo assim a mediana com a sua localização. Neste raciocínio, observa-se que os alunos têm a noção que a mediana tem alguma relação com 50% dos dados, mas não parecem saber de que tipo é essa relação.

No raciocínio *Zero como elemento neutro*, os alunos colocaram os dados por ordem crescente e atenderam à frequência absoluta, mas omitiram o zero, chegando à conclusão que a mediana era 3.

O raciocínio *Mediana como moda*, foi utilizado por um aluno que afirmou que a mediana era 3 porque é o valor que se repete mais, confundindo assim a noção de mediana com a de moda.

Nos *Outros raciocínios* consideraram-se os alunos que manipularam valores numéricos sem qualquer significado aparente, isto é, efectuaram o cálculo de $\frac{8+0}{2}$ tendo concluído que a mediana era 4.

Em resumo, o raciocínio *Localização da posição*, que é o único que se considera válido, foi apenas usado por 13,5% dos alunos. É de realçar que a percentagem de alunos (48,7%) que não justificaram a resposta dada acentua-se relativamente à percentagem dos que não responderam à questão (29,8%). O facto dos alunos não serem capazes de justificarem as suas respostas aumenta a possibilidade de terem respondido com pouca segurança ou mesmo ao acaso.

Questão 6. Nesta questão calcula-se a média do número de ramos de rosas vendidos durante cinco dias de uma semana, sabendo que nos quatro primeiros dias a média do número de ramos vendidos foi de 13,5 e que no quinto dia não se vendeu nenhum ramo.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão (ver Tabela 19), verifica-se que esta gerou muitas dificuldades, já que apenas 48,7% dos alunos respondeu correctamente.

Tabela 19. Percentagem de alunos nas respostas da questão 6.

Respostas	Frequência relativa (n= 37)
A média é 10,8*	48,7
A média é 2,7	29,7
A média é 6,75	8,1
A média mantém-se	5,4
A média é 3,375	5,4
Não responde	2,7

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 20.

No raciocínio *Algoritmo da média*, os alunos aplicaram directamente o algoritmo da média ponderada, $\frac{4\times 13{,}5+5\times 0}{5}$, ou determinaram primeiro o número total de rosas vendidas nos 4 dias, $13{,}5 \times 4 = 54$, calculando depois a média. Também se incluiu neste raciocínio a justificação de um aluno que, observando que o quinto dia contribui para baixar a média, 'distribuiu' a média dos 4 dias pelos 5 dias (13,5:5 = 2,7) e, considerando que no 5º dia não se vendeu nenhum ramo, subtraiu o correspondente ao 5º dia (13,5–2,7 = 10,8). Este raciocínio conduziu sempre à resposta correcta.

Tabela 20. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 6.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Algoritmo da média	48,7
Não considerar a frequência absoluta	29,7
Lei do Fecho	8,1
Zero como elemento neutro	5,4
Outros raciocínios	5,4
Sem justificação	2,7

O raciocínio *Não considerar a frequência absoluta* consistiu em não ponderar adequadamente os valores no cálculo da média. Neste caso, os alunos calcularam o quociente $\frac{13{,}5+0}{5}$ e concluíram que a média era 2,7.

No raciocínio *Lei do fecho*, os alunos calcularam a média simples da média dada com o zero (novo dado introduzido). Assim, os alunos determinaram o valor de $\frac{13{,}5+0}{2}$ e concluíram que a média era 6,75.

No raciocínio *Zero como elemento neutro*, considerou-se que a introdução do zero como novo dado não altera a média. Deste modo, considerando que no 5º dia não se vendeu nenhum ramo, os alunos afirmaram que a média se mantém.

Nos *Outros raciocínios* consideraram-se os alunos que manipularam os dados do problema sem sentido específico, pois dividiram a média do número de ramos vendidos nos 4 dias por 4, isto é, 13,5:4, pelo que concluíram que a média era 3,375.

Em síntese, verifica-se que apenas 48,7% dos alunos usou um raciocínio considerado válido, o *Algoritmo da média*, e, de entre os raciocínios que têm por base argumentos incorrectos, *Não considerar a frequência absoluta* foi o mais utilizado.

Questão 7. Nesta questão determina-se a idade de um amigo que se juntou a um grupo de três amigos com média de idades de 15 anos, sabendo-se que a média passou a ser de 16 anos para o grupo dos quatro amigos.

<u>Respostas</u>. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 21, verifica-se que a maioria dos alunos respondeu correctamente, concluindo que o amigo que se juntou ao grupo tinha de ter 19 anos.

Tabela 21. Percentagem de alunos nas respostas da questão 7.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
O amigo tinha 19 anos*	64,9
O amigo tinha 16 anos	13,5
O amigo tinha 17 anos	10,8
O amigo tinha 49 anos	5,4
O amigo tinha de ser mais velho	2,7
Não responde	2,7

Nota: a resposta assinalada com asterisco (*) é a correcta.

<u>Raciocínios</u>. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 22.

No raciocínio *Algoritmo da média*, os alunos recorreram ao algoritmo da média para determinar directamente a idade desconhecida, $16 = \frac{45+x}{4}$ ou $64 = 15 + 16 + 14 + x$, ou, para calcular sucessivamente: a soma das idades dos 3 amigos, $\frac{x}{3} = 15$ e $x = 45$, a soma das idades dos 4 amigos, $\frac{x}{4} = 16$ e $x = 64$, e, por fim, a idade desconhecida, $64 – 45 = 19$. Este raciocínio conduziu sempre à resposta correcta.

Salienta-se, ainda, que alguns dos alunos que recorreram a este raciocínio, começaram por atribuir idades aos três amigos cuja média era 15 anos, considerando idades diferentes ou 15 anos para cada um deles.

Tabela 22. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 7.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Algoritmo da média	32,5
Tentativa e erro	29,7
Compensação	8,1
Lei do fecho	8,1
Não considerar a frequência absoluta	5,4
Outros raciocínios	5,4
Sem justificação	10,8

No raciocínio *Tentativa e erro*, os alunos escolheram um valor para a idade desconhecida e verificaram, a partir do algoritmo, se a média correspondia ao valor pretendido. Este raciocínio nem sempre conduziu à resposta correcta pois houve alunos que responderam que a idade do amigo era 16 anos, porque terminaram as tentativas antes de se obter o valor exacto da média ou porque interpretaram erradamente os cálculos e deram como resposta a média obtida na verificação. Houve ainda um aluno que respondeu que a idade era 17 anos porque parou as tentativas quando obteve uma média de 15,5.

Também neste raciocínio, alguns dos alunos, que apresentaram a resposta correcta, atribuíram idades, diferentes ou iguais, aos três amigos.

No raciocínio *Compensação* estabeleceu-se a relação entre o aumento da média e o novo dado introduzido para compensar esse aumento. Deste modo, os alunos concluíram que a idade do novo amigo era 19 anos usando argumentos do tipo: "tem que ter 4 anos a mais"; "tem que dar um ano a cada amigo para a média ser 16".

No raciocínio *Lei do fecho*, os alunos determinaram o valor da idade desconhecida recorrendo à média simples da média dada com o valor desconhecido. Destes alunos, alguns resolveram o problema por tentativas, concluindo que 15 + 17 = 32 e 32:2 = 16, e outros determinaram algebricamente a idade desconhecida, resolvendo a equação $\frac{15+x}{2}=16$. Em ambos os casos, os alunos concluíram que a idade do amigo que se juntou ao grupo era 17 anos.

No raciocínio *Não considerar a frequência absoluta*, os alunos não ponderaram adequadamente os valores que intervêm no algoritmo da média, $16 = \frac{15 + x}{4}$, e concluíram que a idade do amigo era 49 anos.

Nos *Outros raciocínios* consideraram-se os alunos que embora tenham obtido a soma das idades dos 4 amigos, $\frac{x}{4} = 16 \Leftrightarrow x = 64$, manusearam este resultado de forma redundante, pois substituíram *x* por 64 na equação e concluíram que a idade do amigo era 16 anos.

Os raciocínios *Algoritmo da média*, *Compensação* e *Tentativa e erro* têm como base argumentos que se consideram válidos, embora este último nem sempre tivesse conduzido à resposta correcta, mais por uma interrupção indevida por parte dos alunos que o utilizaram. Além disso, o raciocínio *Tentativa e erro* também pode ser visto como mais elementar e menos eficiente face aos conhecimentos que os alunos deste nível de ensino devem possuir.

Questão 8. Nesta questão calcula-se a média dos pesos de 10 pessoas, 6 mulheres e 4 homens, sabendo-se que a média dos pesos das 6 mulheres é 60 quilogramas e a média dos pesos dos 4 homens é 80 quilogramas.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 23, verifica-se que, embora mais de metade dos alunos tenham respondido correctamente que a média era 68 quilogramas, uma percentagem considerável (29,7%) afirmou que a média era 70 quilogramas.

Tabela 23. Percentagem de alunos nas respostas da questão 8.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
A média é 68 quilogramas*	59,5
A média é 70 quilogramas	29,7
A média é 140 quilogramas	5,4
Não responde	5,4

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as suas respostas podem ser observados na Tabela 24.

O raciocínio *Algoritmo da média*, utilizado pela maioria dos alunos, conduziu sempre à resposta correcta. Destes, 72,7% aplicaram directamente o algoritmo da média ponderada, $\frac{4\times 80+6\times 60}{10}$, e 27,3% determinaram primeiro, separadamente, o peso total das mulheres e o peso total dos homens, $\frac{x}{6}=60 \Leftrightarrow x=360$ e $\frac{x}{4}=80 \Leftrightarrow x=320$, e por último o valor da média, $\frac{360+320}{10}=68$.

Tabela 24. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 8.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Algoritmo da média	59,5
Lei do fecho	29,7
Adição das médias	5,4
Sem justificação	5,4

No raciocínio *Lei do fecho*, os alunos calcularam a média das duas médias dadas, $\frac{60+80}{2}$, e concluíram que a média era 70 quilogramas.

No raciocínio *Adição das médias* adicionaram-se as médias dadas para obter a média final pretendida. Observando que $\frac{x}{6}=60$ quilogramas e que $\frac{x}{4}=80$ quilogramas, os alunos concluíram que $\frac{x}{10}=140$. A conclusão de que a média era 140 quilogramas, parece revelar algumas dificuldades na compreensão do significado de x em cada caso e na adição de fracções. Além disso, é limitada a compreensão relacional do conceito de média, pois os alunos atribuíram-lhe um valor superior a qualquer das médias dadas.

Questão 9. Nesta questão, sabendo-se que a média, a moda e a mediana dos vencimentos dos 50 empregados de uma empresa são, respectivamente, 120 mil escudos, 80 mil escudos e 90 mil escudos, pretendia-se interpretar o significado da média (**9.1.a)**), da moda (**9.1.b)**) e da mediana (**9.1.c)**) neste contexto. Pedia-se, ainda, um comentário sobre os vencimentos dos empregados da empresa (**9.2**).

Sub-questão 9.1.a)

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta questão, que constam da Tabela 25, verifica-se que a resposta mais dada *Salário de todos os trabalhadores dividido pelo número de trabalhadores* é uma alusão directa ao algoritmo da média, e a segunda resposta mais utilizada associa a média ao valor médio, o que não acrescenta nada de significativo relativamente ao enunciado.

Tabela 25. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 9.1. a).

Respostas	Freq. relativa (n=37)
Salário de todos os trabalhadores dividido pelo número de trabalhadores	40,6
Representa o valor médio dos salários	27,0
O patrão despende 6 000 000$00 de ordenados por mês	5,4
Os vencimentos variam, no entanto, sejam eles mais altos ou mais baixos, o valor entre todos os funcionários ronda os 120 000$00	5,4
Não quer dizer que a maioria das pessoas receba esse ordenado	2,7
Os empregados que recebem mais com os que recebem menos, não reflecte o salário de cada empregado (pode haver valores muito diferentes)	2,7
A média dos vencimentos para a maior parte dos trabalhadores é inferior a 120 mil escudos	5,4
Apesar das variações dos vencimentos, a média é alta, por isso interessa ao patrão revelá-la	2,7
Valor médio, pode mascarar os extremos que, se forem muito altos ou muito baixos, não aparecerão	2,7
É discrepante em relação aos extremos porque haverá empregados que terão um vencimento muito baixo	2,7
Não responde	2,7

Sub-questão 9.1.b)

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 26, verifica-se que a maioria dos alunos respondeu que "80 mil escudos representa o vencimento que mais trabalhadores recebem". Esta representa a resposta tipo, havendo algumas variações como, por exemplo, "vencimento que existe com maior frequência", "salário que a empresa paga mais vezes", "valor que mais vezes se repete dentro dos vencimentos", "uma maior percentagem de pessoas recebe 80 mil escudos". Analisando as respostas do ponto de vista dos raciocínios subjacentes, pode-se considerar que se enquadram no raciocínio *Referência à maior frequência*.

Tabela 26. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 9.1. b).

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Vencimento que mais trabalhadores recebem*	64,9
Salário que ganha a maioria dos trabalhadores	10,8
Vencimento que a maior parte dos trabalhadores recebe	8,1
O maior número de empregados recebe um vencimento de 80 mil escudos	5,4
Grande parte dos empregados recebe um vencimento de 80 mil escudos	5,4
Não responde	5,4

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

De realçar a percentagem de alunos (24,3%) que ainda associa a moda à maioria, à maior parte ou ao maior número. Estas respostas podem ter origem em questões de terminologia e linguagem utilizada abusivamente. No entanto, também podem ter como base concepções erradas sobre o significado de moda, associando-lhe 50% ou mais das observações, o que também foi observado na sub-questão 2.2.

Sub-questão 9.1.c)

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 27, verifica-se que foram bastante variadas e, embora algumas delas sejam afirmações correctas, nenhuma retrata verdadeiramente uma interpretação ampla como, por exemplo: 50% dos valores dos vencimentos são inferiores ou iguais a 90 000$00 e 50% são superiores ou iguais a 90 000$00.

A resposta *Vencimento intermédio* foi a mais dada, sendo "vencimento intermédio que se situa entre o valor mais alto e o mais baixo" e "classe intermédia entre os valores dos salários" algumas das suas variações. Esta resposta remete, implicitamente, para a determinação do valor da mediana. Algo referido, de forma mais directa, pelos alunos que se incluíram na categoria de resposta *Valor do ordenado que se situa exactamente no meio da lista de vencimentos*. Por exemplo, estes apresentaram respostas do tipo: "vencimento do empregado que se encontra exactamente no meio da lista de vencimentos estando esta organizada", "ordenados os valores por ordem crescente verificamos que o valor do ordenado situado na posição 25 e 26 tem mediana 90 mil escudos".

Do mesmo modo, pode-se supor que os sujeitos que deram a resposta *Diferença entre o vencimento mais alto e o mais baixo a dividir por dois* se queriam referir, igualmente, à forma de calcular a mediana. Fizeram-no, contudo, incorrectamente já que o valor assim encontrado corresponde a metade da amplitude dos dados. Este procedimento já tinha sido utilizado no caso da questão 5.3., que também dizia respeito ao conceito de mediana.

Tabela 27. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 9.1. c).

Respostas	Freq. relativa (n=37)
Vencimento intermédio	24,3
Valor do ordenado que se situa exactamente no meio da lista de vencimentos	18,9
Diferença entre o vencimento mais alto e o mais baixo a dividir por 2	5,4
É o salário que estava mais adequado para pagar aos trabalhadores pois era mais justo	5,4
É o valor mais significativo em termos de vencimentos	2,7
50% dos empregados recebe menos que 90 mil escudos	2,7
50% dos empregados possui um vencimento de 90 mil escudos	2,7
Outras respostas	8,1
Não responde	29,8

Como se pode constatar, há alguns alunos que basearam a sua resposta, aparentemente, em argumentos não matemáticos: *É o salário que estava mais adequado para pagar aos trabalhadores pois era mais justo*. Embora, neste caso, também se possa colocar a hipótese de que os sujeitos tenham associado a ideia de justiça à mediana pelo facto de considerarem esta medida mais representativa da distribuição. Noção que parece estar, igualmente, implícita na resposta *É o valor mais significativo em termos de vencimentos*.

Existem, ainda, alunos que mostraram ter a ideia de que a mediana tem algo a ver com 50% dos dados, contudo, não estabeleceram essa relação de uma forma totalmente correcta.

Nas *Outras respostas* consideraram-se os alunos que, em vez de se cingirem a comentários sobre a mediana, fazem referência à média, apresentando respostas, de certa forma, descontextualizadas. Por exemplo, “há empregados que recebem acima da média e outros abaixo da média”, “50% recebe muito abaixo do ordenado médio” e “há empregados que recebem acima da média mas um maior número recebe abaixo da mediana”.

É, ainda, de salientar o elevado número de alunos (29,8%) que não deram qualquer resposta à questão.

Sub-questão 9.2

<u>Respostas</u>. Observando as respostas dadas pelos alunos nesta sub-questão (Tabela 28) constata-se que *Há uma grande variação entre o valor dos salários* foi a mais mencionada. Esta resposta apresenta algumas variações, como por exemplo: "há uma grande alteração dos vencimentos dos empregados em relação aos patrões, por este motivo os valores divergem muito, ao nível da moda, da média e da mediana", "o vencimento dos empregados tem uma oscilação bastante elevada" e "existem ordenados muito altos e outros muito baixos".

A resposta *A maior parte dos empregados recebe 80 mil escudos, mas há alguns que têm um ordenado superior* integra os exemplos: "a maior parte dos empregados ganha pelo menos 80 mil escudos, no entanto, outros recebem mais pois a média dá-nos essa informação”, "apesar da moda ser 80 mil escudos, o que significa que a maior parte dos empregados recebe este ordenado, isto não implica que uns não tenham um salário mais baixo e outros mais alto" e “a maior parte dos empregados recebe 80 mil escudos embora os cargos superiores recebam muito acima desse resultado”.

Na resposta *A maioria dos empregados ganha 80 mil escudos*, embora um dos alunos não apresente mais nenhum comentário, os restantes acrescentaram ainda referências à média, por exemplo: “embora a média seja 120 mil escudos, nem todos os ganham, só apenas aqueles quadros dirigentes devem ganhar mais de 120 mil escudos, mesmo superior à média, quase de certeza", "a maioria ganha 80 mil escudos não interessa ao patrão revelá-la quando quiser contratar alguém, mas sim referir a média, pois esta é maior".

Tabela 28. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 9.2.

Respostas	Freq. relativa (n=37)
Há uma grande variação entre o valor dos salários	27,1
A maior parte dos empregados recebe 80 mil escudos mas há alguns que têm um ordenado superior	16,2
A maioria dos empregados ganha 80 mil escudos	8,1
Há empregados que ganham mais que 120 mil escudos	8,1
Os ordenados são baixos	5,4
Os ordenados deviam ser mais aproximados e não existir tanta diferença	2,7
Como a moda é 80, podemos dizer que grande parte dos empregados recebe o salário de 80 mil escudos	2,7
O vencimento do maior número de trabalhadores é 80 mil escudos, recebendo alguns acima deste valor	2,7
O vencimento do maior número de empregados é de 80 mil escudos e os outros ganham abaixo de 80 mil escudos	2,7
Existem empregados que ganham muito mais que a moda, para que a média seja 120 mil	2,7
Há muitos empregados a receberem 80 mil escudos. Como a mediana é 90 mil, é também verdade que metade dos funcionários recebe menos que 90 mil escudos e a outra metade mais do que 90 mil escudos. Como a média é 120 mil escudos, parece que o vencimento daqueles que recebem mais de 90 mil escudos é muito grande, talvez perto das duas centenas de contos.	2,7
Não responde	18,9

Na resposta *Há empregados que ganham mais de 120 mil escudos* consideraram-se os alunos que apresentaram as seguintes respostas: “como a média é 120 mil escudos, há pessoas que têm um salário muito elevado, pois a moda é 80 mil escudos”, “há empregados que ganham muito mais que 120 mil escudos, tendo em conta que esse valor é a média” e “como o valor que mais se verifica é 80 mil escudos e a mediana é 90 mil escudos e a média é 120 mil escudos, posso deduzir que há empregados (menos de metade) que ganham mais de 120 mil escudos”.

De notar que os alunos que responderam os *Ordenados são baixos* ou *Os ordenados deviam ser mais aproximados e não existir tanta diferença* utilizaram argumentos que não têm propriamente a ver com as propriedades matemáticas dos conceitos envolvidos na questão.

Analisando as respostas, verifica-se que os alunos ou fazem comentários generalistas relativos à heterogeneidade dos dados ou centram os seus comentários, essencialmente, na moda ou na moda e na média. Apenas um aluno apresenta uma resposta mais pormenorizada baseada na comparação explícita das três medidas, tentando articular os diversos significados.

É, igualmente, de destacar que 32,4% dos alunos ainda usam nas suas respostas, quando se referem à moda, os termos “a maior parte”, “a maioria”, “grande parte” e “o maior número”, algo que também já foi verificado em questões anteriores (2.2 e 9.1.b)).

4.2. Probabilidades

Nesta secção analisam-se as questões do questionário que dizem respeito ao tema de probabilidades.

Na apresentação das questões não se seguiu a ordem pré-estabelecida, fazendo-se primeiro referência a todas as questões relacionadas com a classificação, identificação e exemplificação de acontecimentos e só depois se apresentam as que envolvem, eventualmente, o cálculo de probabilidades.

Questão 10. Nesta questão classificam-se os acontecimentos "sair um número ímpar" (**10.1**), "sair um número menor que 91" (**10.2**), "sair o número 100" (**10.3**), "sair um número maior do que 0" (**10.4**) e "sair o número 31" (**10.5**) na experiência aleatória de rodar uma tômbola com números de 1 a 90.

<u>Respostas.</u> Observando as respostas obtidas nesta questão (ver Tabela 29), verifica-se que a maioria dos alunos respondeu correctamente em todas as sub-questões.

De notar, porém, que nas sub-questões 10.2 e 10.4, em que o acontecimento em causa era certo, ainda houve uma percentagem considerável de alunos, 13,5% e 16,2%, respectivamente, que o classificou, incorrectamente, como possível mas não certo.

Também nas sub-questões 10.1 e 10.5, houve 8,1% e 2,7% de alunos, respectivamente, que classificaram incorrectamente o acontecimento como certo, em vez de possível mas não certo.

Já no caso do acontecimento impossível (sub-questão 10.3) apenas um aluno o classificou incorrectamente como possível mas não certo.

Assim, parece que os alunos têm mais dificuldades na classificação de acontecimentos certos, relativamente a outros tipos de acontecimentos. Erro que nesta experiência particular pode dever-se ao facto de os alunos não considerarem que o acontecimento em causa se insere num determinado espaço de resultados, pois parecem julgar que há números maiores que zero que nunca saem.

Tabela 29. Percentagem de alunos nas respostas das sub-questões da questão 10.

	Respostas (n = 37)		
Sub-questões	Certo	Impossível	Possível mas não certo
10.1.	8,1	0,0	91,9*
10.2.	86,5*	0,0	13,5
10.3.	0,0	97,3*	2,7
10.4.	83,8*	0,0	16,2
10.5.	2,7	0,0	97,3*

Nota: As respostas assinaladas com o asterisco (*) são as correctas.

Questão 12. Nesta questão determina-se o número de bolas que se tem que tirar de um saco com 5 bolas vermelhas, 2 verdes e 4 brancas, para se ter a certeza que se tira, pelo menos, uma bola de cada cor.

Respostas. As respostas obtidas nesta questão foram muito variadas (ver Tabela 30), verificando-se que apenas 24,4% dos alunos deram a resposta correcta de que é necessário tirar 10 bolas do saco.

Tabela 30. Percentagem de alunos nas respostas da questão 12.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Tirar 10 bolas*	24,4
0,04	13,5
0,03	8,1
Tirar 10 vezes no máximo, 3 no mínimo	8,1
Tirar 27 bolas	5,4
Tirar 6 bolas	2,7
Tirar 7 bolas	2,7
Outras respostas	18,9
Não responde	16,2

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 31.

Tabela 31. Percentagem de alunos nos raciocínios da questão 12.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Bolas mais numerosas	18,9
Cálculo de probabilidades	27,0
Cálculo combinatório	16,2
Bolas menos numerosas	2,7
Duas extracções para cada cor	2,7
Sem justificação	32,5

No raciocínio *Bolas mais numerosas,* que conduziu sempre à resposta correcta, considerou-se a contagem das bolas a partir da cor que tem mais bolas. Os alunos adicionaram o número de bolas vermelhas e brancas (bolas mais numerosas) e concluíram que no fim ficavam duas verdes, pelo que bastava tirar mais uma bola.

No raciocínio *Cálculo de probabilidades*, os alunos multiplicaram ou adicionaram as probabilidades dos acontecimentos 'sair bola branca', 'sair bola vermelha' e 'sair bola verde'. No caso da multiplicação e considerando a extracção sem reposição, consideraram $\frac{5}{11} \times \frac{2}{10} \times \frac{4}{9}$ e obtiveram o resultado 0,04. Já no caso da extracção com reposição, consideraram $\frac{5}{11} \times \frac{2}{11} \times \frac{4}{11}$ e chegaram ao resultado 0,03. No que se refere à adição, consideraram $\frac{5}{11} + \frac{2}{11} + \frac{4}{11}$, tendo um aluno, devido a um erro de cálculo, chegado ao resultado $\frac{12}{11}$ e outro aluno, embora não efectuasse os cálculos, afirmou: "a probabilidade de ter uma bola de cada cor é a soma das probabilidades menos as tiragens".

No raciocínio *Cálculo combinatório*, os alunos utilizaram a multiplicação de combinações, $C_1^5 \times C_1^2 \times C_1^4$, ou a adição de combinações, $C_1^5 + C_1^2 + C_1^4$ e $C_1^{11} + C_1^{10} + C_1^9 + C_1^8 + C_1^7 + \ldots$. Nestes casos não efectuaram os cálculos ou calcularam incorrectamente as combinações, tendo obtido resultados absurdos. Por exemplo, no caso da multiplicação obtiveram o resultado de 27 bolas, 23 ou 146 bolas, o que não suscitou quaisquer reservas da sua parte.

No raciocínio *Bolas menos numerosas* considerou-se a contagem das bolas a partir da cor que tem menos bolas. Um aluno adicionou o número de bolas verdes e brancas (bolas menos numerosas) e concluiu que a seguinte já seria vermelha. Este raciocínio originou a resposta incorrecta de que era necessário tirar 7 bolas do saco.

No raciocínio *Duas extracções para cada cor*, um aluno considerou que, como existiam bastantes bolas, as duas tentativas para cada cor talvez fossem suficientes, pelo que afirmou que era necessário retirar 6 bolas do saco.

Considerando que o raciocínio *Bolas mais numerosas* é o único que tem como base argumentos válidos, as dificuldades aumentam relativamente às respostas correctas, pois apenas 18,9% dos alunos usaram este raciocínio. Esta questão reforça a tendência, também observada noutras questões, de alguns alunos recorrerem a fórmulas sem ter em conta o contexto e de aceitarem resultados sem qualquer apreciação da sua razoabilidade.

Questão 13. Nesta questão formula-se um acontecimento certo (**13.1**), um acontecimento impossível (**13.2**) e um acontecimento possível mas não certo (**13.3**) na experiência aleatória de retirar uma bola ao acaso de uma caixa que contém 4 bolas azuis, 7 bolas vermelhas e 3 bolas verdes.

Sub-questão 13.1

Respostas. As respostas obtidas nesta sub-questão constam da Tabela 32.

Tabela 32. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 13.1.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Sair uma bola de cor*	62,2
Sair uma bola azul ou vermelha ou verde*	10,8
Sair uma bola das cores existentes*	5,4
Não é possível dar um exemplo	8,1
Resposta que sai do contexto	8,1
Sair uma bola vermelha	5,4

Nota: as respostas assinaladas com o asterisco (*) são as correctas.

Na resposta *Sair uma bola de cor* também se incluíram as respostas "tirar uma bola sem saber a cor em 14 bolas" e "sair uma bola de qualquer cor", dadas por um e três alunos, respectivamente. No primeiro raciocínio não parece claro como decidir se o resultado obtido pertence ao espaço amostral e, no segundo raciocínio, o julgamento depende do significado de "qualquer" nesse contexto.

De notar que as respostas *Sair uma bola de cor* e *Sair uma bola das cores existentes*, embora se considerassem correctas, reflectem um raciocínio bastante mais elementar do que a resposta *Sair uma bola azul ou vermelha ou verde*.

Considerando que estas três respostas estão correctas, pode dizer-se que grande parte dos alunos respondeu correctamente, embora de forma imprecisa e pouco sofisticada para o nível de ensino que frequentam. Alguma imprecisão e falta de sofisticação pode estar relacionada com uma compreensão limitada dos conectivos lógicos.

Na *Resposta que sai do contexto* considerou-se um aluno que calculou a probabilidade de obter uma bola qualquer (apresentando o valor 0,07, como resposta) e os alunos que consideraram que houve extracção de mais do que uma bola. Neste último caso afirmaram, por exemplo, "a segunda bola que se retira é de cor" e "ter pelo menos uma bola vermelha em 8 bolas tiradas sem reposição".

Na resposta *Não é possível dar um exemplo*, houve alunos que mencionaram esse facto sem qualquer justificação e um afirmou que "não há acontecimentos certos, para isso acontecer as bolas teriam que ser todas da mesma cor".

Sub-questão 13.2

Respostas. Como se verifica pelas respostas obtidas nesta sub-questão (Tabela 33), quase todos os alunos responderam correctamente.

Tabela 33. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 13.2.

Respostas	Frequência relativa (n=37)
Tirar uma bola branca (ou outra cor não existente no saco)*	97,3
Resposta que sai do contexto	2,7

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

A resposta que sai do contexto, "tirar 8 bolas em 10 tiragens sem reposição", parece revelar uma certa falta de interpretação do que é pedido no enunciado.

Sub-questão 13.3.

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão, que constam da Tabela 34, verifica-se que quase todos os alunos deram uma resposta correcta.

Tabela 34. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 13.3.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Tirar uma bola azul (vermelha, verde)*	91,9
Tirar uma bola vermelha ou azul*	2,7
Resposta que sai do contexto	2,7
Não responde	2,7

Nota: as respostas assinaladas com o asterisco (*) são as correctas.

A resposta "tirar uma bola de cor em três tentativas" incluiu-se na *Resposta que sai do contexto* visto que traduz uma interpretação incorrecta do enunciado.

Questão 11. Nesta questão comparam-se as probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola preta do saco I* e *Obter uma bola preta do saco II* na experiência de extracção de uma bola de cada saco, considerando que: o número de bolas pretas é igual em ambos os sacos (**11.1**), é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos (**11.2**), é igual a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos (**11.3**).

Sub-questão 11.1

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão (Tabela 35), verifica-se que quase todos os alunos afirmaram que era mais provável *Obter uma bola preta do saco I*, que é a resposta correcta.

Tabela 35. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 11.1.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
Obter uma bola preta do saco I*	97,3
É igualmente provável	2,7
Obter uma bola preta do saco II	0,0

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 36.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que consistiu na comparação das probabilidades dos acontecimentos *Obter uma bola preta do saco I* e *Obter uma bola preta do saco II,* conduziu sempre à escolha da resposta correcta. Dos alunos que utilizaram este raciocínio, 23,8% usaram simultaneamente outro tipo de justificações, referindo, por exemplo, "no saco I porque há menos bolas brancas", "o número de bolas brancas [no saco I] é menor do que no saco II" ou, ainda, comparando o número de bolas brancas e pretas, afirmaram: "é mais provável sair uma bola preta do saco I, porque embora os dois sacos tenham o mesmo número de bolas pretas, o I tem menos bolas brancas" ou "o saco I porque tem o mesmo número de bolas pretas e de bolas brancas".

No raciocínio *Comparar as razões*, compara-se a razão de bolas pretas e brancas no saco I com a razão do número de bolas pretas para brancas no saco II, pelo que o aluno, que utilizou este raciocínio, afirmou que é mais provável obter bola preta do saco I.

Tabela 36. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 11.1.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Comparar as probabilidades dos acontecimentos	56,8
Comparar as razões	2,7
Comparar o número de bolas brancas e pretas	21,6
Comparar o número de bolas brancas	10,8
Comparar o número total de bolas	5,4
Comparar o número de bolas pretas	2,7

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas* consistiu em comparar o número de bolas brancas e pretas em cada um dos sacos ou nos dois sacos, e levou os alunos a afirmarem que era mais provável obter uma bola preta do saco I.

Na comparação do número de bolas da mesma cor entre os dois sacos, os alunos observaram que ambos os sacos têm o mesmo número de bolas pretas, mas o saco I tem menos bolas brancas. Na comparação do número de bolas de ambas as cores em cada saco, os alunos observaram que no saco I há tantas bolas pretas como brancas e no saco II há menos bolas pretas do que brancas.

No raciocínio *Comparar o número de bolas brancas*, comparam-se os dois sacos atendendo ao número de bolas brancas. Observando que o saco I tem menos bolas brancas do que o saco II, os alunos indicaram que era mais provável obter uma bola preta do saco I.

No raciocínio *Comparar o número total de bolas*, comparam-se os dois sacos atendendo ao número total de bolas existentes em cada saco. Observando que o saco I tem menos bolas que o saco II, os alunos consideraram que era mais provável obter uma bola preta do saco I.

No raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*, comparam-se os dois sacos atendendo ao número de bolas pretas. Observando que os dois sacos têm o mesmo número de bolas pretas, um aluno considerou que era tão provável obter uma bola preta do saco I como do saco II.

Analisando os raciocínios, verifica-se que nem todos os alunos que deram a resposta correcta (97,3%) se basearam em procedimentos válidos. Os raciocínios *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* e *Comparar as razões*, os únicos baseados em argumentos válidos, foram utilizados apenas por 59,5% dos alunos.

Sub-questão 11.2

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão (Tabela 37), verifica-se que a maioria dos alunos respondeu correctamente que era mais provável obter uma bola preta do saco II. Destaca-se, porém, que 21,6% dos alunos deram uma resposta incorrecta.

Tabela 37. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 11.2.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
I Obter uma bola preta do saco II*	78,4
Obter uma bola preta do saco I	16,2
É igualmente provável	5,4

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 38.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* nem sempre conduziu à escolha da resposta correcta, é mais provável obter bola preta do saco II, pois 10,7% dos alunos que o utilizaram afirmaram que era mais provável obter uma bola preta do saco I, o que pode dever-se à comparação incorrecta das fracções já que não apresentaram qualquer outra justificação. Dos alunos que compararam as probabilidades dos acontecimentos, 7,1% referem também que "é mais provável tirar bola preta do saco II porque existem mais bolas pretas", usando assim, simultaneamente, o raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*.

No raciocínio *Comparar as razões*, um aluno, embora tenha indicado as razões correctamente, considerou que os acontecimentos eram equiprováveis.

Tabela 38. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 11.2.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Comparar as probabilidades dos acontecimentos	75,7
Comparar as razões	2,7
Comparar o número de bolas pretas	10,8
Comparar o número total de bolas	2,7
Comparar o número de bolas brancas e pretas	2,7
Outros raciocínios	5,4

No raciocínio *Comparar o número de bolas pretas* os alunos, observando que o saco II tem mais bolas pretas do que o saco I, indicaram que era mais provável obter uma bola preta do saco II.

No raciocínio *Comparar o número total de bolas,* observando que o saco I tem menos bolas que o saco II, um aluno atribuiu a maior probabilidade de sair bola preta a este saco.

O raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, utilizado por um aluno, conduziu à resposta incorrecta de indicar o saco I como o de maior probabilidade de obter bola preta. Embora o aluno tivesse indicado as probabilidades dos acontecimentos, parece ter prevalecido a comparação do número de bolas brancas e pretas, tendo este observado que “no saco I há menos bolas pretas mas também há menos bolas brancas, o que faz com que a probabilidade de sair branca seja menor”.

Considerando os raciocínios *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* e *Comparar as razões* como raciocínios baseados em argumentos válidos, verifica-se que foram utilizados por 78,4% dos alunos, embora nem sempre tenham conduzido à resposta correcta.

Sub-questão 11.3

Respostas. Observando as respostas obtidas nesta sub-questão (Tabela 40) verifica-se que a maior parte dos alunos afirmou que era igualmente provável obter uma bola preta do saco I ou do saco II, que é a resposta correcta.

Tabela 39. Percentagem de alunos nas respostas da sub-questão 11.3.

Respostas	Frequência relativa (n = 37)
É igualmente provável*	91,9
Obter uma bola preta do saco II	8,1
Obter uma bola preta do saco I	0,0

Nota: a resposta assinalada com o asterisco (*) é a correcta.

Raciocínios. Os raciocínios que os alunos utilizaram para justificar as respostas podem ser observados na Tabela 40.

O raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* conduziu sempre à escolha da resposta correcta. Dos alunos que utilizaram este raciocínio, um também se baseou na comparação do número total de bolas, afirmando que no saco II existiam mais bolas que no saco I e que a probabilidade de sair bola preta devia ser maior no saco II. No entanto, concluiu que a probabilidade era igual pelo cálculo das probabilidades dos acontecimentos.

No raciocínio *Comparar as razões*, comparando a razão de bolas pretas e brancas no saco I com a razão do número de bolas pretas e brancas no saco II, um aluno afirmou que a probabilidade de obter bola preta era igual em ambos os sacos.

No raciocínio *Comparar o número de bolas pretas,* observando que o saco II tem mais bolas pretas do que o saco I, um aluno indicou que era mais provável obter uma bola preta do saco II.

Tabela 40. Percentagem de alunos nos raciocínios da sub-questão 11.3.

Raciocínios	Frequência relativa (n = 37)
Comparar as probabilidades dos acontecimentos	81,1
Comparar as razões	2,7
Comparar o número de bolas pretas	2,7
Comparar o número de bolas brancas e pretas	2,7
Outros raciocínios	2,7
Sem justificação	8,1

No raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, um aluno, referindo que no saco II existem mais bolas pretas do que brancas, concluiu que é mais provável obter bola preta do saco II.

De notar que os raciocínios *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* e *Comparar as razões*, que se consideram baseados em argumentos válidos, foram utilizados por 83,8% dos alunos.

C A P Í T U L O V

OS FUTUROS PROFESSORES

Neste capítulo faz-se a apresentação dos resultados da segunda fase do estudo. Começa-se por uma breve abordagem do perfil pessoal das participantes, das razões da escolha do curso que frequentam e das actividades lectivas que preferem como discentes.

Dando uma ênfase particular à relação das participantes com a estocástica, menciona-se a sua formação nesta área e alude-se às imagens que associam às probabilidades e estatística e ao seu ensino.

Também se faz uma resenha dos recursos e das tarefas utilizadas pelas participantes durante a leccionação da unidade de Estatística, no âmbito da disciplina de Prática Pedagógica II, assim como se descrevem as dificuldades evidenciadas.

Por último, descrevem-se e analisam-se as respostas e os raciocínios que elas utilizaram na resolução do questionário antes e após leccionarem a unidade de Estatística.

A informação relativa a este capítulo provém da análise dos seguintes elementos: questionários, conversas informais, documentos fornecidos pelas estagiárias e notas tiradas pela investigadora durante a observação de aulas.

5.1. A Joana

A Joana tem 22 anos, é simpática, extrovertida e relaciona-se facilmente com os outros. É uma jovem sincera e consciente das suas limitações, sendo capaz de solicitar ajuda sempre que considera necessário.

Admite as suas falhas, mesmo quando relacionadas com questões científicas, enfrenta-as como algo natural mas, ao mesmo tempo, procura uma resposta.

No ensino básico gostava de Ciências, mas só "gostava mais ou menos de Matemática". Na sua opinião, os professores de Matemática que teve influenciaram as suas preferências, uns pela positiva e outros pela negativa:

> "Tinha um bocado de aversão à matemática, não tanto pela matemática mas mais pelos professores que tive. No último ano [9º ano] tive um professor excelente e comecei a gostar mais daquilo."

O curso de Professores de Ensino Básico – variante Matemática e Ciências da Natureza, que frequenta, foi escolhido um pouco à sorte uma vez que queria seguir o curso de Enfermagem. Actualmente, afirma que continua no curso por opção, pois começou a gostar e, além disso, considera que se relaciona bem com os alunos.

Como aluna, gostava mais das aulas em que trabalhava em grupo, embora considere que não foi uma actividade muito frequente ao longo da sua escolaridade.

> "Tinha sempre as ideias deste, daquele, cada um dava as suas ideias. Fazíamos o trabalho. E acho que até se aprendia bem. Claro, quando as pessoas queriam."

Nas aulas de Matemática considerava complicado resolver problemas, pelo que gostava mais de fazer exercícios e aplicar regras. Tinha uma certa aversão por aulas centradas no professor e pouco participadas pelos alunos:

> "No 12º ano tinha uma professora que nos dava os exercícios e nós resolvíamos (…). Cada um fazia, se não soubesse perguntava-lhe e ela andava por ali.
> Não nos motivavam nada aquelas aulas, também começávamos a perder o interesse. Se fizesse os exercícios no quadro, chamasse um aluno para ir fazer, nós estávamos muito mais interessados. (…) Quando era para dar matéria, falava, falava,… e agora desenrasquem-se."

5.1.1. A Joana e a Estocástica

A Joana só se lembra de ter estudado estatística e probabilidades pela primeira vez no ensino secundário, talvez no 10º ano. Nessa altura achava fácil a parte de estatística e tinha dificuldades na análise combinatória, ou seja, em identificar arranjos e combinações.

No curso que frequenta, obteve a classificação de 13 valores na disciplina de Probabilidades e Estatística, que concluiu na primeira inscrição. Embora não se lembre muito bem dos conteúdos tratados, sabe que teve dificuldades na distribuição normal.

Não gosta de probabilidades e, embora afirme que: “não posso dizer que não gosto de estatística”, há temas de que gosta mais. Porém, em termos de ensino, a unidade de Estatística não lhe parece difícil de leccionar.

Pensa que a disciplina de Probabilidades e Estatística faz falta no curso que frequenta, pois no 2º ciclo também têm de trabalhar conteúdos relacionados com estes temas.

Antes de leccionar a unidade de Estatística, afirmou ter um conhecimento científico dos conteúdos necessários, considerando que estava mais ou menos à vontade pois, na sua opinião, esta matéria, neste nível de escolaridade, é simples. Contudo, ainda não tinha a certeza das estratégias que ia usar para leccionar esses conteúdos.

Após leccionar a unidade, considera não ter necessidade de mais formação na área de probabilidades e estatística, afirmando que: "para o que está no programa, penso que não necessitamos de mais nada, mesmo em termos pedagógicos. Tudo o que era necessário foi abordado". Além disso, pensa que conseguiu ultrapassar as dificuldades que teve, estando esclarecida em termos científicos.

Ideias associadas à estocástica e ao seu ensino

Associa a estatística à análise e interpretação de dados e as probabilidades à probabilidade de um acontecimento. Considera a estatística mais como uma parte da matemática do que como uma ciência, opinião que é influenciada pela forma como a estatística é integrada a nível escolar – “para nós funciona como uma parte da matemática, e o que nós damos faz parte de uma unidade". Acrescenta também que, eventualmente, se pode considerar a estatística como uma ferramenta para análise de dados.

Ao falar sobre a sua experiência escolar, deixa transparecer uma certa associação da estocástica à resolução de exercícios, ou seja, ao cálculo e às técnicas:

> "Da parte de estatística (...) era uma questão de fazer exercícios, de compreender aquilo. (…) O resto é uma questão de fazer exercícios e estudar."

Considera que saber estatística é conseguir analisar situações, ou seja, saber "interpretar, por exemplo, os gráficos que surgem na televisão sobre determinado assunto", pelo que, na sua opinião, qualquer pessoa que saiba fazer essa análise, mesmo que não tenha estudado estatística, "já sabe um bocadinho sobre o assunto".

Tem mais dificuldades em falar sobre o que considera ser saber probabilidades, visto que declara: "não sei até que ponto basta calcular os casos simples para se ser detentor desse conhecimento".

Para a Joana, ensinar estatística "é, no fundo, ensinar a leitura da situação. Ensinar a analisar problemas que vão surgindo, até no dia-a-dia podem surgir problemas relacionados com estatística", algo que aplica igualmente para as probabilidades.

Declara não haver diferença entre o ensino da estocástica e de outras unidades temáticas pois, na sua opinião, o ensino pode ser feito no mesmo sentido, seja qual for a unidade. Porém, refere que o trabalho em grupo é importante nas aulas de estatística e que este tema se propicia mais para este tipo de trabalho do que outros.

Além disso, embora considere que as probabilidades não trazem ao ensino grande coisa de novo, nem de diferente das outras unidades, pensa que a parte de estatística tem características, em termos interpretativos, que são exclusivas desta área:

> "Essa parte da organização, interpretar os dados, conseguir analisar coisas… Acho que em mais nenhuma parte da matemática é possível fazer isso, a não ser com a estatística."

Antes de leccionar a unidade de Estatística, a Joana não tinha uma opinião muito concreta sobre a importância deste tema no 2º ciclo. Todavia, no que se refere ao 1º ciclo, considera que é um tema que não deve ser integrado nas aulas:

> "Não sei até que ponto é que eles sabiam muito... Penso que não tem muita lógica, acho que no 1º ciclo há outras coisas mais necessárias do que

> estatística. No 2º ciclo acho que já é aceitável, agora no 1ºciclo há outras coisas”.

Relativamente ao 2º ciclo, a sua opinião fica mais definida após ter leccionado a unidade, já que passa a considerar que é importante estudar estatística e probabilidades, pois:

> “…os processos de recolha, organização e interpretação dos dados são muito apropriados para as crianças do 2º ciclo, porque podem ser usados para resolver problemas interessantes relativamente a questões práticas e ajudar os alunos a perceber toda a informação que lhes chega a toda a hora.”

Para além disso, opina que, se pudesse alterar o programa, aumentava o número de aulas dedicadas ao tema.

> “Se houvesse mais aulas [os alunos] podiam fazer mais actividades, podiam fazer exercícios diferentes relacionados com outras coisas, acho que era mais interessante.”

5.1.2. A prática pedagógica da Joana

Influência dos orientadores

A Joana afirma que não houve grandes interferências por parte dos professores orientadores na sua prática lectiva, já que a professora orientadora (professora da Escola Superior de Educação) não interveio nesta unidade e a professora cooperante (professora da turma) apenas recomendou que abordasse todos os conteúdos e que não cometesse erros científicos. Assim, afirma ter tido uma certa liberdade para experimentar as metodologias que queria, assumindo as aulas como se fosse efectivamente a professora da turma.

A professora cooperante, no final de cada aula, fazia uma breve reflexão sobre esta com as estagiárias, pelo que a Joana refere: “a professora cooperante influencia sempre um bocadinho”, visto que, no final das aulas, faz algumas críticas: “devia ter feito isto, se calhar assim tinha sido melhor”, dando também sugestões, quando solicitada, sobre o que se devia fazer na aula seguinte (por exemplo, resolver uma ficha ou exercícios, avançar ou não na matéria, etc.).

Planificação da unidade e preparação de aulas

Habitualmente, para além dos planos de aula, é o professor orientador que recomenda a elaboração de outro tipo de documentos como, por exemplo, o plano da unidade a leccionar pelo estagiário. No entanto, a professora orientadora da Joana solicitou apenas a elaboração da calendarização alusiva à unidade (o que corresponde à discriminação dos conteúdos com o número de aulas para os leccionar), pelo que a Joana não realizou um plano de unidade propriamente dito.

No que se reporta às estratégias a utilizar na aula, a Joana argumenta que, normalmente, pensa nelas com antecedência, mas só as concretiza no dia anterior, ou seja, o plano de aula só é feito na véspera. Porém, quando tem tempo, prepara o do dia seguinte "para não andar sempre em cima da hora".

Para preparar as aulas da unidade de Estatística, a Joana consultou vários manuais escolares:

> "Tenho vários livros do 2º ciclo, do 6º ano. Normalmente vejo em todos os livros a abordagem que fazem do tema, vejo o que está melhor, aquele que acho que devo seguir."

Os manuais foram também fundamentais para seleccionar exercícios, tentando sempre variar o mais possível e ir de encontro aos interesses dos alunos.

> "Normalmente pegava nos livros e dizia: este exercício até é interessante para eles fazerem. E seleccionava esse, via e ia seleccionando assim os exercícios. Conforme achava que se calhar eram interessantes para os alunos. (…)
> …não estar sempre a estudar a mesma coisa, algum caso que tivesse a ver com o dia-a-dia deles, com alguma coisa que lhes dissesse respeito..."

No manual escolar adoptado não leu os exercícios todos mas foi-os escolhendo conforme ia precisando, ou seja, "ia à parte que estavam a dar em termos de conteúdos e via os exercícios que havia no manual sobre isso".

> "Só fiz alguns. Fiz o dos ténis, pois achei que era interessante verem que a publicidade toda que aparece nem sempre está correcta, não é? Às vezes é só para enganar as pessoas. Foi por isso que eu escolhi esse exercício, para eles terem também um bocadinho essa ideia. Escolhi outros apenas para eles calcularem, por exemplo, a média. Apenas para eles aplicarem o conceito que tinha sido dado de média e tinha lá esses exercícios simples e ia-se

> resolvendo... só para consolidar melhor o conceito. E pronto, foi mais ou menos nessa base que eu usei o manual.”

No que se refere aos objectivos, "ia-os vendo no manual [adoptado], e era um bocadinho assim de acordo com aquilo que queria que eles atingissem. Se queria que soubessem o conceito de média, ia formulando os objectivos de acordo com isso, de acordo com aquilo que achava que eles deviam atingir naquela aula”. O manual escolar adoptado serviu ainda para estabelecer a ordem de abordagem dos conteúdos.

Embora utilize o Programa de Matemática, este é um documento ao qual dá pouca relevância:

> “Costumo ver pouca coisa. Sinceramente não me guio muito por ele. Não costumo consultar muito o Programa, mas, quando consulto, é para ver os conteúdos que tenho de abordar. E às vezes, quando não sei muito bem as estratégias que vou utilizar, vou lá e vejo algumas ideias, algum material que eles dizem que é melhor.”

Para além dos documentos citados, a Joana utilizou o Livro do Professor e um *dossier* de estágio do ano anterior. As sugestões que surgiram da troca de impressões com os colegas também tiveram um papel importante.

> “Falamos sempre o que vamos fazer e vamos tirando ideias e vendo o que é melhor para a turma, porque depende também da turma que temos.”

Para além disso, afirma não ter sentido necessidade de consultar outro tipo de documentos.

> "Eu não senti muito essa necessidade. Não sei até que ponto isso será importante.”

A prática lectiva

A turma e o ambiente

A turma onde a Joana leccionou tinha 24 alunos, 13 raparigas e 11 rapazes, alguns bastante participativos, mas, por vezes, também um pouco barulhentos. Na sua opinião, “há aqueles muito caladinhos, que é raro participarem, e há outros que não se calam”. A Joana já tinha leccionado outra unidade nesta turma, pelo que revelou um certo à vontade na sala de aula. Manteve uma boa relação com os alunos, sorrindo-lhes frequentemente e chamando-lhes a atenção para o seu comportamento, de um modo afável, tentando a via do diálogo. No entanto, por vezes manifestava dificuldades em assumir uma postura mais séria, quando necessário.

No que concerne aos conteúdos da unidade de Estatística, a Joana afirma que alguns alunos já os conheciam pelo que, por vezes, se antecipavam e falavam em certos conceitos antes desta os explorar. No entanto, não pensou em levar a turma um pouco mais além do programa vigente porque considera que esta era heterogénea e que, embora alguns alunos fossem adiantados relativamente à matéria, havia outros bastante atrasados:

> "…é os extremos um bocado, há uns que percebem tudo, há outros que não percebem nada. (...) também não se pode só estar a dar atenção aos bons alunos".

Enquanto leccionou, manteve, na maior parte das aulas, a disposição habitual da sala (carteiras em filas, alunos dois a dois), já usada pela professora da turma. Todavia, declarou que foi por sua opção, pois estava à vontade para fazer alterações. No seu entender, este tipo de disposição é preferível porque "os alunos não se distraem tanto, nem conversam tanto uns com os outros". Embora ficasse ao critério dos próprios alunos trabalharem em pares ou individualmente, observou que havia sempre troca de ideias entre os colegas da mesma carteira.

A abordagem conceptual

A unidade de Estatística foi abordada em 11 aulas, sendo uma delas dedicada à ficha de avaliação sumativa e outra à sua entrega e breve explicação sobre a correcção da mesma.

Procurando atingir os objectivos "conhecer a importância de estudos estatísticos e interpretar gráficos", a Joana introduziu a unidade incitando os alunos a referirem aspectos que se relacionam com estatística. Surgiram, assim, os termos censos, inquéritos, organização e apresentação de dados, gráficos, etc. No que se refere aos gráficos, falou-se dos diferentes tipos, tendo feito um aluno vários esboços no quadro.

Os alunos formaram grupos de quatro elementos e cada grupo analisou uma revista (Fórum, O Consumidor, TV Guia, …) com o intuito de encontrar dados relativos a estudos estatísticos, analisá-los e, posteriormente, transmitir à turma a sua análise. De notar que todos os alunos escolheram um assunto da revista em que apareciam gráficos (de barras e circulares), embora sem serem influenciados nesse sentido. A apresentação feita pelos alunos foi utilizada para falar sobre a utilidade dos gráficos.

Para desenvolver o tópico ‘Recolha e Organização de dados’, a Joana forneceu a cada aluno uma folha com a questão: “Qual é a tua disciplina preferida?”. Recolheram-se as folhas e foi feita a contagem por dois alunos (um aluno leu e outro registou no quadro a contagem). Com base nestes dados construíram uma tabela de frequências e um gráfico de barras, relembrando as características a que tem de obedecer a sua construção.

Através de um acetato, a Joana mostrou e fez a leitura de diferentes tipos de gráficos – circulares, cartesiano, pictograma e de barras. Propôs também uma ficha de trabalho em que se pedia para construir uma tabela de frequências e um histograma.

Nos restantes exercícios, referentes a gráficos, solicitou aos alunos que construíssem uma tabela de frequências, alusiva aos dados, e o respectivo gráfico de barras, tendo sido utilizado um desses exercícios para falar no conceito de frequência absoluta.

A média aritmética foi introduzida através de uma história – História do João comilão – através da qual define média como “o número que se obtém calculando a soma de todos os dados registados e depois dividindo esse número pelo número de parcelas em causa”, para depois aplicar esta definição ao cálculo da média do número de bolos que o João come por dia.

Prosseguindo com esse conceito, é proposta uma actividade em grupo: construção de um dado a partir da sua planificação; lançamento do dado 10 vezes, registo das pontuações e elaboração da respectiva tabela de frequências. A tabela correspondente a este tipo de dados, elaborada pela Joana, foi usada para determinar a média com base no algoritmo da média ponderada e para falar do conceito de moda – “houve uma face do dado que saiu mais vezes. Nós dizemos que esse valor é a moda”.

Para “consolidar os conhecimentos” distribuiu uma ficha de trabalho com exercícios que focavam essencialmente as noções de média e de moda.

Com o intuito de introduzir os conceitos de acontecimento certo, impossível e provável recorreu à seguinte actividade: colocar num saco preto cubos de várias cores e um aluno de cada vez tira, sem ver, um cubo do saco. Com base nas tiragens, discutiram-se os diferentes acontecimentos. Por exemplo, afirmaram que: “é provável tirar um cubo amarelo", "é certo tirar um cubo vermelho ou amarelo ou verde", "é impossível tirar um cubo castanho", "é mais provável tirar um cubo amarelo porque existem cubos amarelos em maior quantidade".

Posteriormente, com base na experiência aleatória "lançamento de um dado", pediu aos alunos para escreverem um exemplo de acontecimentos de cada tipo: certo, impossível e provável.

Foram concretizados exercícios do manual, em que se pedia para comparar o grau de probabilidade de diferentes situações como, por exemplo: "Se lançares uma moeda, é mais provável obter face ou coroa?"

Para além do descrito, as restantes actividades basearam-se na resolução de exercícios do manual, que utilizou essencialmente para trabalho de casa, ou de fichas de trabalho e na resolução e respectiva correcção da ficha de avaliação sumativa.

As tarefas

A tabela 41 pretende dar uma ideia do tipo de gráficos utilizados pela Joana durante as aulas, no que se refere à sua construção, leitura e interpretação.

Tabela 41. Identificação do tipo de gráficos utilizados.

Actividades	**Tipo de gráficos**				
	Barras		Pictogramas	Circulares	Histogramas
	Simples	Duplas			
Construção	X	–	–	–	X
Leitura e interpretação	X	–	X	X	–

Analisando a tabela, verifica-se que foi feita referência a vários tipos de gráficos. Porém, tendo em conta as aulas leccionadas, constata-se que foi dada maior ênfase aos gráficos de barras simples.

Os gráficos circulares tinham sido apresentados, pela Joana, na unidade anterior, 'Proporcionalidade directa', a partir de um cartaz com um gráfico circular que pediu aos alunos para interpretarem. Resolveu também exercícios que envolviam a passagem de percentagens para frequências e a determinação de uma percentagem em falta num gráfico. Não foi construído qualquer gráfico circular nem foi feita alusão à sua construção, o que a Joana justificou com recomendações da professora cooperante, a qual considerou que o importante era a análise e não a construção.

No que respeita aos pictogramas, a Joana afirmou que não lhes deu muita importância porque já era um conteúdo do 5º ano. Mesmo assim, pensa que devia ter-lhes atribuído maior relevância, pois apenas apresentou um pictograma num acetato, como exemplo, e nem sequer fez um exercício. No entanto, colocou no teste questões alusivas a um pictograma.

Propôs a construção de um histograma, por sugestão da professora cooperante, para comparar com os gráficos de barras porque os alunos, quando os construíram, tiveram bastantes dificuldades em saber se deviam ou não juntar as barras.

A tabela 42 pretende estabelecer uma classificação quanto ao tipo de variáveis e de dados das tarefas alusivas à moda e à média, propostas pela Joana durante as aulas.

Tabela 42. Classificação do tipo de variáveis e de dados utilizados nas tarefas.

<table>
<tr><th rowspan="3">Conteúdos</th><th colspan="3">Variáveis qualitativas</th><th colspan="3">Variáveis quantitativas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Dados não agrupados</td><td colspan="2">Dados agrupados</td><td rowspan="2">Dados não agrupados</td><td colspan="2">Dados agrupados</td></tr>
<tr><td>Tabelas de frequências</td><td>Gráficos</td><td>Tabelas de frequências</td><td>Gráficos</td></tr>
<tr><td>Moda</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>X</td><td>X</td><td>X</td></tr>
<tr><td>Média</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>X</td><td>X</td><td>–</td></tr>
</table>

No que se refere às variáveis em estudo, verifica-se que não é explorado nenhum exemplo de identificação de moda ou discutida a impossibilidade de calcular a média aritmética para caracteres qualitativos.

Nos restantes casos, predominaram as actividades de identificação da moda e de cálculo da média aritmética por recurso directo ao algoritmo, tendo por vezes recorrido à interpretação destas medidas num dado contexto.

Comentando o tipo de exercícios propostos, a Joana referiu que “são mais ou menos aqueles” que deu, afirmando que não conhecia exercícios diferentes dos que propôs que se pudessem aplicar no 2º ciclo.

No entanto, colocada perante outro tipo de exercícios, acaba por achar, nalguns casos, perfeitamente plausível a sua exploração com os alunos do 2º ciclo. Assim, admite que é possível pedir para os alunos identificarem a moda a partir de gráficos circulares envolvendo variáveis qualitativas.

Quando elucidada sobre o conceito de variáveis qualitativas e quantitativas, considera que é viável apresentar aos alunos exercícios que lhes permitam tomar consciência da impossibilidade de calcular a média, confessando que, quando preparou as aulas, não reflectiu sobre esse assunto, embora tenha encontrado num manual uma referência que a alertava para esse facto.

> "Não reflecti muito bem. Mas lembro-me que até tinha lá [no manual] um balãozinho a chamar a atenção e tinha lá isso: 'nestes casos não faz sentido estudar a média'."

No que concerne à escolha entre a média, a moda e a mediana como a medida que melhor representa uma dada distribuição (questão 3 do questionário), a Joana considera que, caso se desse a mediana no 2º ciclo, era uma questão perfeitamente passível de ser trabalhada com alunos deste nível de ensino. Porém, já no que diz respeito a uma situação em que, dada a média, são pedidos os valores de alguns dados (questão 4 do questionário), pensa que, "para o 2º ciclo, é uma questão um bocado complicada", pois os alunos não a saberiam resolver da forma que acha possível, ou seja, através da resolução de uma equação.

Quanto a determinar a média directamente a partir de um gráfico de barras, julga que é perfeitamente possível a sua exploração no 2ºciclo, considerando, porém, que "era muito mais simples fazer primeiro a tabela", que é a sequência habitual para a qual os professores costumam induzir os alunos.

A investigadora tentou, também a partir do manual adoptado, perceber porque não escolheu determinado tipo de exercícios, por exemplo: "Quatro amigos tinham em média 11 anos. Juntou-se ao grupo dos quatro um outro amigo. Qual é a idade desse amigo se a média passou a ser: 12 anos? 10 anos?". A Joana argumentou:

> "Foi daquelas aulas que eu não sabia se ia sobrar tempo ou não. E então resolvi os exercícios em casa e pensei: se sobrar tempo, mando-os fazer na aula. E depois passou-me... Acabámos por não os fazer."

Admitiu, no entanto, tratar-se de um exercício mais complicado para explorar com os alunos pois, "se calhar, é um bocadinho difícil para os alunos do 2º ciclo interpretarem e conseguirem chegar àquilo que é pedido", tendo que "lhes explicar como é que tinha de ser resolvido", já que "eles, sozinhos, de certeza, não conseguiam fazer". Além disso, afirma que é um tipo de questão à qual estava menos habituada e que envolve um raciocínio mais elaborado, pelo que teve também algumas dúvidas na sua resolução.

> "Era bem diferente. Sei que tive alguma dificuldade em resolvê-los. Ainda estive ali um bocadinho às voltas para o resolver."

No que se refere aos acontecimentos em probabilidades, o tipo de tarefas propostas implicou, essencialmente, a classificação, exemplificação e comparação da probabilidade de ocorrência de certos acontecimentos. Foram ainda propostas duas tarefas, do manual escolar, de âmbito diferente, uma relacionada com acontecimentos certos, em que dado um saco com 3 bolas azuis, 3 verdes e 3 amarelas se questionava quantas bolas se tinha de tirar do saco para ter a certeza de obter uma bola de cada cor e outra relacionada com o raciocínio proporcional em que, dadas duas taças com um determinado número de bolas de diferentes cores, se pedia para indicar em que caso era mais provável tirar uma bola vermelha.

Quanto a outra actividade do manual em que se pretendia analisar se as condições de um determinado jogo eram ou não equitativas, afirmou não lhe ter dado muita importância. Admitiu que não fez nenhum exercício das tarefas matemáticas (que no manual adoptado correspondem, essencialmente, a tarefas um pouco diferentes do habitual), pois estava condicionada pelo tempo, tendo por isso de fazer opções.

> "Para fazer esses exercícios todos... É assim, uma pessoa opta por alguma coisa. E depois ou faz uma coisa ou faz outra. E não dá para tudo realmente. Se calhar esses exercícios até..."

Em termos de tarefas, considera que se centrou mais em actividades relacionadas com o cálculo, embora concorde que, neste nível de ensino, a parte de interpretação também seja importante. Pensa que a questão de encontrarem mais exercícios nos livros relacionados com o cálculo os influencia na escolha.

> "Nós vamos vendo os exercícios, aparece mais aquilo [cálculo] e nós deixámos andar um bocado... Mas também são importantes [interpretação]... Se calhar agora fazia mais desse tipo de exercícios."

Comentários

O termo censo foi focado e referido em exemplos concretos, todavia não foi explorado o seu significado. Também não foi feita qualquer referência aos termos sondagem, população e amostra.

Comentando esta situação, a Joana argumentou que, quando falou em censos, não tinha intenção de explorar muito o seu sentido mas apenas fazer uma introdução ao tema. No entanto, opinou que "era muito bom fazer uma abordagem [das noções de censo, sondagem, população e amostra] para eles estarem mais por dentro, porque afinal são coisas de que se estão sempre a falar...". Pensa, contudo, que, para fazer isso, precisaria de dedicar mais aulas a esta unidade.

A única recolha de dados proposta foi feita na sala de aula e sem manter o anonimato, pois as folhas com a questão tinham o nome do aluno. Não foi discutido com os alunos esse facto nem feita referência a outras formas de recolha. Embora a Joana pense que “era interessante eles fazerem tipo um inquérito, (...) fazerem a recolha exteriormente à sala de aula, organizarem os dados…”, continuou a argumentar que “o tempo não dava muito”.

Confessou ter utilizado pouco o manual adoptado, opção que não teve a ver com a sua opinião sobre ele, já que nem sequer o explorou detalhadamente na unidade de Estatística. Porém, pensa que não era necessário utilizá-lo mais nas aulas já que recorreu, frequentemente, a fichas de trabalho, que considera serem importantes.

> “Foi uma opção. Comecei a pegar noutros livros e resolvi fazer fichas em vez de pegar no livro e de resolver os exercícios que lá estavam. Foi um bocadinho… por isso é que não utilizei muito o manual deles. (…)
> Acho importante as fichas de trabalho. O manual também se deve utilizar, só que um aluno que faça as coisas, sempre chega a casa e resolve este exercício do manual. Olha, dei esta matéria, vou resolver isto. Sempre vão fazendo alguma coisa. Enquanto que as fichas têm mais variedade de exercícios, e eles vão resolvendo exercícios diferentes daqueles que têm no manual deles. Eu acho que é importante fazer umas fichinhas.”

Nas aulas de estatística, a Joana propôs uma vez um trabalho de grupo. Embora considere que é uma actividade importante nesta unidade, confessa que, quando está a dar aulas, não gosta de ter os alunos em grupo, acabando por não utilizar este método de trabalho. Além disso, tem algumas dúvidas quanto à sua verdadeira eficácia.

> "Deve-se fazer trabalho de grupo e, na teoria, é muito bonito o trabalho de grupo mas, na prática, nunca funciona muito bem. Eles [os alunos] distraem-se, não fazem as coisas. (…) Há, às vezes, um aluno que percebe muito daquilo e os outros fazem as coisas porque o outro fez. Por isso é que evito sempre os trabalhos de grupo. (…)
> Aliás, eu acho que o trabalho de grupo até é importante para quase tudo. Só que eu, quando faço trabalho de grupo, saio de lá com a sensação que aquilo que não deu para nada, que eles não aprenderam nada e que não valeu a pena porque parece que estão sempre distraídos, sempre na conversa, a falar de tudo menos daquilo que é para falar. E se calhar até não, se calhar até aprendem. Pode ser impressão minha."

Relativamente às tecnologias, a Joana considera importante que os alunos recorram à calculadora pois, na sua opinião, poupa-se um bocado de tempo e já é altura destes começarem a aprender a trabalhar com a máquina.

> "Porque perdem muito tempo a calcular e não vejo muito sentido estarem a fazer aquilo assim à mão, porque eles o que tinham a aprender sobre contas já o aprenderam e agora é um bocado facilitar e não perder tanto tempo a resolver aquilo, uma coisa que eles já sabem fazer."

Embora pense que "era uma boa ideia na aula [de estatística] os alunos trabalharem com o computador", não recorreu a este meio, pois confessa não estar muito à vontade para o utilizar em termos de ensino, particularmente na parte da estatística:

> "Não tinha assim muito à vontade para o fazer e também não sei como é que o iria fazer."

Admite que, quando não está segura, não faz essas actividades, pelo que, num futuro próximo, não está a ver a possibilidade de leccionar uma aula em que estivessem os alunos a trabalhar directamente com o computador, embora gostasse de ter melhor formação nesse campo.

Conquanto pense que é importante estabelecer alguma ligação entre as diversas unidades temáticas de matemática, e desta com outras disciplinas, considera que, no caso das aulas da unidade de Estatística que leccionou, essa relação foi praticamente inexistente.

> "Sinceramente, com outras disciplinas acho que não [estabeleci qualquer relação]. Com outras unidades só se foi com o gráfico circular. (…)
> Faz sempre jeito haver ligação com outras disciplinas."

Acrescenta ainda: “Não estou a ver assim que conseguisse fazer uma relação. Há outras unidades que se calhar é mais fácil.”

A Joana é da opinião de que deve haver muitas formas de abordar os conceitos dados. No entanto, afirma ter aplicado os conhecimentos que possuía e que, se estivesse novamente na mesma situação, teria de reflectir sobre o caminho a seguir, pois queria tentar fazer algo diferente apesar de não ter a percepção da forma de o conseguir.

No que concerne à avaliação, utilizou uma grelha em que registava os dados alusivos ao comportamento, trabalho de casa e participação. Porém, acabou por não ligar muito ao aspecto do comportamento e, no caso da participação, “nem valia a pena estar a registar” pois, na sua opinião, é fácil ter a percepção de quem participa e de quem não participa. Assim, “basicamente a avaliação foi feita pelas notas dos testes”, servindo os outros aspectos apenas para resolver situações duvidosas.

Embora considere que não concorda muito com uma avaliação centrada nas fichas de avaliação sumativa, pensa que não há muito a mudar:

> “A avaliação está mesmo assim…a avaliação tem de ser contínua e temos que olhar a todos os aspectos. Agora, os testes também contam. Não é que eu concorde muito com isso, só que é assim que está a avaliação e é assim que nós vamos fazer também.”

Não obstante se refira à avaliação na sua forma global, afirmou que no caso da unidade de Estatística seguiu, exactamente, a mesma linha e pensa que esta unidade “deve ser avaliada, igualmente, da mesma forma”.

As dificuldades da Joana

A Joana afirma que, “no início da Prática Pedagógica, uma das dificuldades que se fazia sentir era não ter a mínima noção da quantidade de matéria que poderia ser leccionada durante os cinquenta minutos de aula”. Porém, esta dificuldade foi ultrapassada ao longo do estágio pois, após ter leccionado a unidade de Estatística, já refere que, “no geral, considero ter conseguido gerir bem o tempo”. De qualquer forma, continua a dizer “embora ache que 50 minutos passam sem se dar conta”.

Teve também dificuldades na planificação do desenvolvimento da aula, pois confessa que, por vezes, não sabia que seguimento lhe dar, já que queria propor tarefas diferentes para motivar os alunos, mas não sabia como o conseguir.

A utilização de revistas para os alunos procurarem elementos sobre estatística foi uma das únicas tarefas propostas que conduziu, na sua opinião, a uma aula diferente, que agradou aos alunos porque trabalharam em grupo.

Todavia, embora tivesse dificuldades em encontrar estratégias diversificadas, tentou solucionar o seu problema:

> "Então ia aos livros e começava a ver o que é que... quais eram as estratégias utilizadas e ver o que é que era melhor para aquela turma. Falava com os colegas que estavam a dar a mesma matéria que eu e assim... E pronto, foi basicamente isso que fiz."

As escolhas que fez tiveram como base a adaptação à turma e a percepção de se sentir à vontade na exploração das situações.

> "Há determinadas estratégias que são muito adequadas para uma pessoa e, para mim, se calhar não me dizem nada e podia não me sentir tão à vontade para utilizar aquela estratégia, tinha um bocado a ver com as duas coisas."

Na sua opinião, quando alguém tem dificuldades e se sente insegura para utilizar alguma estratégia e "não sabe como há-de fazer, não vai por aquele caminho, escolhe outro".

Quanto à exploração dos exercícios na aula, não teve dificuldades. Julga que o facto de resolver antecipadamente os exercícios que vai dar na aula a ajuda a não ter problemas. Além disso, quando os alunos intervinham, iam sempre de encontro ao que ela queria. Também, no seu ponto de vista, conseguiu explicar de diversas formas e "chegar ao nível dos alunos".

Admitiu, porém, que o facto de pensar que não conseguia explicar bem um exercício era razão para não o escolher, e seleccionar outro para explicar a mesma coisa.

No que diz respeito à avaliação, considerou que não teve qualquer dificuldade em registar os aspectos relativos ao comportamento e participação dos alunos, denotando talvez uma confiança excessiva da sua percepção relativamente ao que se passa na sala de aula.

> "E a participação nem valia a pena estar a registar, pois já sei aqueles que participam e os que não participam."

Quanto à ficha de avaliação sumativa, pensa que não teve quaisquer dificuldades na sua elaboração nem na sua correcção, visto que as suas perguntas permitiam apenas uma resposta, por isso não eram difíceis de avaliar.

> "Não me surgiu nenhum caso complicado. O tipo de teste que fiz era aquilo e aquilo mesmo, não havia muito por onde escolher."

A Joana confessou, espontaneamente, que teve algumas dificuldades no cálculo da média no exercício alusivo à tarefa 'lançamento de um dado 10 vezes, registo das pontuações obtidas e cálculo da média'. Os exercícios que tinha proposto nas aulas até ao momento resolviam-se todos com recurso ao algoritmo da média simples e este tinha ficado para trabalho de casa. Quando tentou calcular a média, utilizou o raciocínio *Cálculo da média das frequências*.

> "No início, tive dificuldades ao calcular a média, pois somei as frequências e dividi por seis."

Usando tabelas de frequência diferentes, alusivas a outras pontuações, verificou que o valor da média calculado pelo seu processo era sempre o mesmo, o que achou estranho. A reflexão sobre este facto e a ajuda de colegas, com quem discutiu o assunto, levou-a à conclusão correcta, a partir da média simples e considerando os dados não agrupados.

> "Estivemos a pensar [a Joana e mais três colegas estagiários] e depois lá chegámos à conclusão." (…) Somámos na parte dos lançamentos e dividimos por 10. Então, por outro processo, tinha que dar a mesma média, e lá descobrimos que tínhamos que multiplicar. Há alturas em que parece que não raciocinámos muito bem, que são coisas simples e parece que quanto mais simples…"

Assim, comenta que, neste caso, se tivesse que resolver imediatamente o exercício, na aula, teria sido um pouco complicado.

> "Se calhar era capaz de ser complicado e eu ia ficar um pouco baralhada. Foi engraçado, eu tinha na minha mente a ideia: bem, é assim que se resolve e depois vou pegar naquilo para resolver... Mas então, isto não é assim?! E fiquei um pouco baralhada."

No que diz respeito à temática Probabilidade de acontecimentos, a Joana, durante as aulas, não mostrou, na generalidade, dificuldades. Porém, é de destacar o desenrolar da resolução, em aula, de um exercício do manual escolar dos alunos: 'Estão desenhadas duas taças. A taça *A* contém 2 bolas vermelhas e 1 amarela, a taça *B* contém 4 bolas vermelhas e 3 amarelas'. A questão que se coloca é a seguinte: 'Tirou-se uma bola, ao acaso, de cada taça. Em que caso é mais provável obter uma bola vermelha? Porquê?'

Numa primeira abordagem, um dos alunos referiu a razão entre o número de bolas vermelhas e o número total de bolas: "Temos 2 vermelhas para 3 bolas no caso *A*, a relação é 2/3". Contudo, a Joana não fez qualquer aproveitamento desta resposta, tendo-a praticamente ignorado. Mais tarde, referiria que o cálculo de probabilidades não fazia parte do programa.

Seguidamente, para resolver a questão, a Joana começou por induzir os alunos a pensarem directamente na razão entre o número de bolas vermelhas e o número de bolas amarelas.

> "Qual é a razão? [caso A]. É de 2 para 1. No caso B a razão é de quanto? (…) 4 para 3, das vermelhas para as amarelas."

Raciocínio perfeitamente válido e adequado ao nível escolar dos alunos. No entanto, logo a seguir, deu uma justificação baseada na comparação do número de bolas amarelas das duas taças.

> "Na taça B temos mais bolas amarelas [do que na A]. Há mais probabilidade de tirar uma amarela. Na taça A é mais provável tirar uma vermelha".

Se bem que, no presente caso, este raciocínio funcione, ele é baseado em argumentos que não se podem considerar válidos. Não é linear que ao recipiente que contém maior número de bolas de uma dada cor seja, necessariamente, ao que corresponde maior probabilidade de sair essa cor, já que se tem de ter em consideração o número total de bolas existente em cada situação.

Para além disso, conquanto, se possa dizer que se na taça *B* é mais provável tirar uma bola amarela, então na taça *A* é mais provável tirar uma bola vermelha, pelo facto de existirem duas bolas em cada taça, caso existam mais cores essa relação nem sempre se verifica. Este tipo de justificações, sem serem acompanhadas de outros exemplos, podem levar os alunos a construir, intuitivamente, falsas regras que os induzem em erro.

Embora a investigadora tenha pedido à Joana, após a aula, para comentar as suas justificações, esta apenas se referiu à comparação de razões, pelo que se pode concluir que talvez seja o raciocínio que considerou ser mais correcto.

5.1.3. O questionário

Na tabela 43 apresentam-se as respostas e os raciocínios utilizados pela Joana antes e após leccionar a unidade didáctica de Estatística. Os dados presentes em *Antes de leccionar a unidade* correspondem às respostas dadas pela Joana quando se passou o questionário a toda a turma. Os dados referentes ao *Após leccionar a unidade* provêm da análise da terceira entrevista, realizada apenas depois de a Joana ter leccionado as aulas da unidade de Estatística, em que um dos objectivos era explicar as respostas dadas no questionário da primeira vez e alterá-las quando havia mudança de opinião. Na coluna respeitante a *Após leccionar a unidade* apenas se reescrevem as respostas ou raciocínios em que se verificaram alterações, pelo que o símbolo = pretende significar que se mantém as respostas e/ou os raciocínios de *Antes de leccionar a unidade*.

Tabela 43. Respostas e raciocínios da Joana no questionário, antes de ter leccionado a unidade de Estatística, e na terceira entrevista, após ter leccionado a unidade.

	Antes de leccionar a unidade		**Após leccionar a unidade**	
Questão	**Respostas**	**Raciocínios**	**Respostas**	**Raciocínios**
1.1	A moda é o Porto	Referência à maior frequência	=	=
1.2	A média é 40	Cálculo da média das frequências	Variação de resposta	Variação de raciocínio
2.1	As médias não podem assumir os valores calculados	Frequência 50%	As médias podem assumir os valores calculados	Heterogeneidade dos dados
2.2	As modas não podem assumir os valores calculados	Inexistência de classificação igual à moda Frequência 50%	A moda de A não pode assumir o valor calculado, a de B pode	Inexistência de classificação igual à moda Heterogeneidade dos dados
3	A melhor é a mediana	Determinação das medidas	=	Comparação das medidas
4	Peso possível 79 quilos	Algoritmo da média	=	=
5.1	A média é 3	Sem justificação	A média é 1,8	Algoritmo da média

	Antes de leccionar a unidade		Após leccionar a unidade	
Questão	**Respostas**	**Raciocínios**	**Respostas**	**Raciocínios**
5.2	A moda é três irmãos	Referência à maior frequência	=	=
5.3	Não responde	Sem justificação	Variação de resposta	Variação de raciocínio
6	A média é 2,7	Não considerar a frequência absoluta	Variação de resposta	Variação de raciocínio
7	O amigo tinha 49 anos	Não considerar a frequência absoluta	O amigo tinha 19 anos	Algoritmo da média
8	A média é 70 quilos	Lei do fecho	A média é 68 quilos	Algoritmo da média
9.1a)	A média corresponde à soma de todos os ordenados, dividido pelo número total de indivíduos	—	=	—
9.1b)	Ordenado que mais trabalhadores recebem	—	=	—
9.1c)	Não responde	—	90 mil escudos é o valor intermédio	—
9.2	Há empregados que têm um ordenado de 80 mil escudos, o que corresponde à maior parte dos empregados	—	=	—
10.1	Possível mas não certo	—	=	—
10.2	Certo	—	=	—
10.3	Impossível	—	=	—
10.4	Certo	—	=	—
10.5	Possível mas não certo	—	=	—
11.1	Obter uma bola preta do saco I	Comparar as probabilidades dos acontecimentos Comparar o número de bolas brancas e pretas	Obter uma bola preta do saco I	Comparar as razões
11.2	Obter bola preta do saco I	Comparar o número de bolas brancas e pretas	Variação de resposta	Variação de raciocínio
11.3	É igualmente provável	Comparar as probabilidades dos acontecimentos	=	=
12	Tirar 10 bolas	Sem justificação	Variação de resposta	Variação de raciocínio
13.1	Não há acontecimento certo	—	Variação de resposta	Variação de raciocínio
13.2	Sair uma bola branca	—	=	—
13.3	Sair uma bola vermelha	—	=	—

Os termos *variação de resposta* e *variação de raciocínio* significam que as respostas e/ou os raciocínios da Joana foram sendo alterados à medida que decorreu a entrevista, muitas vezes em consequência da inquirição da investigadora.

O símbolo — pretende indicar que não se analisaram as questões do ponto de vista dos raciocínios.

De seguida, referem-se as explicações da Joana relativamente às questões em que as respostas e/ou os raciocínios estavam incorrectos ou em que houve uma clarificação no sentido de esclarecer melhor o seu raciocínio. Assim, não se mencionam as questões cuja entrevista não trouxe nada de novo. Por uma questão de facilidade na análise, referem-se duas fases: a primeira fase reporta-se à passagem do questionário *Antes de leccionar a unidade* e a segunda refere-se à terceira entrevista *Após leccionar a unidad*e.

Sub-questão 1.2

Na primeira fase, a Joana tinha determinado a média das frequências absolutas, $\frac{58+50+26+46+20}{5}$, e concluído que a média era 40, não reflectindo que estava em presença de uma variável qualitativa.

Na segunda fase, mantém a resposta e o processo de obter a média. Embora não manifeste qualquer dificuldade em identificar a variável em estudo, não modifica a sua opinião.

A investigadora tenta que a Joana reflicta sobre a inexistência de significado do calcular a média no presente caso. Todavia não é entendida por ela, pois esta não questiona o facto de poder ou não calculá-la, mas põe em causa o facto da média ser ou não significativa relativamente à distribuição. Assim, considera que a média não é muito significativa já que existem, no seu entender, dois valores, 'Outros' e 'Boavista', cuja frequência absoluta não é próxima da média.

> "Aqui, neste caso, não sei se terá muita lógica estudar a média. Tem aqui, por exemplo, 20 pessoas está muito longe da média e este caso, o Boavista, também está muito longe da média. (…)
> Acho que a média não é realmente muito significativa para o tipo de estudo que está a ser feito."

Questionada sobre o significado que atribui a variáveis qualitativas e quantitativas, a Joana começa a ter dúvidas sobre o sentido de determinar a média, mas revela que não interiorizou concretamente o significado da média para estes casos.

> "Já não me lembro muito bem. Acho que… quando é… variáveis quantitativas é quando se dão valores… relativamente num determinado estudo e as outras é... já não me lembro.
> Mas as variáveis qualitativas não dão para estudar em termos de média, pois não? Ou dá? Já não me lembro."

Quando elucidada pela investigadora sobre a noção de variáveis qualitativas, refere que viu um exercício do género desta questão num manual, contudo ignorou-o e não reflectiu sobre o assunto: "Não, não dei importância. Só estudei casos que dá para estudar". Recordando a situação do manual, conclui que afinal, na presente questão, não tem sentido determinar a média.

> "Não achei estranho [haver casos em que não fazia sentido]. Aquilo tinha a ver com a média, não sei se era de cores. E realmente não fazia sentido estudar. E aqui também não faz se se estiver com atenção."

Sub-questão 2.1

A Joana tinha dado uma resposta incorrecta nesta pergunta já que argumentou que as médias não podiam assumir os valores que eram dados no enunciado:

> "A média da turma *A* (...) não está correcta uma vez que nesta turma não há nenhum aluno com nota superior, o que significa que um aluno tenha a nota muito inferior a 14 para a média não ser 14.
> No caso da turma *B* também é um bocado difícil que a média seja 14, uma vez que 50% da turma tem nota igual ou inferior a 13".

A resposta da Joana denota, no caso da turma *A*, uma certa confusão de raciocínio e, no caso da turma *B*, a presença da concepção errada de que a média não poderá ser superior ao valor máximo de 50% das observações.

Na segunda fase, a Joana afirma que a resposta que deu está incorrecta explicando que fez confusão. Afirma então, baseando-se na possível heterogeneidade dos dados, que ambas as médias podem assumir os valores calculados.

Assim, no que se refere à turma *A*, argumenta:

> “Depende das notas que ele tiver aqui. As notas mais altas foram obtidas na *A* e não há nenhuma classificação de 14; pode haver várias superiores a 14 e outras inferiores (...), no sentido de umas compensarem as outras.”

E, no que se refere à turma *B*, declara:

> “Metade da turma tem nota inferior ou igual a 13 valores, mas o João tem 16 e muitos outros podem ter também superior a 14. E, como na turma *A*, uma pode compensar a outra nota, logo a média também pode dar 14.”

Sub-questão 2.2

A Joana tinha respondido correctamente, no caso da turma *A*, "a moda da turma *A* está incorrecta uma vez que não existe nenhum aluno com nota 14", usando o raciocínio *Inexistência de classificação igual à moda*.

No caso da turma *B*, foi influenciada novamente pelo conhecimento do valor máximo possível de 50% dos valores dos dados, já que argumenta:

> “*A* moda da turma *B* está incorrecta uma vez que metade da turma tem nota igual ou inferior a 13 e há um aluno que tem 16, logo a moda nunca pode ser 15.”

Na segunda fase, analisando as respostas, continua a concordar com os argumentos alusivos à turma *A*. No caso da turma *B* reconsidera, utilizando agora o raciocínio *Heterogeneidade dos dados,* referindo:

> “...não se pode dizer que está incorrecta porque metade da turma tem nota inferior a 13 e há um aluno que tem 16. Mas, inferior a 13 pode ter 10, 11; pode ter várias classificações e pode haver mais alunos com nota de 15. Uma vez que só metade é que tem inferior a 13, ninguém me garante que da outra metade só este é que tem 16 e os outros quase todos têm 15.”

Porém, não pretende dizer que quase todos os outros têm 15 valores visto que:

> “Se forem 4 ou 5 [alunos com 15], 15 pode continuar a ser a moda porque dos que estão inferiores a 13, pode haver dois com 13, dois com 11, dois com 10 e a moda continua a ser o 15.”

Quanto à primeira resposta dada, no caso da turma B, considera ter sido influenciada pelos 50%, que não interpretou devidamente:

> “Devo ter pensado inferior ou igual a 13, logo a moda é 13. Talvez não tivesse pensado no inferior, pensei logo no 13 e que a moda seria metade da turma.”

Questão 3

Nesta questão, a Joana tinha calculado, correctamente, a moda, a média e a mediana e respondido que a medida que melhor representa o conjunto de dados era a mediana, sem dar qualquer outra justificação.

Na segunda fase, continua a concordar com a resposta dada e tenta dar uma explicação mais detalhada para a sua escolha, usando um raciocínio que traduz uma certa comparação das três medidas, não havendo, porém, nenhuma referência explícita à assimetria da distribuição.

> "Pelos cálculos que fiz [a medida que] representaria melhor os dados recolhidos pelo Luís era realmente a mediana. A moda é 6000$00 mas a maior parte deles recebe inferior a esse valor. E a média não sei até que ponto será muito credível. Porque 1995$00... praticamente todos os valores são inferiores, a não ser os 6000$00, que é superior a isso, de resto, o mais próximo é a mediana."

Questão 4

Nesta questão, a Joana tinha usado o algoritmo da média ponderada, $78 = \frac{70+8x}{9}$, e concluído que cada uma das restantes pessoas pesava 79 quilogramas. Na segunda fase, continua a concordar com o raciocínio efectuado e com a resposta dada.

Todavia, quando se tenta saber se haveria outra resposta possível, a Joana fica um pouco confusa. Induzida pela investigadora, admite que as pessoas podiam ter pesos diferentes sendo o processo de tentativa e erro, com verificação baseada no algoritmo da média, o único procedimento alternativo que vislumbra.

> I (Investigadora): Acha que as pessoas têm de pesar todas o mesmo?
> J (Joana): Não. Os pesos podiam ser diferentes.
> I: Se tivesse que dar pesos diferentes, o que é que fazia?
> J: Para dar pesos diferentes...Podiam ter umas 79, outras 78, outras 77... tinha de somar...tinha que dar vários valores... nunca mais saía daqui. Dar diferentes pesos mais ou menos dentro disto: 78, 79 e assim, dividia por 9 e via quanto é que dava a média, até acertar. Isso era impossível, teria que haver outra forma de fazer isso.

Embora a investigadora lhe propusesse que pensasse em tentativas mais orientadas com base nos 79 quilogramas já calculados, a Joana entende que pode tirar de um lado e colocar no outro, mas continua a afirmar que não vê muito sentido em fazer isso. Consequentemente, em termos de resposta, apresenta um raciocínio muito ligado à aplicação de fórmulas, sem mostrar flexibilidade para se adaptar a raciocínios mais elementares.

Sub-questão 5.1

A Joana, na primeira fase, considerou que a média era 3, sem dar qualquer justificação.

Na segunda fase, explica essa resposta alegando ter feito confusão entre a moda e a média, pelo que indicou a moda e não a média. Resolve novamente a questão, agora correctamente, passando os dados para uma tabela de frequências e aplicando o algoritmo da média ponderada. Argumenta, ainda, que é mais complicado determinar a média directamente de um gráfico do que de uma tabela de frequências.

Sub-questão 5.3

Na primeira fase, a Joana tinha respondido que não se lembrava como se calculava a mediana.

Na segunda fase, tenta determinar a mediana usando como referência o processo que utilizou na questão 3 (nesta questão os dados não estavam agrupados). Assim, numa primeira tentativa, calcula a mediana dos valores da variável, ou seja, não tem em conta a frequência absoluta:

> "Coloquei o número de irmãos 0 1 2 3 4 5. Depois encontrei os valores médios do número de irmãos, que era o 2 e o 3. Somei-os e dividi por 2. Deu 2,5."

Todavia, a Joana manifesta algumas dúvidas sobre a correcção deste procedimento pelo que, reflectindo melhor, localiza a posição da mediana tendo em conta a frequência absoluta de cada um dos dados.

> "Não me lembro muito bem como é que isto se faz. (...) Só que os alunos da escola são estes todos [considera todos os dados]. Por isso, se assim fosse, devia ser 6 zeros, 7... não sei já... [duvida da lógica do seu raciocínio].

> Dá para fazer assim 0×6, 1×7, 2×3, 3×8, 4×1, 5×2, [o que, na sua opinião, corresponde a considerar a lista ordenada de todos os dados], mas também é um bocado estranho. Ter de andar aqui agora a pôr os zeros todos. (…)
> Com zero, tenho 6, somava 6 + 7 = 13, 13, 16, 16 e 8 dá 24, 25, 26, 27... [conta todos os dados] afinal é 27. A dividir por 2, dava 13,5. Então será o elemento que está entre 13 e 14. Por isso... seria o 1 e o 2. Fazia $\frac{1+2}{2}$, que dava 1,5. E isso era a mediana do número de irmãos dos alunos da escola.”

Embora pense que tem mais lógica calcular a mediana por este último processo e indique que a mediana "corresponde aos valores intermédios", continua a não estar muito segura, pois refere: "já não me lembro como se calcula" e diz: "não sei se está correcto assim". Considera, também, que se torna mais complicado determinar a mediana neste caso, a partir do gráfico, do que na questão 3.

Questão 6

Na primeira fase, a Joana não tinha ponderado adequadamente os valores para calcular a média, ou seja, calculou $\frac{13{,}5+0}{5}$, pelo que concluiu que a média do número de ramos vendidos era 2,7.

Na segunda fase, começa por dizer que a resposta está correcta e tenta justificar melhor o que fez. Porém, ao explicar esse raciocínio, reflecte melhor, e considera-o um pouco estranho:

> “É um bocado esquisito, porque 13,5 era já a média dos 4 dias. E eu estou a dividir novamente pelos dias e estou-lhe a somar o zero, que é o dia em que não vendeu nada.

Depois de pensar um pouco, em silêncio, reformula o seu raciocínio. Aplica então o algoritmo da média em duas fases – primeiro determina o número total de ramos vendidos e depois calcula a nova média:

> “Pego na média, que é igual àquilo que eu quero saber, que é o número de ramos que ela vendeu nos 4 dias a dividir pelos dias, que são 4. E então vou encontrar o número de ramos que vendeu nos 4 dias, $13{,}5 = \frac{x}{4}$, deu-me 54. Em 4 dias vendeu 54 ramos. (...) Agora sim, é que posso calcular a média dos 5 dias. E então fiz: média, é igual aos 54, que é os 4 dias em que vendeu 54

ramos mais zero a dividir por 5, que é o número de dias. $\overline{X} = \frac{54+0}{5}$ e dá 10,8.
(…)
Parece-me mais correcta assim porque no anterior não fazia muito sentido, pois já tinha calculado a média para os 4 dias e dividir outra vez por 5 dias não faz sentido. Assim, já acho que faz mais sentido, tem mais lógica."

Questão 7

Na primeira fase, a Joana não teve em conta as frequências absolutas na aplicação do algoritmo, $\overline{X} = \frac{15+x}{4}$, tendo concluído que o amigo que se juntou ao grupo tinha de ter 49 anos.

Na segunda fase, depois de analisar a resposta dada, considera que aplicou, erradamente, o mesmo raciocínio que no caso da questão 6. Explica então o seu novo processo de resolução, que é baseado no algoritmo da média:

"Eu sei que a média das idades dos três é 15. Então colocava $15 = \frac{x}{3}$ e ia saber o x, que é a soma das idades dos três. (…)
Eu não sei que idade tem cada um, sei que a média dos 3 dá 45. E como me diz que a média dos 4 amigos passou a ser 16, porque se juntou mais um ao grupo, então pus 16 é igual à soma das idades dos três que eu tinha, que é 45 mais *x*, que é aquele que eu quero saber, que se juntou, a dividir por 4: $16 = \frac{45+x}{4}$. Então, dá-me $x = 19$. Ou seja, o outro que se juntou ao grupo tem 19 anos."

Questão 8

Na primeira fase, a Joana tinha calculado a média das médias, $\frac{60+80}{2}$, ou seja, tinha aplicado a *Lei do fecho*, concluindo que a média do peso das 10 pessoas que se encontravam no elevador era 70 quilogramas.

Na segunda fase, não concorda com este procedimento pois considera que é um "exercício que vem na linha dos que estão atrás" [questões 6 e 7], resolvendo-se, por isso, mais ou menos da mesma forma, ou seja, utilizando o seguinte raciocínio:

"Eu sei que são 6 mulheres e sei qual é o peso médio delas. Então, eu tentava calcular o peso total das 6 e dava 360, $\left[60 = \frac{x}{16}; x = 360\right]$. Relativamente aos

> 80, que é o peso médio dos homens, dava o peso total deles a dividir pelo número de homens, $\left[80 = \frac{x}{4}; x = 320\right]$. Como eram 4, dava 320. Depois calculava a média das 10 pessoas. A média é igual a 360, que é o peso total das mulheres mais 320, que é o peso total dos homens, a dividir por 10 pessoas $\left[\overline{\mathrm{X}} = \frac{360+320}{10}; \overline{\mathrm{X}} = 68\right]$."

Sub-questão 9.1.a)

Na primeira fase, a Joana ligou o significado de média directamente ao algoritmo, respondendo que "a média corresponde à soma de todos os ordenados, dividido pelo número total de indivíduos".

Na segunda fase, continua a utilizar a perspectiva algorítmica da média, reafirmando a resposta dada com uma justificação similar:

> "Significa que a soma dos ordenados dos 50 empregados a dividir pelo número total de empregados, que é 50, é 120. Em média, os empregados recebem cada um 120 mil escudos."

Acrescentando, no entanto, que no caso não terá grande significado estudar a média "porque se calhar há empregados que recebem 300 contos ou assim", ou seja, faz uma referência implícita à alteração da média em presença de valores extremos.

Confessa que, quando se lembra da média, associa logo ao algoritmo, ao processo de calcular. Mesmo quando está a interpretar algo, liga directamente ao processo de cálculo.

Sub-questão 9.1.c)

Na primeira fase, a Joana tinha respondido que não se lembrava do significado de mediana.

Na segunda fase, afirma que "a mediana é 90 mil escudos, quer dizer que é o valor intermédio". E, tentando esclarecer melhor esta resposta, refere:

> "É o ordenado médio de alguns trabalhadores... Há uns que recebem menos que estes, que é o caso dos 80, e outros que recebem um valor superior".

Note-se que não faz, porém, uma ligação explícita a 50% dos valores dos dados.

Sub-questão 9.2

Na primeira fase, a Joana tinha referido que "há empregados que têm um ordenado de 80 mil escudos, o que corresponde à maior parte dos empregados. Há empregados que têm um ordenado muito superior".

Na segunda fase, considera esta ideia válida e acrescenta ainda que "se calhar há outros que até têm um ordenado inferior".

Considera, também, que é na média que a disparidade de ordenados tem mais influência:

> "Neste caso, a média não vai corresponder muito à realidade. A média é 120 mil escudos, a maior parte não é isso que recebe."

Tenta-se saber se a mediana permite formular algum comentário em relação aos ordenados, pelo que a Joana responde:

> "Significa que o valor intermédio é 90 mil escudos, é o que ganham... Depois há aqueles que ganham 80 mil escudos, que deve ser o mínimo talvez."

A investigadora tenta ainda esclarecer se a expressão "a maior parte dos empregados", utilizada pela Joana, se refere a mais de metade dos empregados. Esta afirma que não, argumentando: "a maior parte é no sentido de mais empregados receberem 80 mil escudos".

Questão 10

Na primeira fase, a Joana tinha respondido, correctamente, a todas as perguntas desta questão.

Na segunda fase, continua a concordar com as respostas dadas e faz ainda algumas reflexões relativamente às perguntas 10.2 e 10.4, que se referem a acontecimentos certos:

> "Sair um número menor que 91 é certo. Não sei se aqui também se teria que impor a condição menor que 91 e maior que 1 ou maior que zero. Não sei, mas neste caso aqui [pergunta 10.2], uma vez que é dado no enunciado, isto acho que é certo. (…)
> Sair um número maior que zero também pus que era certo, que é a mesma condição aqui que o 91."

A Joana dá assim a entender que o facto de considerar que o conjunto não está limitado, a leva a questionar se estará a pensar da forma mais correcta. No entanto, intuitivamente, considera correcto o seu raciocínio:

> "É assim, uma vez que aqui tem: roda-se uma tômbola de jogo de 1 a 90. Sair um número maior que zero,… eu já sei que é de 1 até 90, já sei que é... só tenho aqueles números, se é maior que zero são estes todos que estão cá dentro, por isso é certo. Neste caso, aqui, também se é menor que 91, sei que são todos os números que estão lá, por isso..."

Sub-questão 11.1

Na primeira fase, a Joana tinha respondido, correctamente, que era mais provável obter uma bola preta do saco I. Porém, justificou a sua resposta com base em dois raciocínios diferentes: *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* e *Comparar o número de bolas brancas e pretas*.

Na segunda fase, começa por utilizar o raciocínio *Comparar as razões*:

> "Se formos a ver em termos de razão de bolas pretas para bolas brancas, no caso do saco I, temos duas pretas para duas brancas e aqui, neste saco [saco II], temos duas pretas para três brancas, logo é mais fácil tirar uma bola preta neste saco aqui [saco I], que temos menos brancas. (...) A comparar esta razão dá 1, e esta aqui dá um vírgula qualquer coisa. Então aqui [saco I] é mais fácil tirar uma bola preta."

A pedido da investigadora, a Joana explica o procedimento que utilizou na primeira fase. Assim, no que se reporta ao raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* refere:

> "Esta aqui foi com base nas probabilidades. Número de casos favoráveis sobre o número de casos possíveis. Ou seja, o número de casos favoráveis era 2, o número de casos possíveis eram 4, que era o número total de bolas. Por isso dá $\frac{1}{2}$ [saco I]. E aqui, neste caso, dá $\frac{2}{5}$ [saco II]."

E continua a considerar correcto o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*:

> "Sim, concordo com o que está aqui escrito: 'é mais provável sair uma bola preta no saco I, porque embora os dois sacos tenham o mesmo número de bolas [pretas], o I tem menos bolas brancas'; porque, embora tenha o mesmo

número de bolas pretas, este [saco I] tem menos bolas brancas, por isso é mais fácil tirar uma preta aqui, porque aqui tem 3 brancas, não é?!"

A resposta que obtém com este raciocínio é a mesma que nos anteriores pelo que não questiona a sua validade.

Sub-questão 11.2

Na primeira fase, a Joana tinha concluído que era mais provável obter bola preta do saco I, usando o raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, embora também tenha calculado as probabilidades dos acontecimentos.

Na segunda fase, tenta explicar a resposta dada:

> "No fundo é praticamente a mesma coisa. Lá está, respondi também de duas formas diferentes. Fui novamente pelas probabilidades e depois... liguei só ao número de bolas que cada saco tinha. Do género saco I, porque só tem uma bola preta. Também tem menos bolas brancas, o que faz com que a probabilidade de sair branca também seja menor."

A investigadora tenta perceber o raciocínio da Joana quando fala em termos de probabilidade de sair branca em vez de preta, pelo que esta esclarece:

> "Eu tenho uma bola preta e também tenho menos bolas brancas, o que faz com que a probabilidade de sair branca seja menor, pois... por isso a probabilidade de sair preta é maior."

Dialogando com a investigadora, a Joana comenta que calcular as probabilidades dos acontecimentos foi a primeira ideia que lhe surgiu para responder à questão. Todavia, acabou por dar a resposta com base na comparação do número de bolas brancas e pretas.

Questionada sobre a sua concordância actual com este raciocínio, a Joana pondera a resposta dada e, sem mais comentários, utiliza o raciocínio *Comparação de razões*:

> "Ora bem, a probabilidade de sair uma bola preta? Ser mais provável era no saco II, não era?... Neste caso temos 1/2 e 2/3.... Se calhar a probabilidade é a mesma..."

Chega assim a uma resposta diferente, embora por comparação incorrecta das fracções. Voltando por momentos à análise do raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, passa logo para a comparação de razões:

> “ Eu, se calhar, não concordo muito com isto. Porque é assim, esta tem uma bola preta [saco I], aquela tem duas [saco II]. Mas aquele [saco II] tem mais brancas... Por isso tenho uma bola preta para duas brancas [saco I], não é? E aqui [saco II] tenho duas bolas pretas para três brancas…. Há bocado era... É assim, isto dá para resolver em termos de razões e, se eu for ver no saco I, a razão das pretas para as brancas é de 1 para 2 e a razão no saco II é de 2 para 3. Por isso a razão é maior... (faz cálculos) Por isso, a razão é menor aqui. E então é mais provável sair no saco I.”

Novamente por comparação incorrecta de fracções, a Joana considera que "é mais provável que a bola preta saia no saco I", denotando, contudo, bastantes dúvidas.

No entanto, quando se pede para comparar com base nas probabilidades que tinha calculado, conclui que "a probabilidade é maior aqui, para o saco II. Há bocado estávamos no I, agora estamos a ir para o II".

A investigadora pede para a Joana voltar ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas* e começar a decidir se elimina algum procedimento. Esta volta a afirmar que, com base nesse processo, escolhia o saco I. Porém, refere ainda: "no fundo, no fundo, até achava que a probabilidade era a mesma. Devo andar aqui às voltas."

Explica, então, a sua nova opinião, que se baseia na *Comparação do número de bolas brancas e pretas* em cada saco.

> “Estava a fazer de outra forma: tenho uma bola preta para uma branca, sobrava uma branca [saco I]. E aqui [saco II] tenho uma para aqui [uma preta para uma branca] e outra para ali, sobrava uma branca também.”

Neste momento, a Joana revela uma grande indecisão em saber quais os argumentos que considera correctos. A noção intuitiva confunde-a e leva-a a questionar a validade dos cálculos.

A investigadora tenta, então, perceber se considera mais válido algum dos seus raciocínios.

> “Se calhar não tem muita lógica este [raciocínio que acabou de fazer]. Para resolver isto devemos ter que ir pelas probabilidades ou através daquele caso da razão. E, se formos a ver em termos disso, é diferente, não é a mesma coisa. Por isso, o que eu estou a fazer aqui não deve ter grande lógica... foi uma coisa que surgiu assim de repente.”

Depois de analisar a pergunta seguinte, 11.3, à qual tinha respondido, correctamente, usando o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, que continua a manter, a investigadora sugere que a Joana utilize um dos procedimentos anteriores na sua resolução. Em consequência, esta começa por calcular e comparar as razões:

> "Se eu for aqui [pergunta 11.3] em termos de razão dá igual nos dois. Dá duas pretas para uma branca no saco I e 4 pretas para 2 brancas no saco II, dá dois e dá dois. Por isso aqui é [igual a probabilidade].

E, voltando à pergunta 11.2, comenta:

> "Logo na de cima já sei que a probabilidade não é a mesma. É diferente [a razão], por isso a probabilidade não é a mesma. Logo devia ser [o saco] onde é maior a probabilidade. Então, em termos de probabilidade, é maior aqui neste caso [saco II]. Logo devia ser no saco II. É maior a probabilidade de sair preta."

Tenta-se averiguar até que ponto esta resposta é dada com convicção. Pelo que a Joana afirma:

> "Agora digo que é com convicção. Através da regra [de Laplace] e nisto aqui [comparação de razões]. Fazendo o mesmo para aqui [pergunta 11.3], vejo que é igual nos dois. Neste caso, aqui [pergunta 11.2], a razão também é maior no saco II."

A investigadora tenta indagar o que a Joana pensa agora do raciocínio *Comparação do número de bolas pretas e brancas*, que utilizou. Contudo, esta admite que este raciocínio também lhe parece normal, não conseguindo ver o que é que nele está incorrecto, manifestando que continua com dúvidas.

> "Em termos de comparação com o número de bolas... não sei. Tem menos pretas, também tem menos brancas?! Não sei..."

Questão 12

Na primeira fase, a Joana tinha respondido que precisava de tirar 10 bolas do saco, não apresentando qualquer justificação.

Na segunda fase, começa por afirmar que tem de tirar 8 bolas do saco.

> "Para ter a certeza que vamos tirar uma de cada cor temos que tirar 8 bolas, ou seja, temos que tirar 4 vermelhas, 1 verde e 3 brancas."

Todavia, quando a investigadora pede para explicar melhor o seu raciocínio, argumenta:

> “Pensei: se tirasse 4 vermelhas, 1 verde e 3 brancas tinha a certeza que ficava lá uma de cada cor. Não é?! Só que estava a fazer o raciocínio ao contrário...”

Assim, a Joana declara que deu uma resposta incorrecta e, reflectindo melhor, conclui que precisa de tirar 10 bolas, aplicando o raciocínio *Bolas mais numerosas*.

> “Na pior das hipóteses, podem-me sair as 5 vermelhas, as 4 brancas e depois só fico lá com 2 verdes. Tenho que tirar outra e já tenho uma de cada cor. Ou posso tirar também as 5 vermelhas, as 2 verdes e depois tirar... para tirar as 5 vermelhas e as 2 verdes... depois só preciso de tirar mais uma para me sair uma de cada cor. Mas, na pior das hipóteses, eu só preciso de tirar 10 bolas, que era no caso de ficarem lá só as 2 verdes, depois só tirava mais uma. Não é?! Agora se for a ver por aí. Se eu tirasse, por exemplo, as 5 vermelhas e as 2 verdes seguidas, depois só precisava de tirar uma daqui [das bolas brancas]. Aí, nesse caso, tirava 8. Mas, para ter a certeza de obter uma bola de cada cor, tinha que tirar 10.”

Questão 13

Na primeira fase, a Joana deu correctamente um exemplo de acontecimento impossível (pergunta 13.2) e outro de acontecimento possível mas não certo (pergunta 13.3). Contudo, no que respeita ao acontecimento certo (pergunta 13.1) respondeu: “neste caso não há acontecimento certo”.

Na segunda fase, inicialmente mantém a sua opinião e tenta justificar porque é que disse que não havia um acontecimento certo:

> “Respondi: neste caso, não há acontecimento certo. E não há. Se se responder sair uma bola, e nesse caso já se sabe que vai sair. Agora... não posso dizer nem as cores, que eu não sei. Pode sair qualquer uma. Pode sair ou azul, ou vermelha, ou verde. Por isso aqui, neste caso, não estou a ver nenhum acontecimento certo. Não estou a ver.”

Embora mencione explicitamente exemplos de acontecimentos certos não os identifica como tal, pois está consciente de que não pode escolher apenas uma cor e ter a certeza que ela vai sair. Além disso, na sua perspectiva, o acontecimento sair uma bola, não é verdadeiramente um acontecimento certo.

A investigadora traduz a questão de outra forma, perguntando se não há nenhum acontecimento que possa dizer que tem a certeza que vai realizar-se. Agora, a Joana, embora com algumas reticências, responde: "sair uma bola". Seguidamente, quando lhe é solicitado outro exemplo, diz: "sair uma bola azul, ou uma bola vermelha, ou uma bola verde".

5.2. A Teresa

A Teresa tem 22 anos, é simpática e comunicativa. Aceita facilmente críticas e sugestões, não se inibindo em esclarecer alguma dúvida que lhe surja.

No início da Prática Pedagógica, face ao comportamento irreverente de determinados alunos da turma, manifestou alguma insegurança e desmotivação. Contudo, revelou-se uma jovem com iniciativa, persistência e vontade de trabalhar, não se poupando a esforços para conseguir cumprir o que se propunha.

A atracção da Teresa pela profissão de professora manifestou-se desde pequena. No entanto, quando concorreu para o ensino superior, não sabia muito bem o que queria. Porém, como tinha familiares professores e adorava Matemática e Biologia, acabou por escolher o curso de Professores do Ensino Básico variante Matemática e Ciências da Natureza como primeira opção, curso que considera interessante e do qual está a gostar muito. Todavia, julga que certas disciplinas têm apenas um carácter formativo contribuindo somente para a formação científica dos futuros docentes.

> “Mas acho que no fundo, no fundo, há cadeiras no curso [como a Análise e a Álgebra] que nos são mesmo desnecessárias, servem mais para o professor estar dentro do assunto, tentar dar melhores explicações aos seus alunos. Fazem parte do currículo para aumentar o nosso próprio currículo, a nossa formação e cultura.”

Argumenta também que os programas das disciplinas de Matemática em vigor na Escola Superior de Educação deveriam contemplar o maior número possível de áreas temáticas a leccionar no 2º ciclo.

A Teresa estudou em França até ao 5º ano (4º ano do ensino português), o que lhe permite contrapor o tipo de actividades lectivas promovidas pelos docentes nos dois países. Assim, manifesta preferência por aulas práticas e critica as aulas de Matemática que teve em Portugal, pois considera que os professores dão mais teoria e acabam por cair na rotina.

> "Cá [em Portugal] apanhei sempre professores de uma certa idade, muitos deles já na rotina. Já dão mais teoria que a própria prática, enquanto que eu gosto mais de prática (…). Por lá [França] era mais prática e pouca teoria. Nota-se muita diferença, eram mais actividades. Aqui é mais livro e exercícios e mais nada… Nós lá não (…). Os exercícios, levávamos para casa. O professor perguntava se tínhamos dúvidas e corrigia-os, se não passávamos a matéria à frente. Mas os trabalhos eram sempre verificados."

E exemplifica: "quando, por exemplo, demos o volume do cubo… primeiro construímos e depois é que se falava nisso. Não só com cartolina mas também levávamos plasticina, usávamos vários materiais."

Considera que aprendia melhor se nas aulas não estivessem dispostos em grupo, pois "há muito mais barulho", sendo a tradicional disposição em filas a sua preferida. Embora também gostasse da disposição em U, que associa às "aulas práticas" em que trabalhava com diferentes materiais.

5.2.1. A Teresa e a estocástica

A Teresa lembra-se que estudou estatística, pela primeira vez, no 5º ano [4º ano do ensino português].

> "Como era uma introdução, sei que fizemos uma pesquisa concreta. Também fizemos tipo um inquérito, organizámos os dados… como se costuma usar aqui já no 5º ano."

Mais tarde, já em Portugal, pensa que ainda estudou estatística no 3º ciclo, mas não se recorda bem.

No ensino secundário abordou os temas estatística e probabilidades. No 10º ano, recorda-se que falaram nas tabelas de frequência, aprofundando, no 11º ano, os conhecimentos sobre estatística e, no 12º ano, estudou probabilidades. Nessa altura, apenas considerava complicado as probabilidades, mais concretamente o cálculo combinatório, pois referiu que tinha dificuldades em distinguir arranjos de combinações quando resolvia exercícios.

No curso que frequenta, as dificuldades que teve na disciplina de Probabilidades e Estatística cingiram-se essencialmente a esses conteúdos, embora de forma mais moderada. Todavia, obteve aproveitamento, com a classificação de 12 valores, à disciplina na primeira inscrição.

Gosta de estatística, pois pensa que é um tema interessante e motivador para os alunos. De probabilidades gosta menos, talvez por ter mais dificuldades nesse âmbito.

Afirma que é importante para a sua formação a existência da disciplina de Probabilidades e Estatística no curso.

> "Acho que a Estatística é mais importante que a Análise e a Álgebra. A disciplina de Probabilidades e Estatística, para mim, está mais ou menos bem inserida no curso…"

Quanto aos conteúdos leccionados nesta disciplina, considera-os adequados, não lhe ocorrendo mais nada que fizesse falta abordar ou aprofundar.

Antes de leccionar a unidade de Estatística, referiu que se recordava de todos os conteúdos que fazem parte do programa, considerando-os "bastante acessíveis".

Após leccionar a unidade, embora em termos globais pense que não precisa de mais formação nesta área, considera que cada estagiário pode ter dúvidas em aspectos diferentes das matérias e sentir necessidade de ser mais esclarecido em relação a certos conteúdos.

> "Talvez a parte dos acontecimentos. Mas, lá está… porque eu própria tenho dúvidas nessa parte das probabilidades. Agora, se outra pessoa tivesse dúvidas na média ou na moda, diria talvez que… tem falta de formação na moda. Isso tem mais a ver com as nossas dificuldades."

Em termos metodológicos, pensa que faz falta discutir aspectos relacionados com a didáctica da estatística e das probabilidades.

> "Também devia existir outra disciplina que nos levasse a falar de estratégias e actividades que podíamos nós próprios utilizar. Podíamos, nessa parte dos acontecimentos, analisar, por exemplo, o programa do 5º e 6º ano. Ver que tipo de actividades podiam ser feitas para determinado conteúdo, determinada unidade, nem que a gente fosse por unidades."

Ideias associadas à estocástica e ao seu ensino

Num primeiro impacto, associa estatística ao Estado e considera que "é uma ciência aplicada [da] matemática, mas dentro da matemática", e associa probabilidades a acontecimentos.

Quanto ao ensino, pensa que "a parte de estatística até é fácil", mas "o professor, no mínimo, tem que possuir conhecimentos sobre o tema (…), tem que estar minimamente preparado para as perguntas que os alunos possam vir a fazer", ou seja, "tem que dominar todos os conteúdos".

Para a Teresa, saber estatística e probabilidades está directamente ligado à aplicação prática, como, por exemplo, fazer exercícios ou outro tipo de actividades, pelo que "o professor tem de saber para depois aplicar o conhecimento". Já ensinar estatística ou probabilidades "tem a ver com explicar determinados conceitos. Por exemplo, no que os alunos erraram… para saber passa-se pelo ensino, que é a explicação."

Declara que a estocástica, para além dos conteúdos que lhe são inerentes, não traz ao ensino nada de novo comparativamente a outras unidades. Porém, considera específico da estatística a abordagem de vários tipos de gráficos e, no caso das probabilidades, o trabalho com situações que permitam que o aluno esteja mais activo.

> "A estatística trabalha-se com vários tipos de gráficos. Não havia outra unidade que trabalhasse com gráficos, só os circulares. A estatística abrange mais gráficos. As probabilidades mais actividades, no sentido de serem com saco, com baralho de cartas. (…) O aluno está mais activo."

Além disso, embora afirme que o ensino da estocástica não é diferente do ensino de outras unidades, pensa que o trabalho de grupo é "mais importante na unidade de Estatística do que nas outras". Considera ainda que a estatística e as probabilidades se relacionam de certa forma com outras unidades didácticas:

> "Eu acho que a estatística e as probabilidades se englobam dentro das outras unidades. Por exemplo, a estatística trabalha-se com gráficos. Na proporcionalidade directa também se aplicam gráficos, não de barras mas dos outros. Nas probabilidades trabalhamos com números e trabalhamos com números também em estatística. Nos números decimais acho que também se trabalha. Logo, à partida, para dar esses dois conteúdos, o aluno tem que saber um bocadinho de outras unidades."

A Teresa afirma que é importante os alunos terem estatística no 2º ciclo, pois

> "numa sociedade baseada na tecnologia e na comunicação, organizar, descrever, exibir e interpretar dados e tomar decisões com base nessa informação são capacidades de importância crescente. Estes processos são particularmente importantes para crianças mais novas porque podem ser

> usados para resolver problemas intrinsecamente interessantes que representam aplicações significativas da matemática”.

Porém, considera que “o tema tem pouca ênfase no programa”.

Quanto ao 1º ciclo, pensa que a importância depende do ano, pois considera que o seu estudo no 4º ano seria uma forma de introduzir o tema para o 5º ano, mas que antes seria complicado para os alunos.

> “No 1º e 2º ano, coitadinhos, acho que não chegavam lá. E no 3º ano talvez complicassem ainda um bocadinho. Mas no 4º ano já se podia aplicar.”

5.2.2. A prática pedagógica da Teresa

Influência dos orientadores

A Teresa afirma que na unidade de Estatística os orientadores interferiram muito pouco, já que aceitaram perfeitamente as escolhas que fez no que respeita às tarefas a desenvolver na sala de aula. Além disso, pensa que assumiu perfeitamente o controle da turma e a sua posição como professora.

> "Acho que senti que as aulas eram minhas, assim como a turma. Acho que trabalhei com o meu esforço. Nesse aspecto, senti-me realizada. Fui eu que dei a ideia, ninguém se pôs contra, aceitaram. É porque a coisa estava certa. É bom aceitar críticas, e eu aceito-as. E a gente está habituada a ouvir algumas críticas, neste caso não ouvi críticas."

Pelo que a investigadora observou, a professora cooperante não tinha por hábito fazer grandes comentários no fim das aulas a não ser, por vezes, dizer muito rapidamente o que pensava da aula. A professora orientadora da ESE também comentou que, nesta unidade, deu pouco apoio à estagiária pelo que não considera ter havido grande influência da sua parte.

Houve, no entanto, algumas situações pontuais em que prevaleceu, de certa forma, a ideia da professora da turma. Por exemplo, a Teresa não sendo apologista do uso indiscriminado da máquina de calcular, acabou por aceitar o seu uso constante para as actividades porque esta já era uma prática corrente nas aulas leccionadas pela professora. Também no que se refere à avaliação da unidade de Estatística, embora a Teresa pretendesse, para além dos outros parâmetros habituais da avaliação contínua, avaliar os alunos através de um trabalho de grupo sem recorrer à tradicional ficha de avaliação, foi-lhe sugerido pela professora cooperante que incluísse os temas de Estatística numa ficha de avaliação sumativa.

Planificação da unidade e preparação de aulas

A professora orientadora da Teresa solicitou a elaboração de um plano de unidade que englobasse a calendarização, os objectivos, os conteúdos, as estratégias gerais, os recursos e os meios de avaliação para a unidade. Este plano é normalmente realizado na primeira semana em que começam a leccionar o tema.

Pela atribuição inicial das unidades a leccionar pelas estagiárias, a colega de estágio da Teresa deveria ter iniciado a unidade de Estatística, pelo que começou ela a elaborar o plano de unidade. Porém, como houve um atraso em outras unidades, relativamente à previsão feita, foi a Teresa que introduziu o tema. De qualquer forma, adaptou o plano à sua visão pessoal e, embora não tenha alterado os objectivos, pois pensa que estavam “bem formulados”, reformulou as estratégias, os recursos e a avaliação.

Quando soube que ia dar a unidade de Estatística, a Teresa consultou vários manuais escolares, um *site* da Internet sobre estatística, do qual não chegou a fazer uso directo, e foi rever os apontamentos da disciplina de Probabilidades e Estatística. Recorreu também ao Programa de Matemática, onde consultou os conteúdos e as sugestões metodológicas.

> "O programa serviu também para ver mais ou menos o tempo que dedicavam à Estatística, para ver as estratégias que utilizavam. Acho que utilizei algumas que lá vêm. E prever alguns objectivos, para ver quais eram os mais importantes eles atingirem".

Utilizou ainda o manual escolar dos alunos, como guia, para determinar a ordem de abordagem dos conteúdos e o tempo que devia dedicar a cada um deles, sendo este acordado com a professora da turma.

Recorreu também a outros manuais escolares com o intuito de seleccionar tarefas que permitissem introduzir os novos conteúdos, e escolher os exercícios a propor por escrito nas aulas e a incluir nas fichas de trabalho. Embora considere que as actividades “se resumem quase todas à mesma ou muito parecida”, o seu critério de selecção foi o seguinte: “ser mais fácil de os alunos entenderem e de eu lhes explicar”; admitindo que se encontrava algo um pouco mais complicado colocava praticamente de lado.

A prática lectiva

O início da prática lectiva em Matemática da Teresa coincidiu com o início da unidade de Estatística e, portanto, com a assistência às aulas por parte da investigadora. Todavia, a Teresa já tinha assistido às aulas da colega de estágio nessa mesma turma. Também já tinha leccionado em Ciências da Natureza numa outra turma, pelo que não foi a primeira vez que esteve à frente de uma turma de alunos deste nível de ensino.

A turma e o ambiente

A turma era constituída por 21 alunos, 8 raparigas e 13 rapazes, com idades compreendidas entre os 10 e os 13 anos.

Quanto ao aproveitamento, segundo a Teresa, tratava-se de uma turma heterogénea visto que existiam alunos com vários graus de dificuldade, embora considerasse que havia alguns bastante empenhados:

> “Algumas destas crianças provêm de um estrato social muito peculiar, no qual convivem com certas situações que as tornam frágeis e carentes. (…)
> Nesta turma existem alunos de todos os níveis, ou seja, bons alunos, médios alunos e maus alunos. Pude constatar que alguns alunos, embora sendo alunos médios ou maus, mostram muito interesse e esforço por aprender cada vez mais.”

Na sala de aula as mesas estavam dispostas em filas horizontais paralelamente ao quadro. No entanto, embora não gostasse muito desta disposição, pois “dava menos liberdade de movimentação ao professor”, não a alterou porque “as salas eram pequeninas e a turma bastante grande. E se fosse pôr assim [carteiras em filas, alunos dois a dois] ocuparia muito espaço”.

A Teresa era afável com os alunos e atenta às suas dificuldades, manifestando sempre disponibilidade para os atender. Contudo, houve alunos que não se mostraram disponíveis para colaborar nas actividades propostas e para ouvir os colegas e/ou a professora, pelo que o ambiente que se gerou na sala de aula nem sempre foi o melhor para promover a aprendizagem.

A abordagem conceptual

A Teresa começou por programar oito aulas para a unidade, duas das quais dedicadas a um trabalho de grupo. No entanto, devido às dificuldades manifestadas pela turma, ocupou mais tempo com alguns conteúdos, acabando por dar um total de 11 aulas.

Introduziu a unidade recorrendo à apresentação de um texto – *A estatística ao longo dos tempos* – que para além de retratar um pouco da história da estatística, aludindo ao recenseamento mais antigo de que se tem conhecimento, à origem da palavra estatística e à estatística em Portugal, faz também referência aos conceitos de estatística, estatística descritiva e indutiva. A Teresa fez uma exploração superficial deste texto dando ênfase ao conceito de estatística e mencionando os termos censo e sondagem.

Com o intuito de levar os alunos a "reconhecer ou identificar a frequência absoluta", apresentou uma situação em acetato – o calendário do mês de Abril de 1996 em que estão assinalados os dias em que fez sol, esteve nublado e choveu – e propôs que os alunos construíssem uma tabela de frequências para registar a contagem e a frequência absoluta para cada um dos estados do tempo.

Seguidamente, pediu a cada aluno que dissesse a sua idade, que foi registada no quadro. Com base nestes dados, propôs aos alunos que construíssem a respectiva tabela de frequências.

Tendo como conteúdos orientadores a frequência absoluta e os gráficos de barras, começou por apresentar, em acetato, exemplos de diferentes formas de organizar a informação: tabela de frequências, gráfico de barras, gráfico circular, pictograma e, no caso dos gráficos, explorou aspectos gerais da sua construção.

Pretendendo explorar mais detalhadamente a construção de gráficos de barras propôs, em acetato, uma nova tarefa – Simulando o planeamento de uma visita de estudo, considerando as cidades de Lisboa, Braga, Coimbra e Porto, os alunos tinham de escolher a cidade que preferiam visitar. Depois de recolhidos os dados, pediu aos alunos para construírem uma tabela de frequências e um gráfico de barras. A correcção desta última actividade foi feita no quadro em diálogo com os alunos, focando a Teresa os aspectos fundamentais a ter em conta na construção dos gráficos de barras. Outros exercícios do mesmo género foram concretizados pelos alunos.

Para introduzir o conceito de moda, recorreu a uma situação onde apresentava os dados, não agrupados e numa tabela de frequências, relativos ao tamanho das sapatilhas que um grupo de alunos calçava numa aula de *ballet*. Foi com base na tabela que, em diálogo com os alunos, a estagiária tentou chegar à noção de moda.

Através de várias palavras escritas no quadro, como *Mariana*, *Totoloto*, *André* e *rara*, pediu-lhes para verem qual era a letra que se repetia mais vezes, ou seja, para indicarem a moda. Realçou, assim, os casos em que não existe moda e em que existem duas modas.

Com o intuito de abordar o conceito de média, propôs uma situação problemática: "A Sara resolveu registar as suas despesas diárias durante 5 dias. Assim, ela gastou: 120 escudos na segunda-feira, (…) e 105 escudos na sexta-feira"; orientando as questões – "Quanto gastou a Sara nos 5 dias? Se essa quantia correspondesse a despesas diárias iguais, quanto teria a Sara gasto por dia?" – no sentido da aplicação faseada do algoritmo da média.

Utilizou outro exemplo: cálculo da média do número de automóveis por família numa dada aldeia (2 famílias têm 1 automóvel, 1 família tem 4 automóveis e há 2 famílias que não têm automóvel). Obtendo o valor 1,2, concluiu que "a média não corresponde a um facto real".

Fez ainda uma ficha de trabalho que englobava a moda, a média aritmética e a construção de tabelas de frequências.

No que reporta ao conteúdo de 'Probabilidade de um acontecimento', propôs a discussão sobre a probabilidade de ocorrência de determinados acontecimentos que se referiam ao Verão em Portugal – "Choverá?; Haverá dias em que a temperatura do ar será superior a 30ºC?; Nevará?; A temperatura da água será superior a 30ºC?; O céu estará limpo?" – introduzindo, assim, os termos provável, certo, impossível, possível, menos provável, igualmente provável e mais provável.

Numa outra actividade, organizou os alunos em grupos e forneceu a cada grupo um dos materiais seguintes: roleta, dado numerado de 1 a 6, baralho de cartas, caixa com caricas de sumos de diferentes cores. Distribuiu ainda uma ficha de trabalho em que cada grupo tinha de responder às questões alusivas ao seu material. Na ficha, para além de se comparar as probabilidades de diferentes acontecimentos, também se solicitavam exemplos de um acontecimento certo, um acontecimento impossível e um acontecimento possível.

Realizaram também uma ficha de trabalho – Probabilidade de um acontecimento – que incluía questões alusivas à comparação de probabilidades de acontecimentos e à classificação e exemplificação dos diferentes tipos de acontecimentos.

Para verificar a aquisição dos conhecimentos relativos à estatística foi proposto um trabalho de grupo, em que os elementos de cada grupo tinham de passar um inquérito à turma. Depois, deviam organizar os dados numa tabela de frequências e construir um gráfico de barras, indicar a moda, se existisse, e calcular a média. Solicitava-se, ainda, a análise dos resultados e o registo dos comentários que lhes parecessem mais adequados. Finalmente, deviam apresentar o trabalho à turma.

A perguntas do inquérito eram de resposta fechada, pelo que era pedido apenas para marcar uma cruz na opção escolhida. Cada grupo ficou com uma questão, sendo as questões contempladas: "Se a turma do 6º B realizasse uma visita de estudo, preferiria ir ao/a:; A minha disciplina preferida no 6º ano é:; Nos meus tempos livres prefiro:; Um dia mais tarde gostaria muito de ser:; Qual o teu desporto preferido?; Que tipo de sobremesas preferes?; Qual a tua cor favorita?"

As tarefas

A tabela 44 pretende dar uma ideia do tipo de gráficos utilizados pela Teresa, durante as aulas, no que se refere à sua construção, leitura e interpretação.

Tabela 44. Identificação do tipo de gráficos utilizados.

Actividades	**Tipo de gráficos**				
	Barras		Pictogramas	Circulares	Histogramas
	Simples	Duplas			
Construção	X	–	–	–	–
Leitura e interpretação	X	–	X	X	–

Analisando a tabela, constata-se que, em termos de construção, foi dada apenas relevância aos gráficos de barras. Para além disso, a Teresa dedicou muito mais tempo das aulas a actividades relacionadas com este tipo de gráfico do que a outras representações gráficas. Esta opção é perfeitamente explicável pelo facto do programa do 6º ano, na unidade de Estatística, dar somente ênfase a este tipo de representação gráfica e, embora apresente como objectivo "ler e interpretar informação contida em tabelas ou gráficos", deixa ao critério do professor a escolha do tipo de gráficos a explorar.

Os gráficos circulares são referidos, em termos programáticos, na unidade de Proporcionalidade directa. Esta unidade foi leccionada pela colega de estágio da Teresa, que propôs aos alunos actividades que envolveram a leitura, interpretação e construção de gráficos circulares. Assim, a Teresa limitou-se a fazer uma breve referência a esta forma de apresentação de dados baseada na leitura e interpretação de um exemplo concreto. Aplicou um procedimento idêntico para os pictogramas, que é um conteúdo abordado no 5º ano por alguns professores, embora no programa não lhe seja feita uma referência explícita.

Referindo-se às suas opções relativas aos gráficos, a Teresa comentou:

> "… a professora também me disse que era mais o gráfico de barras. Optei por trabalhar com eles apenas o gráfico de barras, mas expliquei-lhes que existiam outras formas de representar os gráficos e que muitas delas já conheciam porque já tinham sido dadas no 5º ano. Só recordei e eles relembraram."

Embora não analisasse nem construísse nenhum histograma, a Teresa, numa das aulas, chamou a atenção dos alunos para a sua existência de uma forma um pouco confusa.

> "Se abrirem o livro na página 166 [exercício que propõe a construção de um histograma referente ao peso dos alunos de uma classe de um clube de ginástica] podem ver que há gráficos que têm barras conjuntas.
> Enquanto que aqui [nos gráficos de barras] trabalhamos com um dado concreto, um local, uma idade; neste caso [histograma] são medidas que fixam valores compreendidos. Por exemplo, falámos de 1 metro e 2 metros. Fazemos as barras juntas. (…) Este tipo tem o nome especial de histograma."

A tabela 45 pretende estabelecer uma classificação quanto ao tipo de variáveis e de dados das tarefas alusivas à moda e à média, propostas pela Teresa durante as aulas.

Pela tabela, pode verificar-se que, na generalidade, a Teresa propôs tarefas envolvendo caracteres qualitativos e quantitativos, predominando, no entanto, as relacionadas com o cálculo em detrimento da interpretação desses conceitos num dado contexto. De qualquer modo, actividades relacionadas com a interpretação também não foram previstas em termos de planificação da unidade, pois apenas referiu objectivos relacionados com a definição e identificação da moda e com a definição e o cálculo da média e a sua aplicação em situações da vida real.

Tabela 45. Classificação do tipo de variáveis e de dados utilizados nas tarefas.

	Variáveis qualitativas			**Variáveis quantitativas**		
	Dados não agrupados	Dados agrupados		Dados não agrupados	Dados agrupados	
Conteúdos		Tabelas de frequências	Gráficos		Tabelas de frequências	Gráficos
Moda	X	X	–	X	X	–
Média	X	–	–	X	–	–

A identificação da moda é feita numa variedade considerável de situações, mas nunca a partir de gráficos. Embora num exercício apresente primeiro um gráfico de barras e depois indique a moda, a justificação dada é baseada na definição: “a moda é o mês de Maio, com maior valor de frequência absoluta, que é 200”, e não é chamada a atenção para a ‘barra mais alta’. O mesmo se passa no caso dos trabalhos apresentados pelos alunos. No que se refere à identificação da moda a partir de gráficos circulares e pictogramas, a sua não consideração terá alguma explicação pelo facto da Teresa lhes ter dado pouca ênfase nas aulas.

De qualquer forma, considera que, no 2º ciclo, podia ser pedida a identificação da moda a partir de gráficos.

> “…à partida, os alunos já deram os gráficos, não só no 5º ano como também em matérias atrás, na [unidade didáctica de] Proporcionalidade directa, e eles também têm que ter os conhecimentos anteriores presentes. Portanto, acho que não havia problema nenhum em se aplicar um gráfico."

E referindo-se mais concretamente aos gráficos circulares:

> "Eles viam logo que…Pelo tamanho, não da barra, mas também pelo número [frequência relativa] e pela… pela área.”

No caso da média, embora tenha proposto actividades que envolviam variáveis qualitativas, não as explorou da melhor forma, limitando-se a aceitar como válidas algumas fórmulas de cálculo, sem fazer a devida interpretação das situações (ver As dificuldades da Teresa).

A partir do momento em que ficou esclarecida de que no caso das variáveis qualitativas não tinha significado calcular a média, num primeiro impacto, deixou de considerar que este tipo de questão fosse importante no 2º ciclo. Contudo, reflectindo mais um pouco, considerou que, de alguma forma, se deviam clarificar este tipo de situações.

> "Já que nós temos a dúvida em grandes, acho que isso já devia ser clarificado. Mas o programa não foca isso. Mas acho que seria já uma boa ideia de … embora eles ainda não percebessem muito bem isto. Já seria uma ideia de lhes explicar que existem dados em que se pode calcular a média e outros não."

Não propôs exercícios para calcular a média directamente a partir de dados agrupados, ou seja, nunca utilizou o algoritmo da média ponderada. Embora num dos exercícios tenha pedido primeiro para construir a tabela de frequências, esta não foi utilizada para determinar a média.

Comentando este facto, a Teresa referiu que a professora cooperante lhe transmitiu a ideia de que seria mais complicado para os alunos usarem o algoritmo da média ponderada. Porém, a sua opinião é que "até era mais fácil, que não tinham que estar a somar aquilo tudo, porque às vezes os dados são tão grandes ou tão compridos que, por vezes, eles acabam por esquecer-se de um ou dois."

É ainda de realçar o exercício, já referido, em que apareciam dois dados com valor zero e se pedia para calcular a média. Embora este exercício permitisse uma discussão sobre a importância deste tipo de valores no cálculo da média, permitindo começar a prevenir a concepção errada de que o zero pode funcionar como elemento neutro, a Teresa apenas se limitou a aplicar o algoritmo, não parecendo ter havido qualquer intuito particular em escolher uma tarefa deste género.

Para além dos exercícios que envolviam a aplicação directa do algoritmo da média simples, não foi abordado, no caso da média, outro tipo de actividades. A Teresa afirmou "não ter visto nem reparado em exercícios diferentes daqueles que deu".

Assim, quanto a outro tipo de situações alusivas à média, por exemplo, dada a média determinar valores possíveis para os dados, considerou que "era complicado para alunos do 2º ciclo", pois teria dificuldades de abordar a sua resolução ao nível dos alunos.

Também no que se refere às questões em que se pede um dado desconhecido, conhecida a média, ou para calcular a média a partir de duas médias dadas não considerou que fossem exercícios que se devam propor aos alunos deste nível de ensino, pois se ela própria tinha dificuldades na sua resolução, os alunos teriam muitas mais.

No que se refere às probabilidades, o tipo de tarefas que propôs implicava essencialmente a classificação, exemplificação de acontecimentos e a comparação de vários acontecimentos quanto à sua probabilidade de ocorrência.

Relativamente a um exercício, menos rotineiro, sobre acontecimentos em que, dada a relação de bolas de cada cor existentes num saco, se perguntava quantas bolas se tinham de tirar do saco para ter a certeza de obter uma de cada cor, comentou: "eu não consigo fazer, portanto acho que também não me ocorreria lá [na aula]. (…) Acho que nem conseguia explicar".

Quanto a tarefas que envolvem a discussão sobre a equidade de determinadas condições de um jogo, considerou complicado realizá-las com a turma, não tanto no que se reporta aos conceitos envolvidos, mas devido ao comportamento dos alunos.

> "É assim, nessa idade acho que é um bocado complicado. Quer dizer, isto pelos alunos que eu tenho. Acho que chegavam a meio e já se estavam a bater... É assim, acho que depende muito dos alunos. Porque há alunos que aceitam isso e aceitam perder e há outros que não aceitam, que têm de ganhar à força, custe o que custar."

Em termos gerais, uma das razões que a orientou na selecção de exercícios foi a natureza da turma, tendo deixado alguns de lado por os considerar complicados para os alunos.

> "...talvez porque eles não percebessem bem. E já notei que a turma, quando não percebe bem, ainda é pior. Faz confusão, faz um emaranhado. (...) E acho que deixei um exercício ou dois de estatística por dar por causa disso, acho que era um pictograma [tinha um boneco incompleto] e um histograma de um manual."

Além disso, admitiu que, por vezes, não fez outro tipo de actividades porque não se lembrou e seguiu aquilo que encontrou primeiro:

> "Às vezes a gente não se lembra, e vai-se ao mais rápido. Ou então fica-se logo com o primeiro exemplo, e então já nem se vai explorar, nem se vai ver mais nada, segue-se directamente aquela linha e acabou."

Neste aspecto, pensa que os manuais têm uma certa influência, pois focam menos determinado tipo de tarefas e foi precisamente o recurso que usou mais para seleccionar as actividades concretizadas nas aulas.

Comentários

Numa fase inicial, e embora alguns conceitos da unidade já fizessem parte do 5º ano, a Teresa conduziu as aulas apresentando os conteúdos de uma forma sequencializada e, em certa medida, compartimentada. Tabelas de frequência, gráficos (essencialmente de barras), moda, média e acontecimentos apareceram rigidamente por esta ordem sem haver, nesta fase, uma tentativa de aproveitamento das actividades para de certa forma interligar os conceitos. Assim, primeiro explorou somente a organização de dados em tabelas de frequência, posteriormente utilizou exercícios em que pedia a organização dos dados em tabelas para construir gráficos de barras. Para falar na moda apresentou novas actividades sem aproveitar as já realizadas e não fez qualquer ligação explícita com os gráficos, o mesmo se passando no caso da média. O estudo sobre a probabilidade de alguns acontecimentos foi também apresentado sem estabelecer qualquer relação com os temas estatísticos leccionados.

Apesar de todos estes aspectos, o trabalho que a Teresa pretendia que os alunos realizassem: elaborar um inquérito, recolher os dados, organizá-los em tabelas de frequências, construir gráficos de barras, identificar a moda e calcular a média e, finalmente, analisar e interpretar os dados, permitiria de certa maneira, (principalmente se pudessem escolher o tipo de gráfico de acordo com os dados), que eles aplicassem os conhecimentos estatísticos adquiridos a uma situação real e que entendessem de que forma estes podem ser utilizados para atingir um determinado fim. Todavia, os objectivos da Teresa não foram concretizados.

Como “faltavam poucas aulas para dar a unidade”, a professora da turma sugeriu que fornecesse um inquérito já construído, o que fez com que esta ficasse um pouco desiludida "porque queria que o trabalho saísse completamente diferente". Esta situação fê-la reflectir um pouco sobre a organização dos conteúdos da unidade em termos temporais.

> "Mas pronto. Porque se a turma fosse mesmo minha, lá está, tinha dado talvez... porque a recolha e as tabelas de frequência e os gráficos são revisões.

> A média e a moda podem ser dadas numa aula. Portanto, acho que dividia mesmo as aulas em duas ou mais, uma talvez com exercícios e a outra dava-lhe à vontade para explorarem, fazerem o tal trabalho. A turma não é minha, a responsabilidade não é minha."

Para além disso, as questões que a Teresa forneceu aos alunos não foram as mais adequadas para lhes permitir calcular a média correctamente. É de realçar, também, que praticamente nenhum grupo fez a análise e interpretação dos dados requerida.

Estes factores, o pouco tempo disponível para os alunos realizarem o trabalho na aula, com o intuito de esclarecerem dúvidas (parte do trabalho ficou para fazerem extra-aula), e, em certa medida, algumas dificuldades da Teresa em se aperceber de determinadas respostas incorrectas (ver As dificuldades da Teresa) contribuíram para que a exploração desta actividade não fosse aproveitada em todas as suas potencialidades.

A Teresa pretendia, ainda, que o trabalho servisse para substituir a ficha de avaliação sumativa, pois pensa que o trabalho em grupo é "um método importante nesta unidade", já que envolve actividades de pesquisa que, no seu entender, são um aspecto a valorizar em termos de avaliação:

> "Os alunos devem pesquisar e não devem ser apenas avaliados pelas fichas sumativas. A avaliação deverá ser contínua. (…)
> Acho que é uma boa forma. É a forma de eles fazerem inquéritos e explorar tudo o que foi dado na aula. À partida, todos eles, só pelo esforço,… realmente. Há que ter em atenção a pesquisa que eles fizeram, porque houve alunos que fizeram pesquisas. Acho que, por mim, bastava como avaliação. (…)
> Mas acho que dá perfeitamente para avaliar com trabalhos, sem fazer teste. Implica pesquisa, lá está, actividades de pesquisa dos próprios alunos."

No entanto, por sugestão da professora cooperante, acabou por incluir conteúdos de estatística na ficha de avaliação sumativa.

Para além dos elementos de avaliação citados, utilizou ainda uma grelha de registo de realização dos trabalhos de casa, que era preenchida pelos próprios alunos sob a sua supervisão, e uma grelha de observação onde constavam os itens: comportamento, interesse, participação, realização de actividades e manipulação correcta do material.

A Teresa opina que todos estes elementos devem interferir na avaliação. Contudo, considera que se deve dar maior peso às fichas de avaliação: "o teste a valer 75% e o resto… pelo menos 25%”. Esta ideia parece provir da sua experiência enquanto aluna e do seu contacto com o sistema de ensino como estagiária:

> “[Deve-se dar maior relevância aos testes] porque toda a gente… o professor dá sempre mais relevância ao teste. (…) É muito giro a gente dizer agora que não concorda. Mas, no fim, vamos acabar todos por fazer isso. (…)
> Depois uma pessoa acaba por adoptar esse sistema também. Talvez porque seja mais fácil ou qualquer coisa, e pronto está despachado. Eu falo por mim, quando andava no ciclo, era raro o professor que via quem fazia ou não os trabalhos de casa. E as grelhas de avaliação?! Acho que isso nunca se viu fazer. Por isso qualquer professor deve acabar por… no primeiro ou no segundo ano [em que está a leccionar], talvez concorde [em não dar só relevância aos testes], mas depois…”

Na primeira aula da unidade, a Teresa falou em censo e sondagem como abordagens diferentes ao estudo em estatística, mas não esclareceu qual é a diferença entre eles. Comentando este facto, referiu que, embora não fazendo parte do programa, pensa que é importante os alunos terem uma noção do conceito de censo e sondagem, assim como do conceito de população e amostra.

> “Acho que se deviam já dar, porque os alunos às vezes falam disso, por palavras próprias deles. Para eles amostra e população significa a mesma coisa. Se já lhes desse o conceito de população e amostra, eles ficariam com outra perspectiva e já não baralhariam as coisas.”

No início da unidade fez alguma referência à história da estatística porque

> “todos os conteúdos devem ter uma certa relação com a história da matemática. E o livro deles não focava a história da estatística, e eu achei que podia ser ao mesmo tempo importante, uma forma motivadora de introduzir a nova unidade.”

Neste nível de ensino as tabelas de frequência aparecem, inicialmente, com a contagem. No entanto, nem sempre deu o verdadeiro sentido a essa contagem. Por exemplo, para explicar o que é a contagem, contou primeiro numericamente, ou seja, determinou implicitamente a frequência absoluta e só depois colocou os traços da contagem respectiva.

Embora tivesse feito referência aos gráficos circulares, que já tinham sido abordados na unidade didáctica de Proporcionalidade directa, não tentou estabelecer nenhuma ligação explícita com essa unidade. Na sua opinião, não é fácil relacionar a unidade de Estatística com outras unidades didácticas.

> “A estatística acho que é um bocado complicado. Se fosse... ou com números. Eles dão números... eu ainda não vi bem o programa. Acho que os números inteiros relativos vêm só agora. O que dão para trás é mais... acho que não tem nada a ver com números. E a estatística trata-se assim de dados, mais de números.”

E embora considere possível ter em conta a interdisciplinaridade, acha que não conseguiu estabelecer essa relação.

> “Disse que queria fazer, mas não consegui. Queria que eles elaborassem o próprio inquérito, que já seria uma forma… [de relacionar] com o Português. (…)
> Também ao elaborarem gráficos estão a fazer uma relação com E.V.T. e com as Ciências também dá. A Matemática acho que se relaciona um pouco com tudo.”

Os alunos usaram a máquina de calcular nas aulas da unidade de Estatística porque já a usavam antes com a professora da turma, pois a Teresa não é apologista do seu uso frequente, já que pensa que “o aluno acaba por não evoluir e acaba por esquecer como se faz um cálculo à mão, e, quando lhe for pedido para fazer uma conta, já não se lembra”. Contudo, reconheceu que há situações em que é útil e explica a sua perspectiva acerca da utilização da calculadora:

> “Na maior parte das aulas não deixava usar a calculadora, só mesmo nos problemas e nas situações que merecem ser usadas, como para o cálculo da média aritmética, na qual nos são dados muitos dados e talvez dessa forma possa ser mais rápido, para os alunos economizarem tempo.”

Quanto ao computador, pensa que dá para dinamizar as aulas e fazer actividades interessantes, considerando que é “uma coisa boa e inovadora”. No entanto, não se sente preparada para isso, pois se colocasse os alunos em actividade teria que saber tirar-lhes as dúvidas.

> "Exige um tempo a explicar como é que se faria e como não se faria. E, se nós também não entendemos, é um bocado difícil."

Reflectindo sobre as aulas dadas, a Teresa afirmou que, face aos seus conhecimentos, de momento aplicou tudo o que sabia, não conhecendo outras abordagens. Na sua perspectiva, o tipo de actividades a realizar com os alunos está mais ligado com “fazer tabelas e gráficos”.

As dificuldades da Teresa

A Teresa reconheceu que teve algumas dificuldades em gerir a turma, já que os alunos eram bastante barulhentos, para além de haver alguns alunos problemáticos. Esta dificuldade é acrescida por se tratar do primeiro ano que está a leccionar efectivamente, pois ainda é inexperiente na forma de lidar com os alunos, assim como pelo facto da turma não ser responsabilidade sua desde o início do ano. Fazendo uma retrospectiva, concluiu que:

> "Nem sempre os momentos de aprendizagem foram os melhores. (…) O comportamento dos alunos dificultou muito o meu trabalho."

A gestão do tempo foi também outro dos aspectos em que confessou ter tido algumas dificuldades. Por vezes, os alunos tinham dúvidas e acabava por tentar esclarecê-los em vez de prosseguir o plano estabelecido, atitude que aliás considera correcta. Porém, parece obviar a dificuldade em gerir o tempo através da selecção de tarefas mais fáceis.

> "A gente opta pelo facilitismo. (...) Mas penso que o facilitismo é mais uma forma de economizar tempo."

Esta facilitação faz com que também corra menos riscos, até porque está a ser avaliada. Assim, embora considere que teve várias opções de escolha para as tarefas a propor, pensa que foi pouco criativa e inovadora. Na maioria das vezes "jogou pelo seguro", ou seja, optou por propor actividades em que se sentia mais segura e exercícios mais fáceis de explicar.

> "Uma pessoa está a ser avaliada, temos que ir também pelas coisas mais fáceis, por aquilo que a gente sabe de concreto. Acho que não nos podemos meter numa coisa muito complicada, por mais bonito que seja, e depois aquilo sair tudo mal. Nós, como estagiários, optámos também pela segurança em nós próprios."

No que diz respeito à avaliação do trabalho de grupo, a Teresa confessa que é uma tarefa complicada, opinando que é mais fácil avaliar uma ficha sumativa.

> "É muito mais difícil [avaliar um trabalho] do que um exercício [de uma ficha], porque num exercício a gente vê mais ou menos, *x* para aqui, *x* para ali. Agora num trabalho em que muitos pesquisaram, outros apenas apresentaram

> a tabela, recolha [de dados] e mais nada. (…) É muito complicado, acho que é muito diferente.”

Relativamente à aplicação de outros parâmetros de avaliação como o comportamento, a participação e a realização dos trabalhos de casa afirma que não teve dificuldades, porque a turma era pequena. Acrescenta, porém, que numa turma com um maior número de alunos teria sido complicado fazer a avaliação destes.

> “Numa turma muito grande, acho que é difícil ver quem é que se porta melhor e quem é que se porta pior. O pior, acho que se vê… Mas é muito difícil ver se estão todos a trabalhar. (…) Acho que se torna mais complicado.”

Quanto à distinção entre gráficos de barras e histogramas, a Teresa inicialmente demonstrou alguma confusão. Numa conversa com a investigadora, em que manifesta a dúvida “se nos gráficos de barras se deve dar os casos em que as barras estão juntas”, escolhe para exemplificar a sua ideia um gráfico de barra tripla do manual, que, num primeiro impacto, não parece considerar como uma situação distinta de um exemplo de histograma também do manual. Além disso, não parece lembrar-se do termo histograma já que fala apenas em gráficos de barras juntas e separadas.

Como a Teresa ia falar nesse assunto na aula que ia decorrer, a investigadora esclareceu o equívoco, tentando perceber ao mesmo tempo se ela distinguia as situações em que se utilizam os gráficos de barras daquelas em que se usam os histogramas. Conclui-se que, embora a Teresa pareça ter uma noção desse facto, não utiliza uma linguagem cientificamente adequada para o transmitir já que afirmou, quando se referia aos gráficos de barras, “estes é quando são dados concretos” e, na aula, quando mencionou os histogramas, salientou que “neste caso são medidas que fixam valores compreendidos”.

No trabalho em grupo, que a Teresa propôs, era pedido o cálculo da média. Porém, todas as variáveis que foram propostas para o inquérito eram qualitativas, pelo que não fazia sentido determinar a média. No entanto, a Teresa não se apercebeu desse facto, nem quando os alunos tiraram dúvidas relativamente às dificuldades na elaboração do trabalho, nem quando apresentaram o trabalho à turma.

De qualquer modo, no que se refere ao cálculo da média passaram-se várias situações. Um dos grupos não determinou a média porque se esqueceu, outros grupos arranjaram dados alusivos a uma nova variável, também qualitativa, mas que não correspondia à que lhes foi atribuída para calcularem a média. Outro grupo apresentou dados alusivos à situação “número de vezes que cada aluno lança o dado” e calculou a média do número de lançamentos por aluno, contexto em que já faria sentido o seu cálculo. O comentário da Teresa a estas últimas situações foi idêntico: “não calculou a média que era precisa para o trabalho, apresentou um exemplo”.

Houve também grupos que calcularam a média alusiva aos dados que tinham recolhido efectivamente. Assim, por exemplo, aquele que estudou a questão “Um dia mais tarde gostaria muito de ser…” escreveu no cartaz em que apresentou o trabalho à turma: “2,2, é a média da tabela de frequências”, sem qualquer outra justificação. Então, a Teresa pediu aos alunos para explicarem o que tinham feito e gerou-se o seguinte diálogo:

> A_1: Somámos as frequências e dividimos pelo número de profissões que havia. Fiz 1 + 3 + 4 + 1 + 6 + 5 = 20; 20:9 = 2,2, a média da tabela de frequência.
> T: Foste ver a média, mas não foi da tabela.
> A_1: Foi do número…
> A_2: Acho que ele contou o número de pessoas que escolheram…
> T: Ou seja, era a média do número de pessoas que escolheram essas profissões. É a média da preferência dos alunos.

O grupo que estudou o que gostavam de fazer nos tempos livres calculou também a média das frequências absolutas, concluindo que a média era 3,5. Da mesma forma, o grupo que recolheu dados sobre a cor preferida dos alunos calculou a média das frequências absolutas, concluindo que “A média das cores que os alunos do 6º B escolheram foi de 3,5. 8 + 7 + 2 + 2 + 1 + 1 = 21. 21:6 = 3,5.”

Houve um aluno da turma que comentou: “dá a mesma média que no grupo [anterior] …”. Esta observação poderia ter alertado a Teresa para verificar que algo não estaria correcto. Porém, esta respondeu: “lembra-te que foram avaliados os mesmos alunos e pode dar a mesma média”.

Embora a apresentação dos trabalhos fosse relativamente rápida, nem nesta aula, nem numa aula posterior, foi contestado pela Teresa o cálculo da média nos casos citados. Mais tarde, em conversa com a investigadora, afirmou que os alunos não tiveram dúvidas nessa parte e que ela também não reflectiu muito sobre o assunto. Contudo, confessou que não estava muito segura da situação, pois não houve nada que a alertasse para esse facto.

> "Fiquei na dúvida, mas como estavam todos a ter o mesmo seguimento não disse nada. (…)
> Como não lhes tinha falado que havia dados que podiam se... que se podia trabalhar com a média e outros que não se podia fazer a média devidamente, talvez foi mais nesse aspecto que eu deixei ir. É que nem o programa diz nada a esse respeito, e o manual não falava sequer."

Já no caso da indicação da moda, embora houvesse alguns erros por parte dos alunos, estes foram imediatamente contestados pela Teresa. Por exemplo, na questão alusiva às profissões, o aluno que apresentou o trabalho disse "a moda é 6", tendo sido logo corrigido pela Teresa, que afirmou: "a moda é ser médico. O valor da maior frequência é que é 6".

A Teresa manifestou dificuldades na exploração de actividades ligadas aos acontecimentos, principalmente na exemplificação de acontecimentos certos. Numa tarefa que envolvia uma roleta dividida em sectores geometricamente iguais com três cores: três sectores com cor azul, um sector com cor verde e dois sectores com cor vermelha, pedia-se para os alunos indicarem, na experiência aleatória 'fazer girar o ponteiro e prever a cor em que parava', um acontecimento certo, um possível e um impossível.

Exemplificando um acontecimento certo, um aluno escreveu "Indicar o verde, azul ou o vermelho". Embora correcta, esta resposta foi corrigida pela Teresa que, depois de a ler, comentou: "Eu colocava de outra forma, e troca o *ou* pelo *e*, ficando como resposta: "Indicar a cor verde, azul e vermelha". E esclareceu: "pois tem que se verificar sempre". A Teresa revelou, assim, ter dificuldades na compreensão do significado dos conectivos lógicos.

Questionada sobre este assunto depois da aula, a Teresa explicou:

> "Entendi mais ou menos como *ou* … *ou*. Tive dúvidas nessa parte. Mas quero um acontecimento certo, e quando coloco *ou* considero como possível e o *e* considero que é como se fosse certo que acontecesse."

Noutra tarefa que envolvia um saco com caricas de várias cores: azul, verde, amarela e vermelha, aceitou como exemplo de acontecimento certo "Sair qualquer uma das caricas", não fazendo qualquer exploração da situação. Embora esta resposta se possa considerar correcta, dado o nível de escolaridade dos alunos, talvez fosse uma ocasião para discutir outro tipo de respostas.

Na actividade alusiva ao baralho de cartas, em que se pedia “ao tirar, ao acaso, uma carta do baralho, indica um acontecimento certo”, a Teresa aceitou a resposta “Tirar todas as cartas do baralho”, que é absurdo atendendo à experiência em causa. Questionada sobre o sentido desta resposta, a Teresa explicou que a ideia era saírem todas as cartas, mas uma de cada vez.

Referindo-se à mesma experiência aleatória, um aluno dá como exemplo de acontecimento impossível “tirar 5 reis”, o que motivou risos por parte de outros alunos da turma. No entanto, a resposta é perfeitamente aceite pela Teresa que afirmou: “quando tiramos [a carta] não podemos tirar 5 reis”.

Com base na experiência aleatória ‘retirar um cartão de um saco com oito cartões numerados de 1 a 8’, pede-se que os alunos indiquem se certas afirmações são verdadeiras ou falsas. Face à afirmação “é certo que me vai sair o cartão com o número 4”, os alunos, na sua maioria, classificaram-na como falsa.

Contudo, houve um aluno que pôs em causa a resposta, pois achou que devia ser um acontecimento certo. O que deu origem ao seguinte diálogo:

T: Certo?! Porque é que é um acontecimento certo?
A: Estão todos em mesma quantidade.
T: É uma questão de acaso.

Aparentemente o aluno ficou “satisfeito” com a resposta, embora esta não tenha sido muito explícita. Todavia, a Teresa parece ter ficado com algumas dúvidas, pois a meio da aula veio ter com a investigadora e com a professora da turma para perguntar se ‘é certo sair o número 4’ era uma afirmação falsa. Embora julgasse que deu a resposta correcta, ficou em dúvida. Exclamou a seguir, para confirmar a sua opinião, que pensava que podia sair qualquer um dos números e, sendo assim, achava que não podia ser certo.

Há, no entanto, outras experiências aleatórias em que os exemplos dados de acontecimentos certos foram perfeitamente correctos. Por exemplo, no lançamento de um dado numerado de 1 a 6, o acontecimento certo indicado é “sair um número menor que 7”. Numa ficha de trabalho, em que se pretendia que os alunos completassem com as palavras ‘certo’, ‘tão provável como’ e ‘impossível’ determinados acontecimentos, os conectivos lógicos já foram bem aplicados. Por exemplo, a expressão “É _______ sair-lhe uma palhinha azul, ou vermelha ou verde” foi completada com a palavra certo pelos alunos e aceite pela Teresa sem qualquer alteração.

Mais tarde, numa das entrevistas com a investigadora, a Teresa confessou que teve dificuldades em explorar com os alunos os conceitos relativos a acontecimentos.

> "Acho que é mais por causa das probabilidades que não gosto muito de dar. Mas fiquei com a ideia de que [os alunos] baralham muito. (…)
> Para mim é muito difícil distinguir um acontecimento certo de um possível. Há pessoas que consideram o acontecimento certo igual ao possível e depois o possível é que pode ser..., podemos optar pela [comparação das] probabilidades, tem a mesma probabilidade ou então tem probabilidades diferentes, acho que é".

A Teresa parece referir-se ao facto de um acontecimento certo ser também possível. E referindo-se mais directamente a algumas actividades:

> "Achei que aquilo estava correcto. Mas depois reflecti melhor e realmente a ideia estava um bocado confusa. Principalmente o das cartas que era apenas tirar uma carta do baralho, qualquer coisa assim, e dava a noção que era tirar todas as cartas, e uma pessoa só pode tirar uma carta do baralho de cada vez. (…)
> Para mim [as respostas] estavam correctas, e expliquei-as da forma que eu achava correcto e realmente estava errada.”

A Teresa admitiu que a sua dificuldade “é não saber identificar bem alguns conceitos”. E, como tenta explorar as respostas dos alunos, por vezes, devido à sua inexperiência, tem dificuldades em perceber se o que os alunos dizem está ou não correcto.

> “Eu tento aproveitar tudo o que eles dizem. Só que, muitas vezes, uma pessoa ainda é nova, e em determinados conceitos não sabe bem aquilo que estará mesmo correcto. Eu, pelo menos, fico na dúvida se será mesmo aquilo, se será certo ou não. Mas, mesmo assim, tento aproveitar aquilo que eles dizem. (…)
> Onde notei mais isso, talvez tenha sido nos acontecimentos.”

5.2.3. O questionário

Na tabela 46 apresentam-se as respostas e os raciocínios utilizados pela Teresa antes e após leccionar a unidade didáctica de Estatística, utilizando-se os mesmos critérios do primeiro caso estudado.

Na coluna respeitante a *Após leccionar a unidade* (dados provenientes da análise da terceira entrevista) o símbolo = pretende significar que se mantêm as respostas e/ou os raciocínios de *Antes de leccionar a unidade* (quando se passou o questionário a toda a turma).

Os termos *variação de resposta* e *variação de raciocínio* significam que as respostas e/ou os raciocínios da Teresa foram sendo alterados à medida que decorreu a entrevista.

O símbolo — pretende indicar que não se analisaram as questões do ponto de vista dos raciocínios.

Tabela 46. Respostas e raciocínios da Teresa no questionário, antes de ter leccionado a unidade de Estatística, e na terceira entrevista, após ter leccionado a unidade.

	Antes de leccionar a unidade		**Após leccionar a unidade**	
Questão	**Respostas**	**Raciocínios**	**Respostas**	**Raciocínios**
1.1	A moda é 29%	Referência à maior frequência	A moda é o Futebol Clube do Porto	Referência à maior frequência
1.2	A média é 40	Calculo da média das frequências	Variação de resposta	Variação de raciocínio
2.1	As médias podem assumir os valores calculados	Heterogeneidade dos dados	=	=
2.2	As modas não podem assumir os valores calculados	Inexistência de classificação igual à moda Frequência 50%	=	Variação de raciocínio
3	A melhor é a média	Cálculo das medidas	Variação de resposta	Variação de raciocínio
4	As restantes 70,2	Outros raciocínios	Cada pessoa pesa 79 quilogramas	Algoritmo da média
5.1	A média é 1,9 irmãos	Algoritmo da média	=	=
5.2	A moda é 8 alunos	Referência à maior frequência	A moda é 3 alunos	Referência à maior frequência
5.3	A mediana é 13	Mediana como 50%	A mediana é 13,5	=
6	A média é 10,8	Algoritmo da média	=	=
7	O amigo tinha 19 anos	Algoritmo da média	=	=
8	A média é 70 quilos	Lei do fecho	Variação de resposta	Variação de raciocínio
9.1a)	Somando os vencimentos de todos os empregados e dividindo pelo número total de empregados dá-nos uma média de 120 mil escudos	—	=	—

	Antes de leccionar a unidade		Após leccionar a unidade	
Questão	**Respostas**	**Raciocínios**	**Respostas**	**Raciocínios**
9.1b)	Vencimento com maior frequência	—	=	—
9.1c)	50% dos empregados possui um vencimento de 90 mil escudos	—	=	—
9.2	O vencimento dos empregados tem uma oscilação bastante elevada	—	=	—
10.1	Possível mas não certo	—	=	—
10.2	Certo	—	=	—
10.3	Impossível	—	=	—
10.4	Certo	—	=	—
10.5	Possível mas não certo	—	=	—
11.1	Obter bola preta do saco I	Comparar as probabilidades dos acontecimentos Comparar o número de bolas brancas e pretas.	=	=
11.2	Obter bola preta do saco II	Comparar as probabilidades dos acontecimentos	=	=
11.3	Obter bola preta do saco II	Comparar as probabilidades dos acontecimentos	Variação de resposta	Variação de raciocínio
12	Diagrama de árvore ou por várias tentativas	Sem justificação	Variação de resposta	Variação de raciocínio
13.1	Sair uma bola vermelha	—	Sair uma bola vermelha ou azul ou verde	—
13.2	Saírem bolas laranjas	—	=	—
13.3	Não recordo o significado de acontecimento possível mas não certo	—	Sair uma bola vermelha	—

De seguida, referem-se as explicações da Teresa relativamente às questões em que as respostas e/ou os raciocínios estavam incorrectos ou em que houve uma clarificação no sentido de esclarecer melhor o seu raciocínio. Por uma questão de facilidade na análise, referem-se duas fases: a primeira fase reporta-se à passagem do questionário *Antes de leccionar a unidade* e a segunda refere-se à terceira entrevista *Após leccionar a unidade*.

Sub-questão 1.1

Na primeira fase, referiu que "a moda é o valor que se repete com maior frequência", todavia, associou este valor a um valor numérico, ou seja, à frequência relativa em percentagem.

> "Neste caso a moda é 29%, e refere-se ao clube desportivo que se repete com maior frequência, que é o Futebol Clube do Porto".

Na segunda fase, não concordou com esta resposta e corrigiu-a:

> "Mas a moda não é de 29%, mas sim a moda é o Futebol Clube do Porto. Porque o 29% é o valor de... é o valor de maior frequência."

A pedido da investigadora, a Teresa tentou explicar o que a levou, na primeira fase, a dar uma resposta incorrecta:

> "...o que era a moda eu sabia, era o que se repetia com mais frequência. Agora, entre a moda e o valor, talvez essa confusão me surgisse. (...)
> Mesmo os alunos ficam com essa ideia… Nos trabalhos que tive que corrigir, vi que, para eles a moda era um número, não podia ser a pessoa, por exemplo, ou uma coisa, tinha que ser um valor concreto."

Assim, fica-se com a ideia de que o problema se resume à confusão que pode surgir quando estão envolvidos dados qualitativos, pois a tendência é considerar a moda como tendo que ser um valor numérico.

Sub-questão 1.2

Na primeira fase, calculando a média das frequências absolutas, tinha respondido que a média era 40.

Na segunda fase, alegou que tinha calculado bem a média. No entanto, afirmou que poderia ter feito por outro processo:

> "Mas também podemos, em vez de ir pelo processo dos 100% [na primeira fase calculou as frequências absolutas por uma regra de três simples], ir pelos 50%. 50% em percentagem é a média. Se em 100... no gráfico fica o 100. A média… no gráfico 50% equivale à média. Talvez, em vez de ter feito por esta fórmula, pudesse ter feito pela dos 50%. Mas teria que adaptá-la pela regra das proporções que eles [os alunos] não fazem assim, em cruz [regra de três simples]."

Os comentários da Teresa, embora não adequados ao tipo de dados em questão, revelam uma certa confusão entre o conceito de média e de mediana, pois considera que se soubesse o equivalente a 50% saberia a média.

Embora a discussão sobre o ‘cálculo da média’, quando estão em causa variáveis qualitativas, já tenha surgido enquanto a Teresa estava a leccionar a unidade de Estatística, ela revela ainda dificuldades.

A investigadora pediu então à Teresa que reflectisse sobre o tipo de dados envolvidos na questão. Em consequência, a Teresa referiu: "pois são dados qualitativos, são dados que não se pode calcular a média, não é?", mostrando que continua a ter dúvidas. Em seguida, justificou-se argumentando que continua com a tendência de usar os números do enunciado para responder às questões.

> “Foi o que a gente fez aqui [aproveitar os números do enunciado para calcular algo]. Eu e as minhas colegas que estavam ao lado. (...) Como havia números no gráfico, pronto vamos fazer a média. (...)
> Se há números, podemos fazer a média. Lá está, esquecemos um bocado que existem outro tipo de dados… que é impossível calcular a média. Torna-se tudo possível. Há números, torna-se tudo possível.”

Sub-questão 2.1

Na primeira fase, a Teresa opinou que ambas as médias podiam assumir os valores calculados, usando como raciocínio a *Heterogeneidade dos dados*.

> “Numa turma nem todos os valores são homogéneos. Podem, e geralmente é o que acontece, ser muito heterogéneos. Como os valores podem variar de 0 a 20, não há qualquer motivo para que as médias não estejam bem calculadas.”

Na segunda fase, concordou com a resposta anterior e tentou explicar melhor o seu raciocínio, também com base na heterogeneidade dos dados.

> “... é assim, a classificação numa turma pode variar de 10 a 20 valores. Não vai ter toda a turma o valor 14. Podem variar esses números e fazer com que a média seja igual. Porque eles aqui dizem que na turma A não existe qualquer aluno com 14 valores, mas a média é de 14 valores. Pode acontecer um aluno ter um 15 e outro ter um 13 ou 12, mas ao calcular a média ia dar os 14 valores.”

Alegou ainda que, embora haja 50% de alunos com classificações inferiores ou iguais a 13 isso não tem, obrigatoriamente, influência no valor da média.

> “...por exemplo 50% ser inferior a 13, mas podem existir 50% com valor superior a 16 valores ou mais. A relação poderá dar o valor da média.”

Sub-questão 2.2

Na primeira fase, no caso da turma *A*, respondeu, correctamente, afirmando ser impossível que a moda fosse 14 valores e usando os raciocínios *Inexistência de classificação igual à moda* e *Referência à maior frequência*. Já no caso da turma *B*, é influenciada pelo conhecimento do valor máximo possível de 50% dos dados – *Frequência 50%*, pelo que concluiu que a moda da turma *B* não podia ser 15 valores.

> "A moda é o valor que se repete com maior frequência. Ao dizer que na turma *A* não houve classificação igual a 14 e na turma *B* foram inferiores ou iguais a 13 valores mais de 50%, significa que nunca se poderá repetir o 15 com maior frequência na turma *B* e na *A* nem existe. Logo, a moda nunca poderá ser de 14 para o caso *A* e de 15 para o caso *B*."

Na segunda fase, continuou a manter a resposta para a turma A, mas, relativamente à turma B, mudou ligeiramente de opinião, embora manifestando algumas dúvidas. Assim, começou por dizer que mantinha a resposta dada, concluindo logo a seguir que não tinha dados suficientes para responder.

> T (Teresa): ...se 50% for inferior ou igual a 13, dificilmente também a moda será de 15. Eu acho que não temos conhecimento mesmo para afirmar sobre a turma *B*. A minha dúvida está na turma *B*. Mas na turma *B* poderá acontecer até que seja a nota 15 valores que se tenha repetido com maior frequência, o que realmente não sabemos ao certo se será ou não."
> I (Investigadora): Mas mediante estes dados, acha que é possível que a moda seja 15?
> T: Sim. Poderá ser... os dados… até pode ser 15. É assim, na turma *A* é impossível que a moda seja 14, mas a moda da *B* poderá ser. Existe a probabilidade que seja.

A investigadora tenta que a Teresa esclareça a resposta dada, na primeira fase, para a turma *B*.

> T: Como a média era inferior... Aqui falava dos 50% dos dados que eram inferiores ou iguais a 13 valores. Acho que para a média ser correctamente os 14 valores, na altura estive a fazer os cálculos e, de acordo com os dados, a moda teria que ser superior a 15 valores. Logo, à partida, a moda teria que ser, por exemplo, 17, para dar equivalência à média.”
> I: E, agora, continua a ter a mesma opinião?

T: Por exemplo, se for 13. Aqui diz igual ou inferior, não diz a certeza. Na altura vi mais porque… para dar a mesma média dos 14 valores. Acho que fiz este raciocínio à parte. E realmente se for, por exemplo, igual a 13 poderá ser que o valor... se venha a repetir com maior frequência. Agora se for muito inferior aos doze, é impossível que a moda... quer dizer impossível que a moda, não é… Poderá ser possível que a moda seja 15, mas a média já não poderá ser 14.

A Teresa tenta justificar o seu raciocínio relacionando os valores da média e da moda com o intuito de verificar se, com os conhecimentos que tem dos dados, estes valores se contrariam de alguma forma. Voltando novamente à questão, tenta justificar porque é que respondeu de forma incorrecta.

T: À primeira vista uma pessoa que não analise directamente, que tenha feito esta confusão toda, diria que é impossível porque eles dizem que é igual ou inferior a 13. Então o que nos levava a pensar é que o 13 talvez seria o que se repetisse com maior frequência.
I: No enunciado não diz que é o 13 que se repete, diz é que há 50% inferior ou igual.
T: Pois. Mas talvez uma pessoa ao ler tenha a noção que era impossível. Se há 50% abaixo, nunca pensaria que havia valores que estivessem acima. Assim numa leitura muito rápida.
I: Será que isso tem a ver com associar moda aos 50%?
T: Eu acho que há mais tendência de se associar a média aos 50% do que a moda. (…)
I: Parece-me que na altura ligou bastante aos 50%.
T: Aos 50% que eu digo, é. Não, eu acho que... é assim, depende muito dos dados. Porque eu também pus aqui: não tenho conhecimento suficiente para afirmar isso. Podia acontecer ou poderia não acontecer, porque depende muito dos dados que a gente tiver. Também da turma, do número de alunos e de tudo. Eu, na altura, liguei aos 50% por pensar que... 50% podiam ter inferior ou igual, mas inferior a 13 valores existe muito... ainda há o 10, há o 12, há... pensei nessa questão. Por isso era impossível que tivesse sido o 15 a moda da frequência absoluta.

Questão 3

Na primeira fase, calculou a média, a moda e a mediana correctamente, mas respondeu que "a média é sempre a medida que representa melhor qualquer tipo de conjunto de dados".

Na segunda fase, referiu que não calculou a mediana e considerou que no cálculo que fez anteriormente confundiu a média com a mediana:

> "Só que acho que confundi a média com a mediana. (...) Já não me recordo muito bem da fórmula [da mediana]. Se foi a mediana, é o segundo quartil que representava 50%. A média também é o 50%."

Embora tenha calculado a mediana, alegou não ter a certeza se o que calculou era realmente a média ou a mediana. Mas, no decorrer da entrevista, acabou por considerar que o que calculou foi a mediana:

> "Eu sinceramente recordo que fazem ou n par ou n ímpar, para calcular os quartis. Se realmente a mediana corresponde ao segundo quartil, acho que está bem calculada."

A investigadora propôs então que respondesse à questão admitindo que tinha calculado bem as medidas, ao que a Teresa continuou a afirmar que "a média é sempre a medida que representa melhor".

Porém, quando se tentou que explicasse melhor o seu ponto de vista, não foi muito consistente, pois a sua opinião passou a oscilar entre a média e a mediana, com alguma tendência para a mediana.

> "É um bocado difícil entre a média e a mediana. Estou na dúvida. Acho que na altura também pus a média por ter a certeza, mesmo absoluta, que a média se calculava desta forma. Se realmente a mediana… talvez seja ainda melhor do que a média. (...) Porque [a mediana] nos dá os dados talvez mais concretos da percentagem a nível dos 50%... dos dados. (…) Corresponde o conjunto a 50%, ou seja, vê mesmo metade do conjunto. Talvez veja valores mais precisos."

Associou a mediana ao valor correspondente a 50% dos dados, porém associou a média exactamente ao mesmo. Justificou, então, que, quando escolheu a média como melhor representante, era porque associava a média a 50% dos dados.

Todavia, quando a investigadora a questionou se a moda não poderia também ser considerada a melhor medida para representar este conjunto de dados, a opinião da Teresa foi de que "também podia ser porque é o valor que se repete com maior frequência". Acrescentando: "pois, todas elas... depende um bocado da opinião de cada pessoa". Assim, não lhe parece que os dados fornecidos ajudem a escolher uma das medidas.

> "Acho que é um bocado complicado... A média, lá está..., temos o conjunto... se virmos os 50% dá-nos um determinado dado, a informação sobre os 50%.

> Agora, se falamos em moda, também me dá uma característica de ver também sobre outra perspectiva. Por isso acho um bocado complicado."

Ou seja, nota-se alguma confusão sobre o significado destas medidas quando aplicadas a um determinado contexto e a um determinado grupo de dados.

Questão 4

Na primeira fase, começou por dividir a média do peso das nove pessoas por 9. Abandonou este cálculo e depois calculou o peso total das 9 pessoas, usando o algoritmo da média. No entanto, dividiu esse peso novamente por 9 e não por 8.

Na segunda fase, explicou que dividir o 78 por 9 foi mais uma invenção, um cálculo que se lembrou na altura, pelo que acabou por abandonar esse raciocínio.

> "Era para ver as restantes que ficavam. Por exemplo, os outros teriam que ter mais ou menos.... ou mais ou menos do que... As outras pessoas teriam que ter estes quilos a mais ou a menos."

Embora tenha abandonado este raciocínio, ele não parece de todo incorrecto, já que pretendia dizer que podia ter 8,6 [quociente de 78:9] a mais do que 78 ou a menos.

Ao explicar o segundo raciocínio que usou, apercebeu-se do seu erro:

> "Pus a média e depois pus que 78 era a média das 9 pessoas. Admitindo que uma delas pesasse, só apenas uma, pesasse 70 iria fazer... Só que está incompleta teria que ir calcular para as restantes 8 que faltam. E aqui não calculei. (…) Talvez fosse dividir depois por... não por 9 mas por 8. Porque já tínhamos a certeza que uma delas pesava 70. (…) [efectua os cálculos da divisão] E o 79 era o peso das restantes 8 pessoas. Cada pessoa poderia pesar 79 quilos."

Verificou pelo algoritmo se, com o valor obtido, a média dava 78 quilogramas. A resposta dada pareceu-lhe estranha, pois se fosse um 'problema real', não teria sentido as pessoas pesarem todas o mesmo.

> "Por acaso fui fazer mesmo o cálculo da média. Então, se uma pesa isto as outras pesam 79 vezes 8, a dividir por 9 vai dar mesmo 78. Seria possível. Mas é assim, também é estranho que todas elas, ou seja, as outras terem todas 79 quilos."

A investigadora solicitou-lhe que pensasse numa resposta em que as pessoas tivessem pesos diferentes, ao que ela respondeu:

> “Para mim seria impossível. Tentava dividir o 79, a um dava-lha mais, a outro dava-lhe menos.”

Ou seja, a ideia era compensar de alguma forma de uns valores para os outros, o que lhe pareceu uma tarefa difícil, pois não se lembrava de uma forma mais criteriosa de o fazer.

Sub-questão 5.2

Na primeira fase, confundiu a moda com a frequência absoluta, pois respondeu que a moda é de "8 alunos com 3 irmãos cada, porque é o valor que atinge maior valor no gráfico, ou seja, que se repete com maior frequência”.

Na segunda fase, afirmou que "a moda é 3 e o valor que se repete é 8 vezes", explicando que na resposta anterior trocou a moda com o respectivo valor da frequência absoluta.

Sub-questão 5.3

Na primeira fase, identificou a mediana com o valor correspondente a 50% dos dados, que calculou através de uma regra de três simples. Ou seja, confundiu a mediana com a sua localização e, arredondando o resultado (13,5), respondeu que a mediana era 13.

Apresentou também outro raciocínio que parece ter por base a fórmula: $\frac{12+14}{2}=\frac{26}{13}$, mas enganou-se ao transcrever o denominador da fracção. Porém, não deu nenhuma resposta que se apoiasse neste cálculo.

Na segunda fase, a Teresa começou por tentar explicar o seu raciocínio:

> "Eu fiz primeiro por uma só [fórmula]. Mas depois lembrei-me que, se realmente a mediana... voltei à fórmula de... 27 depois a dividir por 2, dá um número que é ímpar. Então pus o 12 e o 13 e depois dividi. (…)
> É em forma de percentagem [o primeiro raciocínio] e esta... porque eu não me recordava, e não me recordo da fórmula da mediana. E acho que se calculava desta forma a mediana. E, na altura, queria comparar se realmente essa fórmula me iria dar o 13 para a mediana."

Considerou os dois raciocínios usados isolados e sem qualquer relação. Como nesta fase mencionou outros valores para o quociente efectuado, que não são os que constam do cálculo que realizou anteriormente, pediu-se que explicasse melhor o seu raciocínio:

> "Não era 12 mais...Não, era 13 + 14, era isso. Mas não me ia dar. Não, então era 12 + 14, era."

Parece perseguir o objectivo de obter 13 como resultado da divisão por 2, pois revelou dificuldades em saber que números colocar no numerador. Alegou que se enganou em $\frac{26}{13}$ e o que queria era $\frac{26}{2}$. Reflectindo mais um pouco sobre a questão, mudou novamente de opinião, afirmando que teria de usar 13 + 14.

> "Mas lá está, tinha que ser... se fosse agora recordo, como era ímpar teria que ser.... Não. Estou baralhada. Eu sei que fui buscar o 13 porque dividi 27 sobre 2 e como dava 13,5. Fui buscar o 13 e devia ir buscar o 14. (...) Dá 27 a dividir por 2 que me vai dar 13,5. Lá está vai dar a mesma coisa."

Concluiu, assim, que a mediana neste caso seria 13,5, pois afirmou que não se recordava mesmo de nenhuma fórmula. Quando a investigadora a questionou sobre a lógica do valor obtido, a Teresa referiu:

> "Eu acho que a mediana tem que ser um valor certo, e não um com vírgula, não é? Pois lá está, 13,5 está mais certo do que o 13, pois 13,5 refere-se mesmo aos 50% dos 27 alunos."

Continua, assim, a não se aperceber que o valor 13,5 está fora do intervalo de variação dos dados.

No raciocínio da Teresa continua a haver uma clara confusão entre a mediana e a sua localização. Ela tem reminiscências de um algoritmo que não consegue aplicar até ao fim e, embora também pareça relacionar de certa forma a mediana com 50% dos dados, não consegue estabelecer de forma correcta essa relação.

Questão 6

Na primeira fase, aplicou o algoritmo da média por partes, primeiro para determinar o número total de ramos vendidos nos 4 dias: $13{,}5 = \frac{x}{4}$, $x = 54$ e depois para calcular a média do número de rosas vendidas nos 5 dias: $\overline{X} = \frac{54+0}{5}$, tendo concluído, correctamente, que a média do número de ramos vendidos era 10,8.

Na segunda fase, tentou explicar o processo que utilizou e manifestou algumas dúvidas relativamente à sua correcção.

> "Pronto, fui pela fórmula da média nos 4 dias... porque eram 13,5 nos 4 dias. Só que devia ter calculado mais x. Ter 4 vezes o x também. (…)
> Talvez 4x por se tratar de 4 dias. Não, não está correcto. Não, o procedimento está. (...) 54 seriam as rosas vendidas nos 4 dias. Depois fui calcular a média... Como nos perguntavam nos 5 dias. Se nos 4 dias se venderam 54, no quinto dia se venderam 0, acho que aqui a média dos 54 se refere apenas a um dia. Talvez devesse ter posto que a média era 54 + 54 + 54... fazer os 4 dias e somar o correspondente ao quinto."

Acaba por confundir o número total de ramos vendidos nos quatro dias com a média de ramos vendidos por dia. Porém, como ao efectuar os cálculos do novo raciocínio o resultado é diferente do anterior, afirma "a dúvida continua aqui, no 4". Reformulou, então, novamente o seu raciocínio:

> "Talvez calcular por 4x, mesmo. E o x seria o número de rosas, continuaria o número de rosas. (…) E os 4, continuariam a ser os 4 dias. E voltava a dividir por 4, faria $13{,}5 = \frac{4x}{4}$. Só que continuaria o 13,5. Lá está, porque iria cortar.

Fez então uma nova análise e voltou a um raciocínio semelhante ao da primeira fase:

> "Continuaria com o processo. Calculava $\frac{13{,}5+13{,}5+13{,}5+13{,}5+0}{5}$. (...) Mas parece um bocado estranho. Vai dar 54 na mesma. Por mais voltas que lhe demos, vai lá ter."

A Teresa, chegou assim outra vez a um raciocínio correcto, mas parece ter tido dificuldades em compreender a razão do seu procedimento.

A investigadora tentou saber também se não se podia dividir por 4 em vez de 5, já que se tinha acrescentado apenas um zero. Porém, a Teresa considerou que o facto de não se ter vendido nenhum ramo no quinto dia tem relevância, afirmando que o que se quer saber é a média dos cinco dias e não dos quatro. Nesta perspectiva, ela pareceu firme em não aderir à falsa existência de elemento neutro e o seu problema ao longo da análise da questão parece ter residido na aplicação do algoritmo da média ponderada.

Questão 8

Na primeira fase, aplicou a *Lei do fecho* para calcular a média e escreveu:

"Penso que, para resolver este problema, a média das 10 pessoas é a soma das duas médias a dividir por 2"

Em conformidade, concluiu que a média do peso das 10 pessoas era 70 quilogramas.

Na segunda fase, para além de repetir o processo anterior, tentou encontrar outra forma de resolver o problema.

"Estou a tentar por outro processo, que é somar a média e dividir por 10 pessoas, só que me dá 14, e eu acho que é impossível. É um bocado impossível que as pessoas tenham 14 quilos."

Afirmou ter utilizado este raciocínio porque lhe pareceu que o anterior não estava correcto. Contudo, comparando os dois, declarou que o seu primeiro procedimento ainda era o mais correcto. No entanto, continuou a afirmar: "não me parece que este [o segundo] esteja mal. Mas [o peso] parece-me tão pouco." Na sua opinião, os resultados, arredondados, dos dois raciocínios deviam "estar mais próximos".

Dialogando com a investigadora, a Teresa acabou por explicar que considerava que o segundo método estava mais correcto, mas o valor que obteve parecia irrealista. No primeiro método passava-se precisamente o contrário. Admitiu ter dúvidas, mas que não lhe ocorria outro processo de resolver a questão.

A investigadora propôs, então, uma variante da questão:

I: Se considerasse agora 15 mulheres e 4 homens. O peso médio das mulheres era 60 quilogramas e o dos homens continuava a ser 80.
T: Voltávamos ao mesmo. Se calhar aplicaria esta fórmula (calcula o quociente de 19 pela soma de 60 com 80). Dava 7 quilos.
I: E se aplicasse a outra [primeiro processo]?
T: (faz cálculos) A outra dava-me, lá está, os 70.
I: E agora?
T: Voltávamos ao mesmo. Está pior o afastamento do que o outro. Mas é assim, aqui dividiríamos apenas por 2 e aqui por 19 pessoas. Lá está, o grau também é maior.
I: O número de pessoas aumentou. Com este processo [segundo] altera-lhe a média, com este [primeiro] mantém-se igual. O que é que lhe parece?

> T: Acho que este procedimento [a divisão por 19] é mais correcto do que este [a divisão por 2].
> I: Parece-lhe correcto dar 7 quilogramas?
> T: Eu acho que sim, seria uma mais magrinha, outra mais fortinha. Lá está, a média é um valor que não é real. Uma média de 7 pode ser absurdo, mas...

A Teresa considerou mais correcto o raciocínio em que divide pelo número total de pessoas, que realmente está mais próximo da verdadeira fórmula, do que aquele em que calcula a média das duas médias. Todavia, não se apercebeu que não estava a ter em conta a ponderação de cada uma das médias, acabando por aceitar o resultado obtido, embora sendo absurdo.

A investigadora tentou, então, referir-se a uma situação que fosse mais significativa para a Teresa:

> I: Se eu lhe estivesse a falar de classificações. Se tivéssemos 7 disciplinas cuja média era quinze e 3 disciplinas cuja média era dezasseis, qual seria a média das classificações que obteve? Como é que a aplicava, neste caso?
> T: Voltávamos ao mesmo. Somava 15 + 16 a dividir por 10, que dá 3,1. A média dá 3,1.
> I: Parece-lhe lógico a média dar 3,1?
> T: Pois, não me parece. Ia-me dar um valor assim...
> I: Parece-lhe estar alguma coisa errada?
> T: Acho que a fórmula, o processo deve estar errado em qualquer coisa. Não, acho que mantenho este [o cálculo da média das médias].
> I: Então aplique lá esse método.
> T: Já dá 15,5 [calcula o quociente da soma de 15 com 16 por 2].
> I: E se em vez de três disciplinas de média 16 tivesse três disciplinas cuja média era 8?
> T: Dá 11,5. Continua a ser uma média assim razoável.

Como a Teresa pareceu ter ficado satisfeita com esta resposta, a investigadora voltou a reformular a questão. Para tal, propôs uma alteração, mantendo as médias e trocando o número de disciplinas, ou seja, considerando 10 disciplinas cuja média é 15 valores e 3 disciplinas cuja média é 8 valores. A Teresa, aplicando a média das médias, conclui que dava igualmente 11,5, como no último caso. Embora a investigadora lhe chamasse a atenção para o facto de num caso haver mais disciplinas que no outro, esta comentou:

> "A mim parece-me um bocado confuso. Realmente, aqui ter 7, aqui ter 10 e dar o mesmo valor. Mas lá está, a média pode manter-se em certos casos."

Questão 9.1

Na primeira fase, interpretou o significado da média recorrendo directamente ao algoritmo:

> "Quando somamos o vencimento de todos os empregados e dividimos pelo número total de empregados, dá-nos uma média de 120 mil escudos."

Considerou que a moda "é o vencimento que existe com maior frequência" e referiu, relativamente à mediana, que "50% dos empregados possuem um vencimento de 90 mil escudos".

Na segunda fase, concordou com as respostas dadas. Esclareceu ainda, no que se refere à moda, que "a maior parte dos vencimentos dos empregados seria 80 mil escudos". Porém, quando questionada sobre o significado de ‘maior parte’ neste contexto, afirmou:"existem mais empregados com o vencimento de 80 mil escudos", não associando explicitamente o significado de ‘maior parte’ a 50% ou mais dos empregados. No que reporta à mediana, continua a associá-la ao ordenado ganho por exactamente 50% dos empregados:

> "Aqui já se pode dizer que, no total dos 50 empregados, 25 receberiam 90 mil escudos. (...) É 25, porque é metade dos 50 empregados, que são os 50%."

Sub-questão 9.2

Na primeira fase, aludiu à heterogeneidade dos dados, mencionando que “o vencimento dos empregados tem uma oscilação bastante elevada", não fazendo quaisquer comentários que relacionem de alguma forma as medidas.

Na segunda fase, continuou a considerar que os ordenados oscilam bastante:

> "…se a média é de 120 mil escudos e depois há…a moda é de 80 mil. Acho que ainda vai haver uma grande oscilação dos vencimentos dos empregados (...) há uma grande diferença entre a média e a mediana. Há um grande desvio".

Tentou estabelecer uma relação causal entre as medidas, mais relativamente à diferença entre elas, e não interpretou propriamente os seus significados no contexto em causa.

Sub-questão 11.1

Na primeira fase, referiu que era mais provável obter bola preta do saco I, usando o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*. Acrescentou ainda: "porque existem menos bolas [no saco I] e a probabilidade de tirar bola preta vai ser igual à probabilidade de tirar a bola branca e a probabilidade de tirar [bola preta] é de 50%". Embora não tendo completado a ideia, parece, de certa forma, ter aderido ao raciocínio *Comparar o número de bolas brancas e pretas*.

Na segunda fase, explicou que apenas calculou as probabilidades dos acontecimentos para confirmar o seu raciocínio de base – *Comparar o número de bolas brancas e pretas*, e com o qual continua a concordar.

> “No saco I existem 2 bolas brancas e 2 pretas, ou seja, tem a mesma probabilidade de sair uma bola branca como uma bola preta. O saco II tem 5 bolas à partida, no qual 3 são brancas e 2 são pretas, logo existe maior probabilidade de sair a bola branca do que a bola preta. (…)
> E depois também estes cálculos [cálculo das probabilidades] ficam para confirmar, e realmente verificou-se.”

Sub-questão 11.2

Na primeira fase, respondeu que havia maior probabilidade de obter bola preta no saco II, com base no raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*.

Na segunda fase, continuou a manter a resposta dada. No entanto, considerou que se usasse um raciocínio idêntico ao anterior [sub-questão 11.1] podia ser induzida em erro. Consequentemente, foi no cálculo de probabilidades que depositou maior confiança, baseando nele a sua resposta.

> "No saco II, existem 3 bolas brancas e 2 pretas, e no saco I existem 2 brancas e 1 preta. Assim, à primeira vista, se não apresentasse os cálculos, talvez me desse a entender que a probabilidade seria a mesma porque... tirando uma bola de cada, uma branca e uma preta, iria dar a mesma coisa. Mas depois fiz os cálculos e fui verificar que a maior probabilidade..."

Sub-questão 11.3

Na primeira fase, respondeu que havia maior probabilidade de obter bola preta no saco II, resposta que eventualmente se deveu a uma distracção, pois para o saco I calculou a probabilidade de sair bola branca e, para o saco II, calculou a probabilidade de sair bola preta.

Na segunda fase, começou por uma explicação baseada nas suas intuições:

> "Tem maior probabilidade de sair no saco II, sem dúvida. Também existem 4 bolas pretas e são apenas 2 brancas. Enquanto que no saco I existem brancas, mas voltamos... Havia sempre maior probabilidade de sair bola preta no saco II. Mesmo pelo outro processo de, à primeira vista, retirar, por exemplo, branca. Uma branca aqui [saco I], outra branca aqui [saco II]. E depois uma preta..."[retirar uma branca e uma preta de cada saco].

Resolveu, seguidamente, aplicar este processo às outras alíneas:

> "O processo que fiz aqui nesta [pergunta 11.2], retirar uma branca e uma preta daria o mesmo resultado. Mas aqui ficava apenas uma branca... [saco II, pergunta 11.1]
> E aqui [pergunta 11.3], retirando uma branca e uma preta, continuaria com maior probabilidade a preta."

Embora quando analisou a pergunta 11.2 tivesse considerado que o processo de comparação do número de bolas brancas e pretas não dava sempre resultado, nesta questão considerou que dava certo porque "é maior o número de bolas". Porém, declarou que continuava a "preferir o processo de cálculo com apresentação dos números".

A investigadora chamou então a sua atenção para as probabilidades calculadas, tendo a Teresa reconhecido que se enganou. Calculou novamente a probabilidade de tirar bola preta do saco I e, por comparação de fracções, concluiu que a probabilidade de tirar bola preta era a mesma para os dois sacos. Aparentemente não considerou estranho este seu segundo raciocínio conduzir a uma resposta diferente da que tinha dado anteriormente, dando a entender que os cálculos são sempre mais válidos.

> "Lá está, o cálculo a gente nunca se engana e vê que a probabilidade é a mesma. Já se fizermos sem cálculos, sem nada, falha por vezes".

Questão 12

Na primeira fase, respondeu que “iria através de um esquema em árvore ou por várias tentativas”, acabando por não responder à questão.

Na segunda fase, voltou a afirmar que usaria um diagrama de árvore ou iria por tentativas. A pedido da investigadora, a Teresa tentou explicar o que pretendia:

> "Já não me lembro bem. Era aquele esquema de pôr vermelha, depois verde e acho que era branca. E depois saía uma branca e retirávamos... era aquele exercício que se deu na aula de Probabilidades e Estatística" [utilizar um diagrama de árvore para calcular probabilidades compostas].

Reflectindo melhor, a Teresa acabou por concluir que este método permitia calcular probabilidades mas não era muito prático para saber quantas bolas tinha de tirar do saco.

Analisou novamente a questão e explicou que a ideia "era eliminar" e tentou oralmente e com esquemas explicar o seu raciocínio. Assim, conclui-se que pretendia começar, por exemplo, na cor vermelha e ver as possibilidades para a segunda bola, e assim sucessivamente,... Fazia o mesmo começando noutra cor, parando em cada ramo quando o número de bolas da respectiva cor acabasse, "não continuava mais porque já saíram" e no fim "tinha a ideia de contar os ramos todos".

Depois desta explicação, reconsiderou e comentou:

> "Não, se calhar, isto nem está certo. Agora estou a pensar que, se calhar, isto nem se deve fazer, talvez… nas probabilidades. (…) Eu acho que confundi um bocado o exercício com o cálculo das probabilidades. E agora acho que também foi um caso de interpretação".

Assim, parece que o problema principal esteve na interpretação do que se pretendia, já que este tipo de questões costuma estar associado ao cálculo de probabilidades.

Tentou-se, então, que a Teresa explicasse o que queria dizer quando se referiu a tentativas:

> "Pois há várias tentativas. Experimentar, como os alunos fazem, por várias tentativas. Tirava-se uma, fazia-se a primeira tentativa, quantas é que... Teríamos mesmo o saquinho com as bolas. Ou por simulação, tentava-se fazer. A primeira seria vermelha, voltávamos a pôr e retirar..."

Na sua perspectiva, utilizando a simulação, ver-se-ia quantas bolas se teve de tirar para sair uma de cada cor. No entanto, considera que era um processo que "dava um bocado de trabalho". Todavia, reconhece que se tentasse fazer a experiência várias vezes podia obter resultados diferentes de cada vez.

Nesta altura, fez referência a um novo método:

> "Ia fazer os casos favoráveis sobre os casos possíveis, a regra de Laplace, e somaria. Para sair uma bola vermelha tenho 1 sobre 5 mais, para sair uma bola verde, 1 meio mais 1 quarto, que seriam as bolas vermelhas, verdes e brancas. E somaria e iria ver se dava um resultado certo ou não...".

Voltou a calcular as probabilidades e quando alertada para isso, confessou "acho que estou a confundir as probabilidades com a contagem".

A investigadora recordou então o que se pretendia com a questão:

> I: No fundo o que se pretende é saber quantas bolas tem que tirar para ter a certeza de obter uma bola de cada cor.
> T: É assim, pelo menos teria que tirar uma vermelha, uma verde e uma branca.
> I: Pois, o que se pretende é isso. Que saia uma de cada cor. Quantas tem de tirar do saco para ter a certeza que isso acontece?
> T: Se eu tirar 3 [bolas] pode-me sair uma vermelha, a segunda verde e outra branca, portanto fica-se na dúvida.
> I: Mas se tirar três, também pode obter outros resultados?
> T: Podem sair todas... se for um acontecimento... assim imediato. Nas três tentativas saem logo as três de cor diferente.
> I: Mas também podem não sair?
> T: Pois, lá está.
> I: E para ter a certeza que saem?
> T: Vou pôr uma em cada saco.

Embora admitindo que tirando apenas três bolas elas podem não ser todas de cor diferente, reconheceu que não estava a ver outra forma de resolver esta questão.

Questão 13

Na primeira fase, deu como exemplo de acontecimento certo "sair uma bola vermelha", como exemplo de acontecimento impossível "saírem bolas laranjas" e quanto ao acontecimento possível mas não certo referiu "não recordo o significado de acontecimento possível mas não certo".

Na segunda fase, considerou que teria que reformular a resposta relativa ao acontecimento certo e poria "sair uma bola vermelha ou azul ou verde". Pensa que quando deu a resposta da primeira vez devia ter confundido com acontecimento possível, pois "estava baralhada com os acontecimentos".

Reformulou também a resposta no que se refere ao acontecimento possível mas não certo, dando como exemplo "sair uma bola vermelha".

Admitiu que no primeiro momento não se lembrava desta terminologia, mas após ter leccionado o tema já percebia mais do assunto.

5.3. A Maria

A Maria tem 21 anos e é uma pessoa calma, ponderada e pensativa. No âmbito da prática pedagógica, revelou ser muito segura, independente e bastante objectiva nas suas explicações, raramente precisando de ajuda, fazendo notar bem a sua presença em termos de sala de aula.

A Maria desejou ser professora desde pequena. Todavia, a opção pela área de estudos a seguir teve a ver com decisões que foi tomando ao longo da sua escolaridade. Embora no 5º ano gostasse muito de Matemática, Inglês e Francês, o 9º ano foi decisivo por ter de optar por uma área de estudos. A sua decisão foi indirectamente influenciada pelo professor de Matemática da altura, que a levou a adorar esta disciplina.

> "E nesse ano tive um professor estagiário… e cheguei a adorar Matemática no 9ºano. Até tirei boas notas e tudo. Não poderia escolher pela nota mais alta, pois tinha boas notas em ambas as áreas; mas escolhendo Matemática podia aprender mais sobre ela, enquanto Inglês era mais fácil para mim adquirir mais experiência através da televisão e depois também poderia tirar um curso mais tarde. Para mim, o 9º ano teve um papel importante nessa escolha."

Embora gostasse de Ciências no 2º ciclo, só no 12º ano é que interiorizou esse gosto:

> "Antes só pensava em Matemática e línguas. No 12º ano comecei também a pensar em Ciências. Mas, para ser sincera, comecei a pensar nessa possibilidade quase no final desse ano. Só então descobri que havia esse curso… podia ser dois em um."

Contudo, concorreu em primeiro lugar para o curso de Matemática e a variante de Matemática e Ciências da Natureza foi a sua segunda opção. Está a gostar do curso, embora considere que há algumas cadeiras que são teóricas demais.

Enquanto discente, a Maria gostava das aulas em que dispunha de tempo para pensar e resolver as actividades propostas.

> "Pelo menos que dêem um tempo para pensar. Às vezes estamos ainda na introdução e eles já estão a corrigir."

Nas aulas de Matemática gostava mais de actividades ligadas ao cálculo e que lhe permitissem aplicar directamente algumas regras.

> "Gostava mais de resolver exercícios. Gostava de tudo o que tivesse cálculo: resolver equações, sistemas,... (…) Sempre gostei muito de fazer cálculos".

Embora declare que não tem nenhuma preferência específica quanto ao modo de trabalhar, reconhece que ter alguém com quem partilhar ideias pode ser motivador.

> "Quando a pessoa está acompanhada, sejam três ou mais elementos, e está a trabalhar, há sempre aquele sentido de chegar a um resultado e comparar com o colega do lado. Quando se está sozinho, não há muito isso, por vezes não faz, não sabe e então fica sem fazer absolutamente nada. Quando temos alguém ao nosso lado, podemos trocar ideias."

Porém, argumenta que trabalhar em grupo tem os seus inconvenientes e refere: "se estivéssemos em grupo era garantido que estava na conversa."

5.3.1. A Maria e a estocástica

A Maria lembra-se de ter estudado pela primeira vez estatística no 10º ano e probabilidades no 11º ou 12º ano.

> "Não me lembro de ter dado estatística no 6º nem no 5º ano. Estatística a sério mesmo, lembro-me no secundário. Lembro-me bastante de probabilidades, para aí no 11º, 12º ano, essencialmente 12º ano. Acho que só dei estatística no 10º ano e depois no curso."

Considera que a estatística no ensino secundário era fácil, mas, quanto às probabilidades, tinha dificuldades na identificação de arranjos e combinações.

> "Estatística era fácil e até gostava. Na parte de probabilidades nunca me entendi com aquelas situações de arranjos e combinações. Tinha dificuldades em identificar quando é que eram arranjos e quando eram combinações."

No curso que frequenta obteve aproveitamento, na primeira inscrição, à disciplina de Probabilidades e Estatística, que concluiu com a classificação de 13 valores, apesar de persistirem as dificuldades acima mencionadas. Por conseguinte, encara a área de probabilidades com algumas reservas, olha-a um "bocadinho de canto".

No que diz respeito à estatística, considera mais difícil determinar a mediana que, no seu entender, está directamente ligada ao uso de fórmulas.

> "Talvez as fórmulas da mediana fosse uma das partes [que considerava mais difíceis]. A mediana… havia uma fórmula qualquer que não cheguei a decorar. (…) A moda e a média revi, agora, para o 6º ano, e não é difícil de perceber, mas já não me lembro do que era a mediana. (…) Não me recordo do seu significado mas sei que havia uma fórmula."

Apesar disso, gosta do tema porque "é a forma de uma pessoa recolher dados, organizá-los, fazer gráficos, ver qual é a média, a moda, a mediana,... Tornar a informação que uma pessoa recolhe mais simples." E o facto de ter alguma ligação ao real também a motiva.

A Maria considera importante haver uma disciplina de Probabilidades e Estatística no curso que frequenta, mas gostava de ter o mesmo tipo de apoio noutros temas.

> "É importante, mas matemática não é só estatística. Por exemplo, noutras partes da matéria, como proporcionalidade directa, não temos muito apoio (…), enquanto que em estatística temos a base do ano passado, já que tivemos uma cadeira semestral, fizemos exercícios…e vamos aplicar [alguns desses conceitos] nestes dez dias. Devia haver cadeiras de apoio às unidades leccionadas no 2º ciclo que dessem o tipo de apoio que a cadeira de Probabilidades e Estatística chegou a dar para esta unidade."

Assim, relativamente à parte de estatística, pensa que os conceitos estudados vão ajudá-la na preparação das aulas sobre o tema, já que vai abordar alguns deles enquanto docente. Quanto às probabilidades, não considera que tenham uma utilidade prática para a preparação das aulas.

> "As probabilidades que vamos dar no 6º ano não têm nada a ver com o que demos o ano passado [no curso]. Para isso não dá muito jeito, mas talvez seja necessário para nós termos alguma noção."

No que se refere à unidade de Estatística do 2º ciclo, considera que "os conteúdos são simples" e que nenhum conceito lhe suscitou dúvidas. Assim nem precisou, numa fase inicial, de procurar o seu significado, pois nas duas ou três vezes em que estudou o tema ao longo da sua vida de estudante, esses conceitos foram sempre trabalhados.

Após ter leccionado a unidade em questão, pensa que tomou consciência da eficácia de determinadas estratégias e que esclareceu alguns pormenores alusivos aos conceitos usados.

> "Sei o que resulta e o que não resulta. Experimentei umas [estratégias]... mas não fiquei a conhecer outras coisas. Em termos de conhecimentos, para além destes pormenores [diferença entre histograma e gráfico de barras; a localização da frequência absoluta quando se constrói um gráfico de barras], nada mais."

Argumenta, ainda, que nas disciplinas do curso se devia incidir muito mais sobre os conteúdos programáticos a leccionar bem como sobre as diferentes metodologias.

> "Na cadeira de Probabilidades e Estatística demos conteúdos que nem sequer fazem parte do programa do 5º e 6º ano. Eu entendo a necessidade de adquirir mais cultura, de saber mais alguma coisa, mas também era bom explorarmos esses conteúdos [do currículo de 5º e 6º ano]. (…) No sentido de chamar a atenção que 'devemos fazer isto, mas isto não, porque não é correcto'. Eu sou um bocado preguiçosa e não tenho tendência a interpretar as coisas e saber porque é que é assim. Faz-se assim e raramente me pergunto: então porque é que não se faz doutro modo? Ou, então, quando o faço não o coloco em voz alta. Em termos de estratégias e actividades, podia-se discutir mais, principalmente diferentes abordagens."

Manifestou também alguma insatisfação em relação ao que aprendeu no curso relativamente à actividade lectiva.

> "Eu não aprendi nada. A impressão que tenho é que descobri por mim própria quase... Há várias formas de fazer as coisas. Nós sabemos as coisas de um modo e é desse modo que transmitimos. Nunca pensamos na possibilidade 'é assim, mas também pode ser assim'... Às vezes, entre nós, [estagiários de matemática da turma] um faz uma coisa assim, outro faz de outro modo e quando nos juntamos e conversamos dizemos 'isso também é capaz de dar jeito, também deve ser fixe'. Só assim é que sabemos modos diferentes de dar. Mas, normalmente, é o que uma pessoa sabe, aplica o que sabe."

Embora o desejo da Maria fosse "contribuir para a mudança", no seu ponto de vista, o tipo de aulas que deu não variou muito da sua experiência como aluna. Assim, confessa sentir-se um pouco perdida nesta fase, pois não sabe muito bem como conquistar essa mudança, mas coloca alguma esperança na prática futura.

> "A única diferença é que eu estou do lado de cá e primeiro estava do lado de lá. Parece que continua sempre a mesma coisa, chegar lá, dar matéria. (…)
> Queria fazer coisas diferentes, diversificadas., modos de abordar. Se isso vem com a prática, espero que sim... Queria fazer coisas diferentes, não fazer sempre a mesma coisa."

Ideias associadas à estocástica e ao seu ensino

Num primeiro impacto, a Maria associa estatística a gráficos, e probabilidades a bolas e sacos, ideias que lhe foram induzidas pelo tipo de exercícios que realizou ao longo da sua escolaridade.

> "Vi, numa página de um livro, vários gráficos, depois tabelas, recolha de dados, recortes de jornais e … estatística é gráficos... Mas só me lembra gráficos… (…)
> Lembra-me bolas e sacos [probabilidades]. Foi aquilo em que eu tive também mais dificuldade. Nas combinações usavam-se bolas, sacos e cartas de baralho."

Na sua opinião, a estatística pode considerar-se um ramo da matemática ou uma ciência, podendo ter um pouco das duas partes. Acrescenta ainda: "é possível que seja uma ciência dependente da matemática".

Para a Maria, saber estatística ou probabilidades pressupõe que exista uma compreensão das situações que estão a ser estudadas.

> "[Saber estatística] é saber porque é que a média se calcula... O que é, para que é e para que serve a estatística. No sentido de, por exemplo, a moda é 37. Porque é que a moda é 37? Saber analisar as situações. (…)
> Uma pessoa que diga 'eu sei probabilidades' é capaz de explicar o que é e o que são probabilidades, quando é que usamos probabilidades e porque chamamos uma ou outra situação de situação probabilística. E saber alguns pequenos pormenores (…) e explorar essa situação sobre que campo for."

Em termos didácticos, ensinar estatística ou probabilidades é "conseguir transmitir às outras pessoas para que elas digam a outras o que é e para que serve."

Quanto às estratégias, considera não haver diferenças entre o ensino da estocástica e de outras unidades. Porém, pensa que na estatística "a ligação ao real é mais evidente" pois, enquanto "noutros casos às vezes dizem 'estamos a fazer isto para quê?', na estatística, quer queiram quer não, já ouviram falar, já identificam essa situação antes mesmo de a dar".

Julga, ainda, que o trabalho em grupo é bom porque permite a partilha de ideias; contudo, pensa que os grupos devem ter uma composição heterogénea.

> "Há pessoas que têm vários pontos de vista, partilham ideias – os que não entendem podem ser esclarecidos. Quando falo em trabalho de grupo ligo muito à entreajuda e acho que isso é bom para eles escolherem... (…)
> Se ao formar-se o grupo tivermos em conta a diversidade até que é bom. Ajudam-se uns aos outros. Ajuda, eles percebem melhor do que quando a professora explica."

Todavia, embora pense que em ciências o trabalho de grupo é importante, tem mais dúvidas quanto à sua utilidade em matemática, afirmando, inclusivamente, que na parte de estatística se pode dispensar.

> "Em matemática não sei… sei que em ciências é importante. Em matemática, para certas actividades, até acho que sim... [Na parte de estatística] até acho que é dispensável. Em estatística podem fazer quase tudo sozinhos."

Ou seja, na recolha de dados pensa que dá jeito "juntar grupos de 5 ou 10 para recolherem informação entre eles". Contudo, afirma que, utilizado nesta perspectiva, "o trabalho de grupo pode ser substituído pelo trabalho de casa. Eles fazem o trabalho de casa no recreio, recolhem informações no recreio". Para além disso, pensa que o trabalho de grupo na unidade de Estatística não é um método que permita programar actividades diferentes, apenas considera que, como envolve "várias pessoas, talvez o grau de dificuldade pudesse subir um bocadinho."

Embora pense que um professor não precisa de características específicas para leccionar o tema, é de opinião que uma boa dose de imaginação assim como conhecimento sobre computadores poderão ser importantes.

> "Imaginação aqui também era boa, para variar um bocadinho, já que é sempre a mesma coisa – recolher dados, organização, recolher dados, organização... A organização de dados ser diferente ou a recolha dar outro ponto de vista às aulas... Também a capacidade de improviso – o professor pega numa situação qualquer e os alunos têm outra situação e querem explorar a deles e, nesse caso, o professor deve estar preparado. (…) Saber de computadores também era bom, melhor, mais motivante para os alunos."

Antes de leccionar a unidade de Estatística, a Maria considerava importante a sua inclusão no programa do 2º ciclo.

> "A Estatística, como já falámos antes, está muito presente na nossa vida diária e, nesta altura, do 5º e 6º ano, é uma idade em que se estão a aperceber bastante do que os rodeia, a entrada na adolescência, essas coisa todas... acho que é bom eles terem pelo menos uma mínima ideia do que se passa. Ouvem falar de média na televisão e no rádio, e é bom saberem o que é que isso quer dizer. Aparece um gráfico e é importante saber mais ou menos o que é necessário fazer para o construir".

Mantém a mesma visão após ter leccionado a unidade, reafirmando que a introdução da estatística e probabilidades no 2º ciclo “poderia ser a opção mais correcta”.

> “É nesta fase que a maioria deles [alunos] começa a questionar o que o rodeia e procura retirar o maior número de informação do que observa. O ensino da estatística no 2º ciclo vai ajudar o adolescente a recolher a informação de uma forma mais organizada. Quero com isto dizer que ele aprenderá em estatística qual o melhor modo de recolher a informação, como organizá-la e como a interpretar.”

Porém, não parece manifestar grande concordância sobre a introdução do tema no 1º ciclo, pelo facto de considerar os alunos novos de mais para aprender esses temas.

> "Se começasse, era mesmo no 4º ano, mas... Entre o 5º e o 4º ano, as idades variam entre os 9 e 10 anos, não é muito diferente. No 5º ano já são mais crescidos. É só um ano de diferença, mas é importante".

5.3.2. A prática pedagógica da Maria

Influência dos orientadores

A professora cooperante tinha por hábito, no final de cada aula, fazer com as estagiárias uma breve reflexão sobre esta, apontando pontos positivos e negativos e dando, por vezes, algumas sugestões para a aula seguinte. Também estabelecia um controlo implícito sobre a turma na medida em que, sempre que algum aluno lhe parecia distraído, o chamava discretamente para vir mostrar o que estava a fazer.

Todavia, na perspectiva da Maria, não houve grandes condicionamentos por parte dos professores orientadores pelo que considera ter assumido o seu papel como professora da turma.

> "Tínhamos liberdade de escolha. Apenas deram algumas sugestões como 'agora podia fazer uma ficha', 'faça exercícios mais difíceis' e alguns avisos prévios do género: 'neste caso eles podem fazer isto ou aquilo, é melhor fazer deste género e não deste'. Mais tipo de dificuldades que os alunos vão ter. Mais no sentido 'eles vão ter estas e estas dificuldades, relembre isto e isto…' Estratégias para dar uma aula não."

No entanto, considera que o facto de estar em estágio, e portanto sujeita a uma avaliação, condicionou, de certa forma, o tempo que dedicou aos conteúdos, pois pensa que acabou por dar a matéria a um ritmo mais acelerado para conseguir cumprir o plano pré-estabelecido.

> "O tempo foi mais por causa de estar em estágio. Se não fosse o estágio dava as coisas com mais calma. (…) Se não estivesse em estágio, a ideia de que estava a ser controlada e essas coisa todas, estava mais relaxada, dava as coisas mais ao ritmo dos alunos, não daria muitas coisas a correr. E seria muito melhor. Há certas alturas em que eles trabalham muito bem e pode-se adiantar outro assunto. Mas há certas coisas que não podem. E, quando se está em estágio, não se pode ter muito isso em atenção, tem que se seguir aquela norma, o plano."

Planificação da unidade e preparação de aulas

No que respeita à planificação da unidade a professora orientadora da Maria solicitou apenas a sua calendarização (conteúdos a abordar e respectiva carga horária), pelo que houve aspectos mais formais que a Maria só concretizou quando escreveu os planos de aula.

> "Vi o que era para estudar o tempo dado às aulas, adequei os conteúdos ao tempo das aulas, e pronto... (...) isto é apenas o plano de unidade e pode ser alterado ao longo das aulas."

Quanto aos objectivos dos planos de aula declara: "foram todos pesquisados em vários manuais, que fui encontrando e adaptando ao tipo de estratégia que queria fazer e àquilo que eu queria que eles percebessem".

Na opinião da Maria, os manuais escolares desempenham um importante papel na preparação das aulas. Usou o manual escolar adoptado para se inteirar dos conteúdos a abordar e das actividades propostas que complementou com o apoio de outros manuais escolares, essencialmente para retirar exercícios.

> "Folheei o livro adoptado para saber que conteúdos é que vão dar na aula, como é que o livro os aborda, já que é por ele que estudam maioritariamente. E depois as ideias foram surgindo, analisar as situações que eles analisam lá. Fazendo a ligação… (…) Com o manual sabemos propriamente o que é que eles vão dar, o apoio que eles têm. Se o manual for fraco, podemos reforçar com fichas ou actividades... Se for bom, uma pessoa pode apoiar-se bastante já que os alunos o vão ter em casa. (…)
> Sei que posso usar os outros manuais, se vir que há muita diferença relativamente ao adoptado, para retirar outros exercícios."

O que a orientou na escolha de actividades e exercícios foi essencialmente a turma.

> "O que eles gostam mesmo é que se faça fichas de trabalho e exercícios, só assim é que eles estão calados. (…)
> A turma. Sabendo que eram 23 alunos e os 23 conseguirem chegar todos lá..., perceberem. É desvantajoso para aqueles que têm mais capacidades. (…)
> Quando introduzia o conteúdo, usava aqueles exercícios mais simples de forma a ser mais fácil e, à medida que andava, complicava mais um bocadinho para ver se eles percebiam do que estávamos a falar".

Porém, no que respeita aos exercícios, considera não ter variado muito, algo em que foi influenciada pelos manuais pois, "os exercícios são muito parecidos uns com os outros, às vezes nem sequer os números variam. Em livros diferentes encontrámos quase o mesmo tipo de exercícios".

A selecção dos exercícios do manual adoptado foi feita de acordo com a ordem em que se apresentavam, mas não chegou a lê-los todos.

> "Sou sincera, não cheguei a lê-los todos. Houve alguns que sugeri, foi por ordem. Não cheguei a ir aos outros, às tarefas matemáticas."

Quanto ao programa, ele é relegado para segundo plano, já que, na sua opinião, até os objectivos podem ser consultados no manual.

> "Vi o programa de 6º ano na altura em que me calhou o 6º ano. Para fazer o plano de unidade de Estatística nem sequer olhei para ele.(…) O próprio manual tem os objectivos do programa, por isso não vou ao programa, mas vou ao manual. É quase a mesma coisa!"

No que respeita a livros de apoio de outro género, considera que, neste momento, para o nível que está a leccionar, não têm interesse. Além disso diz "não saber onde é que eles estão, quais são, quais os melhores e onde os encontrar". Argumenta ainda que a falta de tempo para se dedicarem ao estágio também contribui para que não procurem outros livros.

A prática lectiva

A Maria iniciou o estágio com a prática lectiva de matemática, tendo começado por leccionar a unidade de Proporcionalidade directa. Assim, já tinha dado 18 aulas naquela turma quando a investigadora assistiu à primeira aula da unidade de Estatística.

A turma e o ambiente

A turma onde a Maria leccionou tinha 23 alunos, 7 rapazes e 16 raparigas. Segundo a professora cooperante, é "uma turma com bom rendimento escolar e que geralmente recebe apoio dos pais nas tarefas da escola", havendo, no entanto, dois ou três alunos mais perturbadores.

A Maria já tinha um certo à vontade com os alunos, mantendo com eles uma boa relação. Porém, no meio da sua compenetração, por vezes, deixou de prestar atenção a alguns alunos mais brincalhões.

> "Houve certas situações em que a professora me chegou a chamar a atenção [para o comportamento dos alunos], mas que a mim não me incomodavam muito. (...) Houve outras alturas em que eu própria me estava a sentir aborrecida. Há certas situações em que eles se levantam por tudo e por nada. Eles têm autorização da professora para se levantar para afiar o lápis e essas coisas. Mas a mim certas situações irritam-me. É só eu virar-me ao contrário e já está outro a fazer a mesma coisa. E isso irrita-me um bocadinho. Eu gostava da turma…"

Pensa também que pelo facto de serem estagiárias os alunos agem de modo diferente em termos comportamentais.

> "Eles acham que somos mais benevolentes com eles do que a professora. Acho que exageram um bocadinho connosco por causa disso."

Enquanto leccionou, manteve a disposição habitual da sala (mesas em filas, alunos dois a dois) salvo algumas excepções em que juntou os alunos para trabalharem em grupo. Na perspectiva da Maria, a disposição da sala e o método de trabalho deve depender da actividade que se pretende desenvolver.

De qualquer modo, os alunos, caso desejassem, podiam trabalhar em díade, partilhando ideias com os colegas de carteira.

A abordagem conceptual

A unidade de Estatística foi abordada em 12 aulas, sendo quatro delas dedicadas às fichas de avaliação formativa e sumativa e respectivas correcções.

A unidade foi introduzida através da questão: 'Alguém tem alguma ideia do que é a estatística?' Surgem assim, os termos censos, percentagens e gráficos. A referência a gráficos foi aproveitada pela Maria para apresentar gráficos de barras alusivos a vários temas, lendo e interpretando com os alunos alguns deles.

Como trabalho de casa recomendou aos alunos que recolhessem "informação estatística de jornais, revistas, da Internet, …"

Com o objectivo de "levar os alunos a compreender a importância da organização de dados", a Maria projectou um acetato com as classificações não agrupadas (muito fraco, não satisfaz, satisfaz, satisfaz bastante, excelente), obtidas na ficha de avaliação sumativa da unidade anterior (Proporcionalidade directa), e pediu aos alunos para interpretarem os dados e darem sugestões para a sua organização. Construíram, assim, uma tabela de frequências, tendo a Maria aproveitado para introduzir (ou relembrar) as noções de frequência absoluta e de moda.

Para consolidar estes conceitos (organização, frequência absoluta, moda) distribuiu a cada grupo, de dois alunos, um envelope que continha círculos de diferentes cores e uma ficha que indicava as actividades a realizar e permitia fazer os registos. Pediu para os alunos "organizarem a informação que está dentro do envelope" e indicarem a moda. Seguidamente trocaram os envelopes com outro grupo, voltaram a organizar os dados numa tabela de frequências e repetiram as actividades anteriores. Por fim, os dois grupos envolvidos compararam as respostas dadas.

Tendo em vista o objectivo "construir gráficos de barras", aproveitou uma tabela de frequências, cuja elaboração tinha sido proposta para trabalho de casa, a partir das classificações, em percentagem, obtidas a Matemática, por uma turma de 6º ano, para construir um gráfico de barras e discutir aspectos alusivos à sua correcta construção.

Propôs um trabalho de grupo à turma: Cada elemento do grupo devia questionar cinco pessoas do 6º ano, a partir de uma questão já fornecida pela Maria. Foi dada, numa folha, uma questão a cada grupo ("A minha disciplina preferida do 6º ano é…; Nos meus tempos livres prefiro…; Um dia mais tarde gostaria muito de ser…; Qual o teu desporto preferido?; Que tipo de sobremesa preferes? ; Qual a tua cor favorita?"), apresentando todas elas opções de resposta. Os elementos de cada grupo tinham que reunir os dados, construir uma tabela de frequências, um gráfico de barras e apresentar o trabalho à turma. O trabalho de grupo, à excepção da apresentação, foi realizado fora da sala de aula.

Como os alunos mostraram bastantes dificuldades na elaboração dos gráficos de barras, apresentou numa ficha de trabalho dois exercícios de construção de gráficos de barras a partir de uma tabela de frequências. Num deles pediu também a identificação da moda e sobre o outro formulou algumas questões relativas à interpretação do gráfico.

O conceito de média aritmética foi introduzido com recurso a uma situação problemática do manual adoptado: "Um grupo de cinco amigos compram rebuçados num café. Dentro de cada rebuçado dizia o número de berlindes a que cada um tinha direito". Para explorar esta situação usou uma cartolina em que colocou o nome de cada um dos amigos e, por cima de cada nome, círculos que correspondiam ao número de berlindes ganho por cada um. Sugeriu, então, aos alunos que tornassem a distribuição equilibrada.

Com o intuito de consolidar o conceito de média, propôs uma ficha de trabalho com questões sobre este conteúdo. Na ficha, para além de uma pergunta relativa à interpretação da média num dado contexto, as questões envolviam a aplicação directa do algoritmo da média simples.

Com o objectivo de "interpretar a informação contida em pictogramas" apresentou, em acetato, um pictograma que interpretou com os alunos com a ajuda de algumas questões. Tendo em vista chamar a atenção para os aspectos relativos à construção de pictogramas, mostrou um pictograma elaborado incorrectamente tentando que os alunos indicassem as falhas cometidas na sua construção. Distribuiu, ainda, uma ficha de trabalho que envolvia questões alusivas à interpretação e construção de pictogramas.

Os acontecimentos foram introduzidos com recurso às previsões do tempo: "Que tempo fará amanhã?" Com base nas respostas dos alunos, introduziu os termos pouco provável e provável.

Explorou as noções de menos provável, mais provável, impossível e certo utilizando como recurso um saco com 8 peças verdes e 3 azuis para formular questões relativas às cores que têm maior ou menor probabilidade de sair. Seguidamente, juntou no saco peças amarelas com forma cilíndrica e pediu aos alunos para darem exemplos de acontecimentos possíveis e impossíveis. Utilizou, ainda, um baralho de cartas para pedir exemplos de diferentes tipos de acontecimentos e comparar as suas probabilidades de ocorrência.

Propôs também uma ficha de trabalho alusiva a "Probabilidade de um acontecimento", cujas questões se referiam à comparação da probabilidade de ocorrência de fenómenos e à classificação e exemplificação de acontecimentos.

Para além do descrito, foram ainda realizados vários exercícios do manual escolar adoptado, alguns envolvendo perspectivas diferentes (ver As tarefas), e as fichas de avaliação formativa e sumativa.

As tarefas

A tabela 47 pretende dar uma ideia do tipo de gráficos utilizados pela Maria, durante as aulas, no que se refere à sua construção e interpretação.

Tabela 47. Identificação do tipo de gráficos utilizados.

Actividades	**Tipo de gráficos**				
	Barras		Pictogramas	Circulares	Histogramas
	Simples	Duplas			
Construção	X	–	X	–	–
Leitura e interpretação	X	X	X	–	–

Analisando a tabela, constata-se que em termos de construção foi dada relevância aos gráficos de barras e aos pictogramas, não tendo sido feita qualquer referência, na unidade de Estatística, aos gráficos circulares e aos histogramas.

A Maria já tinha leccionado a unidade didáctica de Proporcionalidade directa onde abordou os gráficos circulares, que introduziu com recurso aos conhecimentos dos alunos sobre percentagens. Assim, propôs actividades que permitissem estabelecer a correspondência de amplitude dos sectores circulares, em graus, para percentagem e vice-versa, com base na percepção visual.

Comentando as suas opções relativas aos gráficos, a Maria referiu que:

> "[Os gráficos circulares e os pictogramas] não fazem parte do programa. Só mesmo gráficos de barras é que fazem parte. Os pictogramas só fazem porque eu perguntei à professora e ela disse que podia ser, mas para dar só uma aulita sobre isso. Mesmo no livro deles só tem aquele exercício para corrigir um dos gráficos."

Quanto à construção dos gráficos circulares, não tem opinião definida sobre a sua importância.

> "Não sei, para mim é indiferente. Penso que eles dão a construção de gráficos circulares muito mais tarde. Há certos conceitos que eles têm de saber, que dão agora, no 6º ano, a amplitude..."

Porém, no que respeita aos histogramas, considera que é conveniente abordá-los para fazer a distinção entre as duas situações já que os alunos, quando constroem gráficos de barras, por vezes fazem as barras juntas.

> "Aqui o histograma fazia um bocadinho de falta porque há alunos que caem no erro e não colocam a mesma distância entre as barras, ou juntam as barras e aí era bom mostrar os dois casos para eles perceberem melhor os erros que estão a cometer e verem que são duas coisas completamente diferentes. Neste caso, talvez fosse bom dar uma introdução ao histograma, fazer um exercício desse género, de comparação com barras."

A tabela 48 pretende estabelecer uma classificação quanto ao tipo de variáveis e de dados das tarefas alusivas à moda e à média, propostas pela Maria durante as aulas.

Tabela 48. Classificação do tipo de variáveis e de dados utilizados nas tarefas.

	Variáveis qualitativas			**Variáveis quantitativas**		
	Dados não agrupados	Dados agrupados		Dados não agrupados	Dados agrupados	
Conteúdos		Tabelas de frequências	Gráficos		Tabelas de frequências	Gráficos
Moda	X	X	X	X	X	X
Média	–	–	–	X	–	–

Como se observa na tabela, não é feita qualquer referência à impossibilidade de calcular a média quando o estudo se reporta a caracteres qualitativos.

Para além disso, embora a Maria afirme que os alunos identificaram a moda num gráfico de barras: "eles fizeram isso, disseram qual era a moda num gráfico", a justificação é sempre dada com base no valor mais frequente, ou seja, na definição, não chamando explicitamente a atenção dos alunos para a 'barra mais alta'. Embora explore os pictogramas, nunca pediu a identificação da moda nessa situação.

Nunca conduziu as actividades no sentido da aplicação do algoritmo da média ponderada, ou seja, mesmo quando propôs aos alunos que fizessem a tabela de frequências, não usou os dados apresentados desta forma para calcular a média, utilizando os dados originais não agrupados.

Comentando este facto, a Maria afirmou que sabia determinar a média desse modo mas, na altura, não lhe pareceu relevante induzir os alunos nesse sentido:

> "Quando eles calculavam a média 2+5+2+... ainda estive para sugerir 'porque é que não fazem logo 2×2?', mas ninguém fazia e eles desenrascavam-se melhor assim. Não achei relevante. Agora até gostava de saber como é que eles resolveriam esse tipo de exercícios."

Contudo, noutro âmbito, variou um pouco a amplitude dos exercícios alusivos à média pois propôs exercícios que solicitavam a descoberta de um dado desconhecido sendo conhecida a média final e a média parcial. Ou seja, resolveu com os alunos o exercício do manual: "Quatro amigos tinham, em média, 11 anos. Juntou-se ao grupo dos quatro um outro amigo. Qual é a idade desse amigo se a média passou a ser 12 anos?", e outros do mesmo género.

De qualquer modo, pediu previamente a opinião da professora cooperante antes de realizar este exercício, que, embora tivesse alertado a Maria para as dificuldades que os alunos poderiam na sua resolução, concordou com a sus concretização.

Embora este exercício implique um raciocínio relacionado com a média ponderada, após a sua resolução não foram realizados quaisquer exercícios envolvendo a ponderação dos valores da variável.

No que se refere aos acontecimentos, o tipo de tarefas proposto implicou, essencialmente, a classificação e exemplificação de acontecimentos e a comparação de alguns acontecimentos quanto à sua probabilidade de ocorrência. Resolveu, ainda, com os alunos um caso diferente, do manual, relacionado com acontecimentos certos, em que, considerando um saco com 3 bolas azuis, 3 verdes e 3 amarelas, se questiona quantas bolas se tem de tirar do saco para ter a certeza de obter uma bola de cada cor.

Para além disso, foi proposto um exemplo, também do manual, relacionado com o raciocínio proporcional em que, apresentadas duas taças, uma com duas bolas vermelhas e uma amarela, e outra com quatro vermelhas e três amarelas, se pede para indicar em que caso é mais provável tirar uma bola vermelha.

Todavia, o manual adoptado tinha uma maior variedade de exercícios que não foram explorados na aula.

Comentando as suas escolhas, a Maria afirmou que não houve propriamente uma selecção dos exercícios do manual, pois, para além de ter feito fichas de trabalho, não analisou todos os exercícios do manual adoptado.

> "Foi mesmo porque fiz muitas fichas e não cheguei a explorar muitos dos exercícios do livro. (…)
> Sou sincera, não cheguei a lê-los todos. Houve alguns que sugeri, foi por ordem. Não cheguei a ir aos outros; às tarefas matemáticas."

Quando sente dificuldades na resolução de alguns exercícios procura informar-se sobre os conceitos que lhe estão subjacentes. Por isso essas dificuldades, no seu ponto de vista, não a influenciam na selecção das tarefas que propõe aos alunos.

> "Na sala de aula há certos conceitos que vamos dar e, se tivermos dúvidas acerca de algum conceito, vamos estudá-lo, ao estudarmos, já podemos variar o tipo de exercícios…"

Admite, porém, que há uma certa influência dos manuais no tipo de exercícios que escolhem, sendo também o factor tempo uma condicionante importante.

> "É preciso muito mais tempo para trabalhar exercícios deste género [questão 6 do questionário]. (…)
> É assim, uma pessoa não se lembra e depois tem receio de inventar um ou outro, às vezes não temos assim um exemplo, para a pessoa variar é um bocado difícil. Há um tipo deste género, outro assim deste género que aplica cálculos diferentes e a pessoa não se lembra."

De qualquer modo, pensa que os alunos compreenderam bem o conceito de média apenas com as situações que apresentou. Embora admita, implicitamente, que essa compreensão é mecanizada, não tendo os professores a certeza se é uma aprendizagem com significado.

> "Sim, ficam com a ideia do conceito. Mas acho que este tipo de exercícios [questão 4 e 6 do questionário] é bom para uma pessoa ter a certeza que eles sabem o conceito. Muitos fazem aquilo já mecanicamente. Há uma fórmula,

> calcula a média, tem este dado, tem este, pronto, é assim que se faz. Assim eles tinham que saber o inverso, sabem a média, tinham que saber o inverso."

Manifestou, no entanto, uma certa abertura em aderir a situações novas se lhe disserem que são importantes para os alunos. Ainda não tem é a percepção da amplitude de exercícios que convém explorar para os alunos compreenderem os conceitos com significado.

No que se refere à identificação da moda a partir de um gráfico circular (pergunta 1.1 do questionário), a Maria considera que não é uma actividade muito recomendável no 2º ciclo na medida em que no gráfico circular aparece a frequência relativa em percentagem e não a frequência absoluta. E, como a definição que deu aos alunos nas aulas era baseada na frequência absoluta julga que estes podiam não saber relacionar as duas frequências.

Para além disso, também não considera viável os alunos averiguarem se, nesse caso, podem calcular a média pois, "para isso, tínhamos que dar antes conceitos como variáveis qualitativas e quantitativas e isso não faz parte do programa." Porém, perante a hipótese de poder referir estes conceitos no 2º ciclo, ainda fica na dúvida se será um exercício conveniente de explorar.

> "Acho que sim [que se podia explorar a questão]. Eu também não sei dizer o nome… apesar de já ter sabido… mas na prática não me lembrava."

Pensa igualmente que, se resolvesse fazer exercícios mais complicados na unidade de Estatística, teria de fazer o mesmo noutras unidades.

> "Estar assim a fazer este tipo de exercícios em estatística, noutras unidades também se devia aplicar outra coisa. Não se deve dar assim uma unidade de ânimo leve, exercícios que não exigem muito e depois chegar aqui, a estatística, e exigir este tipo de exercícios aos alunos (escolher qual das medidas representa melhor uma situação num dado contexto)".

Para além disso, considera que, numa turma, nem todos os alunos conseguem resolver certo tipo de actividades.

> "Se alguns [alunos] não conseguem entender mesmo o básico, como é que vamos apresentar situações destas, se eles não sabem o que é a moda e a média?"

Comentários

Na fase introdutória da unidade de Estatística, em que a Maria questionou os alunos sobre as ideias que tinham relativamente a esse tema e apresentou alguns gráficos de barras, surgiu o termo censo mencionado por um aluno e a Maria, de uma forma implícita, aludiu à noção de amostra, já que mencionou, no caso da interpretação de um dos gráficos, que não se questionaram todas as pessoas de Portugal, mas "escolheu-se um grupo de pessoas". Não foi feita, porém, qualquer outra clarificação dos conceitos.

Comentando estes aspectos, a Maria afirmou:

> "O Carlos disse o que era um censo. Eu ouvi e perguntei para que serve isso e ele chegou a repetir..."
> [Quanto às sondagens] eu não queria falar nisso. Houve uma altura em que disse amostra. Há termos que eles não sabem. (…)
> Para mim, amostras, sondagens, é importante eles [os alunos] saberem. Quando fiz o exercício de inquérito gostava de dizer 'o que vocês fizeram foi... o tipo de pessoas que escolheram foi...' de dar esses conceitos, mas não fazem parte do programa.
> Acho que era bom dar esses conceitos, talvez no 5º ano pudessem dar esses conceitos. Como fazem recolha e organização de dados... Pelo menos não acho que sejam assim tão complicados."

No que respeita ao trabalho de grupo, não foi sugerido pela Maria, que a própria aula fosse utilizada para elaborar o inquérito, dando um aspecto mais formal, pois as questões são fornecidas e as respostas de opção também. Já no que respeita à elaboração extra-aula do trabalho de grupo, afirma que foi com a intenção de poupar tempo.

> " Foi mais para poupar tempo. Se estivesse sozinha provavelmente teria feito na aula. Perguntaram a outros alunos do 6º ano porque era para trabalho de casa. Isso podia ter sido aplicado dentro da turma: recolha de dados dentro da sala de aula sobre os elementos da turma e realização do trabalho."

A Maria assume-se como defensora do cálculo mental e pensa que, nalgumas situações, não tem qualquer sentido os alunos recorrerem à máquina de calcular. Embora considere que esta dá jeito quando numa actividade estão envolvidos cálculos muito morosos.

> "Eu adoro cálculo. E os alunos usarem a máquina de calcular para fazerem contas do género 23×2, ou coisa parecida, faz-me impressão. Às vezes ajuda

> quando são muitos cálculos, mas, por vezes, perdem um tempo a ir à máquina quando é um cálculo mental. (…)
> A calculadora é muito importante para poupar trabalho, às vezes, de resto prefiro papel e lápis à minha frente. Prefiro fazer eu e depois confirmar na máquina. (…)
> Em estatística, quando os números eram muito grandes e não eram simples, tipo 3500 ou 1500, tudo bem. Pois o que se queria saber era mesmo como calcular a média e não propriamente o resto."

Apesar de lhe ter ocorrido, nesta unidade, programar actividades para realizar no computador, optou por não seguir essa via pois pensa que não tem conhecimentos suficientes nessa área e, para além disso, estava preocupada com a forma de trabalhar dos alunos visto que não sabia como é que eles iam reagir.

> "Ocorreu-me, mas eram 23 alunos, teriam que ficar 2 pessoas em cada computador. Não sei como é que eles se dariam, do género… eu também queria, também queria".

Embora considere que o "manual é a única base do estudo e tem de se resolver, pelo menos, alguns exercícios que lá estão", não o utilizou tanto como pretendia pois, face à sua programação, os alunos "atrasaram-se um bocadinho", não obstante pretendesse "ficar uma aula a fazer bastantes exercícios do manual". Assim, refere que acabou por utilizar mais o manual para propor exercícios para o trabalho de casa.

Apesar de ter proposto uma situação problemática (situação dos berlindes) para introduzir o conceito de média, não a explorou na sua plenitude pois, de certa forma, induziu directamente os alunos para a aplicação do algoritmo da média.

> M: O que é que era mais justo?
> A: Ser igual para todos.
> M: Se juntássemos os berlindes todos, como é que faziam para ter o mesmo número?

Comentando esta actividade, mencionou que tinha uma perspectiva diferente de exploração, mas que os alunos se adiantaram à situação.

> "As peças que estavam no cartaz saíam e podiam ser colocadas noutro sítio....
> A distribuição estava desigual, como é que eles fariam para igualar? E então, manualmente, tiravam as peças e tentavam oferecer ao outro que tinha menos.
> Antes mesmo de chegar a fazer isso, já havia um que dizia: 'ó professora, somamos tudo e dividimos pelo número de amigos'.
> Era no sentido de perceber como chegar à média, ao algoritmo e também para os alunos verem para que é que servia a média."

Quando leccionou a aula sobre os acontecimentos, utilizou um saco em que colocou 8 peças verdes e 3 azuis com diferentes formatos. Formulou depois algumas questões em que pediu aos alunos para classificar os acontecimentos que mencionou quanto à sua probabilidade de ocorrência. Continuando a actividade, juntou peças amarelas de forma cilíndrica ao saco e pediu aos alunos exemplos de diversos tipos de acontecimentos. Ocasionalmente, os alunos tiravam uma peça do saco. Nesta fase, um aluno comenta: “pela forma já sabíamos quais as peças que íamos tirar, pois têm formas diferentes”. No entanto, a Maria não liga a este comentário e nem o discute.

Mais tarde comenta esta actividade com a investigadora, sendo da opinião que a actividade que propôs não tem qualquer incongruência.

> I: Quando deu os acontecimentos, levou peças com formatos diferentes. Acha que não influenciou os resultados ou as ideias dos alunos?
> M: Quando expliquei as situações, tinham que tomar atenção à variável. Havia questões que eu punha que se relacionavam com a cor e não com a forma e havia outras questões que eu colocava relativamente à forma e não à cor. E eles perceberam perfeitamente.
> I: E a questão de ter forma diferente, para tirar do saco, não acha que influenciava?
> M: Não. Eu disse: têm aqui estes rectângulos azuis,... Eles não tiveram dificuldades. Quase que não chegaram a tirar de dentro do saco. Era mais no sentido "tenho isto dentro do saco, a probabilidade de tirar esta cor, ou esta forma é maior ou menor que tirar aquela?" Raramente chegaram a tirar alguma coisa de dentro do saco. Era mais no sentido hipotético.

A Maria não promoveu, nesta unidade, a interdisciplinaridade e também não está ciente de como o poderia ter feito pois, comentando esse facto, afirma: "Estou a passar as disciplinas que eles têm e não estou a ver nada”.

E, embora também não tenha feito qualquer relação explícita da unidade de Estatística com outras unidades, pensa que isso é um aspecto importante:

> “Em relação a outras unidades não fiz. É importante a inter-relação. Houve um exercício em que uma aluna me disse: ‘resolvi por uma proporção’ e eu disse: ‘muito bem’. Fora disso, não fiz força para isso. Mas é muito importante, não vamos dar uma unidade e depois esquecê-la, deve-se sempre fazer com que se apliquem um maior número de conteúdos numa nova unidade. Ou não surgiu ou não me dei conta da possibilidade de...”

No que concerne à avaliação, considerou o "teste, a participação na aula, trabalhos de casa, fichas de trabalho, trabalhos por eles realizados", e declara que seria o tipo de avaliação que faria se tivesse numa turma à sua inteira responsabilidade.

Admite também que o trabalho de grupo permite avaliar os alunos, se for feito dentro da sala de aula, principalmente em termos de atitudes e participação.

> "Se o trabalho for feito dentro da sala de aula, dá para avaliar. Vê-se perfeitamente no comportamento que eles adoptam na aula."

Quanto à contribuição das várias componentes para a avaliação, pensa que "os testes têm muito peso e os trabalhos de casa também", considerando que estes últimos resolvem os casos duvidosos.

> "Nos casos de dúvida, principalmente no trabalho de casa, não fazerem quase metade dos trabalhos marcados, as notas não sobem. Entre o 3 e o 4, os trabalhos de casa contam muito."

Contudo, afirma que os testes devem ter o maior peso na avaliação: "50% dos testes, 50% para os restantes aspectos, querendo ou não os testes têm bastante relevância."

> "Se não um teste sumativo, pelo menos um formativo, para saber o que eles sabem e percebem e onde estão as dificuldades. (…)
> Um teste no final da unidade convém e é bom. (…) Também se podia fazer um teste que englobasse as unidades que se dessem no período e, nesse caso, a de Estatística devia ter um peso muito diferente do da Proporcionalidade [ter menos peso]".

As dificuldades da Maria

A Maria afirma que, na generalidade, não teve problemas na planificação das aulas, apenas lhe surgiram algumas dificuldades para encontrar estratégias diversificadas.

> "A minha imaginação não permitia assim uma variedade tão grande. Gostaria de ter feito coisas diferentes mas não sei como fazer isso. Variar o estilo, o modo de aulas corriqueiro do tipo exercícios, ficha, ficha, ficha… mas não sei como".

Na sua perspectiva, essas dificuldades devem-se a preparação insuficiente no aspecto didáctico.

> "Era bom, era muito bom que houvesse uma disciplina que falasse um bocadinho nesse âmbito. A sensação que temos aqui [no curso] é que temos de nos saber desenrascar, pois quase que não nos ensinam nada. (…) Para introduzir certos termos /conceitos era bom ter mais preparação. (…)
> Quem tem mais experiência devia dizer o que se pode fazer. A primeira vez estamos quase no campo de descoberta. Não sabemos o que é que vai resultar e o que é que não. "

Embora não sentisse qualquer problema em dar explicações que se adequassem à faixa etária dos alunos, por vezes tinha dificuldades em compreender se estes estavam mesmo a perceber o que queria transmitir.

> "Havia certas alturas em que explicava de um modo, depois tornava a explicar de outro. Havia alguns alunos que percebiam mas, quanto a outros alunos, que estavam lá atrás, eu nunca chegava a perceber se tinham entendido. Uma pessoa fala, eles acenam que sim, mas não têm reacção nenhuma. Sei que conseguia explicar de outro modo, mas não sabia o que é que eles estavam a entender."

Esta "falha na comunicação" também se manifestou no sentido inverso porque, por vezes, não entendia as respostas ou intervenções de alguns alunos. Na sua perspectiva, "há alunos que não se percebe do que é que estão a falar, que saem fora do contexto".

> "Há alunos que têm muita facilidade em complicar as coisas, abstrair-se e complicar tudo. Dizia que era possível algo e explicava porquê e mal acabava de explicar, já tinha outra sugestão e, mesmo assim, não era nada do que eu queria."

Considera que, na globalidade, não teve dificuldades em avaliar os alunos.

> "Nos testes, a única dúvida que surgiu foi interpretar o português deles. Na participação também não [tive dúvidas]. Os que participavam eram sempre…era sistemático e como os trabalhos de casa eram sempre registados por um dos colegas, também não. (…)
> Em corrigir e classificar as perguntas [dos alunos no teste] também não [tive dúvidas]."

A não ser numa questão pontual, de um aluno, que lhe suscitou dúvidas sobre a cotação a atribuir, pois não considerava a resposta totalmente correcta, afirma que "o resto era muito fácil de corrigir".

Já no que se refere ao trabalho de grupo desenvolvido nesta unidade, embora pense que foi proveitoso para verificar se os alunos estavam a perceber os conceitos, considera que se torna problemático identificar o contributo de cada elemento do grupo.

> "Só que há aí um problema que é o trabalho de grupo. Muitas vezes, é só um ou dois elementos a fazê-lo. Talvez num trabalho a dois seja mais fácil ver o que eles estão a fazer."

Numa aula, a Maria propôs aos alunos a análise de um pictograma – Uma companhia de transportes fez uma sondagem a 1000 pessoas para saber qual o meio de transporte que usavam para ir para o trabalho. Aparece um pictograma sem legenda, em que cada símbolo é referente à modalidade de transporte utilizada, sendo alguns símbolos maiores, outros mais pequenos. Pretendia-se que detectassem erros na sua construção. Durante uma fase desta actividade, um aluno comenta: "Os desenhos podiam estar bem, se cada um tivesse a sua escala", algo que deixa a Maria com dúvidas, que acaba por responder, sem dar azo a mais indagações: "Assim tornava-se muito complicado".

Comentando este facto, a Maria afirma

> "Para ser sincera, não fazia a mínima ideia se isso é aceitável. (…)
> Aquela representação que queriam teria de ter 1 desenho para cada escala. O mais correcto seria escolher um único desenho e uma escala. Nesse caso, poderia comparar, em termos de quantidade, um pé, um comboio... Por exemplo, pé 300 pessoas, autocarro 500. Podiam comparar os valores. Neste caso penso que era isso que se pretendia.
> Eu não acho viável mas penso que é possível, agora não sei é se é cientificamente correcto."

Embora tenha ideias mais ou menos correctas sobre o assunto, manifesta algumas dificuldades em fazer uma opção e discuti-la com os alunos quando as situações saem fora do âmbito rotineiro a que está habituada.

No que respeita aos gráficos de barras, os alunos manifestaram dúvidas sobre a sua construção, como, por exemplo, na escala a utilizar, fazer as barras juntas ou separadas e também relativamente à largura das barras (variavam a largura no mesmo gráfico) e à localização nos eixos da frequência absoluta.

Este último aspecto é mencionado pela Maria, nas aulas, de forma pouco explícita.

> "Atenção para os eixos. Há meninos que colocam a frequência absoluta na horizontal, então têm que escrever isso neste eixo [eixo dos *xx*]."

Após a aula, comentando este facto com a investigadora afirmou:

> "A frequência absoluta não pode ser na horizontal? Eu não sabia. (…)

Tem que ser [barras horizontais]? Eu não sabia. Pensei que tanto fazia.”

Verifica-se, assim, que não reflectiu devidamente sobre o verdadeiro sentido da identificação dos eixos, pois à primeira vista manifesta que é indiferente colocar a frequência absoluta no eixo dos *xx* ou dos *yy* mas não atende ao aspecto da mudança da orientação das barras, ou seja, não adequa as sugestões dos alunos à situação em causa.

Também não tem presente a ideia de histograma pois, quando a investigadora refere este tipo de representação, associa-o aos gráficos de barras duplas. Esta situação vem na senda de não se lembrar da existência de diferentes tipos de variáveis.

Quanto ao exercício sobre a média, já referido (quatro amigos tinham em média, 11 anos. Juntou-se ao grupo dos quatro um outro amigo. Qual é a idade desse amigo se a média passou a ser 12 anos?), os primeiros alunos a resolvê-lo apresentaram respostas que não foram aceites pela Maria. Por exemplo, um aluno registou no quadro 11+11+11+11+16 = 60, 60:5 = 12, o que traduz um raciocínio correcto, mas por tentativas. Porém, de seguida afirmou: “somei 12 mais 12…”. Esta resposta foi contestada pela Maria: “mas a média dos quatro números é 11”. No entanto, não fez qualquer menção de aproveitar o raciocínio por tentativa erro para chegar a outro método mais formal. Outro aluno não ponderou as frequências absolutas no cálculo da média: 11+12 = 23, 23:4 = …, não chegando a acabar a sua resolução porque a Maria afirmou estar errada.

Finalmente, uma aluna da turma apresentou uma resposta correcta: 4×11 = 44 anos, 5×12 = 60 anos, 60 – 44 = 16 anos, que foi perfeitamente aceite pela Maria.

Conversando com a investigadora sobre este assunto, a Maria afirmou que não teve dificuldades e que tentou pensar numa forma de abordar o exercício na sala de aula:

> “Fiz com uma incógnita *x* e estive a pensar numa maneira de eles resolverem, pois vi que não podiam perceber desta forma.”

Um exercício que fez do manual escolar apresenta uma pessoa, de olhos vendados, a tirar uma bola de cada taça. A taça *A* tem 2 bolas vermelhas e 1 amarela e a taça *B* tem 4 bolas vermelhas e 3 amarelas. Menciona-se que se tira uma bola ao acaso de cada taça e pergunta-se em que caso é mais provável obter uma bola vermelha. Este exercício foi proposto para trabalho de casa e na correcção, feita por um aluno, fica a resposta no quadro: “No caso *A*, porque enquanto na taça *A* há 2 bolas vermelhas e uma bola amarela, no *B* há 4 vermelhas e 3 amarelas". Não houve por parte da Maria qualquer exploração desta resposta no sentido de clarificar de que forma esta afirmação permitiu chegar à resposta correcta.

Após a aula, referindo-se a este exercício, menciona apenas: "… eu expliquei-lhes tudo por tentativas". Afirmação que, de acordo com as suas respostas na terceira entrevista, se pode clarificar da seguinte forma: como o número mínimo de tentativas para tirar uma bola vermelha da taça *A* é 2 e da taça *B* é 4, é mais provável tirar uma bola vermelha da taça *A*. É porém de realçar que este raciocínio, noutras situações, nem sempre garante a escolha da resposta correcta.

5.3.3. O questionário

Na tabela 49 apresentam-se as respostas e os raciocínios utilizados pela Maria antes e após leccionar a unidade didáctica de Estatística, utilizando-se os mesmos critérios do primeiro caso estudado.

Tabela 49. Respostas e raciocínios da Maria no questionário, antes de ter leccionado a unidade de Estatística, e na terceira entrevista, após ter leccionado a unidade.

	Antes de leccionar a unidade		**Após leccionar a unidade**	
Questão	**Respostas**	**Raciocínios**	**Respostas**	**Raciocínios**
1.1	A moda é o Porto	Referência à maior frequência	=	=
1.2	Não responde	Sem justificação	Variação de resposta	Variação de raciocínio
2.1	As médias podem assumir os valores calculados	Heterogeneidade dos dados	=	=
2.2	A moda da turma A não pode assumir o valor calculado, a de B pode	Inexistência de classificação igual à moda Referência à maior frequência	=	=
3	A melhor é a média	Proximidade ao real	=	=
4	Peso possível 79 quilos	Algoritmo da média	=	=
5.1	A média é 1,9	Algoritmo da média	=	=
5.2	A moda é três irmãos	Referência à maior frequência	=	=
5.3	Não responde	Tabela de frequências	Variação de resposta	Variação de raciocínio
6	A média é 10,8	Algoritmo da média	=	=

7	O amigo tinha 49 anos	Não considerar a frequência absoluta	O amigo tinha 19 anos	Algoritmo da média
8	A média é 70 quilos	Lei do fecho	A média é 68 quilos	Algoritmo da média
9.1a)	Os vencimentos variam, no entanto, sejam eles mais altos ou mais baixos entre eles, o seu valor entre todos os funcionários ronda os 120000$00	—	=	—
9.1b)	O vencimento que mais funcionários recebem é de 80000$00	—	=	—
9.1c)	O vencimento intermédio, que se situa entre o valor mais alto e “o mais baixo é o de 90000$00.	—	90 mil escudos fica no centro. Imaginando que são 50 empregados, entre o 24 e o 25 recebem 90 mil, os que estão abaixo recebem menos e os que estão acima recebem mais que 90.	—
9. 2	Há muitos empregados a receberem 80 mil. Como a mediana é 90 mil, é também verdade que metade dos funcionários recebe muito menos que 90 mil e a outra mais que 90 mil. Como a média é 120 mil, parece que o vencimento daqueles que recebem mais de 90 mil é muito grande, talvez perto das duas centenas de contos.	—	=	—
10.1	Possível mas não certo	—	=	—
10.2	Certo	—	=	—
10.3	Impossível	—	=	—
10.4	Possível mas não certo	—	=	—
10.5	Possível mas não certo	—	=	—
11.1	Obter uma bola preta do saco I	Comparar as probabilidades dos acontecimentos	=	Número mínimo de tentativas
11.2	Obter bola preta do saco I	Comparar o número total de bolas	Variação de resposta	Variação de raciocínio
11.3	É igualmente provável	Comparar as probabilidades dos acontecimentos	=	=
12	Tirar 10 bolas	Bolas mais numerosas	=	=
13.1	Sair uma bola colorida	—	=	—
13.2	Sair uma bola preta	—	=	—
13.3	Sair uma bola azul	—	=	—

Na coluna respeitante a *Após leccionar a unidade* (dados provenientes da análise da terceira entrevista) o símbolo = significa que se mantêm as respostas ou os raciocínios de *Antes de leccionar a unidade* (quando se passou o questionário a toda a turma).

Os termos *variação de resposta* e *variação de raciocínio* significam que as respostas e/ou os raciocínios da Maria foram sendo alterados à medida que decorreu a entrevista.

O símbolo — indica que não se analisaram as questões do ponto de vista dos raciocínios.

O raciocínio *Número mínimo de tentativas*, que foi usado pela Maria na pergunta 11.1 durante a terceira entrevista, é apenas explicado neste capítulo quando se faz a análise dessa questão. Este facto advém desse raciocínio não ter sido utilizado pelos alunos quando responderam ao questionário pela primeira vez (primeira fase do estudo).

De seguida, referem-se as explicações da Maria relativamente às questões em que as respostas e/ou os raciocínios estavam incorrectos ou em que houve uma clarificação no sentido de esclarecer melhor o seu raciocínio. Assim, não se mencionam as questões cuja entrevista não trouxe nada de novo. Por uma questão de facilidade na análise, referem-se duas fases: a primeira fase reporta-se à passagem do questionário *Antes de leccionar a unidade* e a segunda refere-se à terceira entrevista *Após leccionar a unidade*.

Sub-questão 1.1

Na primeira fase, a Maria respondeu, correctamente, que a moda é o Porto, "uma vez que é o clube com maior preferência".

Na segunda fase, revelou alguma dificuldade em saber se podia justificar a resposta dada com base na frequência relativa.

> "Aqui há um problema. Nesta questão, quando analisamos a moda não estamos a analisar a frequência absoluta. (...) Não tinha a certeza se podia responder com a frequência relativa, dizendo que analisámos a frequência relativa. (…) Se era necessário calcular a frequência absoluta. Não era necessário?”

As suas dúvidas traduzem, de certa forma, uma ‘colagem’ à definição de moda que aparece vulgarmente nos manuais e que se refere exclusivamente à frequência absoluta.

Sub-questão 1.2

Na primeira fase, embora tivesse calculado a média das frequências relativas, riscou e escreveu “não é assim”, não dando qualquer resposta à questão.

Na segunda fase, começou por explicar a tentativa feita na primeira fase:

> “Comecei a calcular a média usando a frequência relativa, e não sabia se podia calcular a média usando a frequência relativa, se não era necessário determinar a frequência absoluta."

À primeira vista, as dificuldades da Maria têm a ver com o facto de serem dadas as frequências relativas em vez das frequências absolutas das preferências de clube. A investigadora pediu então à Maria que explicasse como determinaria a média se conhecesse as frequências absolutas. Depois de as calcular e após uma breve reflexão, concluiu que era impossível aplicar o algoritmo da média.

> "Se isso é possível?... A mim parece-me que não. Não é possível calcular a média... Agora que estava a ver aquilo que era suposto fazer. Por exemplo, 29 pessoas vezes não sei das quantas… é o Porto. E o Porto não entra no cálculo. Então não é possível calcular a média."

Embora tenha sido pedido à Maria para esclarecer melhor o seu raciocínio, esta tem dificuldades em aplicar termos estatísticos adequados à situação. Assim, face à solicitação feita, a Maria afirma: "justificação correcta e científica não sei" e, "se a linguagem científica existe mesmo, tenho quase a certeza de que nunca a dei".

Mesmo quando questionada sobre o tipo de variável a que se reporta a questão, refere que não sabe e que não se lembra da forma como se classificam as variáveis. E apesar da investigadora ter mencionado a existência de variáveis qualitativas e quantitativas, não lhe ocorre mais nenhuma ideia para completar o raciocínio feito.

Questão 3

Na primeira fase, embora não fosse pedido, determinou, de forma correcta, a média, a moda e a mediana. Depois elegeu a média como medida que melhor representa o conjunto dos dados, afirmando que "ficamos a saber mais ou menos o valor dos dados recolhidos".

Na segunda fase, manteve a resposta dada e tentou esclarecer o raciocínio feito:

> "Eu dizia a média, era 1995, sabia que eram 10 amigos, multiplicava e sabia que o total era 19950$00 do dinheiro que tinha. (...) Claro que há uns que recebem mais e outros que recebem muito menos...

Acrescenta ainda:

> "A média parece ser muito mais justa, no sentido… média todos recebem o mesmo. A moda é aquela que se repete mais vezes. Mas, por exemplo, em 10, aquilo, 6000, só se repete duas vezes. Isso não nos dá nada em relação aos outros oito."

Questão 4

Na primeira fase, a Maria determinou a soma de todos os pesos das 9 pessoas:

$78 = \frac{x}{9}$, x = 702. Seguidamente, retirou a este o peso conhecido, 702-70 = 632, referindo que obtinha a soma do peso das 8 pessoas e dividiu o resultado obtido por 8 pessoas, 632:8. Respondeu, então, que 79 quilogramas era o peso possível para cada uma das restantes oito pessoas.

Na segunda fase, concordou com a resposta anterior. Quando se lhe solicitou outra resposta possível, recorreu a um raciocínio baseado em tentativa e erro.

> "Podia fazer por tentativas, mantendo a média de 79 para o peso das oito e aumentar o peso para uma, diminuir o peso para outros, desde que mantivesse a média."

Sub-questão 5.3

Na primeira fase, a Maria construiu a tabela de frequências, incluindo as frequências absolutas e as frequências absolutas acumuladas. Porém, parou aqui o seu raciocínio, afirmando que não se lembrava da fórmula.

Na segunda fase, depois de reflectir um pouco, continuou a afirmar que não sabia calcular a mediana sem ter uma fórmula.

Como já tinha calculado a mediana noutra questão (questão 3 – em que justifica o cálculo da mediana dizendo: "Eu lembrava-me que era aquele número que ficava lá no meio. Nas aulas lembrava-me de vermos o que ficava no meio."), a investigadora tentou fazer a Maria reflectir mais um pouco:

> I: Pense no significado de mediana.
> M: Estaria entre o 2 e o 3.
> I: Em que baseia a sua resposta?
> M: Não me lembro. [Reflecte mais um pouco.] O número de irmãos… estava a colocar o número de irmãos e ver o que fica no meio, para ver 50%, 50%, ... é 13,5. [determina metade da soma das frequências absolutas] Ficava entre o 1 e o 2.

Assim, a Maria acabou por localizar a posição da mediana, mas não interpretou de forma totalmente correcta o novo dado que obteve, mostrando que continua com dúvidas ao acrescentar:

> "É que, para mim, a mediana é o que ficava a 50% de um lado e 50% do outro. Não me lembro de mais definição nenhuma de mediana. É que não tenho mesmo bem consciente do que é a mediana."

Questão 7

Na primeira fase, a Maria usou o algoritmo da média, mas sem ponderar adequadamente o valor respeitante à média dada. Ou seja, determinou o valor de x – idade do amigo que se juntou ao grupo – através da resolução da equação $16 = \frac{15+x}{4}$, pelo que concluiu que o amigo tinha de ter 49 anos.

Na segunda fase, explicou que o erro do raciocínio anterior resultou de distracção, pois onde está 15 devia ter colocado 3×15, "que era a idade total dos três amigos". Deste modo, chegou à conclusão correcta: a idade do novo amigo é 19 anos.

Questão 8

Na primeira fase, a Maria calculou a média das duas médias, ou seja, utilizou a lei do fecho, concluindo que a média do peso das 10 pessoas era 70 quilogramas.

Na segunda fase, propôs uma resolução diferente, ponderando adequadamente os valores para calcular a média:

> "Se fosse hoje, eu teria... Se a média do peso das 6 mulheres é 60, então o peso dessas mulheres é 360. Fazia o mesmo raciocínio com os homens e depois calculava a média do peso total por 10, que dava 68."

Embora agora tenha usado um raciocínio diferente, não tinha a certeza se o processo que usou na primeira fase estava ou não correcto:

> "Agora na altura era… Fiz que a média será a média do peso das mulheres e dos homens a dividir por 2. E, até hoje, eu não sei se é possível fazer isso que eu fiz. O que eu fiz, calcular a média [60] mais esta média [80] a dividir por 2. Não sei se isto é possível. (…)
> Não sei se é possível calcular a média da média, porque dá valores diferentes. Não saberia se isso está correcto. (...) Aqui [1º processo], a média… aqui, pode ser uma média roubada."

A investigadora propôs, então, uma adaptação da questão, fazendo apenas variar o número de mulheres e de homens [15 mulheres e 7 homens]. A Maria constata que, pelo primeiro processo [aplicação da lei do fecho], dava exactamente o mesmo valor que no caso anterior, pelo que conclui que esse raciocínio não está correcto.

> "Dá na mesma 70. Então está completamente mal. Este vai alterar, realmente era uma boa... Estava a aplicar este raciocínio e, pelos vistos, estava completamente errado."

Sub-questão 9.1.a)

Na primeira fase, respondeu que "os vencimentos variam, no entanto, sejam eles mais altos ou mais baixos entre eles, o seu valor entre todos os funcionários ronda os 120 000$00".

Na segunda fase, referiu que não alterava nada e acrescentou:

> "Eu fui pela definição de média. Como é o quociente... não sei quê, essas coisas todas... a média é o valor intermédio – uns podem ser maiores, outros

> menores, o preço pode ser maior, outro menor, mas em média cada um receberia 120 mil escudos".

Sub-questão 9.1.c)

Na primeira fase, respondeu: "o vencimento intermédio que se situa entre o valor mais alto e o mais baixo é o de 90 mil escudos".

Na segunda fase, explicou que o que queria dizer com vencimento intermédio era "naquele sentido em que a definição de mediana era aquele que estava no meio, 50%".

Face ao pedido da investigadora para esclarecer melhor o que queria dizer com estar no meio, a Maria acrescentou:

> "Quer dizer que... 90 mil escudos fica no centro, há ordenados mais... Imagine que são 50 empregados, então há ordenados, então entre o 24 e o 25 recebem 90 mil, os que estão abaixo recebem menos e os que estão acima recebem mais que 90".

Verifica-se, assim, que a Maria tinha alguma ideia, embora um pouco confusa e imprecisa, do real significado do conceito de mediana.

Sub-questão 9.2

Na primeira fase, tentou extrair algumas conclusões com base no que sabia sobre as medidas:

> "Há muitos empregados a receberem 80 mil escudos como vencimento. Como a mediana é 90 mil escudos, é também verdade que metade dos funcionários recebe muito menos de 90 mil escudos e a outra mais do que 90 mil escudos. Como a média é 120 mil escudos, parece que o vencimento daqueles que recebem mais de 90 mil escudos é muito grande, talvez perto das duas centenas de contos. É injusto, mas também pode depender do cargo ocupado."

Na segunda fase, tentou explicar melhor as suas ideias:

> "Se a moda é o número que corresponde à maior frequência absoluta, ou seja, havia muitas pessoas a receberem 80. Eu disse que era injusto o ordenado, aliás mantenho esse comentário, (…) ou seja, se mais de 25 empregados recebem 90 mil escudos, os outros 25 vão receber, segundo a moda, 80 mil escudos. Está a perceber? (…)
> A moda... se a moda é 80 mil escudos, é o ordenado que mais empregados recebem... Isso quer dizer que... 25 [empregados] ficam para trás de 90, se a moda é 80 mil escudos, fica para trás dos 90."

Face a estas afirmações, um pouco confusas, a investigadora tentou perceber se a Maria quer mesmo dizer que, pelo facto da moda ser 80 mil escudos, 25 empregados recebem 80 mil escudos. Em resposta, esta esclareceu:

> “Não quer dizer que sejam 25, mas desses 25 muitos deles recebem 80. E é nesse sentido. E então, se a média é 120 mil escudos, muitos recebem 80 mil escudos. Para fazer a média dar 120 quer dizer que o ordenado de algumas pessoas é muito maior que 120 mil escudos.”

Questão 10

Na primeira fase, apenas não classificou correctamente o acontecimento "sair um número maior do que 0" (pergunta 10.4), pois afirmou que era possível mas não certo, em vez de certo.

Na segunda fase, declarou que concordava com as respostas dadas. Contudo, tentou explicar o raciocínio que utilizou na pergunta 10.4, talvez porque tivesse algumas dúvidas quanto à resposta que deu.

> M: Sair um número maior que zero. Disse possível mas não certo porque aqui não faz restrição. Sair um número maior que zero implica que também pode sair o 100. E o 100 não existe. Não é completamente impossível porque pode sair um número de 1 até 90 e 1 até 90 é maior que zero, só quando passa de 90 é que é possível.
> I: Acha que é possível mas não certo porque de 1 até 90 pode sair, mas a partir de 90 não pode sair, é isso?
> M: É, e não me parecia justo classificar de acontecimento impossível porque de 1 a 90 pode sair.
> I: E classificar como certo?
> M: Certo sair um número maior que zero? É. Só que eu analisei é certo sair um número maior que zero. Mas quando analisei isto, analisei sempre a possibilidade de sair maior que 90, que era impossível. Pensando nisso, mas realmente é certo sair um número maior que zero.
> I: Concorda que pode ser classificado como acontecimento certo?
> M: É certo, mas sair o 91 é impossível. Como é que posso dizer que é um acontecimento certo, se sair o 91 é impossível?
> I: Mas será que não posso dizer que é certo que sai maior que zero?
> M: É. É certo que sai maior que zero... Mas então... lá está, mais de 90, a mim, o mais de 90 é que impede de dizer que é certo.

A Maria teve dificuldades em aceitar que o acontecimento em questão é um acontecimento certo, o que se deve a uma inadequada compreensão do espaço de resultados.

Sub-questão 11.1

Na primeira fase, respondeu que era mais provável obter bola preta do saco I, que é a resposta correcta, com base no raciocínio *Comparar as probabilidade dos acontecimentos*.

Na segunda fase, começou por justificar a resposta dada anteriormente com base no número mínimo de bolas que tem de tirar do saco para ter a certeza de obter uma bola preta.

> "No saco I tenho 4 bolas, então se quero uma bola preta, no saco I é muito mais provável porque o número de tentativas máximo que faço para tirar uma bola preta é 3 mas no saco II é 4. O número máximo de tentativas que tinha que fazer para retirar a bola preta era 4, no saco I era apenas 3.”

A investigadora tentou, então, perceber se a Maria utilizou mesmo o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* para dar a resposta na primeira fase, como aparentemente os registos efectuados faziam supor.

> I: Calculou a probabilidade de sair uma bola preta em cada saco. Depois comparou essas probabilidades?
> M: Não sei. Pus para ver a probabilidade, mas provavelmente também fiz este raciocínio de 2, 3, 4 bolas.
> I: Não dá para perceber muito bem se determinou só por determinar ou se usou esse raciocínio para responder à questão.
> M: Não, porque eu não dou mais nenhuma justificação. ... é menor… 0,5... Aqui, a probabilidade de sair a bola preta é menor, no saco II. Posso ter comparado os valores. (…)
> Fiz, fiz [a comparação]. Eu calculei mas não dei bem uma justificação mais exaustiva do género: a probabilidade aqui é menor, ali é maior.

Sub-questão 11.2

Na primeira fase, tinha respondido "Do saco I, pois possui apenas 3 bolas, enquanto que o II possui um maior número de possibilidades [5 bolas]", ou seja, utilizou o raciocínio *Comparar o número total de bolas*.

Na segunda fase, argumentou:

> "Agora no de baixo é o mesmo... Porque aqui [saco I] tem que se fazer 3 tentativas, ali [saco II] 4. Indo pela regra de Laplace 1/3 e 2/5, é maior a probabilidade de sair no saco I."

A investigadora pediu para a Maria explicar melhor esta associação de raciocínios.

> M: É assim, para sair uma bola preta aqui [saco I], o número máximo de tentativas que faço é 3, aqui já são 4. É mais nesse sentido, ou seja, é muito mais provável sair uma bola preta aqui [saco I] do que aqui [saco II].
> I: Estou a tentar acompanhar o seu raciocínio.
> M: Se meter a mão temos só três bolas e uma delas é preta. Nas duas primeiras tentativas pode sair branco, à terceira está garantido que sai preto. Mas ali não. No saco II posso meter a mão três vezes dentro do saco e das três vezes sair bola branca, só na quarta é que me sai garantidamente preta.
> I: Está a associar a probabilidade ao número de tentativas...
> M: Usando Laplace, aqui dá 1/3 e aqui dá 2/5.

A Maria, nesta fase, reflecte um pouco e parece ficar confusa pela contradição entre a ideia do número de extracções necessárias à obtenção certa da bola preta e a comparação das probabilidades calculadas para cada caso. Finalmente, comenta sem mais justificações: "era mais… era mais esperta se aplicasse a lei de Laplace".

Sub-questão 11.3

Na primeira fase, tinha indicado, para cada saco, a probabilidade de sair bola preta e respondido: "a probabilidade é a mesma para ambos os sacos, já que em ambos 2 em 3 bolas são pretas", ou seja, utilizou o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*.

Na segunda fase, continuou a concordar com a resposta dada, referindo: "a probabilidade era a mesma. Casos possíveis, casos prováveis".

A investigadora propôs, então, que voltasse a utilizar o raciocínio anterior das tiragens.

> "Aí… aqui [saco I] era à segunda tentativa e aqui [saco II] era só à terceira. No entanto, eu digo que é a mesma. Não fui constante."

Embora não tenha sido muito explícita em explicações, parece que nesta fase considerou que o raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* estaria mais correcto do que o que utilizara anteriormente. Referindo-se às aulas leccionadas no 2º ciclo, relatou que fez um exercício parecido e que lhes explicou tudo por tentativas, e acrescentou: "parece que não dá muito resultado".

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste capítulo começa-se por fazer um breve resumo da investigação realizada, relembrando os seus objectivos e a metodologia utilizada. De seguida, mencionam-se as conclusões respeitantes aos vários domínios abordados no estudo, expõem-se as limitações que se consideram relevantes e, finalmente, tecem-se algumas recomendações didácticas e apresentam-se sugestões para futuras investigações.

6.1. Síntese do estudo

O estudo efectuado situa-se no contexto de formação inicial de professores, do 1º e 2º ciclos do ensino básico, no domínio da estatística e probabilidades e, através dele, procurou-se atingir os seguintes objectivos:

(a) Identificar dificuldades e processos de raciocínio de futuros professores em aspectos elementares ligados aos conteúdos de estatística e probabilidades;

(b) Identificar dificuldades de futuros professores no planeamento e execução de aulas sobre o tema;

(c) Descobrir os factores subjacentes às opções que os futuros professores adoptam na sua prática lectiva;

(d) Compreender de que forma as dificuldades sentidas influenciam a sua prática;

(e) Averiguar se a prática induz uma reflexão sobre as dificuldades e provoca mudanças de raciocínio.

O estudo desenvolveu-se em duas fases. Na primeira fase, uma turma de 37 alunos do 4º ano do curso de Professores de Ensino Básico da variante Matemática e Ciências da Natureza respondeu a um questionário cujas questões se reportavam a conceitos elementares de estatística e probabilidades. Para a segunda fase foram seleccionados três dos participantes da primeira fase do estudo, tendo como condição imprescindível que fossem leccionar a unidade didáctica de Estatística do 6º ano, no âmbito da disciplina de Prática Pedagógica II (estágio). Nesta segunda fase, observaram-se todas as aulas que as três participantes leccionaram sobre o tema e fez-se a cada uma delas três entrevistas. A primeira realizou-se antes das participantes começarem a leccionar a unidade de Estatística, visando a recolha de dados sobre as suas opções profissionais, sobre a sua relação com a estocástica e ainda a detecção de algumas dificuldades iniciais na preparação/planificação de aulas. A segunda entrevista, que foi feita após terem leccionado a unidade, centrou-se nos aspectos referentes às dificuldades sentidas na planificação de aulas e sua concretização e à clarificação de determinadas opções pedagógicas relativamente ao ensino da estocástica no 2º ciclo. Por último, a terceira entrevista visou aprofundar o tipo de raciocínios feitos quando responderam ao questionário na primeira fase do estudo (antes de leccionarem a unidade) e as alterações que, após a leccionação da unidade, achavam conveniente fazer. Os estagiários forneceram ainda todo o material que realizaram para as aulas e para os orientadores.

Para os dados da primeira fase definiram-se categorias com base nas respostas dadas e nos raciocínios utilizados, e, na sua análise, foram determinadas frequências relativas em percentagem e construídas as respectivas tabelas de frequência relativa, separadamente para as respostas e para os raciocínios de cada pergunta. No que respeita aos dados da segunda fase, a sua análise foi feita caso a caso tendo em conta os resultados obtidos e tentando seguir as orientações que guiaram o estudo.

6.2. Conclusões

As conclusões que a seguir se apresentam foram elaboradas a partir da análise dos resultados obtidos nas duas fases da investigação e procuram responder a cada um dos objectivos formulados para o estudo. Sempre que possível, são também indicadas referências de conclusões provenientes de investigações em âmbitos similares.

6.2.1. Dificuldades e processos de raciocínio

Dificuldades em estatística

Na generalidade, os alunos conhecem o conceito de moda e conseguem identificá-la em situações simples, sendo o raciocínio *Referência à maior frequência*, que alude directamente à definição de moda, o mais utilizado para justificar as respostas.

Todavia, persistem ainda algumas dificuldades. Alguns alunos (22%), embora utilizando o raciocínio *Referência à maior frequência*, tiveram dificuldades em identificar a moda quando a variável em causa era qualitativa, confundindo-a com a respectiva frequência relativa. Assim, mesmo parecendo ter conhecimento da definição, a procura de um valor numérico para a moda foi uma tendência observada. Este facto pode indicar que, para alguns alunos, este conceito, embora memorizado, não foi compreendido na sua amplitude. Barr (s/d) também observou, com alunos entre os 17 e 21 anos, que, por vezes, estes incorriam no erro de indicar como moda o valor máximo das frequências.

Foi, no entanto, nas questões que envolviam alguma interpretação relacionada com o conceito de moda que os alunos revelaram mais dificuldades. Por exemplo, numa questão em que se afirmava que 50% dos alunos de uma turma obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores, 41% dos alunos considerou que o valor da moda não poderia ser superior àquele, ignorando que existem 50% das observações que podem ter outros valores e entre os quais poderá estar o mais frequente. Num sentido similar, parece também haver alunos que consideram a moda como correspondendo a mais de 50% das observações. Neste caso, quando o objectivo era interpretar o significado da moda num dado contexto, a sua associação à maioria, à maior parte, ao maior número ou a grande parte das observações foi feita por 30% dos alunos. Contudo, reconhece-se que, neste caso concreto, as respostas podem não traduzir correctamente o pensamento dos inquiridos, já que os termos utilizados podem resultar de questões de terminologia e linguagem utilizada abusivamente. Os resultados da segunda fase do estudo corroboram de certa forma esta ideia, pois, por exemplo, quando analisaram pela segunda vez as questões do questionário (terceira entrevista), duas das estagiárias utilizaram o termo “a maior parte dos empregados”, quando se referiam à moda. Clarificaram, porém, que não pretendiam referir-se a mais de 50% dos dados mas que utilizavam o termo no sentido de “mais empregados”.

No que diz respeito à média aritmética, pode-se concluir que os alunos conhecem o seu algoritmo, mas nem sempre utilizam esse conhecimento de maneira significativa.

Por exemplo, a aplicabilidade do conceito de média, quando estão em causa variáveis qualitativas, ainda origina muitas dificuldades, pois apenas 38% dos alunos consideraram que, nesse caso, não é possível calcular a média e muito menos alunos (14%) usaram raciocínios considerados válidos. Em geral, os alunos tentaram encontrar um valor numérico que representasse a média, manipulando os dados sem ter em conta o contexto. O cálculo da média das frequências foi o erro mais frequente, tendo sido cometido por 60% dos alunos.

O cálculo da média a partir de um gráfico de barras também gerou bastantes dificuldades, tendo-se obtido apenas 54% de respostas correctas, cujo raciocínio se baseou na aplicação do algoritmo da média. Muitos dos erros cometidos devem-se ao facto dos alunos não interpretarem correctamente cada um dos eixos e a sua relação. Por exemplo, um aluno calculou a média dos valores do eixo das abcissas (média dos valores da variável), 11% dos alunos calcularam a média dos valores do eixo das ordenadas (média das frequências absolutas) e 14% dos alunos calcularam a média através do quociente da soma das frequências absolutas (eixo das ordenadas) pela soma dos valores da variável (eixo das abcissas), não considerando a frequência absoluta correspondente ao valor zero da variável, ou seja, consideraram, implicitamente, zero como elemento neutro (concepção errada também observada por Batanero *et al.*, s/d;

Leon e Zawojewski, 1991; Mevarech, 1983 e Strauss e Bichler, 1988). Esta propriedade foi ainda considerada válida por 5% dos alunos noutra questão em que, dada uma média, se introduzia o zero como novo dado e se pedia a nova média obtida.

A dificuldade dos alunos em resolver problemas envolvendo o cálculo de uma média ponderada, já observada nos estudos de Gattuso e Mary (1998), Li e Shen (1994), Mevarech (1983) e Pollatsek *et al.* (1981), foi igualmente proeminente nesta investigação. Assim, para além das dificuldades já evidenciadas no caso do cálculo da média a partir de um gráfico de barras, que de certa forma também se pode enquadrar nesta categoria de problemas, verificou-se que, no caso da última questão citada (em que, dada uma média, se introduzia o zero como novo dado e se pedia a nova média) apenas 49% dos alunos deram uma resposta correcta, sendo a não ponderação dos valores no cálculo da média o erro mais frequente (38% dos alunos). Detalhando este tipo de erro, verificou-se que 21% destes alunos usaram a lei do fecho (concepção errada também identificada por Mevarech, 1983 e por Pollatsek *et al.* 1981). Esta propriedade foi também aplicada por 30% dos alunos numa questão em que se pedia a média de duas médias dadas e, ainda, por 8% dos alunos noutra questão em que se pedia o valor de um novo dado introduzido, conhecidas a média inicial (sem esse valor) e a média final. Nesta última questão, conquanto 65% dos alunos tivesse dado a resposta correcta, apenas 33% recorreram ao algoritmo da média. Dos outros, 8% utilizaram um raciocínio de compensação dos valores e 30% recorreram ao método de tentativa e erro. Este raciocínio pode-se considerar menos eficiente e mais elementar atendendo aos conhecimentos que os alunos deste nível de ensino devem possuir. Para além disso, nem sempre conduziu à resposta correcta, tendo havido alunos que cometeram o erro de parar quando o quociente não coincidia com a média dada, tal como foi observado por Cai (1995) em alunos do 6º ano.

Neste estudo detectaram-se, ainda, concepções erradas sobre as relações entre a média e a distribuição. Alguns alunos (11%) referiram que a média não podia ser superior ao valor máximo possível de 50% dos dados e outros (8%) consideraram que o facto de uma turma ter classificações mais altas que outra era impeditivo da média ser igual nas duas turmas. Concepção semelhante a esta última foi igualmente identificada por Dreyfus e Levy (1996) com alunos de 11 e 12 anos.

Nas questões que diziam respeito à mediana, houve uma elevada percentagem de não respondentes, assim como uma pequena percentagem de respostas correctas.

Por exemplo, quando se pediu aos alunos para determinarem a mediana partindo de um gráfico de barras, 30% não deram qualquer resposta e 19% não justificaram a resposta dada, facto que pode ser indicativo da falta de confiança nessa resposta. Apenas 14% apresentaram uma resposta correcta que se baseou no raciocínio *Localização da posição* da mediana. Dos erros que os alunos cometeram, destacam-se associar a mediana a metade da amplitude dos dados (11%), calcular a mediana dos valores da variável (8%), identificar a mediana com 50% dos inquiridos (5%), o que significa confundir a mediana com a sua localização, e considerar 0 (zero) como elemento neutro (5%).

O erro de determinar a mediana dos valores da variável foi também identificado por Sousa (2002) num estudo envolvendo alunos de 6º ano e por Barr (s/d) em estudantes entre os 17 e 21 anos.

A ausência de resposta também se verificou quando se pediu a interpretação da mediana num dado contexto, incluindo-se neste caso 30% dos alunos. É também de notar que, nesta situação, as interpretações dos estudantes remeteram essencialmente para a determinação do valor da mediana, não tendo havido qualquer aluno que fizesse realmente uma interpretação contextualizada.

A maior dificuldade dos alunos em relação às questões que envolvem uma compreensão relacional dos conceitos foi também evidenciada numa questão em que se pedia para seleccionar, entre a moda, a média e a mediana, a medida que melhor caracterizaria um determinado conjunto de dados. Neste caso, apenas 43% dos alunos deram uma resposta correcta. Todavia, analisando as respostas do ponto de vista dos raciocínios, verifica-se que apenas 19% dos alunos utilizaram um raciocínio baseado em argumentos válidos, isto é, falaram comparativamente das medidas e estabeleceram uma relação com os dados.

De realçar que houve alunos (16%) que fizeram a sua escolha atendendo à facilidade que tinham em calcular as medidas e outros (8%) que, aparentemente, consideraram a mediana como uma medida de dispersão, pois, com base na amplitude dos dados, elegeram a mediana como melhor representante.

Nesta questão, embora não fosse pedido para determinar as medidas, houve alunos que as calcularam ou aludiram à forma de as calcular, sobressaindo uma maior dificuldade em determinar a mediana comparativamente com o cálculo da média e com a identificação da moda. Este resultado foi, igualmente, obtido no estudo de Sousa (2002) e, de certa forma, nas investigações de Carvalho (1996) e Barr (s/d), pois estes observaram maior dificuldade no cálculo da mediana, comparativamente à média (Carvalho) ou à moda (Barr).

O maior grau de dificuldade do conceito de mediana foi ainda mais notório na questão em que se partiu de um gráfico de barras, questão já referida a propósito das outras estatísticas. Neste caso, a percentagem de respostas correctas foi de 97% para a identificação da moda, 54% para o cálculo da média e apenas 14% para a determinação da mediana.

Com base nestes dados e nos referentes à questão que envolvia variáveis qualitativas (78% e 38% de respostas correctas para a moda e para a média, respectivamente) poderia, ainda, concluir-se que o conceito de média gera mais dificuldades que o de moda. Todavia, esta relação não é assim tão linear, pois na questão em que se tinha de interpretar os valores da média e da moda, previamente calculados a partir de características fornecidas da distribuição, os alunos manifestaram muito mais dificuldades no caso da moda (41% de respostas correctas) do que no caso da média (70% de respostas correctas). Este facto deveu-se, essencialmente, à afirmação: ‘50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores’, que apesar de ter levado 41% dos alunos a considerar, incorrectamente, que o valor da moda não poderia ser superior àquele valor, apenas influenciou 11% dos alunos, no mesmo sentido, no caso da média.

Perante as dificuldades supracitadas evidenciadas pelos alunos, que são mais prementes em actividades não rotineiras, pode-se concluir que estas se devem a uma compreensão superficial dos conceitos, corroborando, de certa forma, a opinião de Tormo (1995, p. 30):

> “Os estudantes têm uma grande predisposição para se centrarem na aprendizagem de fórmulas e regras para resolver um problema-tipo. Tentam mecanizar os problemas, o que os impede de resolver problemas de contexto em que têm que transladar para a situação descrita a fórmula aprendida. Esta forma de ‘aprender’ impede-os de chegar à conclusão real do conceito.”

Dificuldades em probabilidades

No que diz respeito aos acontecimentos, embora, em geral, a sua classificação e exemplificação não levantasse muitos problemas, verificou-se que os alunos tiveram mais dificuldades na classificação e formulação de acontecimentos certos, relativamente aos outros tipos de acontecimentos, o que também foi observado por Fischbein *et al.* (1991).

Por exemplo, no que se refere à classificação de acontecimentos, nas duas perguntas em que os acontecimentos eram certos, 14% dos alunos em cada caso classificaram-nos como possíveis mas não certos. Quando o acontecimento era possível mas não certo, 8% dos alunos classificaram-no como certo. E, no caso do acontecimento impossível, apenas um aluno apresentou uma resposta incorrecta, classificando-o como possível mas não certo. Este resultado corrobora as conclusões de Fernandes (1999) de que os alunos têm mais dificuldades em identificar um acontecimento certo comparativamente a um acontecimento impossível.

No caso da formulação de acontecimentos, verificou-se que 97% dos alunos apresentaram exemplos correctos de acontecimentos impossíveis, 95% de acontecimentos possíveis mas não certos e 78% de acontecimentos certos. Das respostas relativas a este último, 86% podem-se considerar bastante elementares atendendo ao nível de ensino frequentado pelos alunos, facto que se pode dever a uma compreensão limitada dos conectivos lógicos. De notar que Fernandes (2001) observou que a inclusão de conectivos lógicos na formulação de acontecimentos certos aumentou consideravelmente as dificuldades dos alunos aquando da sua classificação.

Os resultados apresentados corroboram resultados análogos obtidos por Fischbein e Gazit (1984) ao observarem que a maioria dos alunos (de 10 a 13 anos) foi capaz de dar um exemplo de cada categoria de acontecimentos e por Fischbein *et al.* (1991) que detectaram, em geral, maior dificuldade na formulação de acontecimentos do que na sua classificação.

Embora o conceito de acontecimento certo seja aparentemente simples, observaram-se muitas dificuldades quando se trabalhou com este tipo de acontecimento em situações não rotineiras. Numa questão em que, dadas 5 bolas vermelhas, 2 verdes e 4 brancas, se pretendia saber o número mínimo de bolas a extrair, para assegurar que saía uma bola de cada cor, apenas 24% dos alunos deram uma resposta correcta, e somente 19% utilizaram um raciocínio válido baseado na contagem das bolas a partir da cor que tinha mais bolas. Os erros mais frequentes foram a utilização do cálculo de probabilidades (27%) e do cálculo combinatório (16%) para responder à questão. Deste modo, os alunos utilizaram fórmulas que lhes permitissem combinar os dados do enunciado para chegarem a uma resposta, sem demonstrarem qualquer preocupação em verificarem a sua adequação à situação. Atitude semelhante já tinha sido verificada no caso das questões alusivas à média. Destaca-se, ainda, uma elevada percentagem de alunos (33%) que não apresentaram qualquer justificação.

Fischbein e Gazit (1984), numa questão idêntica, verificaram igualmente que alunos (do 5º ao 7º ano) tiveram muitas dificuldades. É de realçar que os alunos do 6º e 7º ano do seu estudo obtiveram uma maior percentagem de respostas correctas do que os alunos da presente investigação. Atendendo a este facto e ao tipo de raciocínio incorrecto mais frequente, é-se levado a supor que os conhecimentos mais avançados, que os alunos possuem impedem-nos, por vezes, de reflectir devidamente em situações mais simples.

No que concerne à comparação de probabilidades em experiências simples, no contexto de sacos contendo bolas pretas e brancas observou-se que os alunos tiveram mais dificuldades na questão em que era diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos (22% de respostas incorrectas), seguindo-se a questão em que era igual a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos (8% de respostas incorrectas). Finalmente, na questão em que era igual o número de bolas de uma cor em ambos os sacos, obteve-se apenas 3% de respostas incorrectas.

No entanto, se a comparação for feita com base nos raciocínios, verifica-se que a percentagem de alunos que utilizaram os raciocínios *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* ou *Comparar as razões*, que se baseiam em argumentos válidos, é de 60% na questão em que é igual o número de bolas de uma cor em ambos os sacos, 78% na questão em que é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos e 84% na questão em que é igual a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos. Além disso, em qualquer das questões, *Comparar as probabilidades dos acontecimentos* foi o raciocínio válido mais frequentemente referido, talvez pelo facto de o cálculo de probabilidades ter sido o tipo de raciocínio mais utilizado durante o seu percurso escolar neste tipo de situação. Fernandes (1999) observou também, no que diz respeito aos argumentos válidos, a prevalência desse tipo de raciocínio em estudantes de 11º ano que já tinham passado pelo ensino de probabilidades no seu percurso escolar.

Pelos resultados obtidos, pode constatar-se que a questão que originou maior número de respostas correctas é a que apresenta menor percentagem de raciocínios válidos. Talvez nas situações mais simples os alunos não tenham sentido a necessidade de aprofundar tanto os seus raciocínios, já que um raciocínio mais primitivo foi suficiente para tomar uma decisão. Neste caso, os raciocínios *Comparar o número de bolas brancas e pretas* (usado por 22% dos alunos), *Comparar o número de bolas brancas* (11% dos alunos) e *Comparar o número total de bolas* (5% dos alunos) permitem, igualmente, chegar à resposta correcta.

É, ainda, de referir a coexistência, nas respostas de alguns alunos, de raciocínios intuitivos e normativos, essencialmente quando conduzem ao mesmo tipo de resposta. Visto que, nalguns casos, mesmo depois de calculadas as probabilidades, os alunos fazem também referência a outros raciocínios. Contudo, esta atitude leva, por vezes, os alunos a dar uma resposta incorrecta, em virtude da maior influência dos raciocínios intuitivos. Por exemplo, na questão em que é diferente o número e a razão entre o número de bolas de cada cor em ambos os sacos, há um aluno que, embora indique as probabilidades dos acontecimentos, opta por uma resposta diferente baseada em outro raciocínio: “No saco I há menos bolas pretas mas também há menos bolas brancas, o que faz com que a probabilidade de sair bola branca seja menor.” Parecendo, assim, que o raciocínio mais primitivo se sobrepõe ao raciocínio aprendido na escola.

Embora não haja evidências directas nesse sentido, também se pode supor que os 11% dos alunos que, nesta questão, se incluíram no raciocínio *Comparar as probabilidades dos acontecimentos*, e que deram uma resposta errada, possam simultaneamente ter utilizado um raciocínio mais intuitivo e ter preterido o apresentado. O mesmo se passou na mesma questão relativamente a um aluno cujo raciocínio se incluiu na *Comparação de razões*. Porém, outra explicação possível do erro pode estar na comparação incorrecta de fracções.

O facto de os alunos darem respostas incorrectas com base, aparentemente, em raciocínios válidos explica, de certa forma, a maior percentagem de respostas incorrectas obtidas nesta questão. Pelo contrário, o raciocínio *Comparar o número de bolas pretas*, que foi o raciocínio intuito mais utilizado pelos alunos (11%), conduziu sempre à resposta correcta.

6.2.2. Dificuldades no planeamento e concretização das aulas

Do ponto de vista do planeamento das aulas, a Maria e a Joana tiveram dificuldades em encontrar estratégias diversificadas, pois queriam propor tarefas diferentes mas não sabiam como o conseguir. Esta dificuldade foi também identificada por Silva (1997) com professores no primeiro ano da docência.

Na perspectiva da Maria, essas dificuldades devem-se a preparação insuficiente no aspecto didáctico – "Para introduzir certos termos/conceitos era bom ter mais preparação. (…) Quem tem mais experiência devia dizer o que se pode fazer".

Embora a Teresa não refira explicitamente dificuldades neste âmbito, pelos seus comentários pode-se deduzir que a selecção de estratégias também lhe causou alguns problemas: "também devia existir outra disciplina que nos levasse a falar de estratégias e actividades que podíamos nós próprios utilizar. (…) Ver que tipo de actividades é que podiam ser feitas para determinado conteúdo."

A gestão do tempo, problema também observado por Flores (1999) e por Sanches e Silva (1998), foi outra das dificuldades apontadas, neste caso pela Joana e pela Teresa, embora remetendo para perspectivas diferentes. Enquanto a Joana se refere directamente à dificuldade em estabelecer a relação tempo – matéria a leccionar, em termos de planeamento, a Teresa comenta, essencialmente, a dificuldade que por vezes lhe surgiu em cumprir o plano estabelecido em consequência das dúvidas manifestadas pelos alunos. Neste caso, talvez esteja implícita uma certa dificuldade em adequar os planos à turma por não ter a percepção clara dos conhecimentos que os alunos possuem. Esta dificuldade afigura-se perfeitamente natural atendendo ao facto das estagiárias apenas leccionaram algumas aulas, não acompanhando, por isso, os alunos desde o início do ano. Este factor pode também contribuir para explicar as dificuldades da Teresa com a disciplina na sala de aula: "o comportamento dos alunos dificultou muito o meu trabalho". Além disso, poderá ter igualmente concorrido a sua inexperiência na forma de lidar com os alunos, dado que era o primeiro ano que estava a leccionar.

Estudos como os de Flores (1999), Ponte *et al.* (2001), Silva (1997) e Sousa (2003) apontam a disciplina na sala de aula como uma área problemática para os professores. No entanto, para a Joana e para a Maria essa problemática não foi muito sentida. De certa forma, o facto de ter estado sempre presente o professor da turma, que por vezes exercia um controlo implícito sobre esta, algo que foi mais evidente nestes dois casos, pode ter mascarado eventuais dificuldades de gestão das respectivas turmas.

No que diz respeito à avaliação, contrariamente aos resultados de Ponte *et al.* (2001), Rodrigues e Esteves (1993), Silva (1997), Sousa (2003) e Veenman (1988), as estagiárias, em termos gerais, manifestaram não ter tido dificuldades.

Há, no entanto, por parte da Maria e da Teresa alguma referência à dificuldade em avaliar especificamente o trabalho de grupo. Por exemplo, para a Maria "torna-se problemático identificar o contributo de cada elemento do grupo" e para a Teresa: "é muito mais difícil [avaliar um trabalho de grupo] do que um exercício [de uma ficha]. Para além disso, esta última afirma que a sua tarefa foi facilitada porque a turma era pequena, pois, no seu entender, se tivesse mais alunos seria complicado fazer a sua avaliação.

Já a Joana manifesta uma confiança, talvez excessiva, relativamente à percepção do que se passa na sala de aula, pois, quando fala dos instrumentos que utilizou para registo, afirma: "a participação nem valia a pena registar, pois já sei aqueles que participam e os que não participam". É de notar que estas estagiárias, embora contribuam para a avaliação dos alunos, não são directamente responsáveis por ela, cabendo o 'peso' dessa responsabilidade essencialmente à professora da turma. Assim, embora colaborem no processo avaliativo, os estagiários não têm de tomar sozinhos uma decisão para atribuir uma classificação aos alunos, o que, de acordo com Flores (1999) e Rodrigues e Esteves (1993), é visto pelos professores como um aspecto problemático.

A Maria alude ainda a uma falha na comunicação entre ela e os alunos já que, por vezes, teve dificuldades em compreender se os alunos estavam mesmo a perceber o que queria transmitir e, em algumas ocasiões, não entendeu as suas respostas ou intervenções.

Num âmbito similar, as observações da investigadora permitem concluir que tanto a Joana como a Maria manifestaram algumas dificuldades em discutir com os alunos as suas respostas/intervenções quando estas saíam fora do âmbito previsto. Nestes casos, ou ignoraram as suas respostas ou fizeram comentários pouco explícitos. Por exemplo, a Joana praticamente ignorou a resposta de um aluno que utilizou a regra de Laplace para responder a um questão de comparação de probabilidades em experiências simples. Por detrás deste tipo de atitude pode estar alguma falta de capacidade de improviso e/ou de segurança nos seus conhecimentos, pois podiam sentir dificuldade em distinguir se os argumentos dos alunos estavam ou não correctos. De notar que a Maria, referindo-se ao comentário de um aluno acerca de um pictograma, comenta: “para ser sincera, não fazia a mínima ideia se isso era aceitável”.

No caso da Teresa, a situação manifesta-se um pouco no sentido contrário, visto que, na medida em que tenta explorar as respostas dos alunos, por vezes incorre em erro. Embora esta atitude se possa dever à sua inexperiência, também remete para alguma insegurança em termos científicos, pois ela própria afirma: “Eu tento aproveitar tudo o que eles dizem. Só que, muitas vezes, uma pessoa ainda é nova, e em determinados conceitos não sabe bem aquilo que estará mesmo correcto.”

Durante a leccionação da unidade, a insegurança da Teresa, do ponto de vista dos conhecimentos científicos, foi de certa forma evidenciada. Manifestou dificuldades na exploração de tarefas sobre acontecimentos, principalmente no caso dos acontecimentos certos. Por exemplo, face ao acontecimento certo “Indicar o verde, azul ou o vermelho”, apresentado por um aluno, na experiência aleatória de ‘fazer girar o ponteiro e prever a cor em que parava’, a Teresa fez a correcção “Indicar a cor verde, azul e vermelha” esclarecendo: “pois tem que se verificar sempre”.

Na origem desta falta de clareza a nível conceptual parece estar alguma dificuldade em usar adequadamente os conectivos lógicos. Inclusivamente, a Teresa afirma: “quando coloco o *ou*, considero como possível e o *e* considero que é como se fosse certo que acontecesse”

A Teresa induziu, ainda, os alunos a calcularem a média de variáveis qualitativas, pois na ausência de uma variável estatística que tomasse valores numéricos, foram usadas as frequências absolutas dos valores da variável na determinação da média. Embora durante a exploração das questões surgissem comentários que poderiam ter feito a Teresa reflectir sobre a situação, esta nunca manifestou ter-se apercebido da sua incongruência.

A Teresa e, neste caso, também a Maria manifestaram dificuldades em distinguir entre histogramas e gráficos de barras. Porém, enquanto a Maria não fez qualquer menção a esta situação durante as aulas, a Teresa referiu-a, acabando por não utilizar uma linguagem clara e cientificamente adequada.

Já a Joana confessou que teve dificuldades em calcular a média com base numa tabela de frequências, pois aplicou o raciocínio *Cálculo da média das frequências*. No entanto, através da reflexão e com a colaboração de colegas, apercebeu-se do seu erro e conseguiu ultrapassar as suas dificuldades, resolvendo correctamente a situação com os alunos. Pelas aulas observadas também se constatou, na resolução de um exercício de comparação de probabilidades em experiências simples, a coexistência de raciocínios intuitivos e normativos ao usar conjuntamente os raciocínios comparação de razões e comparação do número de casos desfavoráveis ao acontecimento.

De notar, ainda, que algumas dificuldades podem também não ter sido evidenciadas porque as estagiárias, eventualmente, não colocaram questões que tivessem a percepção de não conseguir explorar do ponto de vista dos alunos, facto que foi explicitamente assumido pela Joana e pela Teresa.

6.2.3. Factores que influenciaram a prática pedagógica

A prática pedagógica das estagiárias revelou muitos dos atributos que têm sido referidos na investigação sobre professores principiantes. Neste estudo observou-se que essa prática foi fundamentalmente influenciada:

– Pelos manuais escolares (Cabrita, 1996; Flores, 1999). No caso da Joana e da Maria, os manuais foram usados para a planificação de aulas como substitutos do programa, na medida em que serviram para se inteirarem dos objectivos e dos conteúdos a leccionar. Serviram, ainda, no caso das três estagiárias, para seleccionar as estratégias e foram fundamentais para escolher os exercícios, sendo por isso um dos factores que condicionou o tipo de tarefas que exploraram com os alunos. Por exemplo, a Joana, referindo-se ao facto de optarem por mais exercícios relacionados com cálculo, comenta: “aparece mais daquilo [cálculo] e nós deixamos andar um bocado”.

Já a Maria considera não ter variado muito o tipo de exercícios por influência dos manuais – “em livros diferentes encontramos quase o mesmo tipo de exercícios”.

A Teresa pensa também que os manuais têm uma certa influência no tipo de exercícios que propõe na sala de aula, pois focam menos determinado tipo de tarefas e, perante dificuldades relacionadas com o cálculo da média em variáveis qualitativas, destaca que “o manual escolar não falava” nesse assunto.

– Pelos constrangimentos inerentes à sua condição de alunas estagiárias (Guerreiro, 1999; Silva, 1997). Como as participantes se encontram em situação de prática pedagógica, este é um factor que, de certa forma, condiciona as suas opções. A influência directa dos orientadores, pelas críticas ou sugestões que fazem, bem como a ideia de estarem a ser avaliadas leva-as a não apostarem em certo tipo de estratégias com receio de que não resultem. Além disso, visto que a sua situação de estagiárias é um pouco especial, pois não são efectivamente as responsáveis pela turma, vêem-se um pouco na ‘obrigação’ de seguir mais pormenorizadamente as sugestões dos professores cooperantes.

Esses constrangimentos estão bem patentes no caso da Teresa quando esta aceita, sem qualquer questionamento, as sugestões da professora da turma em relação à avaliação dos alunos na unidade de Estatística ou quando ela refere que o cálculo da média ponderada é um assunto difícil para os alunos em questão. Por outro lado, em relação às tarefas seleccionadas, ela própria opta “pelas coisas mais fáceis”, por aquilo em que se sente segura, de modo a não correr riscos.

Esta ideia é também manifestada pela Joana pois, quando tem dificuldades e se sente insegura para utilizar alguma estratégia e “não sabe como há-de fazer, não vai por aquele caminho, escolhe outro”. Além disso, afirma também que através das críticas que faz no fim das aulas e das sugestões para a aula seguinte, a “professora cooperante influencia sempre um bocadinho”, o que de certa forma é também referido pela Maria: “Apenas deram algumas sugestões, como: ‘faça exercícios mais difíceis’. (…) Mais no sentido ‘eles vão ter estas e estas dificuldades, relembre isto e isto…’”

No entanto, a Maria considera que a influência mais preponderante de estar sujeita a uma avaliação foi a tentativa de cumprir o plano deixando, inclusivamente, de ter em atenção os alunos. “Se não estivesse em estágio, a ideia que estava a ser controlada (…) dava as coisas mais ao ritmo dos alunos. (…) E, quando se está em estágio, (…) tem que se seguir aquela norma, o plano”.

– Pelas experiências como aluna (Monteiro, 1992; Pacheco e Flores, 1999; Serrazina e Oliveira, 2002). No caso da Joana, esta influência é particularmente notória no aspecto da avaliação, pois, embora não concorde com uma avaliação centrada nas fichas de avaliação sumativa, pensa que não há muito a mudar – “é assim que está a avaliação e é assim que nós vamos fazer também”. Esta ideia é manifestada, igualmente, pela Teresa, eventualmente também pelo seu contacto com o sistema de ensino como estagiária: “o professor dá sempre mais relevância ao teste” (…) “É muito giro a gente dizer agora que não concorda. Mas, no fim, vamos acabar todos por fazer isso.”

Do ponto de vista da Maria, o tipo de aulas que deu não variou muito da sua experiência como aluna. “Parece que continua a ser a mesma coisa, chegar lá, dar matéria.” (…) Nós sabemos as coisas de um modo e é desse modo que transmitimos.

– Pelo tempo disponível para dedicar aos conteúdos (Flores, 1999). Está de certa forma implícito que as opções que as estagiárias fazem em função da variável tempo levam-nas a centrar-se mais em actividades relacionadas com o cálculo em detrimento de outro tipo de explorações. Ou seja, quando têm que fazer opções, são essencialmente as tarefas não rotineiras que são preteridas. Por exemplo, a Joana referindo-se à exploração dos termos sondagem, população e amostra afirma que, “para fazer isso, precisaria de dedicar mais aulas a esta unidade”, relegando, por falta de tempo, também para segundo plano a construção de instrumentos de recolha de dados pelos alunos. Acrescentou, ainda, após ter leccionado a unidade: “se houvesse mais aulas, [os alunos] podiam fazer mais actividades, podiam fazer exercícios diferentes, relacionados com outras coisas”.

E a Maria, comentando a não selecção de determinados exercícios relacionados com a média ponderada, afirma: “É preciso muito mais tempo para trabalhar exercícios deste género.

Já no caso da Teresa, esta influência não seria notada se a professora da turma não tivesse intervido, pois é esta que lhe lembra que “faltavam poucas aulas para dar a unidade”, devendo optar por não construir o inquérito com os alunos aquando do trabalho em grupo. Num sentido diferente, a pouca preocupação com este factor é realçada quando a estagiária afirma que não cumpre o plano estabelecido porque acha importante tirar as dúvidas aos alunos.

– Pelas características da turma (Sánchez e Valcárcel, 2000). As referências em relação aos alunos abrangem mais a turma em geral e não casos específicos de dificuldades relativas a aspectos da unidade. Assim, quando a Joana fala da selecção de exercícios dos manuais afirma que "tentou ir de encontro aos interesses dos alunos" e, embora aproveite as sugestões dos colegas, elege o que é melhor para a turma – "porque também depende da turma que temos". Refere também a preocupação de propor tarefas diferentes para motivar os alunos.

Do mesmo modo, a Maria e a Teresa consideram que o que as orientou na selecção das tarefas foi essencialmente a turma: "conseguirem chegar todos lá … perceberem" (Maria), "ser mais fácil de os alunos entenderem" (Teresa).

Nota-se, ainda, que algumas estratégias tiveram o intuito de prevenir problemas comportamentais. Por exemplo, a Joana alega que a disposição da sala de aula com carteiras em fila é preferível porque "os alunos não se distraem tanto, nem conversam tanto uns com os outros". Por outro lado, a Maria afirma: "O que eles gostam mesmo é que se faça fichas de trabalho e exercícios, só assim é que eles estão calados". E a Teresa explica que optou por não realizar determinadas actividades, por exemplo as que envolvem a discussão sobre a equidade de determinadas condições de um jogo, por causa do comportamento da turma: "Nesta idade acho que é um bocado complicado. (…) Há alunos que aceitam perder e outros que não aceitam".

– Por dificuldades ao nível do conhecimento científico ou didáctico (Brown e Borko, 1992; Canavarro, 1994; Contreras e Blanco, 2001; Ponte *et al.*, 2001; Sousa, 2003). Como foi focado, o facto de estarem sujeitas a uma avaliação leva as estagiárias a não correr riscos, não propondo actividades em que não se sintam tão seguras. No entanto, esta insegurança também pode resultar da influência de lacunas em termos conceptuais ou didácticas. Por exemplo, a Joana afirma que o facto de pensar que não conseguia explicar bem um exercício era razão para não o escolher e seleccionar outro para explicar a mesma coisa. No mesmo sentido, a Teresa declara que um dos critérios de selecção das actividades foi a facilidade que tinha em as explicar: "ser mais fácil de eu lhes explicar", admitindo que se encontrasse algo um pouco mais complicado colocava praticamente de lado.

Opiniões que, para além de terem implícitas referências a dificuldades a nível científico, também remetem para o condicionamento de seleccionar tarefas em função das dificuldades em adaptar os conhecimentos ao nível dos alunos. Dando ênfase a esta ideia, a Joana considera que uma questão em que é dada a média e um dos dados e se pede para indicar os outros dados da distribuição não é viável ser proposta aos alunos porque estes não a saberiam resolver da forma que acha possível, ou seja, através da resolução de uma equação. A Teresa partilha opinião idêntica sobre esta questão, considerando que "era complicado para os alunos do 2º ciclo", já que teria dificuldades em abordar a sua resolução ao nível dos alunos.

No caso da Joana, de certo modo, verificou-se que as dificuldades conceptuais se sobrepuseram à influência do manual escolar. Por exemplo, no caso da impossibilidade de determinação da média para variáveis qualitativas, situação sobre a qual manifestou dificuldades quando respondeu ao questionário, afirmou que, quando preparou as aulas, não reflectiu sobre o assunto, embora tivesse encontrado num manual uma referência que a alertava para esse facto.

A influência das dificuldades conceptuais na selecção das tarefas é evidente no caso da Teresa ao admitir, relativamente a algumas questões do questionário em que teve dificuldades, que não se deviam propor aos alunos do 2º ciclo. Embora estas questões envolvessem conteúdos programáticos deste nível de ensino, no seu entender, como teve dificuldades, os alunos teriam muitas mais. Por exemplo, relativamente a um exercício sobre acontecimentos em que dado o número de bolas de cada cor existentes num saco se pede para indicar quantas bolas se tem de tirar do saco para ter a certeza de obter uma bola de cada cor, a Teresa referiu: "eu não consigo fazer, portanto acho que também não me ocorreria lá na [aula]. Acho que nem conseguia explicar."

Já segundo a Maria, as dificuldades na resolução de exercícios não a influenciaram na selecção das tarefas que propôs aos alunos, afirmando que, quando sente dificuldades, procura informar-se sobre os conceitos que lhes estão subjacentes.

Porém, pelo que a investigadora observou, a Maria manifestou alguma relutância em aceitar como adequados para propor aos alunos alguns exercícios do questionário (primeira fase do estudo) em que também teve certas dúvidas na sua resolução. Por exemplo, não considerou viável os alunos averiguarem se podiam calcular a média no caso das variáveis qualitativas, afirmando: “para isso, tínhamos que dar antes conceitos como variáveis qualitativas e quantitativas e isso não faz parte do programa”. Todavia, perante a hipótese, levantada pela investigadora, de poder aludir a esses conceitos na sala de aula, embora de uma forma elementar, ainda fica na dúvida se será uma questão a explorar. De realçar que a Maria, da primeira vez que respondeu ao questionário, não respondeu à questão que se reportava a esta situação e, após uma segunda análise, embora tivesse chegado a uma resposta correcta, teve dificuldades em explicar o seu raciocínio usando termos estatísticos adequados. Ela própria afirma: “justificação correcta e científica não sei”.

Do mesmo modo, a Maria pensa que a identificação da moda a partir de um gráfico circular não é uma questão muito recomendável para o 2º ciclo, pois no gráfico aparece a frequência relativa e a definição que deu aos alunos era baseada na frequência absoluta. Esta opinião, embora não directamente assumida, parece reflectir alguma influência das suas próprias dúvidas em responder à questão. Comentando a resposta que deu aquando da resolução do questionário, afirmou: “Não tinha a certeza se podia responder com a frequência relativa, dizendo que analisámos a frequência relativa. (…) Se era necessário calcular a frequência absoluta.”

Analisando os dados deste ponto de vista, pode-se, em certa medida, argumentar que as dificuldades provenientes da aplicação não rotineira dos conceitos e da capacidade de exploração das tarefas ao nível dos alunos são um factor que tem uma influência decisiva no tipo de opções que as futuras professoras fazem relativamente ao que explorar na sala de aula.

Podem-se, no entanto, distinguir três situações distintas se nos reportarmos ao contexto concreto da prática pedagógica de cada uma das estagiárias. A Joana e a Teresa, embora tentassem evitar situações que considerassem problemáticas, propuseram aos alunos tarefas sobre as quais, inconscientemente, tinham dificuldades. No entanto, enquanto a Joana reconheceu as suas dificuldades e reflectiu sobre elas atempadamente, conseguindo resolver a situação, a Teresa incorreu em erro na exploração das situações com os alunos, só se consciencializando das suas dificuldades após ter conversado com a investigadora. Já a Maria, embora considerando que não teve dificuldades, acaba por não achar viável a exploração com os alunos de situações em que também teve dúvidas.

O confronto do desempenho das estagiárias no questionário com a sua prática pedagógica não permitiu, em geral, tirar grandes ilações comparativas. Porém, confrontando a prática da Maria, que teve melhor desempenho no questionário, com a da Teresa, que teve pior desempenho, pode dizer-se que a Maria explorou na aula exercícios menos elementares, no caso da média e da probabilidade de acontecimentos (talvez porque estivessem incluídos no manual escolar dos alunos), e, aparentemente, mostrou mais segurança em termos da prática pedagógica do que a Teresa. No entanto, também não trabalhou com os alunos algumas das situações exploradas pela Teresa, e nas quais se verificou também ter dificuldades, como a não aplicabilidade da média a variáveis qualitativas ou a distinção entre gráficos de barras e histogramas. Este facto pode também indicar que a Maria tem mais consciência das suas dificuldades.

Já no caso da Joana, embora o seu desempenho no questionário seja mais ou menos correspondente ao da Teresa, de certa forma, conseguiu identificar melhor que esta as suas dificuldades. Por exemplo, no caso cálculo da média ponderada apercebeu-se do seu erro. Contudo, também não propôs aos alunos a discussão da aplicabilidade da média para variáveis qualitativas, na qual também demonstrou ter dificuldades, nem outro exercício menos elementar do manual sobre a média (explorado pela Maria), que admitiu ter tido dificuldades em resolver, embora tenha mencionado o factor tempo para a sua exclusão.

Enquanto algumas das dificuldades sentidas pelas estagiárias são perfeitamente explicáveis pela sua inexperiência e podem ser superadas ao longo da formação contínua e com o aprofundamento da experiência lectiva, já as dificuldades em termos científicos, se não houver uma atitude de reflexão e de consciencialização, podem levar a uma transmissão de concepções erradas aos próprios alunos.

6.2.4. Influência da prática no aperfeiçoamento profissional

Antes das estagiárias leccionarem a unidade, conquanto em termos pedagógicos ainda não estivessem conscientes do tipo de abordagem que iriam fazer dos conceitos, do ponto de vista científico consideravam os conteúdos da unidade didáctica de Estatística acessíveis e, em geral, não lhes suscitavam dúvidas. Como refere Sousa (2002), a não exigência de pré-requisitos importantes para a aprendizagem da estatística faz com que frequentemente alguns professores vejam esta temática como acessível aos seus alunos.

Porém, durante e após a leccionação da unidade tomaram consciência de algumas das suas limitações, porque sentiram directamente dificuldades ou porque a investigadora provocou alguma reflexão sobre o seu desempenho relativamente à prática. Assim, após leccionar a unidade, a Teresa admitiu "não saber identificar alguns conceitos", a Joana considerou que conseguiu ultrapassar as suas dificuldades e a Maria pensa que esclareceu alguns pormenores alusivos aos conceitos usados.

No que diz respeito à influência da prática, em termos pedagógicos, ela permitiu, de certa forma, uma aprendizagem. Por exemplo, a Joana, tendo dificuldades em encontrar estratégias diversificadas, sentiu necessidade de resolver o seu problema pelo que procurou em manuais e falou com os colegas. A Teresa, sentindo igualmente algumas lacunas nesse âmbito, acabou por concluir que fazia falta discutir aspectos relacionados com a didáctica da estatística e das probabilidades. E, no que diz respeito à avaliação, tomou consciência que teria mais problemas se a turma tivesse um maior número de alunos. Já a Maria, afirma, também, que tomou consciência da eficácia de determinadas estratégias: "sei o que resulta e o que não resulta", mas manifesta a necessidade de ter mais conhecimentos neste âmbito: "Em termos de estratégias e actividades podia-se discutir mais, principalmente diferentes abordagens".

No que diz respeito aos aspectos científicos, a prática isoladamente pode nem sempre induzir a uma reflexão sobre as dificuldades. Por exemplo, a Joana e a Teresa admitiram que se tivessem dificuldades não exploravam determinado exercício e escolhiam outro. Esta situação pode efectivamente conduzir a uma atitude de reflexão sobre o exercício, procurando meios para o resolver, mas também pode conduzir a um ‘colocar de lado’, não pensando mais na situação. A primeira atitude é um pouco referida pela Maria, na medida em que esta refere que quando tem dificuldades procura informar-se.

De qualquer forma, quando se propõem os exercícios na aula sem nos apercebermos das nossas dificuldades, isso pode provocar uma atitude de reflexão. Esta atitude foi visível no caso da Joana quando resolveu um exercício através da média ponderada, pois, embora com ajuda, conseguiu resolver o problema e inclusivamente mudar o seu raciocínio de forma a utilizar argumentos válidos.

Situações semelhantes a esta, que terão eventualmente surgido, embora nem sempre ‘confessadas’ pelas estagiárias, e ainda a própria reflexão sobre os conceitos aquando da preparação das aulas, da resolução de exercícios ou da exploração dos conteúdos na sala de aula poderão ter provocado, em alguns casos, mudanças de raciocínio positivas. Este facto é de certa forma visível quando se analisam os comentários das estagiárias relativamente às respostas que deram, pela primeira vez, no questionário. Por exemplo, embora a Joana, da primeira vez que respondeu ao questionário, tivesse dificuldades em determinar a média a partir de um gráfico de barras; não tivesse em conta a frequência absoluta no cálculo da média numa questão em que, dada uma média, se introduzia o zero como novo dado e noutra em que se pedia o valor do novo dado introduzido, conhecidas a média inicial (sem esse valor) e a média final; tivesse aplicado a lei do fecho quando era pedida a média de duas médias dadas; fosse influenciada, ao analisar o valor da média e da moda relativamente às características da distribuição, pela indicação de que ‘50% dos alunos tiveram classificação inferior ou igual a 13 valores’ considerando que nem a média nem a moda podiam ser superiores a este valor, após leccionar a unidade conseguiu corrigir as suas respostas a estas questões, sem grande dificuldade, e utilizando argumentos válidos.

Do mesmo modo, a Teresa mudou o seu raciocínio relativamente às questões que envolviam a identificação da moda para dados qualitativos e no caso de um gráfico de barras, pois tinha confundido a moda com a frequência relativa ou absoluta, respectivamente

Situação idêntica se passou com a Maria no que diz respeito à questão em que era pedido o valor do novo dado introduzido, conhecidas a média inicial e final, na qual não considerou as frequências absolutas no cálculo da média. O mesmo sucedeu na questão em que se pedia para calcular a média de duas médias dadas, em que aplicou a lei do fecho. Contudo, neste último caso, embora tenha mudado de raciocínio imediatamente, só uma atitude de reflexão provocada pelas questões da investigadora a levou à conclusão de que o raciocínio anterior estaria incorrecto, pois manifestou dúvidas relativamente a esse facto.

Não obstante se possa admitir que a melhoria do desempenho nalgumas questões também se deve ao maior interesse das estagiárias em colaborar com a investigadora, este não deve ter sido o factor preponderante, pois, por exemplo, relativamente às questões sobre o conceito de mediana (conteúdo não leccionado) em que demonstraram dificuldades, embora, nalguns casos, a sua performance melhorasse ligeiramente, esta melhoria resultou de uma atitude de reflexão, essencialmente provocada pela investigadora, e nem sempre conduziu à resposta correcta.

Também se verificou que, noutras situações, apenas a reflexão provocada pelas perguntas da investigadora conduziu as estagiárias a uma mudança de raciocínio, mesmo tendo os conceitos sido tratados nas aulas. Por exemplo, na pergunta em que se pedia um exemplo de um acontecimento certo com base na experiência aleatória 'tirar uma bola de uma caixa', cujo número de bolas de cada cor era dado, a Joana, da primeira vez que respondeu ao questionário tinha afirmado que: "neste caso não há acontecimento certo" e, após leccionar a unidade, mantém a sua opinião. Se bem que na sua justificação mencione exemplos de acontecimentos certos, só os identifica como tal, mas ainda com algumas dúvidas, quando a investigadora ao reformular a questão, provoca uma interiorização sobre o significado do que é pedido.

Já a Teresa, enquanto leccionou resolveu incorrectamente ou aceitou resoluções erradas, ou menos convenientes, de tarefas que envolviam a formulação de acontecimentos e a aplicabilidade da média para variáveis qualitativas, e só se apercebeu dos seus erros após ter conversado com a investigadora. Essa reflexão, após a aula, serviu-lhe para esclarecer as dificuldades, pois reformulou de forma correcta as respostas do questionário em que tinha dado exemplos errados de acontecimentos. Todavia, no caso da aplicabilidade da média para variáveis qualitativas, as suas concepções foram mais fortes. Assim, na questão que envolvia este tipo de variáveis, continua, numa fase inicial, a concordar com o seu primeiro raciocínio – calcular a média das frequências absolutas, dando também outras sugestões pouco válidas. Só quando a investigadora alerta para o tipo de dados envolvidos é que a Teresa se lembra que não tem sentido calcular a média, embora não mostre muita confiança na sua resposta.

No que diz respeito à Maria, pode-se também dizer que a reflexão provocada pela investigadora a ajudou de certa forma, a chegar a uma resposta correcta no caso da questão acabada de referir, visto que ela não tinha dado qualquer resposta à questão na primeira fase do estudo e também não tinha trabalhado este tipo de questão com os alunos na aula.

Verificaram-se, ainda, outras situações que remetem para ideias de tal forma interiorizadas que nem uma atitude reflexiva, mesmo provocada, consegue levar ao raciocínio correcto.

Por exemplo, numa questão que envolvia acontecimentos certos, em situações não rotineiras, em que é dado o número de bolas de cada cor existentes num saco e se pede a indicação de quantas bolas se tem de tirar do saco para ter a certeza de obter uma bola de cada cor, a Teresa não consegue utilizar argumentos válidos na sua resolução, embora passe por vários procedimentos que vão sendo sucessivamente postos em causa pela investigadora.

Já a Maria numa questão relativa à classificação de acontecimentos embora, na primeira fase do estudo, tivesse classificado, incorrectamente, como possível mas não certo o acontecimento "sair o número maior que zero", que diz respeito a uma tômbola de jogo com números de 1 a 90, continuou a manter a sua opinião, não tendo a reflexão induzida pela investigadora dado resultado. A Maria revela, assim, dificuldades em aceitar que o acontecimento em questão é um acontecimento certo por inadequada compreensão do espaço de resultados, manifestando uma ideia interiorizada que é difícil de rebater.

Há, ainda, pelo menos, um caso que mostra que a prática, de certa forma, pode levar ao surgimento de dúvidas, eventualmente pela 'colagem' às definições apresentadas aos alunos. Por exemplo, a Maria identificou correctamente a moda na questão que envolvia variáveis qualitativas mas, após leccionar, manifesta que tem dúvidas sobre se podia dar a resposta com base na frequência relativa, mesmo não tendo as frequências absolutas.

Em síntese, pode pressupor-se que a prática pedagógica tem influências positivas sobre as dificuldades a nível científico, provocando mudanças válidas de raciocínio, mas, nalguns casos, não é suficiente para as promover. No entanto, se aliada a uma atitude reflexiva, eventualmente em comunhão com alguém mais experiente, poderá conduzir a uma consciencialização sobre as dificuldades e à sua resolução de forma significativa. Não esquecendo, porém, que até estas atitudes podem não conseguir combater algumas ideias que, mesmo não muito correctas, se encontram demasiado interiorizadas.

6.3. Limitações do estudo

Embora o objectivo principal do questionário fosse identificar dificuldades e processos de raciocínio, este tinha também por objectivo seleccionar os participantes para a segunda fase do estudo. Dos três sujeitos a seleccionar, pretendia-se escolher um entre os que tivessem melhor desempenho no questionário e dois entre os que tivessem pior desempenho, tentando, no caso destes últimos, escolher participantes que tivessem demonstrado dificuldades em partes distintas do questionário. Contudo, apesar de haver alguns sujeitos que poderiam preencher melhor estes requisitos do que os escolhidos, eles não leccionaram a unidade didáctica de Estatística de 6º ano. Assim, esta condicionante limitou as escolhas possíveis de participantes para a segunda fase do estudo e, consequentemente, a selecção com base no desempenho no questionário ficou aquém daquilo que se pretendia no início do estudo. Pensa-se que trabalhando com participantes com resultados mais díspares em termos de conhecimento dos conteúdos estocásticos poder-se-ia ter obtido resultados mais contrastantes sobre a influência deste factor nas práticas de ensino. Todavia, reconhece-se também que um dos factores que pode ter ofuscado tal contraste foi o facto das estagiárias nem sempre abordarem exercícios que permitissem explorações idênticas dos conceitos.

A observação de aulas sem recurso a meios audiovisuais foi uma opção da investigadora guiada pelo intuito de tornar a sua presença o mais invisível possível e para evitar perturbar o normal funcionamento das aulas e o desempenho das estagiárias. É de considerar que o número de aulas que cada uma leccionou foi relativamente reduzido, não havendo grande espaço de tempo para estabelecer uma fase de adaptação prévia. Reconhece-se, porém, que se podem ter perdido registos enriquecedores para o trabalho ou outras perspectivas de que a investigadora possa não se ter apercebido.

Nas duas entrevistas iniciais realizadas na primeira fase do estudo, como já foi referido, cada participante recebeu uma cópia da sua transcrição para que corrigisse os dados de forma que estes traduzissem o melhor possível o pensamento do entrevistado. Todavia, isso não foi feito para a terceira entrevista. Do mesmo modo, a análise dos dados recolhidos também não foi submetida a um confronto com a opinião de cada estagiária.

No caso da terceira entrevista, procedeu-se deste forma porque esta envolvia, ao mesmo tempo, confrontação com o questionário anteriormente respondido. Assim, para entender o contexto da transcrição, seria preciso consultar simultaneamente este documento. Para além disso, duas das participantes não mostraram grande empenho aquando da revisão da transcrição da segunda entrevista. Quanto à análise dos dados recolhidos, visto que as participantes se encontravam na fase final do seu curso, o tempo de contacto com as estagiárias não foi suficiente para que esta pudesse ser revista.

Reconhece-se, contudo, que, sobretudo no que se refere à análise efectuada, esse procedimento poderia proporcionar uma melhor captação do ponto de vista dos participantes, reduzindo, ainda mais, eventuais discrepâncias de linguagem e de entendimento entre a investigadora e os sujeitos em questão.

6.4. Recomendações

6.4.1. Recomendações didácticas

Visto que os inquiridos serão futuramente professores do 1º e 2º ciclos e que fazem parte destes níveis de ensino alguns conceitos elementares de estatística e probabilidades, inclusivamente no 2º ciclo questões semelhantes às estudadas poderão ser exploradas e que, mesmo estando no último ano da sua formação inicial, há dificuldades que se mantêm, torna-se imprescindível confrontar os estudantes com estes e outros tipos de problemas, discutindo as suas respostas e fazendo-os reflectir sobre elas. Esta atitude de reflexão, para além de esclarecer dúvidas e promover um debate sobre as dificuldades sentidas, abre horizontes para um conhecimento mais amplo da diversidade de problemas estocásticos que se podem debater na sala de aula, permitindo-lhes sair da rotina dos problemas típicos de aplicação directa de fórmulas e orientar os seus alunos na superação de dificuldades que parecem persistir ao longo de toda uma escolaridade.

6.4.2. Recomendações para futuras investigações

Este estudo respondeu a algumas questões mas fez, entretanto, surgir outras que poderão ser objecto de desenvolvimento em futuras investigações neste domínio.

O estudo realizado mostra que existem algumas lacunas no que se refere ao conhecimento da estatística e das probabilidades nos futuros professores, o que destaca a necessidade de tomar medidas para a qualificação da formação inicial nestas áreas. Assim, é importante investigar de que forma se pode contribuir para essa qualificação, ou seja, averiguar que tipo de ensino deve ser preconizado para promover uma formação de qualidade nestas áreas, tanto do ponto de vista científico como didáctico.

Os estágios no âmbito do 2º ciclo são de curta duração e os estagiários não são efectivamente responsáveis pela turma, factos que impedem, muitas vezes, que os estagiários tomem consciência de todas as condicionantes subjacentes ao processo de ensino e aprendizagem. Para além disso, como os conteúdos de estatística e probabilidades que se leccionam neste nível de ensino são relativamente reduzidos, podendo, de acordo com uma interpretação restritiva do programa, explorar-se ainda menos conceitos, talvez fosse pertinente desenvolver investigações alusivas à mesma temática com futuros professores de outros níveis de ensino.

Seria também interessante acompanhar os professores ao longo de algum tempo de ensino para verificar de que forma se processa a sua evolução relativamente ao conhecimento científico e didáctico desta temática.

Os manuais escolares tiveram uma influência preponderante na preparação e no desenrolar da prática pedagógica para as estagiárias do estudo. Dado que estes funcionam como mediadores entre o professor, o aluno e a sociedade seria interessante investigar e caracterizar as tarefas que os manuais propõem relativamente a esta temática, se incluem as situações de dificuldade dos alunos identificadas pela investigação e se permitem construir um conhecimento relacional dos conceitos e não apenas um conhecimento instrumental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrantes, P., Serrazina, L. e Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Alves, F.C. (2001). *O encontro com a realidade docente: ser professor principiante*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Armelim, M. e Morla, M.M. (1997). *Novo espaço matemático 6*. Porto: Porto Editora.

Arnal, J., Rincón, D. e Latorre, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos e metodologia*. Barcelona: Editorial Labor.

Azcárate,P., Cardeñoso, J.M. e Porlán, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las Ciencias*, *16* (1), 85-97.

Barr, G.V. (s/d). Some students ideas on the median and the mode. Acessível em: http://science.ntu.ac.uk/rsscse/ts/bts/barr/text.html (17 de Janeiro de 2002).

Barros, P.M e Fernandes, J.A. (2003). O ensino da unidade didáctica de estatística do 6º ano por professores estagiários. Em A. Cosme, H. Pinto, H. Menino, I. Rocha, M. Pires, M. Rodrigues, R. Cadima e R. Costa (Orgs), *Actas do XIV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 303-321). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Barros, P. e Fernandes, J. (2001). Dificuldades de alunos (futuros professores) em conceitos de estatística e probabilidades. Em I. Lopes, J. Silva e P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 197-201). Vila Real: Associação de Professores de Matemática.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Universidade de Granada: Grupo de Investigação em Educação Estatística. Departamento de Didáctica de Matemática. Acessível em: http://www.ugr.es/~batanero (30 de Agosto de 2000).

Batanero, C. (2000a). Dificultades de los estudiantes en los conceptos estadísticos elementales: el caso de las medidas de posición central. Em C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 31-48). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Batanero, C.B. (2000b). Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13.

Batanero, C., Godino, J.D., Green, D.R., Holmes, P. e Vallecillos, A. (1994). Errors and dificulties in understanding elementary statistical concepts. *Internacional Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *25* (4), 527-547.

Batanero, C., Godino, J.D. e Navas, F. (s/d). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. Versão ampliada do trabalho publicado em H. Salmerón (Ed.), VII Jornadas LOGSE: Evaluación educativa (pp.310-304). Universidade de Granada. Acessível em: http://www.ugr.es/~batanero (15 de Dezembro de 2000).

Bernardes, O. (1987). Para uma abordagem do conceito de probabilidade. *Educação e Matemática*, 3, 13-15. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Blanco, N. (1994). Materiales curriculares: los livros de texto. Em J.F. Angulo e N. Blanco (Coords.), *Teoria y desarrollo del curriculum* (pp.263-279). Barcelona: Ediciones Aljibe.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borg, W. R. e Gall, M.D. (1989). *Educational research: an introduction* (5ª ed.). New York: Longman.

Borralho, A. (2000). Painel “A estatística no currículo”. Em C. Loureiro, O. Oliveira, e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 57-59). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Bratton, G.N. (1999). The role of technology in introductory statistics classes. *The Mathematics Teacher*, *92* (8), 666-669.

Brito, A.P. (1999). A problemática da adopção dos manuais escolares: critérios e reflexões. Em R.V. Castro, A. Rodrigues, J.L. Silva e M.L. Sousa (Orgs.), *Manuais escolares – estatuto, funções, história* (pp. 139-148). Actas do I Encontro Internacional sobre Manuais Escolares. Braga: Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Bright, G.W. (1995). Teaching middle school teachers about satatistics functions on a graphing calculator. Em L. Lum (Ed.), *Proceedings of the sixth annual International Conference on Technology in collegiate Mathematics* (pp. 78-87) Addison- Wesley Publishing Company.

Brown, C. e Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209-239). New York, NY: Macmillan.

Bryman, A. (1992). Quantitative and qualitative research: further reflections on their integration. Em J. Brannen (Ed.), *Mixing methods: qualitative and quantitative research* (pp. 57-78). Aldershot: Avebury.

Cabrita, I. (1999). Utilização do manual escolar pelo professor de matemática. Em R.V. Castro; A. Rodrigues; J.L. Silva e M.L. Sousa (Orgs.), *Manuais escolares – estatuto, funções, história* (pp. 149-160). Actas do I encontro Internacional sobre Manuais Escolares. Braga: Instituto de Educação e Psicologia da Universidade do Minho.

Cabrita, I.M. (1996). A proporcionalidade directa à luz dos manuais escolares. Em Comissão organizadora (Org.), *VI Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp.95-129). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cabrita, I. (1994). Futuros-professores perante problemas envolvendo o conceito de proporcionalidade: processo(s) de resolução e propostas de abordagem didáctica. Em A.P. Mourão e outros (Org.), V *Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 223-247). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm: student's understanding of the arithmetic average concept. Em L. Meira e D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME conference* (Vol. 3, pp. 144-151). Universidade Federal de Pernambuco.

Canavarro, A.P. (1994). *Concepções e práticas de professores de Matemática: três estudos de caso*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cantero, A.T. (1998). Caracterización de razionamiento probabilísticos de alumnos de 12 años. Em F. Delgado, D. Morales e A. Moreno (Eds.), *VIII Jornadas Andaluzas de educacióm matemática* (pp. 83-88). Universidade de Jaén.

Cantero, A.T. e Batanero, C.B. (1999). Razoniamiento de alumnos de 12 años en tareas de comparación de probabilidades. *Jornadas para el aprendizage y la enseñanza de las matematicas*, (pp.281-283). Universidade de Santiago de Compostela.

Cañizares M.J., Batanero, C., Serrano, L. e Ortiz, J. (1999). Comprensión de la idea de juego equitativo en los niños. *Números*, 37, 37-55.

Carmo, H. e Ferreira, M.M. (1998). *Metodologia da investigação. Guia para a auto-aprendizagem*. Lisboa: Universidade Aberta

Carvalho, C. (1996). Algumas questões em torno de tarefas estatísticas com alunos do 7º ano. Em António Roque e Maria João Lagarto (Orgs.), *Actas do ProfMat 96* (pp. 165-171). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Carvalho, C. e César, M. (s/d). Aprender Estatística através de trabalho colaborativo: Dados referentes ao 7º ano de escolaridade. Acessível em http://www.ugr.es/~batanero (20 de Novembro de 2001).

Carvalho, C. e César, M. (2000) As aparências iludem: reflexões em torno do ensino da estatística no ensino básico. Em C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 212-225). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Carvalho, C. e César, M. (s/d). Aprender estatística através de trabalho colaborativo: Dados referentes ao 7º ano de escolaridade. Acessível em http://www.ugr.es/~batanero (20 de Novembro de 2001).

Cobo, B. e Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria obligatoria: un concepto sencillo? *UNO*, 23, 85-96.

Contreras, L.C. e Blanco, L.J. (2001). Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. (Texto da comunicação enviada ao Congresso Nacional de Didácticas Específicas, Granada 2001). Acessível em: http://www.uhu.es/luis.contreras/enlaces/articulo_con_Lorenzo.htm (2 de Maio de 2001).

Correia, M.G. (1997). *O desenvolvimento profissional dos professores do 1º ciclo na área da matemática: três estudos de caso no contexto de um trabalho colaborativo*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Cunha, M.H. e Almeida, M.R. (1996). Estatística nos 7º e 10º anos: avaliação de uma experiência. *Educação e Matemática,* 38, 21-28.

Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico – Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Dreyfus, A. e Levy, O. (1996). Are the notion of mean and related concepts too difficult for 6th e 7th grade biology students*? European Journal of Teacher Education, 19*(2), 137-152.

Fennema, E. e Franke, M.L. (1992). Teacher´s knowledge and its impact. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.147-164). New York, NY: Macmillan.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, 18, 64-66.

Fernandes, J.A. (2001). Intuições probabilísticas em alunos do 8º e 11º anos de escolaridade. *Quadrante, 10* (2), 3-32.

Fernandes, J.A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: Uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. e Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistics intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, *15* (1), 1-24.

Fischbein, E., Nello, M. S. e Marino, M. S. (1991). Factors afecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Flores, M.A. (1999). (Des)ilusões e paradoxos: a entrada na carreira na perspectiva dos professores neófitos. *Revista Portuguesa de Educação, 12* (1), 171-204.

Garfield, J.B. (1993). An authentic assessment of student's satistical knowledge. Em N.L.Webb e A.F. Coxford (Eds.), *Assessment in mathematics classroom* (pp.187-196). National Council of Teachers of Mathematics.

Gattuso, L. e Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. Em L. Pereira-Mendoza, L.S. Kea e W. Wong (Eds.), *Proceedings of the fifth international conference on teaching statistics* (pp. 685-691). Singapura: International Association for Statistical Education.

Godino, J.D. (1995). Qué aportan los ordenadores al aprendizage y la enseñanza de la estadística? *Uno*, 5, 45-56.

Godino, J.D., Batanero, C., Cañizares, M.J. e Vallecillos, A. (1998). Recursos para el estudio de los fenómenos estocásticos. Em *Seminario sobre Recursos para el aprendizaje en aula de matemáticas. Elaboración y uso de material didáctico*. Federación Española de Profesores de Matemáticas e S.A.E.M Thales. Acessível em: http://www.ugr.es/~batanero (22 de Setembro de 2000).

Godino, J.D., Batanero, C. e Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. Em homenagem ao professor Oscar Sáenz Barrio (pp.165-185). Granada: Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Acessível em: http://www.ugr.es/~jgodino/teoria_metodos/didacties.htm (13 de Julho de 2001).

Green., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. Em D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett e G. M. Constable (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Guerreiro, A.M. (1999). *A pessoa do supervisor e o processo de supervisão: representações sociais de alunos/futuros professores de matemática em estágio pedagógico ou prática pedagógica*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Hill, M.M. e Hill, A. (2000). *Investigação por questionário*. Lisboa: Edições Sílabo.

Holmes, P. (2000). What sort of statistics shoul be taught in schools – And why? Em C. Loureiro, O. Oliveira, e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 49-56). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Inácio, A. (1987). Estatística no ensino básico e secundário – uma proposta. *Educação e Matemática*, 3, 15-17.

Koehler, M.S. e Grouws, D.A. (1992). Mathematics teaching pratics and their efects. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.115-126). New York: Macmillan.

Leon, M.R. e Zawojewski, J.S. (1991). Use of the arithmetic mean: an investigation of four properties issues and preliminary results. Em D.Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (vol 1, pp.302-306). International Statistical Institute.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G. e Boutin, G. (1990). *Investigação qualitativa: fundamentos e práticas*. Lisboa: Instituto Piaget.

Li, K. e Shen, S.M. (1994). Students' weaknesses in statistical projects. Em D. Green (Ed.), *Teaching statistics at its best* (pp.42-48). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

Martins, A. (1991). Manuais escolares: Por muito "apreciados" que sejam… *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, 20, 31-34.

Masjoan, A.P. e Thio, F.B. (1999). La Estadística, su presencia en la sociedad actual y en el currículum de la educación secundaria. Em *9[as] Jornadas para el Aprendizage y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 63-68). Sección de Matemáticas de

Ensinantes de Ciencias de Galicia, Centro de Formación Continuada do Profesorado de Lugo e Universidad de Santiago de Compostela.

Matias, M.B.F. (1996). O ensino da estatística hoje. Em R. Vasconcelos, I.F. Alves, L.C. Castro e D. Pestana (Eds.), *A estatística a decifrar o mundo*. Actas do IV Congresso anual da Sociedade Portuguesa de Estatística. Edições Salamandra.

Matos, J.F. e Carreira, S.P. (1994). Estudos de caso: considerações sobre o problema da generalização e o papel do investigador. Em Comissão organizadora do IV Seminário de Investigação em Educação Matemática, *Actas do IV Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 169-191). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Merriam, S.B. (1988). *Case study research in education: a qualitative approach*. San Francisco: Jossey-Bass.

Mevarech, Z.R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.

Ministério da Educação (2001). *Diário da República* – I série A, nº15 de 18 de Janeiro de 2001.

Ministério da Educação. (1991a). *Organização curricular e programas* (vol.I). Ensino Básico – 2º ciclo. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação. (1991b). *Plano de organização do ensino-aprendizagem: Programa de Matemática* (vol.II). Ensino Básico – 2º ciclo. Lisboa: Direcção Geral do Ensino Básico e Secundário.

Ministério da Educação (1990). *Ensino básico: Programa do 1º ciclo*. Lisboa. Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

Monteiro, C. (1992). Mudam-se concepções, mudam-se práticas. Em M. Brown, D. Fernandes, J.F. Matos e J.P. Ponte, *Educação matemática: temas de investigação* (pp. 241-247). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics (1994) *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Neves, M.A. e Monteiro, M.C. (1997). *Matemática 6ºano*. Porto: Porto Editora.

Nunes, F. (1989). As probabilidades da estatística. *Educação e Matemática*, 9, 1-2.

Nunes, F. (2000). Painel "A estatística no currículo". Em C. Loureiro, O. Oliveira, e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 59-61). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ortín, M.C. (2001). La estadística y probabilidad en la formación de los maestros de educación primaria. Acessível em: http://www.ugr.es/~batanero (20 de Novembro de 2001).

Ortiz, J.J.; Batanero, C. e Serrano, L. (1996). Las frecuencias relativas y sus propriedades en los textos españoles de bachillerato. *EMA*, *2* (1), 29-48.

Pacheco, J.P. (1997). Os manuais como mediadores curriculares. *Jornal Rumos*, 16, 1-4.

Pacheco, J.P. e Flores, M.A. (1999). *Formação e avaliação de professores*. Porto: Porto Editora.

Pereira-Mendoza, L. e Swift, J. (1989). Porquê ensinar estatística e probabilidades. *Educação e Matemática*, 9, 17,18 e 36.

Pereira-Mendoza, L. e Swift, J. (1992). Why teach statistics and probability – a rationale. Em A. Shulte e J. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability* (4ª ed, pp.1-7). Yearbook, 1981. Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

Pires, M.C. (2003). *Influências do manual escolar no conhecimento profissional do professor: um estudo no primeiro ciclo do ensino básico*. Trabalho de investigação tutelado (não publicado). Universidade de Santiago de Compostela. Departamento de Didáctica e Organización Escolar.

Pollatsek, A., Lima, S. e Well, A. D. (1981). Concept or computation: students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3* (1), 3-18.

Ponte, J.P. (1992). Concepções dos professores de Matemática e processos de formação. Em M. Brown, D. Fernandes, J.F. Matos e J.P. Ponte, *Educação matemática: temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J.P. e Fonseca, H. (2000). A estatística no currículo do ensino básico e secundário. Em C. Loureiro, O. Oliveira, e L. Brunheira (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp. 179-194). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Ponte, J.P., Galvão, C., Trigo-Santos, F. e Oliveira, H. (2001). O início da carreira profissional de professores de Matemática e Ciências. *Revista de Educação, 10* (1), 31-44.

Ponte, J.P., Matos, J.M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Rodrigues, A. e Esteves, M. (1993). Contributo para o estudo das necessidades de formação dos professores do ensino secundário. Em A. Rodrigues e M. Esteves, *A análise de necessidades na formação de professores* (pp. 69-101). Porto: Porto Editora.

Porfirio, J. (2000). Painel "A estatística no currículo". Em C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira. (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp.61-64). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Precatada, A., Lopes, A.V., Baeta, A., Loureiro, C., Ferreira, E., Guimarães, H.M., Almiro, J., Ponte, J.P., Reis, L., Serrazina, L., Pires, M.V., Teixeira, P. e Abrantes, P. (1998). *Matemática 2001 – Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. Instituto de Inovação Educacional.

Sanches, G. e Valcártel, M.V. (2000). Qué tienen en cuenta los profesores cuando seleccionan el contenido de enseñanza? Cambios y dificultades tras un programa de formación. *Enseñanza de las Ciencias 18* (3), 423-437.

Sanches, M.F. e Silva, M.C. (1998). Aprender a ensinar: dificuldades no processo de construção do conhecimento pedagógico de conteúdo disciplinar. *Revista de Educação, VII* (2), 81-96.

Scheaffer, R.L. (2000). Statistics for a new century. Em M.J. Burke e F.R. Curcio (Eds.), *Learning mathematics for a new century* (pp. 158-173). Yearbook – 2000. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Serrazina, L. e Oliveira, I. (2002). Novos professores: primeiros anos de profissão. *Quadrante*, *11* (2), 55-72.

Shaugnessy, J. M. (1992). Research probability and statistics: Reflections and directions. Em D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). National Council of Teachers of Mathematics.

Shulte, A. e Smart, J. (1992). Prefácio. Em Why teach statistics and probability - a rationale. Em A. Shulte e J. Smart (Eds.), *Teaching statistics and probability* (4ª ed). Yearbook, 1981. Virgínia: National Council of Teachers of Mathematics.

Silva, M.C. (1997). O primeiro ano de docência: o choque com a realidade. Em M.T. Estrela (Org.), *Viver e construir a profissão docente* (pp. 52-80). Porto: Porto Editora.

Skemp, R.R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

Sousa, M.V. (2003). *Contributos para a compreensão das dificuldades sentidas por professores estagiários de Matemática*. Dissertação de Mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga.

Sousa, O. (2002). Investigações estatísticas no 6º ano. Em Grupo de Trabalho de Investigação (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 75-97). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Strauss, S. e Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education, 19* (1), 64-80.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. Em D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *UNO*, 5, 29-36.

Turkman, M.A. e Ponte, J. P. (2000). Introdução. Em C. Loureiro, O. Oliveira e L. Brunheira. (Orgs.), *Ensino e aprendizagem da estatística* (pp.5-9). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística, Associação de Professores de Matemática, Departamento de Educação e de Estatística e Investigação Operacional da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

Vale, I. (1993). *Concepções e práticas de jovens professores perante a resolução de problemas de matemática: um estudo longitudinal de dois casos*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Veenman, S. (1988). El proceso de llegar a ser professor: un análisis de la formación inicial. Em Aurelio Villa (Coord.), *Perspectivas y problemas de la función docente* (pp. 39-68). Madrid: Nenarcea.

Zabalza, M.A. (2000). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola* (5ªed.). Porto: Edições ASA.

Yin, R.K. (1994). *Case study research: design and methods* (2ªed.). Thousand Oaks: Sage Publications.

ANEXOS

ANEXO I

QUESTIONÁRIO

Caro estudante:

Venho solicitar a sua colaboração na realização de um trabalho de investigação, que é parte integrante da minha dissertação de mestrado.

O questionário, a que venho propor-lhe que responda, versa sobre o tema de Probabilidades e Estatística e tem por finalidade identificar raciocínios usados na resolução de problemas no âmbito desse tema.

O questionário é constituído por duas partes:

- a primeira parte — Informações Pessoais — destina-se a obter alguns dados de carácter pessoal;
- a segunda parte — Questionário — é constituída por 13 questões, essencialmente de resposta aberta, sendo para algumas delas indicadas sub-questões.

Como este é um trabalho de carácter investigativo é imprescindível que as respostas resultem de um empenhamento sincero da sua parte. Sendo assim, pede-se que:

- para cada uma das questões indique o mais claramente possível o seu raciocínio. Pode utilizar cálculos, desenhos, esquemas, frases, ...
- se não souber responder por algum motivo tente indicar as suas dúvidas ou dificuldades.

É de salientar que eu, como utilizadora dos dados, assumo o compromisso de não fazer qualquer uso público da informação recolhida a não ser em anonimato.

Agradeço desde já a sua colaboração

Nome: ______________

____

INFORMAÇÕES PESSOAIS

Sexo: M ☐ F ☐

Idade: ______________

No Ensino Secundário estudou:

O tema de Estatística Sim ☐ Não ☐

O tema de Probabilidades Sim ☐ Não ☐

Quantas vezes frequentou, no Ensino Superior, a disciplina de Probabilidades e Estatística? ______________

Se concluiu a disciplina de Probabilidades e Estatística que classificação obteve?______________

Já leccionou o tema de Probabilidades e Estatística? Sim ☐ Não ☐

Se já leccionou o tema de Probabilidades e Estatística indique:

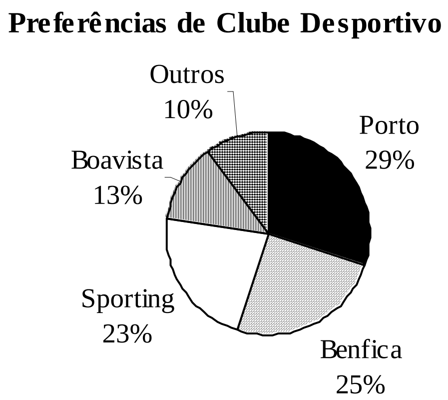
O(s) ano(s) de escolaridade em que leccionou ______________

O último ano lectivo em que leccionou ______________

Durante quantos anos leccionou ______________

QUESTIONÁRIO

1. As preferências de clube desportivo dos 200 alunos, do 2º ciclo, de uma escola são dadas pelo seguinte gráfico:



Observando o gráfico:

1.1. Indique a moda das preferências de clube. Justifique a sua resposta.

1.2. Determine, caso seja possível, a média das preferências de clube. Justifique a sua resposta.

2. Relativamente às classificações finais em Matemática de duas turmas, A e B, sabe-se que:

— as classificações mais altas foram obtidas na turma A;

— na turma A não existe qualquer aluno com classificação de 14 valores;

— o João, da turma B, obteve a classificação de 16 valores;

— 50% dos alunos da turma B obtiveram classificação inferior ou igual a 13 valores.

O João determinou a média e a moda das classificações de ambas as turmas e obteve os seguintes resultados:

Turma	Média	Moda
A	14 valores	14 valores
B	14 valores	15 valores

Face aos dados fornecidos, averigúe, justificando, se:

2.1. as médias das classificações de cada turma podem assumir os valores calculados pelo João;

2.2. as modas das classificações de cada turma podem assumir os valores calculados pelo João.

3. Luís perguntou a dez amigos quanto recebiam de semanada, tendo obtido os seguintes dados (em escudos):

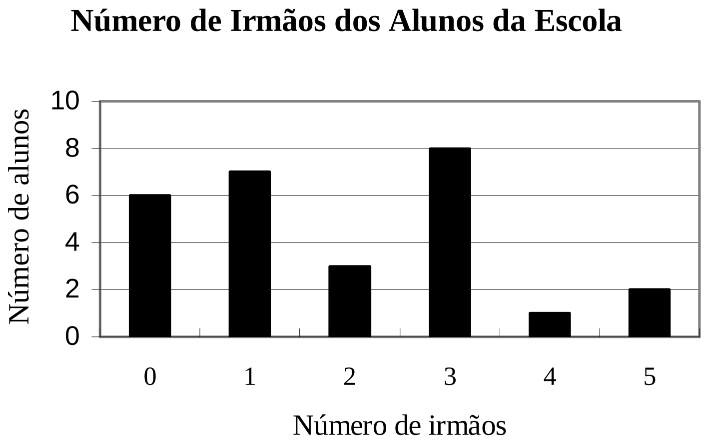
750	700	6000	1500	800	1000	900	1100	1200	6000

Considerando a média, a moda e a mediana como valores possíveis para representar uma distribuição, indique qual destas medidas melhor representa o conjunto dos dados recolhidos pelo Luís.

Justifique a sua resposta.

4. A média do peso de nove pessoas é 78 quilos. Admitindo que uma delas pesa 70 quilos, indique um peso possível para cada uma das restantes oito pessoas.

5. Perguntou-se aos alunos de uma escola, do 1º ciclo, quantos irmãos tinham. A partir das respostas obtidas, construiu-se o seguinte gráfico:



Observando o gráfico:

5.1. Determine a média do número de irmãos dos alunos da escola.

5.2. Indique a moda do número de irmãos dos alunos da escola. Justifique a sua resposta

5.3. Determine a mediana do número de irmãos dos alunos da escola.

6. A D. Alice esteve no mercado a vender ramos de rosas durante 5 dias de uma semana. Nos 4 primeiros dias, a média de ramos vendidos por dia foi de 13,5. No quinto dia não vendeu nenhum ramo. Determine a média do número de ramos de rosas vendidos durante os cinco dias dessa semana.

7. A média das idades de um grupo de três amigos é 15 anos. Juntou-se ao grupo um outro amigo. Sabendo que a média das idades dos quatro amigos passou a ser 16 anos, determine a idade do amigo que se juntou ao grupo.

8. Há 10 pessoas num elevador, 6 mulheres e 4 homens. A média do peso das mulheres é 60 quilos, e a média do peso dos homens é 80 quilos. Determine a média do peso das 10 pessoas que se encontram no elevador.

9. Numa empresa trabalham, ao todo, 50 empregados. Acerca dos seus vencimentos sabe-se que a média é 120 mil escudos, a moda é 80 mil escudos e a mediana é 90 mil escudos.

9.1. No contexto da situação apresentada, interprete o significado da:

a) média;

b) moda;

c) mediana.

9.2. Faça um comentário sobre os vencimentos dos empregados da empresa.

10. Roda-se uma tômbola de jogo com números de 1 a 90. Considerando os resultados possíveis deste jogo, classifique em <u>certo</u>, <u>impossível</u> ou <u>possível mas não certo</u> cada um dos acontecimentos seguintes:

10.1. sair um número ímpar; ____________________________

10.2. sair um número menor do que 91; ____________________________

10.3. sair o número 100; ____________________________

10.4. sair um número maior do que 0; ____________________________

10.5. sair o número 31. ____________________________

11. Observe, em cada alínea, a quantidade de bolas brancas e pretas dos dois sacos. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tira-se <u>uma bola</u> de cada um dos sacos.

11.1. **Saco I:** ○○●● **Saco II:** ○○○●●

De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta?
Justifique a sua resposta.

11.2. **Saco I:** ○○● **Saco II:** ○○○●●

De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta?
Justifique a sua resposta.

11.3. **Saco I:** ○●● **Saco II:** ○○●●●●

De qual dos sacos é mais provável tirar uma bola preta?
Justifique a sua resposta

12. Num saco há 5 bolas vermelhas, 2 verdes e 4 brancas. As bolas são todas iguais excepto na cor. Sem ver, tira-se do saco uma bola de cada vez, sem a voltar a repor. Quantas bolas se tem de tirar do saco para ter a certeza de obter, pelo menos, uma bola de cada cor?

Justifique a sua resposta.

13. Retira-se uma bola, ao acaso, de uma caixa que contém 4 bolas azuis, 7 vermelhas e 3 verdes. Referindo-se aos possíveis resultados desta experiência, apresente um exemplo de acontecimento:

13.1. certo;

13.2. impossível;

13.3. possível mas não certo.

ANEXO II

GUIÕES DAS ENTREVISTAS SEMI-ESTRUTURADAS

Guião da 1ª entrevista

Realizada antes do estagiário começar a leccionar a unidade didáctica de Estatística.

Questões

Porque é que escolheu ser professor?

O que é que o levou a ingressar no curso de Matemática e Ciências da Natureza?

Que características das aulas mais apreciava enquanto aluno?

Que actividades gostava mais de realizar?

Onde é que teve contacto pela primeira vez com o tema de Estatística e Probabilidades?

Teve estatística e probabilidades no ensino secundário? Tinha facilidades nestas matérias? O que achava mais complicado?

O que é que pensa da existência da disciplina de Probabilidades e Estatística no curso que frequenta?

Gosta de estatística? E de probabilidades?

Diga três palavras que lhe vem à mente quando é mencionada a palavra estatística. O mesmo para a palavra probabilidades.

Haverá alguma característica especial que um professor deva ter para leccionar este tema no 2º ciclo? (em termos de conhecimentos/ pedagogia)

Sente-se confiante/preparado para leccionar esta unidade?

Teve dificuldades na planificação desta unidade? Quais? A que atribui essas dificuldades?

Conhecia bem os conteúdos envolvidos?

Teve facilidade em pensar em actividades?

Que documentos utilizou?

Guião da 2ª entrevista

Realizada após leccionar a unidade didáctica de Estatística.

Dificuldades na preparação /execução de aulas
- Escrever objectivos /elaborar os planos de aula
- Seleccionar estratégias e actividades
- Explicar/explorar conceitos
- Resolver/explicar exercícios
- Perceber/contestar/explorar as resoluções/respostas dos alunos
- Avaliar os alunos
- Gerir o espaço/tempo
- "Gerir”a turma
- Outros aspectos

Ajuda do estágio na clarificação de alguns conceitos

Necessidades de formação

Influência dos professores orientadores

Selecção das estratégias e actividades
- Critérios usados
- Influência das dificuldades
- Trabalho de grupo (importância em geral e na unidade)

Disposição da sala de aula preferida/utilizada

Manual dos alunos
- Importância que teve
- Opinião sobre ele
- Razão de não escolher alguns exercícios

Outros recursos que utilizaram

Utilização dos meios tecnológicos
- Relação com as tecnologias de informação (calculadora/computador)
- Importância atribuída às tecnologias no ensino

Tipo de avaliação
- Experiência como aluno
- Opinião sobre a avaliação efectuada
- Diferença relativamente a outras unidades

Outras abordagens que podia fazer dos conceitos

Relação com outras unidades ou disciplinas

Diferenças e semelhanças entre a estatística / probabilidades e outras unidades

Aspectos de convergência e de divergência entre o ensino da estatística / probabilidades e o ensino de outras unidades

Papel do professor na sala de aula

- Numa aula de matemática
- Na aula de estatística / probabilidades
- Características de um bom professor de matemática / de estatística e probabilidades

Sentido/significado atribuído às expressões

- Saber matemática
- Saber estatística / probabilidades
- Ensinar matemática
- Ensinar estatística / probabilidades

Descrição de uma boa aula da unidade de Estatística no 2ºciclo

O programa de Matemática do 2º ciclo

- Alterações que propõe relativamente à unidade de Estatística
- Contemplação ou não dessa unidade caso pudesse refazer o programa

Guião da 3ª entrevista

Realizada após leccionar a unidade didáctica de Estatística.

Relativamente ao questionário preenchido na primeira fase do estudo

Ver o que alterariam e o que responderiam do mesmo modo, justificando as suas respostas.

Tentar perceber alguns métodos de resolução.

Seleccionar questões que considerem viável serem propostas a alunos do 2ºciclo e explicar as razões.

ANEXO III

QUESTÕES ABERTAS

Relativamente às aulas leccionadas da unidade didáctica de Estatística

- O que faria do mesmo modo?

  Razões

- O que faria de modo diferente?

  Razões