

**FACULDADE DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE DO PORTO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA E GESTÃO INDUSTRIAL**

**ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA DO
COMPORTAMENTO DE ESTRUTURAS
METÁLICAS SUJEITAS À ACÇÃO DO FOGO**

Paulo Alexandre Gonçalves Piloto

*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da
Universidade do Porto para a obtenção do grau de Doutor em
Engenharia Mecânica*

2000

Dedico este trabalho à minha mulher Elza e à minha filha Joana

Agradecimentos

Os meus sinceros agradecimentos ao Prof. Doutor Paulo Vila Real, pelo acompanhamento e dedicação com que orientou este trabalho.

À Escola Superior de Tecnologia e de Gestão do Instituto Politécnico de Bragança, à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto e à Universidade de Aveiro, pelas excelentes oportunidade de contactos científicos.

À Fundação para a Ciência e Tecnologia pelo apoio prestado através do financiamento do projecto Praxis XXI “Lateral Buckling of Steel beams Under fire conditions”.

À empresa J. Soares Correia pela oferta de todos os perfis comerciais IPE 100 utilizados nos ensaios experimentais destrutivos.

Aos técnicos dos laboratórios de Oficinas de Mecânica e de Estruturas e Resistência dos Materiais da Escola Superior de Tecnologia e de Gestão, o agradecimento devido pela disponibilidade sempre demonstrada.

A todos que não foram referidos e que auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho, o meu sincero agradecimento.

“Análise experimental e numérica do comportamento de estruturas metálicas sujeitas à acção do fogo”

por

Paulo Alexandre Gonçalves Piloto

Tese submetida para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica pela Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Realizada pela supervisão do

Prof. Doutor Paulo Jorge de Melo Matias Faria de Vila Real

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre o efeito da acção do fogo em estruturas metálicas, tendo sido elaborado um estudo numérico e experimental de um fenómeno de instabilidade estrutural relativo à encurvadura lateral torsional de vigas a elevadas temperaturas. Foram efectuados ensaios destrutivos em vários perfis com vista à determinação da carga limite resistente ou de colapso.

O efeito do fogo, como elemento activo e prejudicial à resistência do elemento estrutural, foi determinado tendo-se verificado uma substancial diminuição das capacidades resistentes, devendo por isso as acções serem convenientemente determinadas e analisadas.

No âmbito deste trabalho foram ainda estudadas as acções em estruturas sujeitas à acção do fogo, a variação das propriedades mecânicas e térmicas do aço com a temperatura e o comportamento não linear geométrico e material da estrutura.

Tendo como objectivo o desenvolvimento de ensaios experimentais em vigas de perfil comercial, foi elaborada a candidatura de um projecto de Investigação e Desenvolvimento, intitulado “Lateral Buckling of Steel Beams Under Fire Conditions”, financiado pelo Ministério da Ciência e da Tecnologia, o que tornou possível a constituição de todo o equipamento que serviu de base a este trabalho. Neste caso construiu-se um “setup” com as vertentes térmica e estrutural necessárias para ensaiar estruturas em situação acidental de incêndio.

Paralelamente foram desenvolvidos vários ensaios numéricos do fenómeno de encurvadura lateral a elevadas temperaturas com um programa de análise não linear geométrica e material, como são exemplo os programas SAFIR, ANSYS e Cosmos/M, os quais permitiram validar os restantes resultados e justificar a necessidade da revisão de algumas formulas simplificadas que o Eurocódigo 3 apresenta, nomeadamente as que dizem respeito à determinação da resistência de vigas à encurvadura lateral, em situação de incêndio.

No final é apresentada a validação de uma proposta de cálculo simples para verificação de elementos estruturais à encurvadura, que se propõe em alternativa à proposta apresentada pelo Eurocódigo 3.

Palavras chave:

“Estruturas metálicas”; “Acção do fogo”; “Encurvadura lateral de vigas”; “Carga crítica”; “Validação experimental e numérica”.

“Experimental and numerical analysis of metallic structures behaviour under fire conditions”

by

Paulo Alexandre Gonçalves Piloto

Thesis submitted for the Ph.D. degree in Mechanical Engineering of the
faculty of Engineering in the University of Porto

Supervised by

Prof. Paulo Jorge de Melo Matias Faria de Vila Real

Abstract

In this thesis a numerical and experimental validation of the lateral torsional buckling phenomenon of steel I beams under fire conditions is presented. A set of experimental destructive tests were made in several I beams profiles for the buckling moment resistance determination.

The fire effect as an active element may produce a severe reduction in structural strength. The numerical simulation of this phenomenon was done by means of a finite element code with non linear material and geometrical behaviour, based on elevated and constant temperatures.

The structural actions under fire conditions, the material behaviour regarding its mechanical and thermal properties variation with temperature and the non linear behaviour of structures were also studied..

Having in mind the development of experimental tests in the commercial profiles IPE100, a research project “Lateral Buckling of Steel I Beams Under Fire Condition” has been financed by the Science and Technology Portuguese Ministry, helping us to build a thermal and structural set up for this propose.

In parallel, several numerical simulations had been done by means of the material and geometrical non linear finite element code SAFIR, as well as, with other commercial codes, ANSYS and CosmosM. This lead us to the justification and the needed of reviewing some simple formulas in Eurocode regarding the lateral buckling behaviour of structures under fire conditions.

Finally a validation of a new proposal for a simple model in lateral torsional buckling under fire conditions is presented, different from that used in Eurocode, that seems to give unsafe results.

Key words:

“Metallic Structures”; “Fire Action”; “Lateral Buckling of steel I Beams”; “Critical load”; “Experimental and numerical validation”.

“Analyse experimental et numeric du comportement de structures métalliques sur actions du feu”

pour:

Paulo Alexandre Gonçalves Piloto

Thèse présentée à la Faculté de la Université du Porto
En vue de l’obtention du grade de docteur en Génie Mécanique

Supervision de

Prof. Paulo Jorge de Melo Matias Faria de Vila Real

Résumé

Dans ce travail, un étude sur le effet des actions du feu sur les structures métalliques est présenté. Cet effet a été étudié avec des modèles numériques et expérimentaux. On a fait des essais destructifs en différents profils en acier du type IPE100 pour obtenir la résistance limite ou la charge de collapsus.

Le effet du feu, comme en élément active et préjudicielle pour la résistance de l’élément structurelle a été déterminée et on a vérifié une diminution des capacités de résistance. C’est pourquoi on devra déterminé ce type d’actions.

Dans le contour de ce travail on a étudié les actions mécaniques et thermiques, la variation des propriétés du matériel avec la température et le comportement non linéaire géométrique et matériaux de la structure.

Avec l’objectif du développement des essais expérimentaux sur des poteaux de profil commercial on a présentée un projet d’ investigation et développement sur le non de “Déversement de poteaux en acier sur des conditions du feu”, reconnu par le ministère de la Science et technologie, qui a permis la construction de l’équipement pour développé ce travail. Dans ce domaine on a construis le «set up» avec la versant thermique et structurelle nécessaire pour essayer les structures et particulièrement les poteaux sur action du feu.

On a développée aussi des essais numériques du phénomène de flambement latérale des poteaux a haute températures, en utilisant des logiciels de analyse géométrique et matériaux non linéaire, comme par exemple SAFIR, CosmosM et ANSYS, qui on permis valider les résultats et justifier la nécessité de amender certaines formules simplifiées que l’Eurocode présent, nommément ceux que concerne à la détermination de la résistance des poteaux à flambement latérale, en cas du feu.

A la fin, on présent une validation d’une proposé pour le calcul simple des éléments structurelles a cet type de instabilité, présentés comme alternatif à l’expressions de Eurocode.

Mot clés:

“Structures métalliques”; “Action du feu”; “Déversement de poteaux en acier”; “Charge critique”; “Validation expérimental e numérique”.

Nomenclatura

A nomenclatura que se apresenta está dividida em função da natureza da designação do símbolo, conforme se trata de um escalar, de uma grandeza vectorial ou tensorial. Em qualquer dos casos foi efectuada a sub divisão em caracteres que utilizam o latim e o grego.

Algumas notações verdadeiramente particulares não foram consideradas na listagem seguinte, uma vez que se apresentam com uma utilização restrita e/ou contradizem a nomenclatura de outros capítulos.

Grandezas escalares que utilizam símbolos em Latim:

A	Área da secção recta
$A_d(t)$	Valor de cálculo da acção resultante de exposição ao fogo.
$a_{\text{máx}}$	Amplitude máxima da imperfeição geométrica medida
b_a	Efusividade do aço
b	Largura da secção recta do perfil
C_a	Calor específico do aço
CF_{xx}	Caracterização da capacidade isolante dos materiais de construção
C_w	Constante de empenamento
dL	Comprimento de segmento que une dois pontos de um corpo
$d^?$	Distância igual à altura do perfil IPE menos o valor de uma espessura do banzo
E	Capacidade de integridade às chamas e a gases quentes
$E_{f,d,t}$	Valor de cálculo do efeito das acções, durante exposição ao fogo, no instante t
EF_{xx}	Caracterização da estabilidade ao fogo de materiais de construção
$\bar{E}_{a\theta}$	Módulo de elasticidade em qualquer ponto, à temperatura θ
E_a	Fracção de energia absorvida por radiação
E_r	Fracção de energia reflectida por radiação
E_{ir}	Energia irradiada pela superfície
f_y	Tensão de cedência do material
$f_{y,\theta,max}$	Tensão de cedência à temperatura máxima
$f_{au,\theta}$	Tensão última do aço
$f_{a\text{máx},\theta}$	Tensão de cedência máxima do aço, para a temperatura θ
$f_{ap,\theta}$	Tensão limite de proporcionalidade do aço, para a temperatura θ
f_1, f_2	Funções para determinação da deformação de corte em vigas.
G_k	Valor característico de acções permanentes
G_i	Fluxo recebido por radiação para a superfície
h	Altura da secção recta do perfil; altura da zona da superfície radiativa

\dot{h}_{net}	Fluxo de calor por unidade de área
$\dot{h}_{net,r}$	Fluxo de calor convectivo por unidade de área
$\dot{h}_{net,c}$	Fluxo de calor radiactivo por unidade de área
I	Momento de segunda ordem relativamente ao eixo resistente à flexão, Capacidade de isolamento térmico
I_{ξ}, I_{η}	Momentos de segunda ordem relativamente aos eixos da secção recta
J	Constante de torção, Jacobiano da transformação
J_i	Irradiação da superfície “i”
k	Coefficiente multiplicativo do momento, factor de comprimento de encurvadura efectivo
k_w	Factor relativo ao empenamento na extremidade
k_{θ}	factor de redução do valor da propriedade mecânica em função da temperatura
$k_{y,\theta,com}$	Factor de variação da tensão de cedência com a temperatura
$k_{E,\theta,com}$	Factor de variação do módulo de elasticidade com a temperatura
L_c	Comprimento da zona útil do provete retirado do perfil
L_0	Comprimento inicial entre referência, do provete de ensaio
l_d, l_g	Comprimentos das fronteiras dos elementos
$M_{b,Rd}$	Momento resistente de cálculo à encurvadura, à temperatura ambiente
$M_{c,Rd}$	Momento resistente de cálculo da secção
$M_{fi,d}$	Momento flector de cálculo, em situação de incêndio
M	Esforço interno - momento flector
$(M_0)_{cr}$	Momento crítico elástico
$(M_0)_{cr}^*$	Momento crítico elástico corrigido
$(M_0)_{cr}^{in}$	Momento crítico não elástico
$M_{b,fi,t,Rd}$	Momento resistente à encurvadura lateral, no instante t, em situação de incêndio
$M_{fi,\theta,Rd}$	Momento resistente da secção em situação de incêndio
$M_{b,SAFIR}$	Momento resistente à encurvadura, determinado pelo SAFIR
m_i	Comprimento da linha média do perfil da secção aberta
N	Esforço interno - normal
$N_{fi,d}$	Esforço interno - normal de cálculo, em situação de incêndio
N_i	Funções de interpolação do campo ou da geometria
NEC	Número de elementos na cavidade
nne	Número de nós do elemento
npg	Número de pontos de gauss
PC_{xx}	Caracterização da estanqueidade ao fogo dos materiais de construção
P	Carga aplicada
Q	Resistividade
$Q_{k,1}$	Valor característico da acção variável principal
$Q_{k,i}$	Valores característicos das restantes acções variáveis

q_c	Fluxo de convecção
q_i	Balanco de fluxo de calor por radiação
$R_{fi,d,t}$	Valor de cálculo de resistência de carga, durante exposição ao fogo, no instante t
R	Capacidade resistente, Resistência do sistema de medição de deformações [Ω]
S	Distância de P a X
S_0	Área da secção recta do perfil
T	Temperatura; Esforço interno - transverso
T_s	Temperatura à superfície da cavidade
T_v	Temperatura na cavidade
T_0	Temperatura inicial no compartimento de incêndio
T_{ens}	Temperatura de ensaio
t	Tempo
$t_{fi,d}$	Valor de cálculo da resistência ao fogo medido em tempo
$t_{fi,requ}$	Valor nominal requerido de resistência ao fogo standard
t_f, t_w	Espessura do banzo e da alma do perfil
t_{f1}, t_{f2}	Espessura mediada no banzo superior e inferior do perfil
t_i	Espessura do perfil
$u(x, y)$	Campo de deslocamentos axial num elemento de viga
u	Empenamento da secção, Deslocamento lateral em qualquer ponto do eixo da viga
V	Volume
V_e	Volume do elemento finito
V_s	Tensão eléctrica [V]
$v(x, y)$	Campo de deslocamentos transversal num elemento de viga
w	Largura da zona da superfície radiativa
$\omega(y, z)$	Função de empenamento
$W_{pl}, W_{pl,y}$	Módulo plástico da secção
$X_{fi,d}$	Valor de cálculo da propriedade em situação de incêndio
$X_{k,\theta}$	Valor característico das propriedades em situação de incêndio, função da temperatura.
X_k	Valor característico da propriedade mecânica à temperatura ambiente

Grandezas escalares que utilizam símbolos em grego:

α	Coefficiente de dilatação térmica, Ângulo de rotação por unidade de comprimento de viga
α_d	Difusividade térmica do aço
α_c	Coefficiente de convecção
α_x	Rotação da secção para uma abscissa x
$\alpha_g, \alpha_c, \alpha_d$	Coefficientes de convecção

α_{LT}	Factor de imperfeição
β_w	Cociente entre do módulo da secção
$\gamma_{n,c}, \gamma_{n,r}$	Factor de segurança para diferentes tipos de testes, em vários países.
γ_{GA}	Factor de segurança parcial das acções permanentes em situação acidental, normalmente igual a 1.0
γ_G	Factor de segurança parcial das acções permanentes à temperatura ambiente
γ_Q	Factor parcial de segurança para a acção variável principal
$\gamma_{M,fi}$	Factor parcial de segurança para a propriedade do material em causa na situação de incêndio (=1 para todas as propriedades)
γ_n	Configuração actual do estado de um corpo sólido
γ_{M1}	Factor de segurança
ΔU	Variação da energia interna
$\Delta \varepsilon_i$	Deformação mediada na direcção “i”
δ, u_1	Deslocamento lateral a meio vão da viga
ε_{res}	Emissividade resultante, normalmente =0.56
ε_m	Emissividade da superfície do elemento, normalmente =0.7
ε_f	Emissividade do compartimento de incêndio, normalmente =0.8
ε_{th}	Deformação térmica
$\varepsilon_{au,\theta}$	Deformação do aço, para a temperatura θ
$\varepsilon_{au,\theta}$	Deformação última do aço, para a temperatura θ
$\varepsilon_{at,\theta}$	Deformação limite do aço para a tensão de cedência, à temperatura θ
$\varepsilon_{as,\theta}$	Deformação limite do aço pós endurecimento, à temperatura θ
$\varepsilon_{a\text{máx},\theta}$	Deformação de cedência do aço, à temperatura θ
$\varepsilon_{ap,\theta}$	Deformação correspondente ao limite de proporcionalidade do aço, à temperatura θ
ε_{ij}	Componente do tensor das deformações
ε^*	Emissividade relativa
ε	Cociente função da tensão de cedência do material
$\eta_{fi,t}$	Factor de redução dependendo do quociente entre a variável principal e as acções permanentes aplicadas na estrutura
θ_d	Valor de cálculo de temperatura
$\theta_{cr,d}$	Valor de cálculo de temperatura crítica
θ_g, T_g	Temperatura dos gases
θ_m	Temperatura na superfície dos elementos
θ_r	Temperatura de radiação na vizinhança do elemento, podendo ser considerada igual a θ_g
$\theta(x)$	Rotação da secção de uma viga
θ_{iE}	Rotação nodal, obtida com “i” elementos finitos
θ	Rotação da secção recta a meio vão da viga
λ_a, λ	Condutividade do aço ou de outro material

$\bar{\lambda}_{L,T}$	Esbelteza adimensional normalizada
$\lambda_{L,T}$	Esbelteza da viga
λ_1	Coefficiente para determinação da esbelteza da viga
ρ	Massa específica de um material genérico
ρ_a	Massa específica do aço
$\sigma_{a,\theta}$	Tensão no aço para a temperatura θ
σ_{ij}	Componente do tensor das tensões
σ_{cr}	Tensão crítica
σ	Constante de Stefan Boltzmann (5.67×10^{-8} [W/m ² K ⁴])
σ_{rfi}	Tensão residual no extremo do banzo
σ_{rfw}	Tensão residual no meio do banzo
σ_{rwc}	Tensão residual no meio da alma
σ_1, σ_2	Tensões principais medidas
$\Phi, \varphi = F$	Factor de forma, Fluxo de calor
ϕ	Função de Prandtl para determinação das tensões em torção; Rotação da secção recta em qualquer ponto do eixo da viga
$\phi_{L,T}$	Factor de cálculo para determinar o coeficiente de redução
φ	Ângulo no plano de medição para determinação das direcções principais
χ_{fi}	Factor de redução
$\chi_{L,T}$	Coefficiente de redução para a encurvadura lateral torsional
$\chi_{L,T,fi}$	Coefficiente de redução para a encurvadura lateral torsional, em situação de incêndio
$\psi_{1,1}; \psi_{2,i}$	Coefficientes de combinação para edifícios de acordo com ENV 1991-1
Γ	Configuração inicial do estado de um corpo sólido

Grandezas vectoriais que utilizam símbolos em latim:

$(X;Y;Z)$	Coordenadas cartesianas de sistemas de eixo
(X^*,Y^*,Z^*)	Coordenadas cartesianas de sistemas de eixo, posição deformada
\vec{r}	Vector posição
\vec{u}	Vector movimento de um ponto material
$\{\Delta b\}$	Incremento das forças de volume
$\{\Delta t\}$	Incremento das forças de superfície
$\{\Delta u\}$	Incremento do vector movimento
$\{u\} = \langle u \ v \ w \rangle^T$	Vector deslocamentos dos elementos finitos
$\langle N \rangle$	Vector das funções de forma
$\{x_i\}$	Vector para descrição geométrica
$\{p\}$	Vector das componentes nodais dos deslocamentos generalizados
\vec{n}	Vector normal à curva ou superfície
$\{T_n\}$	Vector das temperaturas nodais
$\{U_p\}$	Vector do carregamento térmico

$\{\dot{T}_n\}$ Vector derivada temporal das temperaturas nos nós

Grandezas vectoriais que utilizam símbolos em grego:

$\{\Delta\varepsilon\}$ Vector dos incrementos das deformações de Green Lagrange
 $\{\Delta\sigma\}$ Vector incremento das segundas tensões de Piola Kirchhoff
 $\{\Delta\varepsilon_l\}$ Vector incremento das componentes de deformação de Green lagrange, parte linear
 $\{\delta\Delta\varepsilon\}$ Incremento virtual das deformações de Green lagrange
 $\{\Delta\varepsilon_{nl}\}$ Vector incremento das componentes de deformação de Green lagrange, parte não linear
 $\{\Delta f^e\}$ Incremento de carga das forças no elemento
 $\{\Delta d\}$ Incremento de deslocamentos nodais
 $\{\Delta f\}$ Incremento das forças nodais
 $\{\delta\varepsilon\}$ Vector virtual das de formações de Green lagrange
 $\{\delta\varepsilon\}$ Variação virtual do vector das componentes das deformações
 $\{\varepsilon_l\}$ Componentes do tensor das deformações de Green Lagrange, parte linear.
 $\{\varepsilon_{nl}\}$ Componentes do tensor das deformações de Green Lagrange, parte não linear.
 $\{\varepsilon\}$ Tensor das deformações de Green lagrange
 $\{\sigma^*\}$ Tensor das tensões de Cauchy
 $\{\sigma\}$ Tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff

Tensores e Matrizes que utilizam símbolos em latim:

$[A]$ Matriz que depende do campo de deslocamentos
 $[B]$ Matriz das deformações do elemento
 $[B_l]$ Matriz do relacionamento linear entre deslocamentos e deformações
 $[B']$ Matriz das derivadas cartesianas das funções de forma
 $[B_{nl}]$ Matriz do relacionamento não linear entre deslocamentos e deformações
 $[C]$ Tensor da deformação de Green
 $[CAP]$ Matriz de capacidade térmica [ngl x ngl]
 $[D^*]$ Matriz de comportamento tensão deformação
 $[F]$ Tensor gradiente de deformação de corpo sólido
 $[G]$ Matriz das derivadas cartesianas das funções de forma
 $[K_T^e]$ Matriz rigidez tangencial do elemento
 $[K_l^e]$ Matriz rigidez do elemento, parte linear
 $[K_{nl}^e]$ Matriz rigidez do elemento, parte não linear
 $[K_\sigma^e]$ Matriz rigidez das tensões iniciais ou residuais
 $[K_{HC}]$ Matriz rigidez do elemento finito de Henky Mindlin
 $[RET]$ Matriz rigidez equivalente térmico – condutividade [ngl x ngl]

[*SOL*] Matriz de carregamento térmico [ngl x nº solicitações]

Tensores e Matrizes que utilizam símbolos em grego:

[ΔA] Matriz das derivadas cartesianas dos incrementos dos deslocamentos

Índice

1. Introdução	1.1
1.1. Considerações gerais	1.1
1.2. Objectivo e desenvolvimento da investigação	1.3
1.3. Sumário dos capítulos	1.3
1.4. Referências	1.5
2. Propriedades termo mecânicas do aço	2.1
2.1. Introdução	2.1
2.2. Propriedades térmicas	2.2
2.2.1. Calor específico	2.3
2.2.2. Condutividade térmica	2.4
2.3. Propriedades mecânicas	2.5
2.3.1. Coeficiente de dilatação térmica	2.8
2.3.2. Módulo de elasticidade	2.9
2.3.3. Tensão de cedência	2.10
2.3.4. Tensão limite de proporcionalidade	2.11
2.4. Conclusões	2.12
2.5. Referências	2.12
3. Acções em estruturas sujeitas à acção do fogo	3.1
3.1. Introdução	3.1
3.2. Acções térmicas	3.2
3.2.1. Trocas convectivas	3.4
3.2.2. Trocas radiativas	3.6
3.3. Acções mecânicas	3.9
3.4. Conclusões	3.11
3.5. Referências	3.11
4. Cálculo de deslocamentos	4.1
4.1. Introdução	4.1
4.2. Caracterização da deformação do meio contínuo	4.1
4.2.1. Descrição do movimento	4.1
4.2.2. Definição das deformações	4.3
4.2.3. Definição da variação de volume e de área	4.4
4.2.4. Definição das tensões	4.5
4.3. Princípio dos trabalhos virtuais	4.6
4.3.1. Equações de equilíbrio incrementais	4.7
4.3.2. Relações constitutivas	4.9
4.4. Aplicação do método dos elementos finitos	4.10
4.4.1. Formulação Lagrangeana Total	4.11
4.4.2. Actualização das Tensões e Deformações	4.16
4.5. Elemento de Viga	4.16
4.5.1. Teoria Clássica analítica. Vigas de Hencky Mindlin	4.17
4.5.1.1. Exemplo de aplicação – Viga bi apoiada solicitada por	

Momento constante	4.20
4.5.1.2. Exemplo de aplicação – Viga em consola solicitada por um esforço transversal na extremidade	4.22
4.5.2. Descrição analítica do Elemento de Euler Bermoulli	4.24
4.5.2.1. Exemplo de aplicação - Viga bi apoiada solicitada por momento constante	4.25
4.5.2.2. Exemplo de aplicação – Viga em consola com carregamento transversal na extremidade	4.26
4.5.3. Elemento finito de viga Hencky – Mindlin	4.26
4.5.4. Elemento finito com integração reduzida	4.31
4.5.5. Elemento finito modificado	4.32
4.5.6. Elemento finito “exacto”	4.34
4.5.7. Elemento finito tridimensional de três nós	4.36
4.5.7.1. Discretização do elemento	4.39
4.5.7.2. Integração numérica	4.44
4.6. Torção não uniforme	4.46
4.7. Solução de equações não lineares	4.51
4.7.1. Método puramente incremental	4.52
4.7.2. Métodos incrementais e iterativos	4.53
4.7.2.1. Método de Newton Raphson	4.54
4.7.2.2. Método de Newton Raphson modificado	4.56
4.7.2.2.1. Método da rigidez inicial (K0)	4.57
4.7.2.2.2. Métodos KT1 e KT2	4.57
4.7.2.3. Método do comprimento do arco (ALC)	4.58
4.7.3. Critérios de convergência	4.61
4.8. Conclusões	4.61
4.9. Referências	4.62
5. Cálculo de temperaturas	5.1
5.1. Introdução	5.1
5.2. Equação de comportamento térmico	5.1
5.3. Formulação integral fraca	5.4
5.4. Aproximação por elementos finitos	5.6
5.5. Formulação matricial	5.9
5.6. Esquema de integração	5.12
5.7. Modelação de vazios internos	5.16
5.8. Exemplo de aplicação	5.20
5.9. Conclusões	5.24
5.10. Referências	5.25
6. Caracterização da resistência ao fogo	6.1
6.1. Introdução	6.1
6.2. Comportamento de uma estrutura metálica sujeita a vários cenários de incêndio	6.2
6.3. Conclusões	6.12
6.4. Referências	6.13
7. Encurvadura lateral de vigas	7.1
7.1. Introdução	7.1

7.2. Estado limite à temperatura ambiente– Resistência à encurvadura lateral	7.3
7.3. Equação de equilíbrio – método diferencial	7.5
7.3.1. Encurvadura por flexão pura	7.9
7.3.2. Encurvadura por carregamento transversal concentrado	7.13
7.3.3. Encurvadura por carregamento transversal distribuído	7.17
7.4. Equação de equilíbrio - método energético	7.17
7.4.1. Encurvadura por carregamento transversal concentrado	7.18
7.4.2. Encurvadura por carregamento transversal distribuído	7.20
7.4.3. Exemplo de Aplicação	7.20
7.5. Encurvadura lateral de vigas em regime não elástico	7.24
7.5.1. Encurvadura por flexão pura	7.24
7.5.2. Encurvadura por carregamento transversal	7.25
7.6. Estado limite último em situação de incêndio - resistência à encurvadura Lateral	7.26
7.6.1. Proposta do Eurocódigo 3	7.26
7.6.2. Nova proposta	7.28
7.7. Conclusões	7.29
7.8. Referências	7.30
8. Análise experimental da encurvadura lateral de vigas I em situação de incêndio	8.1
8.1. Introdução	8.1
8.2. Imperfeições geométricas	8.2
8.2.1. Imperfeições longitudinais	8.2
8.2.2. Imperfeição da secção transversal	8.5
8.3. Propriedades e características dos materiais	8.6
8.4. Tensões residuais	8.10
8.4.1. Determinação das tensões residuais – método do furo	8.13
8.4.2. Equipamento de ensaio	8.14
8.4.3. Tratamento analítico dos valores medidos	8.15
8.4.4. Preparação das medições	8.17
8.4.5. Instrumentação para medição	8.19
8.4.6. Resultados experimentais	8.22
8.5. Equipamento de ensaio	8.23
8.5.1. Equipamento de ensaio estrutural	8.23
8.5.2. Equipamento hidráulico	8.26
8.5.3. Equipamento resistivo de efeito térmico	8.28
8.6. Procedimento de ensaio	8.32
8.7. Medições a efectuar durante os ensaios	8.32
8.7.1. Temperaturas	8.33
8.7.2. Deslocamentos a meio vão	8.33
8.7.3. Momento resistente à encurvadura	8.34
8.8. Discussão dos resultados	8.40
8.9. Conclusões	8.48
8.10. Referências	8.49
Anexo 8.1 - Resultados experimentais – tensões residuais	8.51
Anexo 8.2 - Resultados experimentais – deslocamentos a meio vão	8.61
9. Análise numérica da encurvadura lateral de vigas I em situação de incêndio	9.1

9.1. Introdução	9.1
9.2. O modelo de elementos finitos utilizado	9.2
9.3. Modelo numérico das tensões residuais	9.2
9.4. Modelo numérico das imperfeições geométricas	9.3
9.5. Comportamento mecânico do material	9.4
9.6. Modelação numérica da resistência à encurvadura lateral	9.4
9.7. Comparação numérica com outros programas de elementos finitos	9.8
9.8. Conclusões	9.14
9.9. Referências	9.14
Anexo 9.1 - Resultados Numéricos – Deslocamentos a meio vão	9.16
10. Conclusões e perspectivas de desenvolvimentos futuros	10.1
10.1. Conclusões	10.1
10.2. Perspectivas de desenvolvimentos futuros	10.2

Capítulo 1

Introdução

1.1- Considerações gerais

Para garantir os objectivos da segurança contra incêndio das estruturas deve-se considerar, por ordem decrescente de importância, a protecção das vidas humanas em caso de sinistro, a protecção dos bens existentes no edifício e das actividades previstas no mesmo e a protecção da estrutura contra danos de incêndios que possam deflagrar nela ou em estruturas vizinhas.

Com a regulamentação de segurança contra incêndio pretende-se atingir os objectivos supracitados e em particular, limitar o risco de desenvolvimento pleno do incêndio, limitar o risco de propagação no interior do edifício, limitar o risco de propagação a outros edifícios, facilitar o combate ao incêndio e limitar os danos.

O risco de generalização de um incêndio a todo o compartimento em que teve origem é em particular controlado através de disposições regulamentares relativas ao grau de sofisticação e de viabilidade do sistema de detecção de incêndio, disponibilidade e eficácia de meios de intervenção para o combate a incêndio e controlo das características de reacção ao fogo dos materiais de construção a utilizar. O risco de propagação do incêndio no interior do edifício é controlado por medidas destinadas a dificultar a propagação na horizontal e na vertical, quer pelo interior do edifício quer pelo exterior. Essas medidas englobam a definição das características de resistência ao fogo da envolvente das caixas de escadas, dos elevadores, das lajes dos pisos, da envolvente dos caminhos de evacuação protegidos, dos locais com risco especial de incêndio, das portas de comunicação com caminhos de evacuação, bem como das respectivas características de reacção ao fogo dos materiais de revestimento utilizados nestes elementos. Outras medidas poderão ser tomadas relativamente à definição das características dos sistemas de ventilação, ar condicionado e evacuação de fumos.

O risco de propagação do incêndio a outros edifícios é limitado através de disposições relativas à distância mínima das construções aos limites do lote, da resistência ao fogo das

paredes exteriores do edifício, da distância mínima entre fachadas de edifícios em confronto, da distância mínima entre vãos abertos em fachadas de edifícios contíguos e das características das coberturas de edifícios confinantes de alturas diferentes.

É costume distinguir as medidas de segurança contra incêndio em medidas activas e medidas passivas. As medidas activas visam reduzir a probabilidade de ocorrência de incêndios severos. A probabilidade de ocorrência de incêndios severos resulta da utilização das estruturas para fins diferentes dos que foram definidos, da natureza do equipamento e material existente no edifício, das condições climáticas, da quantidade e das características de ignição e combustão dos materiais existentes na estrutura e das condições de fronteira dos compartimentos de incêndio. As medidas passivas visam reduzir a probabilidade de colapso estrutural sempre que ocorra um incêndio severo e/ou facilitar a evacuação do edifício e a acção dos bombeiros. De entre as medidas passivas será de extrema importância prever a reacção ao fogo dos materiais de construção, a resistência ao fogo dos elementos de construção e a utilização de compartimentos corta fogo.

A resistência das estruturas metálicas pode ser verificada pela análise dos respectivos componentes, por partes da estrutura ou de uma forma global, sendo necessário verificar a segurança relativamente aos estados limites últimos de resistência e aos estados limites de utilização. Neste trabalho será estudado o caso da instabilidade estrutural associado ao modo de colapso para o qual um ou mais elementos de uma estrutura sofre um deslocamento lateral e uma rotação da respectiva secção recta. Esta forma de encurvadura ocorre geralmente quando um elemento apresenta menor rigidez à flexão lateral e à rotação, comparativamente à rigidez no plano de carregamento. A encurvadura lateral não aparece confinada a elementos isolados, podendo ocorrer eventualmente em estruturas com ligações rígidas, onde é verificada a continuidade das rotações entre membros adjacentes. A caracterização deste estado é de extrema importância no dimensionamento de estruturas metálicas, uma vez que pode diminuir a capacidade de carga para qual são projectadas.

A investigação teórica relativa ao fenómeno da encurvadura lateral de vigas quando submetidas à acção do fogo teve início no ano de 1759 na pessoa de Euler. Em 1989 Michel e Prandtl publicaram os primeiros trabalhos sobre este fenómeno. No ano de 1905, Timoshenko incluiu o efeito do empenamento por torção nas vigas de secção em I, às quais dedicaremos grande parte deste estudo. Em 1929, Wagner desenvolveu a teoria da encurvadura lateral por flexão e torção. Durante a década de 60, todo o trabalho publicado era desenvolvido analiticamente, tendo Lee contribuído com uma compilação escrita sobre todo o fenómeno. Depois de 1960 e com a evolução do cálculo automático verificou-se um grande aumento das publicações neste domínio, tendo este fenómeno contribuído para um resumo alargado de vários trabalhos, elaborado pelo comité de Investigação do Japão em 1971 [1.1].

Mais recentemente, Trahair [1.2], Bazant [1.3], Galambos [1.4], Kollár [1.5], e outros investigadores têm vindo a desenvolver estudos no âmbito da instabilidade de elementos estruturais, sendo este trabalho um contributo para o desenvolvimento de metodologias simples a propor para o dimensionamento de vigas à encurvadura, em situação de incêndio.

1.2- Objectivo e desenvolvimento da Investigação

O objectivo do trabalho visa fundamentalmente o estudo da instabilidade de estruturas metálicas quando submetidas a elevadas temperaturas, como é exemplo a acção do fogo. A análise de estruturas tridimensionais nestas condições é complexa devido às não linearidades envolvidas. Grandes deslocamentos e propriedades a variarem com a temperatura, afectam de uma forma significativa o comportamento dos elementos estruturais.

No âmbito do projecto de investigação Praxis XXI ECM “Lateral Buckling of Steel Beams Under Fire Conditions” desenvolveram-se ensaios à escala real, com o objectivo de estudar este fenómeno e de poder comparar com os resultados numéricos obtidos com um programa de elementos finitos de análise não linear de estruturas SAFIR, desenvolvido na Universidade de Liège. Apresenta-se a formulação do campo de deslocamentos generalizados do elemento de viga utilizado neste programa e é feita a comparação com outros códigos comerciais, como são exemplo os programas COSMOS e ANSYS.

No âmbito dos testes experimentais realizados, foi construída uma estrutura auxiliar que permitiu efectuar cento e vinte ensaios com diferentes comprimentos de encurvadura e sujeitos a cinco níveis de temperaturas diferentes. Foi verificada a condição inicial dos perfis cedidos pela empresa J. Soares Correia, nomeadamente as tensões residuais, a imperfeição geométrica instalada e a caracterização de resistência mecânica do material. A determinação da curva de projecto à encurvadura lateral de vigas, bem como a verificação experimental e numérica, possibilitaram a validação de uma nova proposta e a constatação de insegurança presente nas actuais curvas do Eurocódigo.

Dos vários centros de investigação sobre ensaios de fogo, com são exemplo a Universidade de Lunde na Suécia, a Universidade de Liège na Bélgica, o Instituto do fogo na Dinamarca, os laboratórios Labein em Bilbao e outros laboratórios do Reino Unido, não é conhecida qualquer investigação no domínio da encurvadura lateral em situação de incêndio, pelo que pensamos que este trabalho consitui um importante contributo para a comunidade científica em geral e para a investigação do comportamento das estruturas sujeitas ao fogo em particular.

1.3- Sumário dos capítulos

No capítulo 2 é feita a caracterização das propriedades térmicas e mecânicas do aço quando submetido a elevadas temperaturas. É possível verificar a diminuição da resistência mecânica com o aumento da temperatura e ao mesmo tempo verificar as alterações micro estruturais responsáveis pela variação das propriedades que irão influenciar o comportamento do material.

No capítulo 3 são apresentadas as acções termo-mecânicas a que um elemento estrutural fica submetido durante uma situação de incêndio. São apresentados vários tipos de solicitações ou modelações de incêndio e caracterizada a combinação accidental para a solicitação mecânica. Do processo de transferência de calor produzido pelo incêndio, é feita a respectiva caracterização dos parâmetros e das formas de transferência de calor (radiação e convecção) envolvidas.

No capítulo 4 será apresentada a metodologia que descreve o movimento do componente estrutural durante o processo de encurvadura lateral, através da caracterização dos deslocamentos, deformações, tensões e das respectivas leis constitutivas. A aproximação pelo método dos elementos finitos é apresentada, bem como a definição e comparação dos vários tipos de elementos de viga, correspondentes a diferentes formulações. São apresentados os aspectos numéricos relacionados com a integração na secção recta, com a resolução de equações não lineares e respectivos procedimentos que podem ser utilizados para solucionar este tipo de problemas.

No capítulo 5 são apresentadas as equações que regem o comportamento térmico no domínio da secção recta. A aproximação por elementos finitos do campo de temperaturas é feita com elementos planos lineares. Todos os aspectos numéricos relacionados com a integração e evolução no tempo são apresentados. Alguns exemplos de aplicação pretendem demonstrar a capacidade do programa SAFIR na resolução de problemas térmicos transientes, proporcionados pelo efeito da acção do fogo em estruturas metálicas, com e sem isolamento térmico.

No capítulo 6 será caracterizada a resistência ao fogo de elementos estruturais quando submetidos a uma solicitação normalizada de incêndio ISO834. A referência aos métodos de cálculo simplificados e avançados fazem parte da proposta actual dos Eurocódigos, sendo apresentado um exemplo de método avançado para determinação da resistência ao fogo de uma estrutura, bem como a verificação da resistência desta em função do número e localização dos compartimentos sujeitos a esta acção.

No capítulo 7 será feita a descrição analítica do fenómeno de instabilidade de vigas, nomeadamente o processo de encurvadura lateral torsional, à temperatura ambiente e quando submetidas a elevadas temperaturas, decorrentes de um possível incêndio. São apresentadas as equações de equilíbrio que regem o comportamento, apresentadas soluções para os deslocamentos e determinadas as cargas críticas elásticas para a situação em estudo. São ainda apresentados alguns exemplos de carregamentos que impõem diferentes valores de cargas críticas, bem como os métodos para as determinar. É ainda apresentado o caso de estudo deste trabalho e que servirá de base aos ensaios experimentais e numéricos a efectuar.

No capítulo 8 será apresentada toda a campanha experimental desenvolvida, com especial ênfase na definição e construção de todo o equipamento dedicado ao estudo da encurvadura lateral torsional de vigas em situação de incêndio. É efectuada a caracterização do estado inicial dos perfis ensaiados e verificado o comportamento de cada um deles na situação de ensaio, à temperatura ambiente e na situação de temperaturas elevadas. São apresentados os deslocamentos a meio vão de cada viga, em função da carga a que está submetida, até ao momento do seu colapso. Estes resultados possibilitaram a verificação da curva de cálculo à encurvadura lateral do Eurocódigo 3 e a respectiva confrontação com a falta de segurança que esta apresenta, para certos valores de esbelteza adimensional.

No capítulo 9 são apresentados os resultados numéricos para as situações de ensaio real efectuadas, isto é, introduzindo no modelo numérico os dados recolhidos na campanha experimental, nomeadamente, as imperfeições geométricas, as propriedades mecânicas e as tensões residuais medidas. É efectuada a validação numérica da nova proposta de cálculo simples do momento resistente à encurvadura lateral. É ainda apresentado um estudo comparativo entre vários tipos de elementos finitos tipo viga, quando submetidos ao estado de instabilidade estudado e que contribuem para a validação numérica do programa SAFIR.

Finalmente, no capítulo 10 serão apresentadas as conclusões e discutidos desenvolvimentos futuros deste estudo.

1.4- Referências

- [1.1]- Chen, W. F.; Lui, E. M.; “Stability Design of steel frames”; CRC Press; USA; 1991.
- [1.2]- Trahair, N. S.; “Flexural Torsional Buckling of Structures”; E & FN SPON; USA; 1993.
- [1.3]- Bazant, P. Zednek; Cedolin Luigi; “Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture, and damage Theories”; Oxford University Press; 1991.
- [1.4]- Galambos, Theodore V.; “Guide to stability design criteria for metal structures”; John Wiley & Sons; 5th editon; USA; 1998.
- [1.5]- Kollár Lajos; “Structural stability in Engineering Practice”; E & FN SPON; USA; 1999.

Capítulo 2

Propriedades termo mecânicas do aço

2.1. – Introdução

Na modelação numérica do comportamento de estruturas sob a acção do fogo, as propriedades térmicas e mecânicas do aço bem como as suas leis constitutivas apresentam uma influência muito grande nos resultados. Assim, uma modelação, mais ou menos refinada numericamente, só será válida utilizando modelos e propriedades mais próximas da realidade possíveis.

As propriedades térmicas e mecânicas do aço são apresentadas no Eurocódigo 3 parte 1.2 e no Eurocódigo 3 parte 1.1, sendo consideradas como valores característicos.

Os valores de cálculo das propriedades em situação de incêndio são expressos a partir de:

$$X_{fi,d} = \frac{X_{k,\theta}}{\gamma_{M,fi}} \quad (2.1)$$

em que $X_{k,\theta}$ representa o valor característico das propriedades em situação de incêndio, função da temperatura θ e $\gamma_{M,fi}$ representa o factor parcial de segurança para a propriedade em causa em situação de incêndio (=1 para todas as propriedades).

No caso das propriedades mecânicas, $X_{,\theta}$ é expresso pela seguinte forma:

$$X_{,\theta} = k_{\theta} X \quad (2.2)$$

em que X_k representa o valor característico da propriedade mecânica à temperatura ambiente e k_{θ} , o respectivo factor de redução da propriedade em função da temperatura.

Logo que o aço é submetido a um aumento de temperatura, apresenta uma perda progressiva da sua rigidez devido em parte à diminuição do módulo de elasticidade. Por outro

lado, numa análise global, o aumento de temperatura introduz dilatações térmicas mais ou menos constringidas pelos elementos adjacentes. Estes constringimentos criam tensões adicionais, equivalentes a um aumento das solicitações exteriores.

No âmbito de uma estrutura real verifica-se uma interacção complexa entre os fenómenos relacionados com a evolução de temperaturas. Sempre que a temperatura suba acima dos 450 [°C] pode ser necessário ter em consideração as deformações induzidas pela fluência do material.

Todas as propriedades consideradas neste trabalho terão como referência as propostas pelos Eurocódigos.

2.2. - Propriedades térmicas

A equação empírica de Fourier 2.3 que governa a condução do calor em corpos sólidos bidimensionais, faz intervir três propriedades dos materiais. A massa volúmica ρ , o calor específico C e a condutividade λ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3)$$

No intervalo de temperaturas em que se deverá contemplar a variação das propriedades térmicas, verifica-se um fenómeno de transformação metalúrgica predominante entre os 600 e 800 [°C], transformação alotrópica, responsável pela alteração de fase do material em estudo, conforme se poderá constatar na análise metalográfica efectuada a duas amostras diferentes utilizadas nos ensaios realizados.

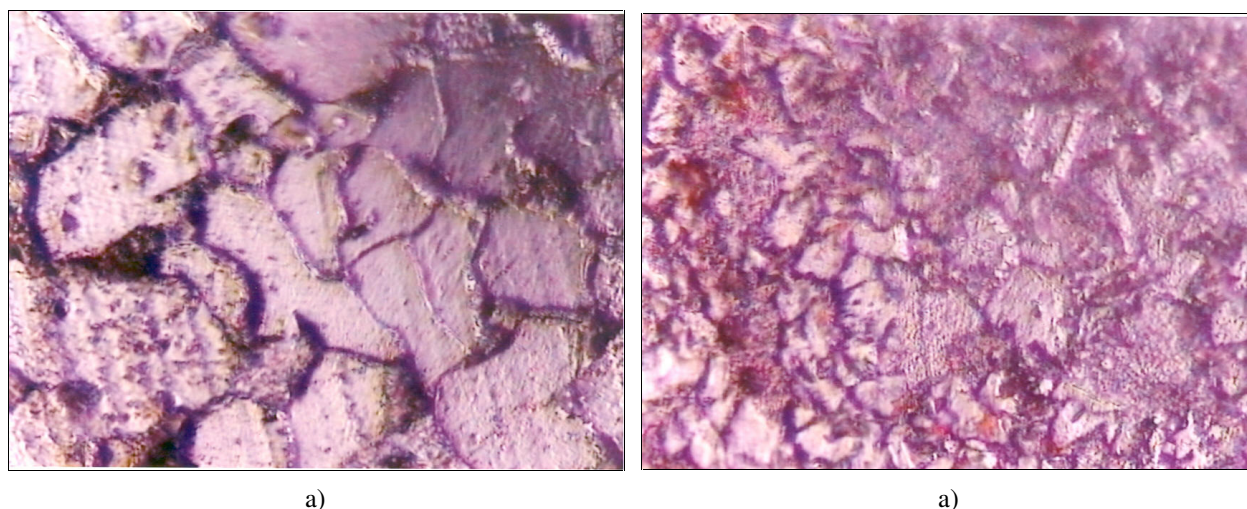


Fig. 2.1 - Exemplo de amostras ampliadas 500 x; a) retirada à temperatura ambiente; b) retirada à temperatura ambiente depois de submetida a ensaio de 600 [°C], com arrefecimento natural.

O refinamento do grão implica um número mais elevado de interfaces que irão aumentar a resistência aos movimentos das microestruturas, aumentando assim a resistência mecânica do material. Este fenómeno verifica-se em caso de um arrefecimento pós aquecimento superior a

600 [°C]. Para temperaturas superiores a este valor, o aumento da resistência depende do tipo de aço. Informações adicionais específicas sobre este assunto poderão ser encontradas em referência especializada, como Behets [2.13] e Dehaan [2.14].

Neste trabalho considera-se o valor da massa volúmica constante e independente da temperatura em 7850 [kg/m³].

2.2.1. - Calor específico

O significado desta propriedade representa a capacidade para armazenar calor ou a quantidade de energia necessária para elevar em um grau um metro cúbico de aço.

Das propriedades térmicas em estudo, o calor específico aumenta fortemente com a temperatura, mas não de uma forma proporcional. O teor em carbono não é determinante, sendo a sua variação analítica representada pelas expressões 2.4 [2.10] e a sua variação gráfica representada pela curva da figura 2.2.

$$\begin{aligned}
 C_a &= 425 + 7.73 \times 10^{-1} (\theta_a) - 1.69 \times 10^{-3} (\theta_a)^2 + 2.22 \times 10^{-6} (\theta_a)^3; & 20 < \theta_a \leq 600 [^\circ\text{C}] \\
 C_a &= 666 - \left[\frac{13000}{\theta_a - 738} \right]; & 600 < \theta_a \leq 735 [^\circ\text{C}] \\
 C_a &= 545 + \left[\frac{17820}{\theta_a - 731} \right]; & 735 < \theta_a \leq 900 [^\circ\text{C}] \\
 C_a &= 650; & 900 < \theta_a \leq 1200 [^\circ\text{C}]
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Na expressão anterior θ_a representa a temperatura do aço. Para cálculos simples, o Eurocódigo 3 [2.10] sugere a utilização do valor constante desta propriedade.

$$C_a = 600; \quad 20^\circ\text{C} < \theta_a \leq 1200 [^\circ\text{C}] \tag{2.5}$$

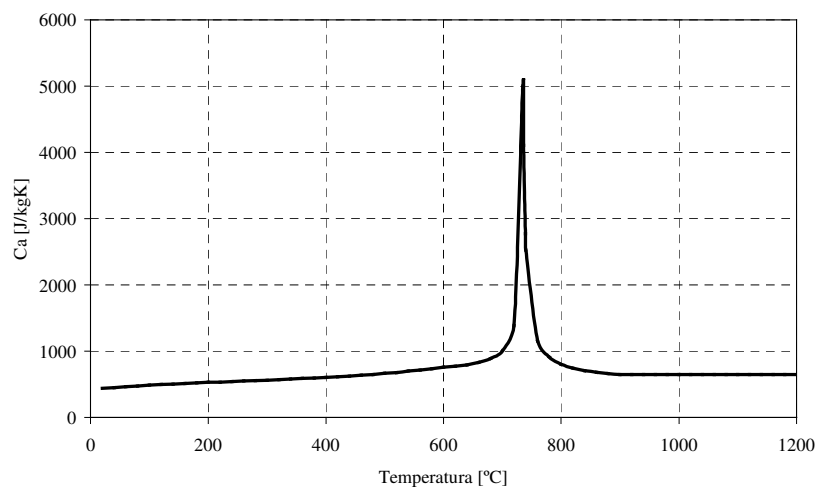


Fig.2.2 - Variação do calor específico do aço com a temperatura.

O pico que se apresenta na figura deve-se a uma transformação cristalográfica endotérmica do aço por volta dos 735 [°C] para um valor de 5000 [J/kgK]. Para os elementos estruturais poucos solicitados e com temperaturas de ruína perto destas temperaturas, esta alteração pode provocar um efeito não desprezável na duração da resistência ao fogo.

A evolução desta propriedade é reversível para o caso de se pretender efectuar uma análise posterior de arrefecimento [2.1].

2.2.2. - Condutividade térmica

A condutividade térmica do aço é elevada, contudo este valor tende a diminuir assim que a temperatura do material aumenta, conforme figura 2.3. As expressões analíticas para a evolução bi – linear mostrada representa-se através da expressão 2.6, em que se verifica um comportamento monótono decrescente desde 53,3 até 27,3 [W/mK], numa primeira fase, seguida de um comportamento constante para além dos 800[°C].

$$\lambda_a = 54 - 3.33 \left(\frac{\theta_a}{100} \right); \quad 20 < \theta_a \leq 800 [^{\circ}\text{C}] \quad (2.6)$$

$$\lambda_a = 27.3; \quad 800 < \theta_a \leq 1200 [^{\circ}\text{C}]$$

Também para esta propriedade, a referência [2.10] sugere a utilização de um valor constante, para as situações de cálculo simples.

$$\lambda_a = 45; \quad 20 < \theta_a \leq 1200 [^{\circ}\text{C}] \quad (2.7)$$

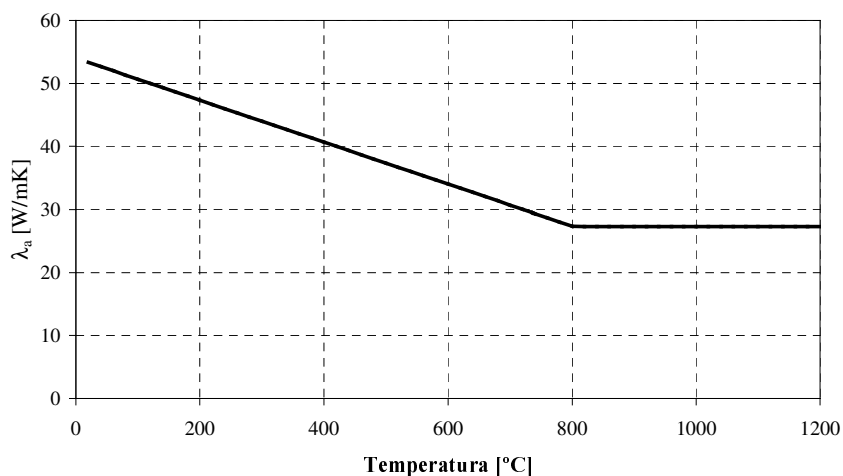


Fig.2.3 - Variação da condutividade do aço com a temperatura.

A evolução desta propriedade também é reversível em caso de um pós arrefecimento.

2.3. - Propriedades mecânicas

Os primeiros modelos estabelecidos para representar o comportamento do aço numa situação de incêndio, utilizavam métodos de cálculo simples. Assim, os primeiros trabalhos sobre este assunto consistiam em extrapolar para a situação de elevadas temperaturas o comportamento do aço observado à temperatura ambiente.

A curva de tensão deformação utilizada a 20[°C], elástica perfeitamente plástica e os parâmetros necessários à sua descrição, o módulo de elasticidade e o limite de elasticidade, eram as propriedades que variavam com a temperatura e que seria necessário estudar. Assim, estabeleceram-se valores de deformação em 0.2%, 0.5% e 2% para definir a cedência do material, conforme o tipo de estrutura, o tipo de solicitação e o método de cálculo [2.1].

O modelo elástico perfeitamente plástico foi dos modelos mais utilizados no início do estudo da influência da temperatura nas propriedades, contudo, e de acordo com [2.9], o modelo bi linear seria o que proporcionava melhores resultados.

Rubert e Schaumann, nos seus trabalhos que serviram de base aos resultados apresentados nos Eurocódigos, estabeleceram um modelo de comportamento onde a fluência do material seria considerada de uma forma implícita. Os ensaios instacionários de flexão efectuados sobre vigas IPE80 e IPE120 submetidos a uma taxa de aquecimento variável entre 2.67 e 32 [°C/min] permitiram estabelecer uma expressão analítica do tipo elíptico que antecede a cedência do material. Nessa lei a expressão analítica escolhida corresponde à curva elasto elíptico, perfeitamente plástica [2.11].

A lei tensão deformação ($\sigma - \varepsilon$) para os aços segue a curva que se representa a seguir, sendo de realçar quatro ou cinco fases fisicamente distintas [2.10].

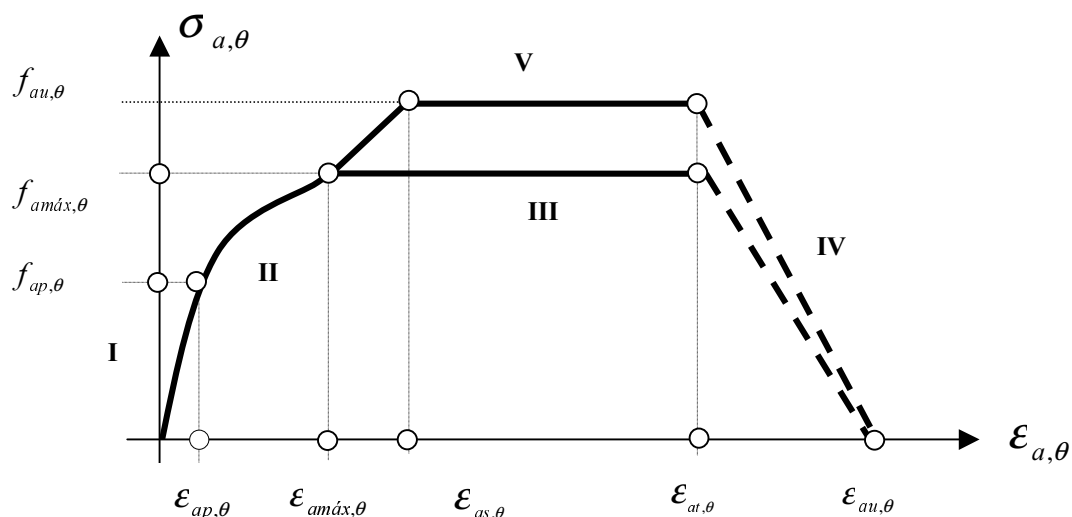


Fig.2.4 - Fases da relação tensão deformação, com e sem endurecimento.

A fase I representa a proporcionalidade entre σ e ε , caracterizada pelo valor $f_{ap,\theta}$, tensão limite de proporcionalidade à temperatura θ e pelo valor E_θ que representa o módulo de elasticidade, correspondente à inclinação do segmento de recta desta fase. A relação tensão deformação é expressa através da lei de Hook, pela equação seguinte.

$$\sigma_{a,\theta} = \bar{E}_{a,\theta} \times \varepsilon_{a,\theta} \quad (2.8)$$

A fase II, caracterizada pelo início da cedência do material, zona de transição, é formalmente parametrizada por $f_{a\text{máx},\theta}$, tensão de cedência. A relação tensão deformação nesta zona da curva é dada pela expressão que se segue.

$$\sigma_{a,\theta} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (\varepsilon_{a\text{máx},\theta} - \varepsilon_{a,\theta})^2} + f_{ap,\theta} - c \quad (2.9)$$

Os valores dos parâmetros a, b, c são representados pelas funções das expressões 2.10.

$$a^2 = \frac{\bar{E}_{a,\theta} (\varepsilon_{a\text{máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta})^2 + c (\varepsilon_{a\text{máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta})}{\bar{E}_{a,\theta}} \quad (2.10.a)$$

$$b^2 = \bar{E}_{a,\theta} (\varepsilon_{a\text{máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta}) c + c^2 \quad (2.10.b)$$

$$c = \frac{(f_{a\text{máx},\theta} - f_{ap,\theta})^2}{2(f_{ap,\theta} - f_{a\text{máx},\theta}) + \bar{E}_{a,\theta} (\varepsilon_{a\text{máx},\theta} - \varepsilon_{ap,\theta})} \quad (2.10.c)$$

E finalmente, o módulo de elasticidade dado pela função:

$$\bar{E}_{a,\theta} = \frac{b(\varepsilon_{\text{máx}} - \varepsilon_{a,\theta})}{a\sqrt{a^2 - (\varepsilon_{a,\theta} - \varepsilon_{a\text{máx},\theta})^2}} \quad (2.11)$$

A fase III é caracterizada pelo patamar de tensão constante. Trata-se de uma zona plástica em que $\sigma_{a\text{máx},\theta} = f_{a\text{máx},\theta}$ ou eventualmente, $\sigma_{a\text{máx},\theta} = f_{au,\theta}$ e $\bar{E}_{a,\theta} = 0$, para o caso de endurecimento por deformação.

A fase IV, e para não se obter uma ductilidade numericamente infinita, foi adicionada uma zona linear decrescente, entre os 15% e os 20% de deformação, sendo caracterizada pela deformação $\varepsilon_{au,\theta}$. Neste caso os parâmetros podem ser escritos pelas fórmulas:

$$\sigma_{a,\theta} = d \left[1 - \frac{\varepsilon_{a,\theta} - 0.15}{0.05} \right] \quad (2.12)$$

com $d = f_{a\text{máx},\theta}$ ou, eventualmente, $d = f_{au,\theta}$ para valores de temperatura inferiores a 400°C, onde as proporções da secção recta não sejam suficientes para, por um lado, evitar a encurvadura local e o conseqüente aumento da deformação e por outro que os membros estejam restringidos adequadamente para prevenir o empenamento. O valor do coeficiente de proporcionalidade inversa é determinado pelas expressões 2.13 ou 2.14, [2.10].

$$\bar{E}_{a,\theta} = -f_{a\text{máx},\theta}/0.05 \quad (2.13)$$

$$\bar{E}_{a,\theta} = -f_{au,\theta}/0.05 \quad (2.14)$$

Poderá eventualmente ocorrer uma fase intermédia V, de transição, abaixo dos 400 [°C] e em condições de estabilidade. A tensão poderá então subir ligeiramente até ao seu valor último conforme expressão 2.15.

$$\sigma_{a,\theta} = f_{a\text{máx},\theta} + \frac{f_{au,\theta} - f_{a\text{máx},\theta}}{0.02} [\varepsilon_{a,\theta} - 0.02] \quad (2.15)$$

Nas mesmas condições, o valor da rigidez por endurecimento será dado pela expressão 2.16.

$$\bar{E}_{a,\theta} = \frac{f_{au,\theta} - f_{a\text{máx},\theta}}{0.02} \quad (2.16)$$

Para os aços de construção em geral, a variação multilinear é adoptada sob a forma de tabela, nos parágrafos consagrados às leis dos materiais.

Os parâmetros envolvidos neste sub-capítulo variam com a temperatura consoante a tabela e gráficos que a seguir serão apresentados.

Os valores nominais das tensões de cedência e últimas, à temperatura ambiente, para aços laminados a quente são apresentados na tabela seguinte, tendo em consideração as diferentes classificações.

Valores nominais de aço estrutural segundo normas EN 10025 e prEN 10113				
Classificação	Espessura t [mm] (*)			
	t ≤ 40 [mm]		40 [mm] < t ≤ 100 [mm] (**)	
	f _y [N/mm ²]	F _u [N/mm ²]	f _y [N/mm ²]	F _u [N/mm ²]
EN 10025:				
Fe 360	235	360	215	340
Fe 430	275	430	255	410
Fe 510	355	510	335	490
PrEN 10113				
Fe E 275	275	390	255	370
Fe E 355	355	490	335	470

(*) t representa a espessura nominal do elemento.

(**) 63 [mm] para placas e outros produtos planos em aço para entrega nas condições TM para prEN 10113-3.

Tab.2.1 - Valores nominais de tensões para aço laminado a quente.

2.3.1. - Coeficiente de dilatação térmica

Mesmo na ausência de qualquer carregamento a aplicar num elemento estrutural, o aço de construção deforma-se por acção da temperatura.

Por definição, o coeficiente de dilatação térmica será obtido matematicamente pela derivada da deformação térmica ε_{th} em ordem à temperatura, conforme equação 2.17,

$$\frac{d\varepsilon_{th}}{dT} = \alpha_{th} \quad (2.17)$$

em que α_{th} representa o coeficiente de dilatação do material. Considera-se geralmente que o valor do coeficiente é independente da qualidade de aço.

Para temperaturas inferiores a 100 [°C] pode ser considerado um valor constante para α_{th} , perto dos 10^{-5} [°C⁻¹]. Para valores de temperatura em situação de incêndio, ou seja, para intervalos de 20 a 1200 [°C], este coeficiente não pode ser considerado constante. A integração da expressão 2.17 não é imediata, devendo escrever-se genericamente:

$$\varepsilon_{th} = \int_{T_0}^T \alpha_{th}(T) dT \quad (2.18)$$

A utilização do coeficiente de dilatação térmica apresenta pouco interesse prático. Com efeito, experimentalmente, a única grandeza acessível para medição é a deformação térmica do material em função da temperatura [2.11].

Os resultados de vários ensaios [2.4,2.5,2.6,2.7] demonstram que as equações 2.19, que governam a curva proposta no Eurocódigo, representam aproximadamente o seu comportamento.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{th} &= -2.416 \times 10^{-4} + 1.2 \times 10^{-5} \times \theta_a + 0.4 \times 10^{-8} \times \theta_a^2; & 20 < \theta_a \leq 750 [^{\circ}\text{C}] \\ \varepsilon_{th} &= 11.0 \times 10^{-3}; & 750 < \theta_a \leq 860 [^{\circ}\text{C}] \\ \varepsilon_{th} &= -6.2 \times 10^{-3} + 2.0 \times 10^{-5} \times \theta_a; & 860 < \theta_a \leq 1200 [^{\circ}\text{C}] \end{aligned} \quad (2.19)$$

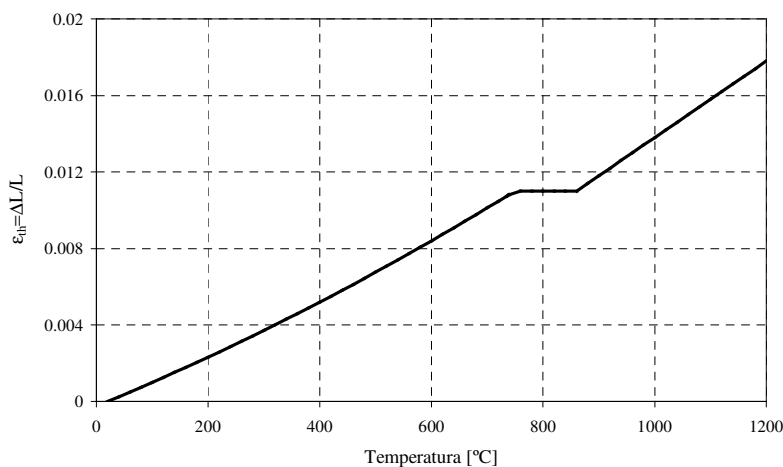


Fig.2.5 - Variação do coeficiente de dilatação térmica com a temperatura.

Esta variação pode ser aproximada pela expressão simplificada seguinte.

$$\varepsilon_{th} = 14.0 \times 10^{-6} (\theta_a - 20) \quad (2.20)$$

2.3.2. - Módulo de elasticidade.

Esta propriedade do aço foi estudada por diversos investigadores, nomeadamente pelo autor da referência [2.9], sendo de realçar que o seu valor decresce com o aumento da temperatura, e de uma forma menos acentuada que o limite de elasticidade.

A figura 2.6 mostra a variação desta propriedade através do factor de redução. Este factor representa o quociente entre o valor da propriedade a uma determinada temperatura e o valor de referência a 20 [°C].

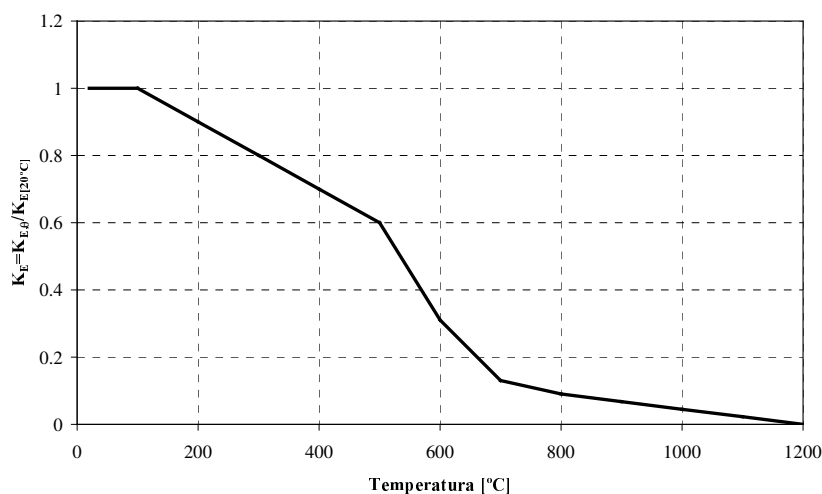


Fig.2.6 - Factor de redução do módulo de elasticidade para aços.

Sobre a variação desta propriedade podem ser consultados vários trabalhos experimentais nas referências do documento [2.9].

A variação proposta pelo Eurocódigo resulta de valores tabelados de 20 a 1200 [°C], admitindo-se uma variação linear entre os valores apresentados na tabela 2.2.

Temperatura [°C]	$k_{E,\theta}$
20	1.0000
100	1.0000
200	0.9000
300	0.8000
400	0.7000
500	0.6000
600	0.3100
700	0.1300
800	0.0900
900	0.0675
1000	0.0450
1100	0.0225
1200	0.0000

Tabela 2.2 - Valores do coeficiente de redução do Módulo de elasticidade.

2.3.3. - Tensão de cedência

Tendo em consideração o comportamento não linear do aço, é definido um limite de elasticidade para um valor de deformação plástica que lhe corresponde. Para valores de temperatura normais, é comum estabelecer o valor 0.2% de deformação, enquanto que para temperaturas elevadas seja normal utilizar o valor 0.5%.

Os valores propostos no Eurocódigo apresentam-se na figura 2.7, sendo de referir que é esperado uma diminuição acentuada desta propriedade, apenas, a partir dos 400 [°C].

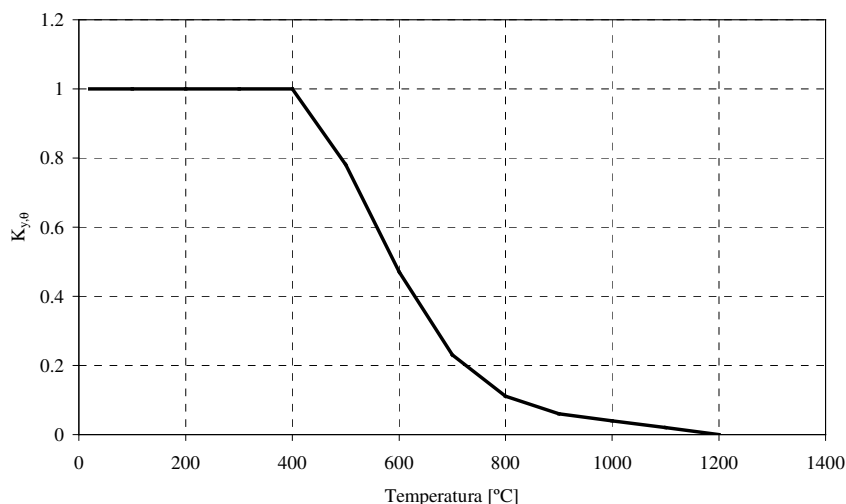


Fig.2.7 - Factor de redução da tensão de cedência para aços.

Os valores representados foram obtidos a partir de dados tabelados em [2.10], que se apresentam na tabela 2.3.

Temperatura [°C]	$k_{y,\theta}$
20	1.0000
100	1.0000
200	1.0000
300	1.0000
400	1.0000
500	0.7800
600	0.4700
700	0.2300
800	0.1100
900	0.0600
1000	0.0400
1100	0.0200
1200	0.0000

Tabela 2.3 - Valores do coeficiente de redução da tensão de cedência.

2.3.4. - Tensão limite de proporcionalidade

Este valor tem como principal função definir o módulo de elasticidade do material. Normalmente para valores de deformação muito pequenos, verifica-se uma proporcionalidade entre tensão e deformação.

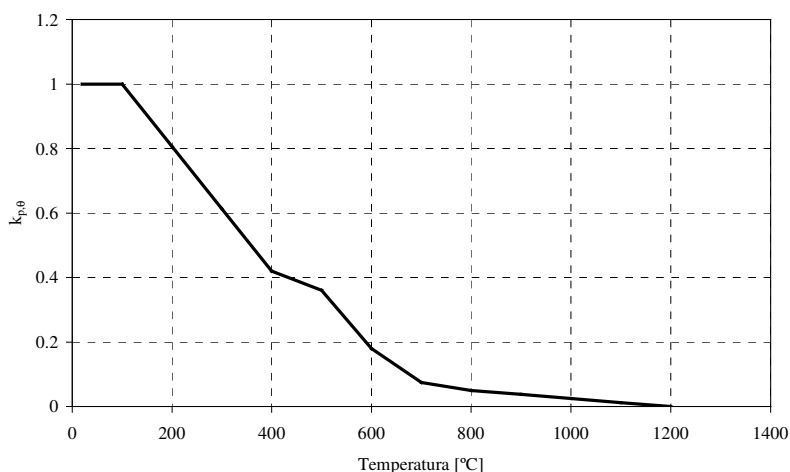


Fig.2.8 - Factor de redução da tensão limite de proporcionalidade, para aços.

Esta variação representada na figura 2.8 apresenta uma diminuição acentuada a partir dos 100 [°C], que naturalmente coincide com a temperatura crítica de diminuição do módulo de elasticidade.

2.4. - Conclusões

Relativamente às propriedades térmicas e mecânicas do aço, foram apresentadas as recomendações publicadas nos Eurocódigos. Estas propriedades variam significativamente com a temperatura e decorrem de estudos e contribuições de diversos autores, que têm vindo a ser colectadas ao longo de anos e que revelam alguma discrepância no que diz respeito aos fenómenos presentes. A este respeito será importante verificar o intervalo de temperatura durante o qual se verifica o processo de transformação metalúrgica, que para algumas propriedades se consegue identificar para temperaturas mais baixas do que para outras. Acresce a este facto o tipo de valores tabelados e discretos que se verificam para certas propriedades. A sugestão de interpolação linear entre estes pode influenciar os resultados dos cálculos que envolvem estas propriedades, nomeadamente no que diz respeito à determinação da resistência ao fogo e à encurvadura lateral em situação de temperaturas elevadas.

Diversos autores demonstraram que para situações de acidente com temperaturas elevadas, registadas entre meia a duas horas, o efeito da fluência dependeria pouco da velocidade de aquecimento [2.1]. Esta situação não deverá de alguma forma ser extrapolada para uma escala de tempo maior, contudo este intervalo de tempo encontra-se dentro dos valores utilizados nos ensaios experimentais que se apresentam no capítulo 8. Este fenómeno aparece introduzido de forma implícita nas propriedades e na variação destas com a temperatura, através de um amaciamento da lei tensão deformação, pelo que o factor tempo não aparece explicitamente no comportamento da estrutura. Assim é possível desacoplar os dois efeitos, térmico e estrutural estático, e disponibilizar fórmulas ou tabelas que relacionam a carga admissível em função da temperatura, ou eventualmente ao contrário. Seguindo este raciocínio, o tempo necessário para atingir a temperatura em causa não introduziria qualquer variação no resultado. Caso o tempo interviesse de maneira explícita sobre os modelos, seria impossível estabelecer todos os utensílios práticos de dimensionamento, uma vez que para cada elemento estrutural metálico e para cada taxa de carregamento, a temperatura crítica seria função da qualidade do material, de um eventual produto de protecção térmica empregue, da sua espessura, bem como da curva de incêndio utilizada. Cada caso passaria a ser analisado em particular. Acresce ainda o facto de que numa situação de incêndio real numa estrutura, a evolução da temperatura ser bastante diferente da produzida pelo efeito das curvas normalizadas.

2.5. - Referências

- [2.1]- Franssen, Jean - Marc; “Contribution a la modelisation des incendes dans les batiments et de leur effects sur les structures”; Thèse présentée en vue de l’obtention du grade de d’Agrégé de l’enseignement Supérieur Année académique 1997-1998.
- [2.2]- Rubert, A.; Schaumann, P.; “Temperaturalhangige Werkstoffeigenschaften von baustahl brandbeanspruchung”; Stahlbau, Verlag Wilh. Ernst & Sohn; Berlin; 54, Heft.3; 81-86; 1985.
- [2.3]- CEN ENV 1993-1-1; “Eurocode 3: Design of steel structures – Part1.1: General rules and rules for buildings”; 1992.

- [2.4]- Stirland, C; “Steel properties at elevated temperatures for use in fire engineering calculations”; Document ISSO/TC92/WG15/nº14; 1980.
- [2.5]- Anderberg, Y.; “Proprieties of materials at high temperatures. Steel”; RILEM; Lund Inst. Of Techn.; 1993.
- [2.6]- Ruge J., Winkelmann O.; “Deformation behaviour of reinforcing and structural steel at high temperatures”; Sonderforschungsbereich 148, Brandverhalten von Bauteilen; Arbeitsbericht 1978; Part II; Braunschweig; 1980.
- [2.7]- Skinner, D.H; “Determination of hight temperature properties of steel”; BHP Technical Bulletin; vol. 16; Melbourne Research Laboratories; 1972.
- [2.8]- Skinner, D.H.; “Behaviour of steel during fires”; Melbourne Research Laboratories; 1972.
- [2.9]- Anderberg, Y.; “Behaviour of steel at high temperatures”; Rilem-Committee 44-PHT; 1983.
- [2.10]- CEN ENV 1993-1-2; “Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1.2: General rules – Structural fire design”; 1995.
- [2.11]- Franssen, Jean - Marc; “Étude du comportmente au feu des structures mixtes acier – beton”; Thèse présentée à la faculté des sciences appliquées de l’université de Liège en vue de l’obtention du grade scientifique de docteur en sciences appliquées; 1986.
- [2.12]- Bejan, Adrian; “Heat Transfer”; John Wiley & Sons; USA; 1993.
- [2.13]- Behets, J.F.; “Étude de la resistance au feu des éléments métalliques protégés. Addendum nº1: Caracteristiques de l’acier après refroidissement “; Convention IRSIA nº1982; C.B.L.I.A.; 1975.
- [2.14]- Dehaan, J. D.; “Kirk’s Fire Investigation”; John Wiley & Sons Inc.; New York; 1983.

Capítulo 3

Acções em estruturas sujeitas à acção do fogo

3.1. – Introdução

Os parâmetros físicos que determinam as condições de acção do fogo são muitos e complexos. Cada um deles intervém na duração do fogo, na sua violência, e na maneira como vai afectar termicamente a estrutura. Dos factores mais importantes podem ser citados, a densidade da carga de incêndio, as características de combustão dos materiais, as dimensões e formas do local, as condições de ventilação e as propriedades térmicas da envolvente [3.1].

Na modelação proposta, excepto no instante do colapso da estrutura, as taxas de deformação são suficientemente pequenas para que se possa considerar o calor produzido por deformação plástica. Uma vez que o estado estático da estrutura não influencia o cálculo das temperaturas da estrutura, isto possibilita que se possa fazer o cálculo das temperaturas na estrutura independentemente do cálculo dos deslocamentos, deformações e tensões [3.1].

Na parte 2.2 do Eurocódigo 1 [3.3] são definidas as acções térmicas (acções para a análise térmica) e as acções mecânicas (acções para a análise estrutural).

O procedimento de projecto ao fogo e a sua verificação pode ser feita no domínio temporal, isto é:

$$t_{fi,d} \geq t_{fi,requ} \quad (3.1)$$

em que $t_{fi,d}$ representa o valor de cálculo da resistência ao fogo, medido nas unidades de tempo e $t_{fi,requ}$ representa o valor nominal requerido de resistência ao fogo. Outra forma de verificação recorre ao domínio da resistência estrutural, através da expressão 3.2;

$$R_{fi,d} \geq E_{fi,d} \quad (3.2)$$

em que $R_{fi,d,t}$ representa o valor de cálculo da capacidade resistente durante a exposição ao fogo, no instante t , e $E_{fi,d,t}$, o valor de cálculo do efeito das acções nas mesmas condições. O projecto pode ainda ser verificado no domínio térmico, através da determinação do valor de cálculo da temperatura crítica $\theta_{cr,d}$. Na expressão 3.3, θ_d representa o valor de cálculo da temperatura.

$$\theta_d \leq \theta_{cr,d} \quad (3.3)$$

As acções nas estruturas expostas ao fogo são classificadas como acções acidentais. Estas podem ser divididas em directas e indirectas. As indirectas devem ter em consideração o efeito do constrangimento à expansão térmica do elemento da estrutura (ex: colunas numa estrutura multi andar com paredes rígidas), o efeito de diferentes coeficientes de expansão térmica dentro de elementos da estrutura e o efeito de gradientes térmicos na secção recta do componente, que originam tensões internas. Os valores de cálculo para acções indirectas ($A_{d,nd}$) devem ser determinados na base de valores de cálculo das propriedades térmicas e mecânicas dos materiais, de acordo com as partes relacionadas com o projecto de estruturas sujeitas à acção do fogo, do Eurocódigo. As acções directas devem ser combinadas e verificadas em simultâneo, tendo em consideração que estas devem ser consideradas como no projecto à temperatura ambiente. Valores representativos de acções variáveis para situações acidentais de exposição ao fogo devem ser tomadas em consideração e o decréscimo de cargas impostas provocadas pela combustão não deverão ser consideradas.

3.2. - Acções térmicas

O efeito do fogo numa estrutura elevará a temperatura dos elementos que a constituem, podendo alterar a sua rigidez e resistência, bem como alterar os deslocamentos e as cargas que estes suportam. Estas alterações poderão provocar a ruína ou colapso, sendo essencial determinar a evolução do campo térmico no regime transiente e ao mesmo tempo determinar o tempo de resistência da estrutura, ao efeito do fogo.

Uma das formas de cálculo destas acções pode recorrer a métodos computacionais, onde grande parte dos códigos existentes recorrem a análise por diferenças finitas e/ou elementos finitos. O tipo de programa que se irá apresentar recorre ao segundo tipo de modelação e utiliza modelos não lineares.

As acções térmicas são definidas em termos de uma densidade de fluxo de calor incidente na superfície fronteira do elemento (\dot{h}_{net} [W/m^2]) comportando duas parcelas, uma devida à radiação ($\dot{h}_{net,r}$) e outra devida à convecção ($\dot{h}_{net,c}$), de e para o ambiente de fogo [3.3].

A densidade de fluxo é determinada de acordo com o Eurocódigo 3, através de:

$$\dot{h}_{net} = \gamma_{n,r} \dot{h}_{net,r} + \gamma_{n,c} \dot{h}_{net,c} \quad [W / m^2] \quad (3.4)$$

em que, $\gamma_{n,c}, \gamma_{n,r}$ representam factores de segurança de diferentes níveis nos vários países (valor proposto = 1) [3.3].

Os fluxos de calor superficiais, são calculados através das expressões bem conhecidas da transferência de calor por condução, convecção e por radiação. Assim, no caso de transferência de calor por convecção e radiação, as expressões são respectivamente [3.3]:

$$\begin{aligned} \dot{h}_{net,c} &= \alpha_c (\theta_g - \theta_m) \quad [W/m^2] \\ \dot{h}_{net,r} &= \phi \cdot \epsilon_{res} \times 5,67 \times 10^{-8} [(\theta_r + 273)^4 - (\theta_m + 273)^4] \quad [W/m^2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que α_c representa o coeficiente de convecção, a definir em função do tipo de curva de incêndio ($=9 [W/m^2k]$, na face fria dos elementos de compartimentação), θ_g traduz a variação da temperatura dos gases na vizinhança do elemento a qual poderá possuir várias formas de evolução. O parâmetro ϕ representa o factor de forma, enquanto que $\epsilon_{res} = \epsilon_m \cdot \epsilon_f = 0,56$ representa a emissividade resultante, função da emissividade do elemento, $\epsilon_m = 0,7$, e da emissividade do compartimento de incêndio $\epsilon_f = 0,8$. A temperatura θ_r representa o valor da temperatura de radiação na vizinhança do elemento, podendo considerar-se igual a θ_g , enquanto que θ_m deverá representar a temperatura na superfície do elemento, resultante de um cálculo térmico.

A temperatura de incêndio θ_g pode ser dada em termos de curvas nominais temperatura - tempo ou sob a forma de curvas paramétricas. Podem então, ser definidas três curvas nominais:

1- Curva de incêndio padrão, onde α_c deverá ser considerado igual a $25 [W/m^2°C]$ e o tempo em unidades de minuto:

$$\theta_g = 20 + 345 \times \log_{10}(8t + 1) [°C] \quad (3.6)$$

2- Curva de incêndio para elementos estruturais exteriores, onde se considera o mesmo valor para o coeficiente de convecção α_c , e as mesmas unidades para o parâmetro tempo.

$$\theta_g = 20 + 660 \times (1 - 0,687 \times e^{-0,32t} - 0,31 \times e^{-3,8t}) [°C] \quad (3.7)$$

3- Curva de incêndio para hidrocarbonetos, onde α_c valerá $50 [W/m^2°C]$

$$\theta_g = 20 + 1080 \times (1 - 0,325 \times e^{-0,167t} - 0,675 \times e^{-2,5t}) [°C] \quad (3.8)$$

Na figura 3.1 são apresentadas as evoluções dos três tipos de curvas. Estas curvas e principalmente a de incêndio normalizado ISO834, possui a capacidade de permitir a determinação e a comparação da resistência ao fogo das estruturas. Esta resistência poderá ser obtida quer por meio de ensaios experimentais quer por meio de cálculo analítico simplificado ou numérico.

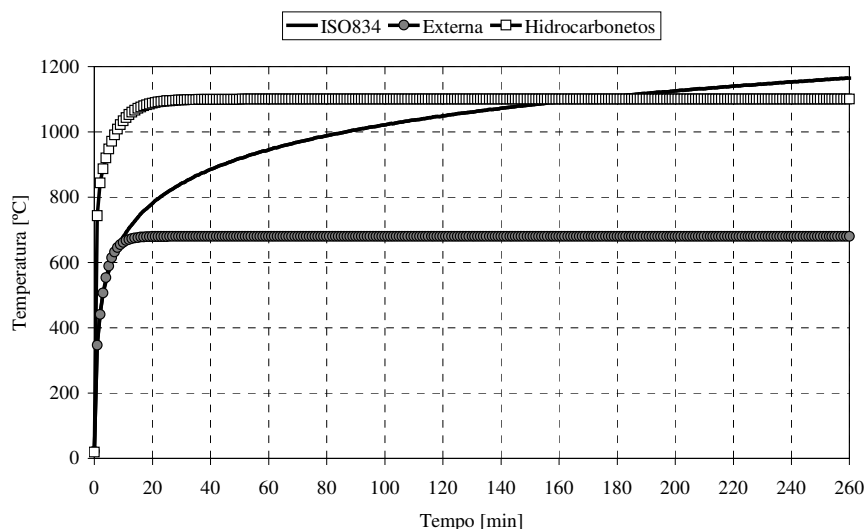


Fig.3.1 – Curvas nominais para a acção do fogo.

As curvas paramétricas são fornecidas no Eurocódigo 1[3.3] como anexo informativo. Distinguem-se das anteriores por possuírem fases de arrefecimento e por se aplicarem a compartimentos até 100 [m²], sem aberturas nos telhados e para uma altura máxima de 4 [m]. Pretendem representar as condições de evolução da temperatura média de incêndio em compartimentos reais e são definidas em função dos principais parâmetros de influência, como por exemplo, densidade de carga de incêndio (quantidade de calor após combustão por unidade de área, sendo esta a da planta ou a da superfície envolvente), factor de abertura do compartimento de incêndio, traduzindo assim a influência das aberturas, e naturalmente, das propriedades térmicas da envolvente do compartimento de incêndio.

O cálculo térmico simplificado possibilita determinar a máxima temperatura do compartimento sujeito ao fogo, o tamanho e as temperaturas das chamas das aberturas, bem como os parâmetros de convecção e radiação. Este método considera uma situação de regime permanente para os vários parâmetros, durante um período de 1200 [s].

3.2.1. - Trocas convectivas

O fenómeno de transferência de calor por convecção surge quando as partículas do meio são livres de se moverem. No caso em estudo, e relativamente aos processos de transferência, a troca de calor processa-se entre um meio gasoso e um meio sólido. Este processo poderá ocorrer através de duas maneiras distintas, consoante o movimento seja ou não forçado exteriormente.

A convecção natural ou livre resulta de movimentos produzidos por variação da massa volumica entre as partículas gasosas com temperaturas diferentes.

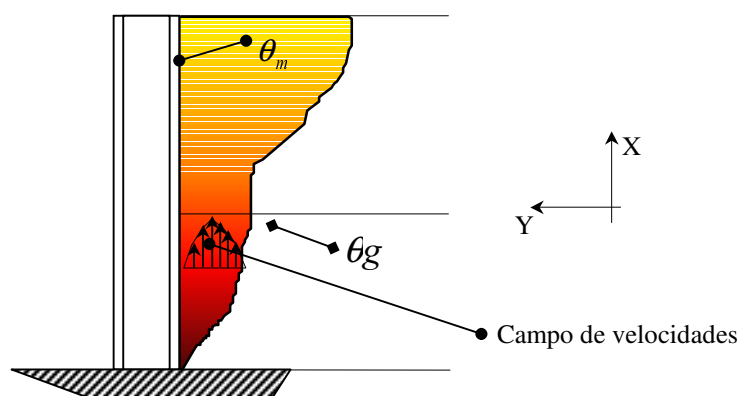


Fig.3.2 – Camada limite de convecção natural.

Dependendo do fluido e da diferença de temperatura entre a parede e o ambiente, ocorre uma transição para a camada limite turbulenta a uma determinada posição em altura. A equação que rege o comportamento do fluido, atendendo ao referencial mostrado na figura 3.2, resulta das equações de Navier Stokes;

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

em que u representará a componente da velocidade de deslocação das chamas na direcção xx , p o valor da pressão, g o valor da aceleração da gravidade e ρ o valor da massa volúmica. O gradiente de pressão, na direcção xx , resultante de um campo hidrostático, traduz-se em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_{\infty} g \quad (3.10)$$

Substituindo esta expressão na equação 3.9, obtém-se:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho_{\infty} - \rho) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

A diferença de massa volúmica $\rho_{\infty} - \rho$ pode ser expressa em termos de coeficiente de expansão volumétrica β , definido por:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{V_{\infty}} \frac{(V - V_{\infty})}{(T - T_{\infty})} = \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho(T - T_{\infty})} \quad (3.12)$$

em que T representa a temperatura. A equação 3.9 apresenta a seguinte forma depois das sucessivas substituições:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g\rho\beta(T - T_{\infty}) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.13)$$

Conclui-se que a solução para o perfil de velocidades depende do conhecimento da distribuição de temperatura.

A equação da energia para o caso de convecção natural é a mesma da convecção forçada para baixas velocidades.

$$\rho C_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.14)$$

O coeficiente de expansão volumétrica pode ser determinado por tabelas para os diversos fluidos específicos. No caso de gases ideais, pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (3.12)$$

Embora o movimento do fluido seja causado pelas variações de densidade, estas são relativamente pequenas, de modo que pode ser obtida uma solução satisfatória para o problema, admitindo escoamento incompressível, isto é, densidade constante.

Assim, para se determinar o coeficiente de convecção será necessário determinar o campo de velocidades, que por sua vez depende do campo de temperatura do meio gasoso. A temperatura do meio gasoso pode ser conhecida adoptando uma das curvas atrás citadas. Para ter em consideração os dois modos de convecção adopta-se uma solução simplificada para os dois casos. Assim para o ambiente de ensaio, o valor do coeficiente de convecção deverá estar compreendido entre 5 e 10 [W/m²K], enquanto que para ambientes forçados se deverá utilizar valores próximos de 25 [W/m²K] [3.1].

3.2.2. - Trocas radiactivas

As trocas de calor por radiação são as mais importantes no processo térmico de aquecimento, especialmente a elevadas temperaturas. Conforme se poderá constatar na figura 3.3 o quociente entre os dois tipos de fluxo de calor, varia conforme o instante do processo de incêndio, sendo favorável à radiação, principalmente para instantes em que se verificam temperaturas mais elevadas.

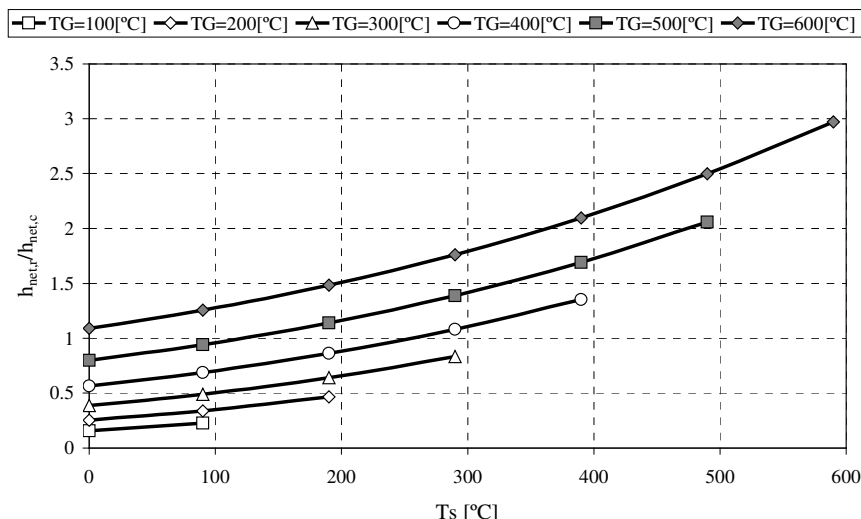


Fig.3.3 - Comparação entre calor trocado por radiação e convecção.

O fenómeno físico do fogo apresenta complexidade acrescida quando se estuda em particular o caso da transferência de calor por radiação, uma vez que neste modo intervêm as posições relativas das chamas. No caso da modelação numérica, será considerada a temperatura dos gases como temperatura ambiente, aproximada pela lei de Stefan – Boltzmann.

O factor de forma, por definição, é o ângulo sólido a partir do qual o ambiente radiactivo pode ser visto de um ponto da superfície do elemento estrutural, dividido por 2π . Pode também ser interpretado como a fracção de fluxo de calor total que sai da superfície radiactiva e que é recebida pela superfície que recebe estas ondas. O seu valor depende do tamanho da superfície de radiação, da distância entre as duas superfícies e das suas orientações relativas.

No caso mais geral de secções convexas, ver figura 3.4, cada ponto da superfície é influenciada única e exclusivamente pelo meio exterior e não por outras superfícies do perfil. Assim em cada ponto da superfície, o factor de forma tomará o valor unitário.

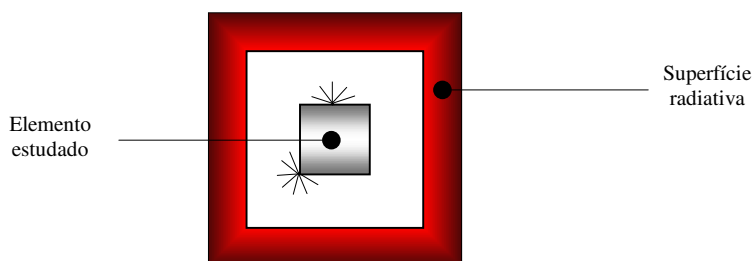


Fig.3.4 - Factores de forma para superfícies convexas.

No caso de secções côncavas, algumas superfícies estarão protegidas da radiação exterior através de superfícies vizinhas, conforme figura 3.5. Este fenómeno dificulta a simulação, pelo que se poderá optar por emissividades relativas e que deverão variar de face para face, consoante sua posição relativa.

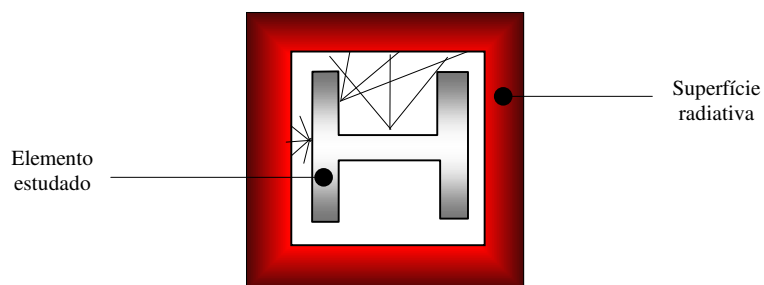


Fig.3.5 - Factores de forma para superfícies côncavas.

Nestes casos, o Eurocódigo apresenta uma expressão simplificada para determinação do respectivo factor de forma, devendo ser considerado um rectângulo envolvente à superfície a considerar, sendo o factor calculado para o ponto médio de cada face desse rectângulo, conforme as seguintes expressões.

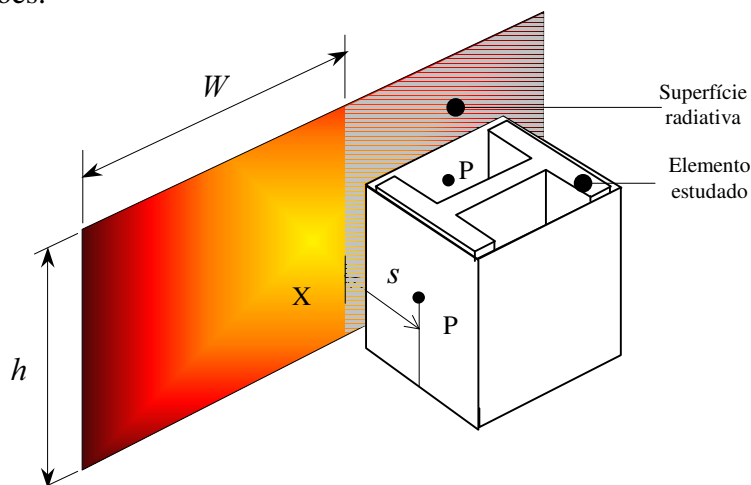


Fig. 3.6 - A superfície a receber poderá ser paralela ou perpendicular ao plano da superfície radiativa.

Assim para uma superfície que recebe radiação de outra que lhe é paralela, deve obedecer à seguinte expressão:

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{a}{(1+a^2)^{0.5}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b}{(1+a^2)^{0.5}} \right) + \frac{b}{(1+b^2)^{0.5}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{a}{(1+b^2)^{0.5}} \right) \right] \quad (3.13)$$

onde $a = h/s$, $b = w/s$, sendo s a distância entre P e X, h a altura da superfície que irradia e W a respectiva largura.

Um outro factor que não é considerado na expressão 3.13 é a diferente influência da cada comprimento de onda irradiada nas trocas radioactivas, ou seja, os efeitos especulares. Assim considera-se que o corpo em estudo e a energia irradiada por um corpo negro é independente do comprimento de onda, pelo que os corpos são considerados como cinzentos.

Admitindo os dois processos de transferência de calor, pode-se dizer que o calor que entra para o elemento estrutural, quando submetido à acção do fogo é:

$$h_s = h_{net,c} + h_{net,r} = \alpha(\theta_g - \theta_m) + \phi \epsilon_{res} 5,67 \times 10^{-8} [(\theta_g + 273)^4 - (\theta_m + 273)^4] \quad [W / m^2] \quad (3.14)$$

Esta será uma das condições fronteira no processo de análise por elementos finitos do campo de temperaturas.

3.3. - Acções mecânicas

No que respeita às acções mecânicas, e para determinar o valor de cálculo dos efeitos das acções em situação de incêndio $E_{fi,d,t}$, estas devem ser combinadas de acordo com [3.3], utilizando a seguinte expressão:

$$\sum \gamma_{GA} \cdot G_k + \psi_{1,1} \cdot Q_{k,1} + \sum \psi_{2,i} \cdot Q_{k,i} + \sum A_d(t) \quad (3.15)$$

Nesta expressão, G_k representa o valor característico das acções permanentes, $Q_{k,1}$ o valor característico da acção variável principal, $Q_{k,i}$ os valores característicos das restantes acções variáveis e $A_d(t)$ os valores de cálculo de acções de exposição ao fogo, de acordo com secções 4 e 5 [3.3]. O coeficiente de segurança γ_{GA} representa o valor parcial para acções permanentes na situação de accidental e os coeficientes de redução $\psi_{1,1}$ e $\psi_{2,i}$ deverão estar de acordo com os mesmos documentos.

As acções podem ser classificadas relativamente à sua variação com o tempo em: permanentes, no caso das cargas relacionadas com o peso próprio da estrutura, em variáveis, no caso do vento e da neve e em accidentais, como são o caso mais frequentes de incêndio e explosões.

Sempre que não seja necessário considerar as acções indirectas de incêndio, a combinação de acções é feita apenas para $t = 0$ e supõe-se constante durante todo o incêndio. É a hipótese que se adopta também para o cálculo dos efeitos das acções nos apoios, aquando de uma análise por partes da estrutura ou por elementos.

Para evitar recorrer à combinação de acidente definida em 3.15 é possível, como simplificação, calcular os efeitos das acções em situação de incêndio $E_{fi,d,t}$ como uma percentagem $\eta_{fi,t}$ dos efeitos das acções obtidos a partir da combinação fundamental à temperatura ambiente E_d (já conhecidos do dimensionamento à temperatura ambiente).

$$E_{fi,d,t} = \eta_{fi,t} E_d \quad (3.16)$$

em que:

$$\eta_{fi,t} = \frac{\gamma_{GA} G_k + \psi_{1,1} Q_{k,1}}{\gamma_G G_k + \gamma_Q Q_{k,1}} \quad (3.17)$$

sendo γ_G o coeficiente parcial de segurança para acções permanentes à temperatura ambiente e γ_Q o coeficiente parcial de segurança para a acção variável principal.

Em [3.6] pressupõe-se a utilização do valor $\eta_{fi,t} = 0.6$, para edifícios correntes em estrutura mista e $\eta_{fi,t} = 0.7$, para edifícios da categoria E (armazéns, etc.)

A combinação está formulada tendo em conta a especificidade do estado limite considerado e a probabilidade da actuação simultânea das acções intervenientes, por utilização adequada dos valores de combinação ψ . Os valores reduzidos de acções variáveis serão obtidos a partir do correspondente valor característico, multiplicado pelos coeficientes ψ . Para a acção variável de valor característico F_k , deverão ser utilizados os coeficientes ψ_0 para o valor da combinação, ψ_1 para o valor frequente e ψ_2 para a parcela quase permanente da acção. As acções variáveis apenas deverão estar presentes nas combinações, no caso do seu efeito ser considerado desfavorável para a estrutura.

No caso da estrutura estar sujeita a acções de peso próprio (G), do vento (W), da sobrecarga (Q), da neve (S) e ainda, a uma situação accidental, de incêndio, a verificação à segurança deverá testar as combinações possíveis.

No caso da acção combinada accidental, apenas um coeficiente de segurança é aplicado à acção permanente, com um valor igual à unidade. Os coeficientes associados representam o efeito cumulativo das combinações de acções variáveis em situação de acidente, implicando uma acção variável dominante e acções variáveis reduzidas, conforme exemplo da tabela 3.1.

Acções variáveis para Edifícios	Eurocódigo	
	ψ_1	ψ_2
categoria B		
Sobrecarga coberturas	0	0
Sobrecarga pavimentos	0.5	0.3
Neve	0.2	0
Vento	0.5	0

Tabela 3.1- Exemplo de valores dos coeficientes de redução associados às acções variáveis (edifícios comerciais).

Para a equação 3.15 podem-se definir 3 grandes grupos de acções variáveis dominantes, conforme se tome a sobrecarga (Q) como dominante – Grupo 1, a neve como dominante (S) – Grupo 2, ou ainda, o vento como acção variável dominante (W) – Grupo 3.

Assim, para a verificação à segurança da estrutura em relação aos estados limites últimos, é apresentado na tabela 3.2 o resumo das combinações possíveis:

Grupos identificados através das acções variáveis dominantes	Eurocódigo					
	$S_d = G_{k1} + \psi_{11} Q_{k1} + \sum_{j=1}^2 \psi_{2j} Q_{kj}$					
Grupo 1 - Sobrecarga	S_d	=	G	+	0.5Q	+ 0.W + 0.S
Grupo 2 - Neve	S_d	=	G	+	0.2S	+ 0.W + 0.3Q
Grupo 3 - Vento	S_d	=	G	+	0.5W	+ 0.S + 0.3Q

Tabela 3.2.- Grupos de acções combinadas, para edifícios comerciais.

3.4. – Conclusões

Um incêndio é considerado como uma acção accidental. O efeito deste não intervém como uma carga suplementar nas combinações de acção, mas influencia de uma maneira indirecta através da redução das respectivas propriedades dos materiais presentes na estrutura.

Na modelação apresentada no capítulo 9, as taxas de deformação são consideradas suficientemente pequenas para que se possa verificar o efeito do calor produzido na determinação das temperaturas. Assiste-se pois ao tratamento desacoplado da solução térmica e mecânica.

Foram apresentadas as acções térmicas e mecânicas a considerar no cálculo de uma estrutura em situação de incêndio. Relativamente às primeiras, apresentaram-se as várias curvas que traduzem a evolução do aquecimento do compartimento de incêndio e relativamente às segundas, definiu-se a combinação de acidente a utilizar nos cálculos.

3.5. - Referências

- [3.1]- Franssen, Jean - Marc.; “Étude du comportement au feu des structures mixtes acier – béton”; Thèse présentée à la faculté des sciences appliquées de l’université de Liège en vue de l’obtention du grade scientifique de docteur en sciences appliquées; 1986.
- [3.2]- Franssen, Jean - Mark; Cook, Latham “Numerical simulation of a full scale fire test on a loaded steel framework”; Elsevier; Journal of construct steel reserch; 35 (pp.377-408);1995.
- [3.3]- CEN ENV 1991-2-2 “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2.2: Actions on structures – Action on structures exposed to fire”; 1995.
- [3.4]- Bejan Adrian; “Heat Trnsfer”; John Wiley & Sons; USA; 1993.
- [3.5]- Talamona, Didier; “Flambement de poteaux metalliques sous charge excentree, a houte temperatures”; these présentée pour obtenir le grade de docteur d’Université; université Blaise Pascal – École Doctorale Sciences pour L’ingénieur de Clermont – Fernand; 1995.
- [3.6]- CEN ENV 1994- 1-2; “Eurocode 4 Design of composite steel and concrete structures. Part 1.2: Structural Fire Design”; November 1993.

- [3.7]- Neves, Cabrita; “Acções de sensibilização sobre regulamentação em edifícios – Problema do fogo em edifícios”; Instituto de Soldadura e Qualidade (ISQ); 1ª sessão; Porto 21 a 23 de Fevereiro.
- [3.8]- Vila Real, P.M.M.; Piloto, P.A.G.; Franssen Jean - Marc; “ Modelação Numérica do Comportamento de uma Estrutura Sujeita à Acção do Fogo – Análise de vários cenários de incêndio”; Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas (RPEE), LNEC, pg. 23-33; Março de 2000.
- [3.9]- D. Joyeux; Zao B; “Combinaisons d’actions mécaniques en situation de incende dans le cadre de l’Eurocode 1; CTiCM; revue Construction Metallique, n° 2; 1998.
- [3.10]- CEN ENV 1991-2-1; “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2-1: Actions on structures – Densities, self weight and imposed loads”; February 1995.
- [3.11]- CEN ENV 1991-2-3; “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2-3: Actions on structures – Snow loads”; February 1995.
- [3.12]- CEN ENV 1991-2-4; “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2-4: Actions on structures – Wind actions”; May 1995.

Capítulo 4

Cálculo de deslocamentos

4.1. – Introdução

Ainda que uma estrutura se possa comportar no domínio elástico, por questões de ordem económica e de segurança, pode ser importante prever a sua capacidade resistente até ao colapso. Assim, apresenta-se o comportamento não linear de uma estrutura, função de não linearidade geométrica e material. Os efeitos não lineares geométricos ocorrem quando estão envolvidos grandes deslocamentos, enquanto que a não linearidade material está relacionada com o comportamento dos materiais.

Dada a característica não linear, será apresentado o método de convergência de solução.

O método dos elementos finitos é habitualmente utilizado para obter os valores numéricos representativos das quantidades cinemáticas (deslocamentos e deformações) e das quantidades mecânicas (tensões) ligadas ao equilíbrio de um corpo sólido submetido a solicitações. Este método permite obter uma solução aproximada, satisfazendo as leis da física escritas sob a forma variacional.

O princípio dos trabalhos virtuais é um dos modelos variacionais mais utilizados na mecânica dos sólidos e das estruturas, devendo este ser escrito de uma forma incremental e satisfazer as características não lineares do problema.

4.2. - Caracterização da deformação de um meio contínuo

4.2.1. - Descrição do movimento

A descrição do movimento de uma partícula de um corpo (pequeno elemento de volume) pode ser traduzida considerando as coordenadas cartesianas originais ou Lagrangianas dessa partícula, designadas por (X,Y,Z) ou, em alternativa, as coordenadas correntes ou Eulerianas,

(X^*, Y^*, Z^*) , referidas a um novo sistema de coordenadas rectangular associado à configuração deformada do corpo. Por comodidade de tratamento matemático, admitir-se-á a sobreposição dos dois referenciais, ou seja, dos sistemas de coordenadas material (Lagrangeano) e espacial (Euleriano).

Considere-se na figura 4.1 um conjunto de pontos materiais de um meio contínuo que no instante inicial representam a configuração de referência inicial (V, A) , definida pelo volume material V e pela superfície A . A posição inicial de um ponto material P do corpo é definida pelo vector posição \vec{r} com coordenadas materiais (X, Y, Z) . Após ocorrência da deformação, no instante $t = t$, o corpo ocupa a configuração corrente ou deformada (V^*, A^*) , na qual o ponto material P ocupa agora a posição P^* , representada pelo vector \vec{r}^* , definido com base nas correspondentes coordenadas espaciais (X^*, Y^*, Z^*) .

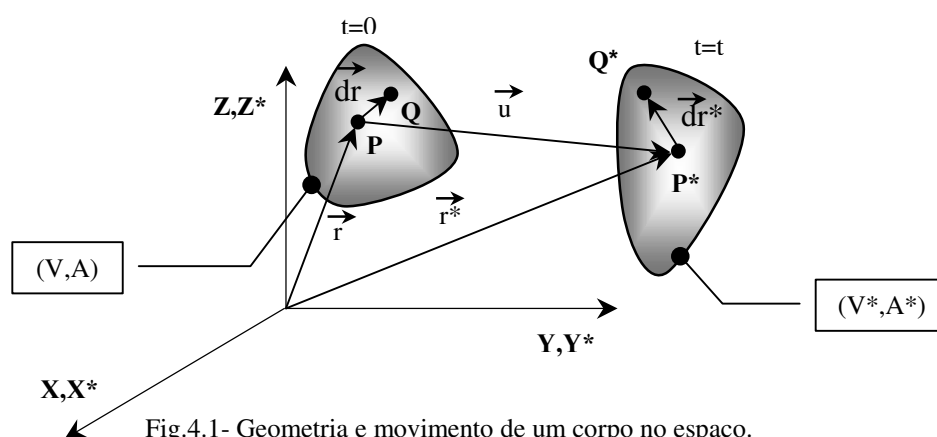


Fig.4.1- Geometria e movimento de um corpo no espaço.

O vector deslocamento \vec{u} que liga os pontos P e P^* , respectivamente, posição inicial e final, é definido pela relação vectorial da expressão 4.1.

$$\vec{u} = \vec{r}^* - \vec{r} \tag{4.1}$$

O movimento do corpo no espaço pode ser estudado, utilizando dois tipos de formulações distintas, que são a formulação Lagrangeana e a Euleriana.

Na formulação Lagrangeana é adoptada uma descrição material do movimento, traduzida por relações do tipo:

$$\vec{r}^* = \vec{r}^*(\vec{r}, t) = \vec{r}(t) + \vec{u}(\vec{r}, t) \tag{4.2}$$

definindo a posição corrente da partícula, que ocupava a posição \vec{r} no instante $t = 0$. Esta descrição é muito utilizada na análise estrutural não linear, onde são conhecidas a posição inicial e as condições fronteira do problema a estudar.

A formulação Euleriana é muito utilizada em mecânica dos fluidos, onde a zona de escoamento de um fluido é definida através de uma malha associada a um diferente [4.6].

Em síntese, pode afirmar-se que a descrição Euleriana informa sobre o que se passa num ponto do espaço, enquanto que a descrição Lagrangeana informa sobre o que acontece a uma partícula (ou ponto material) do corpo [4.7].

4.2.2. - Definição das deformações

Na definição do estado de deformação é adoptada a teoria das deformações finitas já que se admite que os gradientes dos deslocamentos não são pequenos quando comparados com a unidade. Nesta teoria, as deformações são determinadas considerando a variação do quadrado do comprimento do segmento que une dois pontos materiais, P e Q, do corpo. Designando por $(dL)^2$ o seu valor na configuração de referencia inicial e $(dL^*)^2$ o respectivo valor na configuração corrente, o estado de deformação será obtido a partir da diferença dos dois quadrados.

$$(dL^*)^2 - (dL)^2 = (d\vec{r}^*)^T \bullet d\vec{r}^* - (d\vec{r})^T \bullet d\vec{r} = dr_i^* dr_i^* - dr_i dr_i \quad (4.3)$$

No caso da formulação Lagrangeana o valor de $(dL^*)^2$ pode ser escrito na forma tensorial, envolvendo o tensor gradiente da deformação do corpo, através da expressão 4.4,

$$(dL^*)^2 = (d\vec{r}^*)^T \bullet (d\vec{r}^*) = (d\vec{r})^T ([F]^T [F])(d\vec{r}) = (d\vec{r})^T [C](d\vec{r}) \quad (4.4)$$

onde [F] representa o tensor gradiente de deformação do corpo e [C] o tensor de deformação de Green, respectivamente representados pelas equações 4.5.a e 4.5.b.

$$[F] = \frac{\partial \vec{r}^*}{\partial \vec{r}} \quad (4.5.a)$$

$$[C] = [F]^T [F] \quad (4.5.b)$$

A equação 4.3 pode ser reescrita por forma a estabelecer uma relação entre as deformações e os deslocamentos do corpo, ou seja,

$$(dL^*)^2 - (dL)^2 = (d\vec{r})^T [[C] - [I]](d\vec{r}) = 2(d\vec{r})^T [E](d\vec{r}) \quad (4.6)$$

onde aparece o tensor das deformações de Green Lagrange, definido por 4.7.

$$[E] = \frac{1}{2} [[C] - [I]] \quad (4.7)$$

Na nomenclatura de sub-índices, o tensor das deformações de Green Lagrange pode ser expresso por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.8)$$

Note-se que no caso dos deslocamentos, u_i serem tais, cujas primeiras derivadas se possam considerar muito pequenas comparativamente à unidade, então a terceira parcela pode ser desprezada.

4.2.3. - Definição da variação de volume e de área

Para estabelecer a variação de volume, considera-se um elemento cúbico infinitesimal colocado inicialmente no ponto de vector posição \vec{r} e definido pelos vectores ortogonais $d\vec{r}_A$, $d\vec{r}_B$, $d\vec{r}_C$, conforme figura 4.2. O respectivo volume do elemento infinitesimal pode ser determinado através do produto misto.

$$dV = |d\vec{r}_A \bullet (d\vec{r}_B \times d\vec{r}_C)| \quad (4.9)$$

Na configuração deformada, o volume do mesmo elemento passará a ter o valor definido pela expressão 4.10,

$$dV^* = |d\vec{r}_A^* \bullet (d\vec{r}_B^* \times d\vec{r}_C^*)| \quad (4.10)$$

pelo que, tendo em consideração a expressão 4.5a e as regras de álgebra tensorial, se pode relacionar o valor do volume em ambos referenciais, pela seguinte expressão:

$$dV^* = J dV \quad (4.11)$$

onde J é designado por Jacobiano, representando o determinante do tensor gradiente da deformação.

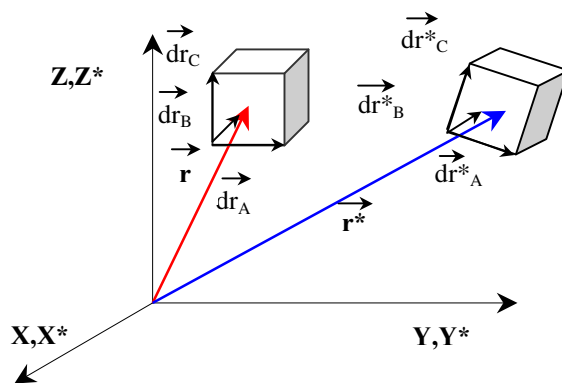


Fig. 4.2- Deformação de um elemento cúbico infinitesimal de volume.

Considere-se agora um elemento infinitesimal de superfície na configuração de referência, delimitado pelos vectores $d\vec{r}_A$ e $d\vec{r}_B$ e com área inicial dA , figura 4.3. Atendendo a álgebra vectorial pode-se escrever o produto vectorial,

$$dA \cdot \vec{N} = d\vec{r}_A \times d\vec{r}_B \quad (4.12)$$

onde \vec{N} representa o vector unitário ortogonal ao elemento de superfície de área dA .

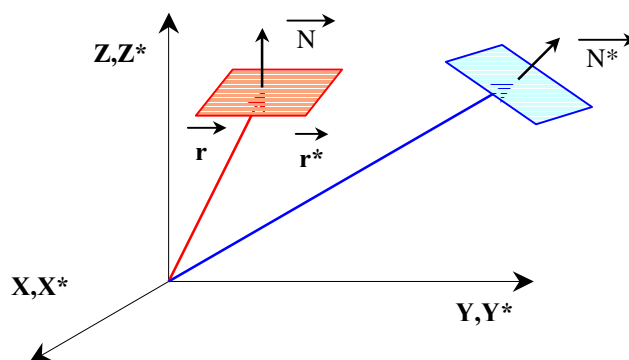


Fig.4.3 - Deformação do elemento infinitesimal de superfície.

Na configuração deformada o elemento de superfície passará a ter a área corrente dA^* , podendo este valor estar relacionado com a área antes de deformada, dA , através da expressão 4.13.

$$dA^* = J[F^{-1}]^T dA \quad (4.13)$$

4.2.4. - Definição das tensões

Existem dois tipos de tensores que são correntemente utilizados: o tensor das tensões de Cauchy, $[S^*]$, para a descrição Euleriana e o tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff, $[S]$, para a descrição Lagrangeana. Em ambos os casos se trata de tensores simétricos.

As componentes do tensor das tensões de Cauchy são definidas em termos de forças aplicadas por unidade de área na configuração deformada, tratando-se pois de um conceito físico óbvio. Um dos grandes problemas que se coloca na utilização do tensor das tensões de Cauchy reside no facto da sua derivada em ordem ao tempo não ser independente do sistema de eixos de referência. Esta situação coloca algumas dificuldades no estabelecimento de uma relação incremental para o tensor $[S^*]$ que só poderá ser ultrapassada através do recurso ao chamado tensor da razão das tensões de Jaumann. Este tensor tem em consideração a rotação de corpo rígido sofrida pelo corpo material, quando passa de uma configuração para outra.

O tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff é definido a partir do quociente entre as forças correntes, transformadas pela deformação local, e as áreas não deformadas. Pode mostrar-se que existe uma relação bi-unívoca entre o tensor das tensões de Cauchy e o tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff, pelo que o conhecimento de um deles conduz, mediante transformações meramente cinemáticas, à determinação do outro. Contrariamente ao que sucede com o tensor das tensões de Cauchy, a derivada em ordem ao tempo do tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff é independente em relação ao sistema de eixos de referência (satisfaz o Principio da Objectividade Material), pelo que, é válida a relação incremental seguinte;

$$\{\dot{\bar{\sigma}}\} = \{\dot{\sigma}\} + \{\Delta\sigma\} \quad (4.14)$$

em que $\{\Delta\sigma\}$ representa o incremento do tensor $\{\sigma\}$ associado à variação da configuração do corpo entre os instantes de tempo t ($\{\sigma\}$) e $t = t + \Delta t$ ($\{\bar{\sigma}\}$) ou seja, no intervalo de tempo Δt . Além disso, o facto de $\{\sigma\}$ ser energeticamente conjugado com o tensor das deformações de Green Lagrange, $\{\varepsilon\}$, isto é, pelo facto do produto σ_{ij} por ε_{ij} traduzir a variação de energia por unidade de volume inicial, possibilita o estabelecimento do Princípio do Trabalho Virtual (PTV) na configuração de referência. Refira-se ainda que os tensores das deformações e das tensões a adoptar deverão, sempre que possível, estar referidos ao mesmo tipo de referencial. Com este procedimento evita-se um aumento do tempo de cálculo numérico, para além de possíveis erros de aproximação, que as transformações envolvidas tomariam inevitável.

4.3. - Princípio do Trabalho Virtual

As equações que estabelecem o equilíbrio de um corpo podem ser deduzidas recorrendo ao Princípio do Trabalho Virtual (PTV), que estabelece uma relação entre um corpo deformável em equilíbrio na sua configuração γ_n , relativamente à sua posição inicial Γ , quando submetido a um campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissíveis. Segundo este princípio, o trabalho virtual das forças exteriores iguala o trabalho virtual das interiores, segundo a expressão 4.15. Este princípio é muito importante para a obtenção das equações relativas ao Método dos Elementos Finitos, assunto de que se ocupará a secção seguinte deste capítulo, podendo ser aplicado tanto à configuração corrente como à configuração de referência.

No caso de estudar a configuração inicial ou de referência, e considerando que ao campo de deslocamentos de um sólido em equilíbrio, se impõe uma variação de deslocamento δu_i , pode-se escrever a igualdade 4.15. Esta variação deverá obedecer às condições fronteira geométricas do problema, sendo $\delta u_i = 0$ nos locais onde existem previamente deslocamentos prescritos e as forças exteriores aplicadas no sólido sejam consideradas fixas.

$$\int_V \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_V b_i^* \delta u_i dV^* + \int_A t_i^* \delta u_i dA^* \quad (4.15)$$

Nesta equação, os símbolos representam:

- σ_{ij} - tensões na configuração em equilíbrio γ_n , representando o tensor das segundas tensões de Piola Kirchoff;
- b_i - força de volume, definida na configuração de referência;
- t_i - forças de tracção na superfície, definidas na configuração de referência;
- δu_i - deslocamento virtual a partir da configuração γ ;
- $\delta \varepsilon_{ij}$ - variação do tensor das deformações de Green, correspondente à variação do campo de deslocamentos δu_i e que deverá igualar a expressão 4.16.

O tensor das deformações virtuais de Green Lagrange, pode ser definido considerando a variação da expressão 4.8, obtendo-se:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.16)$$

Quando se analisam problemas no âmbito da mecânica dos sólidos, não é conveniente utilizar a configuração corrente como configuração de referência para estabelecer as equações de equilíbrio, sendo adoptada em alternativa uma configuração anterior àquela, seja a configuração inicial, seja uma configuração intermédia. Neste caso a relação do PTV virá expressa em função do tensor das deformações de Green Lagrange e do tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff.

Nestas expressões o campo de deslocamentos é representado pela letra \vec{u} obtido de Γ para γ_n .

No caso de uma descrição absoluta e tendo como referência a configuração inicial do corpo Γ , define-se a descrição Lagrangiana total. Através da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais, aparece um conjunto de equações não lineares, havendo necessidade de recorrer à definição de rigidez secante das estruturas, como se poderá ilustrar através do caso unidimensional apresentado na figura 4.4.

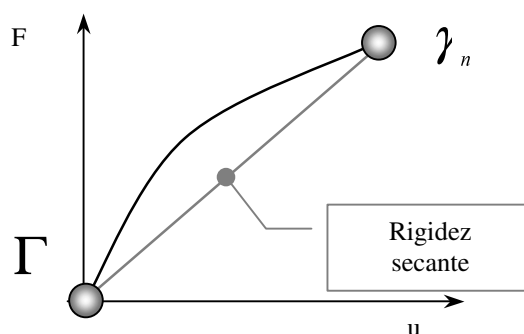


Fig.4.4 - Representação esquemática unidimensional do método da rigidez secante.

Por vezes é preferível escrever a equação do princípio dos trabalhos virtuais de uma forma incremental na descrição Lagrangiana total. Para tal, define-se uma posição de equilíbrio próxima da posição γ_n , a que se passará a chamar γ_{n+1} .

4.3.1. - Equações de Equilíbrio Incrementais

A passagem da posição de equilíbrio γ_n para a posição γ_{n+1} , é feita através de uma variação de movimento, suposta suficientemente pequena para que o produto das componentes do deslocamento por elas próprias sejam desprezáveis.

Escrevendo o princípio dos trabalhos virtuais nas duas posições vizinhas, subtraindo a equação correspondente à posição de equilíbrio de γ_n à equação de γ_{n+1} e desprezando alguns termos, obtém-se a expressão incremental do princípio do trabalhos virtuais 4.17.

Quando os problemas estruturais a estudar apresentam características não lineares, sejam provenientes da grande deformação do corpo, sejam devidas ao comportamento não linear do

material é conveniente utilizar uma forma incremental do Princípio do Trabalho Virtual, definido em 4.15, com vista à obtenção de uma solução para o problema.

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \Delta \epsilon_{ij} + \Delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV = \int_V \Delta b_i \delta u_i dV + \int_A \Delta t_i \delta u_i dA \quad (4.17)$$

Nesta equação os símbolos representam:

σ_{ij} - tensões na configuração em equilíbrio γ_n , representando o tensor das segundas tensões de Piola Kirchoff;

$\Delta \sigma_{ij}$ - Aumento do tensor das segundas tensões de Piola Kirchoff γ_n e γ_{n+1} ;

Δb_i - Aumento de forças de volume entre γ e γ_{+1} ;

Δt_i - Aumento das forças de superfície entre γ e γ_{+1} ;

δu_i - Variação do movimento entre γ e γ_{+1} .

As equações que se podem deduzir deste princípio são lineares e permitem calcular, por aplicação sucessiva, a posição de equilíbrio γ_{+1} a partir da posição γ , bem como as respectivas características. Desta forma surge a necessidade de definir o conceito da rigidez tangencial da estrutura, conforme se ilustra para o caso unidimensional na figura 4.5.

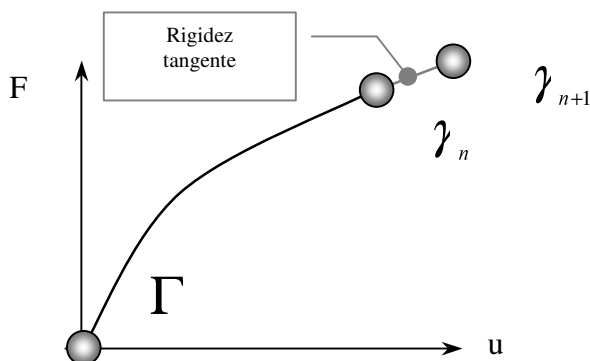


Fig.4.5 - Representação esquemática unidimensional do método da rigidez tangencial.

Relativamente aos incrementos tensoriais e vectoriais, podem-se escrever as equações seguintes.

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}\} &= \{\sigma\} + \{\Delta\sigma\} = \sigma_{ij} + \Delta\sigma_{ij} \\ \{\bar{\epsilon}\} &= \{\epsilon\} + \{\Delta\epsilon\} = \epsilon_{ij} + \Delta\epsilon_{ij} \\ \{\bar{b}\} &= \{b\} + \{\Delta b\} = b_i + \Delta b_i \\ \{\bar{t}\} &= \{t\} + \{\Delta t\} = t_i + \Delta t_i \\ \{\bar{u}\} &= \{u\} + \{\Delta u\} = u_i + \Delta u_i \end{aligned} \quad (4.18)$$

O tensor dos incrementos das deformações de Green Lagrange deverá ser calculado por:

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.19)$$

enquanto que o tensor virtual do aumento das deformações deverá ser determinado pela expressão 4.20, onde se desprezaram os termos contendo $\delta \Delta u_i$ e o termo de segunda ordem $\Delta \sigma_{ij} \delta \Delta \varepsilon_{ij}$.

$$\delta \Delta \varepsilon_{ij} = \Delta \delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_i} \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (4.20)$$

Assume-se que as cargas exteriores aplicadas, b_i e t_i , são conservativas (Δb_i e Δt_i não dependem do incremento dos deslocamentos Δu_i). Caso estas cargas aplicadas não sejam conservativas, então os incrementos de carga deverão incluir os termos dependentes do vector deslocamento.

4.3.2. - Relações Constitutivas

As relações constitutivas a considerar estão condicionadas pelas características do comportamento não linear das estruturas a analisar. Na referência [4.8] pode ser encontrado um estudo bem sistematizado desta sub-capítulo, sendo apresentados diversos modelos de relações constitutivas que podem ser aplicadas em análise estrutural não linear, de acordo com a forma como se encaram os efeitos do comportamento não linear (geométrico e/ou material) sobre a estrutura.

No presente trabalho considera-se que o estado de tensão instalado se pode relacionar com o respectivo estado de deformação por uma equação da forma

$$\{\delta \sigma\} = [D^*] \{\delta \varepsilon\} \quad (4.21)$$

em que $\{\delta \sigma\}$ representa a variação virtual do vector das componentes do tensor das segundas tensões de Piola Kirchhoff;

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \right\}^T \quad (4.22)$$

escrito para o caso tridimensional, enquanto que $\{\delta \varepsilon\}$ constitui a variação virtual do vector das componentes do tensor das deformações de Green Lagrange;

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \right\}^T \quad (4.23)$$

em que $[D^*]$ representa uma matriz que, sendo formada a partir das propriedades mecânicas do material, depende do tipo de comportamento que se considere para este.

4.4. - Aplicação do Método dos Elementos Finitos

No Método dos Elementos Finitos, o meio contínuo em análise é decomposto num número finito de elementos (constituindo cada um deles um elemento finito) ligados entre si de forma apropriada num número discreto de pontos nodais, ou nós, ao longo das suas fronteiras. O valor aproximado de uma variável no interior de cada elemento pode ser obtido a partir dos respectivos valores nodais, recorrendo a funções de forma de aproximação adequadas. Neste contexto desempenha um papel fundamental o conceito de elemento isoparamétrico. O termo “isoparamétrico” implica uma descrição paramétrica comum das variáveis de domínio do problema e da geometria, sendo por isso comuns as funções interpoladoras utilizadas nas respectivas descrições.

O facto do Método dos Elementos Finitos poder ser considerado como uma extensão do Método de Ritz quando aplicado a um princípio variacional [4.9], permite estabelecer diversas formas de aplicação daquele método na análise de problemas estruturais. Uma das formas trata a formulação de elementos finitos baseada nos deslocamentos, derivada do Princípio da Energia Potencial Mínima, onde se garante a continuidade do campo de deslocamentos entre os elementos adjacentes, sendo, sem dúvida, a formulação mais divulgada no âmbito da mecânica estrutural. Outra das formas trata a formulação de elementos finitos baseada nas tensões, derivada do Princípio da Energia Complementar Mínima, onde é garantida a continuidade do campo de tensões [4.10] e ainda uma última forma que trata a formulação de elementos finitos mista (híbrida) onde se adoptam vários tipos de variáveis no estabelecimento das equações de equilíbrio para o problema [4.11,4.12].

Neste trabalho adoptou-se uma formulação do Método dos Elementos Finitos baseada nos deslocamentos, como é o caso da que resultou da aplicação do Princípio do Trabalho Virtual.

Quando se aplica o Método dos Elementos Finitos na análise não linear geométrica de problemas de mecânica estrutural são normalmente adoptados dois tipos de formulações [4.13,4.10,4.14]. Na formulação Lagrangeana Total todas as variáveis do problema são referidas à configuração de referencia inicial do meio contínuo (instante $t=0$), enquanto que na formulação Lagrangeana Actualizada é escolhida a configuração associada ao instante $t = \bar{t} - \Delta t$ como configuração de referência, o que implica uma continua actualização da malha de elementos finitos considerada. A opção por uma ou outra destas formulações depende apenas das características dos problemas a tratar, uma vez que, segundo Mattiasson [4.13] e Bathe [4.10], ambas as formulações são, do ponto de vista teórico, correctas.

O elemento finito tipo viga é um dos elementos mais importante num programa dedicado à análise estrutural. A experiência demonstra que cerca de 90% das estruturas estudadas requerem a utilização de elementos tipo viga. Destes, cerca de 95% são casos planos [4.26].

Historicamente, o elemento finito de viga com as características aqui apresentadas, começou por ser estudado na Universidade de Liégè. O elemento de viga submetido ao incêndio, utilizado por Franssen [4.41] durante o seu trabalho de doutoramento, é descrito através da formulação Lagrangeana actualizada, enquanto Goyet [4.23] estudou o comportamento do elemento de viga na sua descrição Lagrangeana Corrotacional Total.

4.4.1. - Formulação Lagrangeana Total

Considerando uma formulação de elementos finitos baseada nos deslocamentos, o vector dos deslocamentos em qualquer ponto de um elemento finito genérico $\{u\} = \langle u \ v \ w \rangle^T$, pode ser aproximado por:

$$\{u\} = \sum_{i=1}^n \langle N_i \rangle \{u_i\} \quad (4.24)$$

onde $\langle N \rangle$ representa a matriz das funções de forma adoptadas na referida aproximação, $\{u_i\}$ o vector dos deslocamentos nodais e n representa o número de nós do elemento. Uma vez que os elementos finitos considerados são isoparamétricos, as coordenadas de um ponto no interior do elemento são aproximadas pela expressão seguinte.

$$\{x\} = \sum_{i=1}^n \langle N_i \rangle \{x_i\} \quad (4.25)$$

em que $\{x_i\}$ representa o vector das coordenadas de cada um dos nós que constitui o elemento.

O vector que contém as componentes do tensor das deformações de Green Lagrange pode ser apresentado através da soma vectorial de duas parcelas, expressas na relação 4.26.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_l\} + \{\varepsilon_{nl}\} \quad (4.26)$$

onde $\{\varepsilon_l\}$ e $\{\varepsilon_{nl}\}$ representam, respectivamente, as parcelas linear e não linear contidas na expressão 4.8. O vector $\{\varepsilon\}$ pode ainda ser representado em função do vector dos deslocamentos nodais da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = [B'] \{u\} = \left([B_l] + \frac{1}{2} [B_{nl}] \right) \{u\} \quad (4.27)$$

Pelo que se poderá escrever o vector das deformações de Green Lagrange relativas à parte linear, através da seguinte expressão:

$$\{\varepsilon_l\} = [B_l] \{u\} \quad (4.28)$$

enquanto que a parte não linear deste vector, se poderá calcular a partir de:

$$\{\varepsilon_{nl}\} = \frac{1}{2} [B_{nl}] \{u\} \quad (4.29)$$

A matriz $[B_j]$ representativa do relacionamento linear em $[B']$, contém as derivadas cartesianas das funções de forma, podendo ser escrita num nó genérico do elemento, como se apresenta na expressão 4.30.

$$[B_{ij}] = \begin{bmatrix} \partial N_j / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial z \\ \partial N_j / \partial y & \partial N_j / \partial x & 0 \\ \partial N_j / \partial z & 0 & \partial N_j / \partial x \\ 0 & \partial N_j / \partial z & \partial N_j / \partial y \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Por outro lado a parcela não linear do vector das deformações pode ser dada por:

$$\{\epsilon_{nl}\} = \frac{1}{2} [A] \{h\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \partial u / \partial x & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \partial u / \partial y & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \partial u / \partial z & \dots \\ \partial u / \partial y & \partial u / \partial x & 0 & \dots \\ \partial u / \partial z & 0 & \partial u / \partial x & \dots \\ 0 & \partial u / \partial z & \partial u / \partial y & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial u / \partial y \\ \partial u / \partial z \\ \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \\ \partial w / \partial z \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

De salientar que na matriz $[A]$ foram omitidas as sub-matrizes relativas às componentes v e w do vector dos deslocamentos, pelo que, a parte não linear pode ser escrita genericamente, através de 4.32,

$$\{\epsilon_{nl}\} = \frac{1}{2} [A] [G] \{u\} \quad (4.32)$$

na qual $[A]$ é uma matriz que depende do campo de deslocamentos e $[G]$ é uma matriz constituída pelas derivadas cartesianas das funções de forma, que apresenta a configuração seguinte.

$$[G_j] = \begin{bmatrix} \partial N_j / \partial x & 0 & 0 \\ \partial N_j / \partial y & 0 & 0 \\ \partial N_j / \partial z & 0 & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial x & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_j / \partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial x \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial y \\ 0 & 0 & \partial N_j / \partial z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Pode-se então escrever uma relação matricial para a parte não linear da deformação, representada pela expressão 4.34.

$$[B_{nl}] = [A] [G] \quad (4.34)$$

Tendo em vista o tratamento da expressão 4.17, torna-se ainda necessário explicitar a variação virtual e a variação incremental do vector das deformações $\{\varepsilon\}$.

Recorrendo à igualdade 4.19, o vector dos incrementos das deformações de Green Lagrange pode ser dado pela expressão 4.35,

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_l\} + \{\Delta\varepsilon_{nl}\} \quad (4.35)$$

sendo cada parcela da expressão anterior dada por:

$$\{\Delta\varepsilon_l\} = [B_l] \{\Delta u\} \quad (4.36a)$$

$$\{\Delta\varepsilon_{nl}\} = \left([B_{nl}] + \frac{1}{2} [\Delta B_{nl}] \right) \{\Delta u\} = \left([A][G] + \frac{1}{2} [\Delta A][G] \right) \{\Delta u\} \quad (4.36b)$$

em que $[\Delta A]$ é uma matriz idêntica à matriz $[A]$, na qual se substituem as derivadas cartesianas dos deslocamentos pelas derivadas cartesianas dos respectivos incrementos.

Em contrapartida, o vector das deformações virtuais de Green Lagrange pode ser apresentado, tendo em consideração a expressão 4.16, da seguinte forma:

$$\{\delta\varepsilon\} = \{\delta\varepsilon_l\} + \{\delta\varepsilon_{nl}\} = ([B_l] + [B_{nl}]) \{\delta u\} = [B] \{\delta u\} \quad (4.37)$$

sendo $[B]$ correctamente designada por matriz de deformações do elemento.

Partindo da expressão 4.20, pode-se escrever o incremento virtual das deformações de Green Lagrange da seguinte forma:

$$\{\delta\Delta\varepsilon\} = [\delta A][G] \{\Delta u\} \quad (4.38)$$

em que $[\delta A]$ é uma matriz semelhante a $[A]$, sendo constituída pelas derivadas cartesianas dos deslocamentos virtuais.

O vector dos incrementos das componentes do tensor das segundas tensões Piola Kirchhoff pode ser obtido de forma aproximada a partir de uma relação análoga a 4.21, ou seja:

$$\{\Delta \sigma\} = [D^*] \{\Delta \varepsilon\} \quad (4.39)$$

Finalmente, as equações de equilíbrio incrementais do elemento, podem ser escritas conforme expressão seguinte.

$$\left[\int_V \langle \delta u \rangle [B]^T [D^*] [B] dV + \int_V \langle \sigma \rangle \{\delta u\} [G] dV \right] \{\Delta u\} = \langle \delta u \rangle \left[\int_V [N]^T \{\Delta b\} dV + \int_S [N]^T \{\Delta t\} dS \right] \quad (4.40)$$

Nesta expressão, teve-se em consideração a parte não linear da deformação, em que:

$$\{\Delta \varepsilon\} \cong ([B_l] + [B_{nl}]) \{\Delta u\} = [B] \{\Delta u\} \quad (4.41)$$

Para obter a matriz de rigidez simétrica para o elemento, deverão ser efectuadas as seguintes operações tensoriais.

$$[\delta A]^T \{\sigma\} = [\tau] [G] \{\delta u\} \quad (4.42)$$

onde $[\tau]$ representa a matriz quadrada, incluindo as componentes do tensor das segundas tensões Piola Kirchhoff e sub-matrizes identidade, de dimensão (3x3).

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_x \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xy} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tau_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{xz} \end{bmatrix} \\ \dots & \begin{bmatrix} \sigma_y & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tau_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \begin{bmatrix} \sigma_z & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_z & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Considerando que a relação 4.40 é válida para qualquer campo de deslocamentos virtuais $\{\delta u\}$, obtém-se então para um elemento genérico e a seguinte igualdade:

$$[K_T^e] \{\Delta u^e\} = \{\Delta f^e\} \quad (4.44)$$

onde, o segundo membro da equação $\{\Delta f^e\}$ representa o incremento de carga dado por:

$$\{\Delta f^e\} = \int_V [N^e]^T \{\Delta b^e\} dV + \int_S [N^e]^T \{\Delta t^e\} dS \quad (4.45)$$

e $[K_T^e]$ é a matriz de rigidez tangencial do elemento, a qual pode ser considerada como a soma de três matrizes, isto é:

$$[K_T^e] = [K_l^e] + [K_{nl}^e] + [K_\sigma^e] \quad (4.46)$$

onde a componente linear da matriz de rigidez se pode escrever na forma:

$$[K_l^e] = \int_V [B_l^e]^T [D^*]^e [B_l^e] dV \quad (4.47)$$

enquanto que a componente não linear, relativa aos grandes deslocamentos, aparece na forma da expressão 4.48.

$$[K_{nl}^e] = \int_V \left[[B_{nl}^e]^T [D^*]^e [B^e] + [B_l^e]^T [D^*]^e [B_{nl}^e] \right] dV \quad (4.48)$$

A matriz $[K_\sigma^e]$ corresponde ao efeito das tensões iniciais ou geométricas do elemento (dependente do estado de tensão instalado), sendo representada pela expressão 4.49.

$$[K_\sigma^e] = \int_V [G^e]^T [\tau^e] [G^e] dV \quad (4.49)$$

No caso da formulação envolver apenas pequenos deslocamentos, $[K_T^e] = [K_l^e]$.

Uma vez definidas as matrizes de rigidez, $[K_T^e]$ e o vector carregamento, $\{\Delta f^e\}$, para todos os elementos finitos considerados na discretização do meio contínuo, obtém-se, por associação, as equações de equilíbrio incrementais para toda a estrutura, ou seja:

$$[K_T] \{\Delta d\} = \{\Delta f\} \quad (4.50)$$

onde $[K_T]$ representa a matriz tangencial global da estrutura, $\{\Delta d\}$ o vector dos incrementos dos deslocamentos nodais global e o vector $\{\Delta f\}$ representa o vector dos incrementos das forças nodais global, sendo cada um destes elementos da equação 4.50, calculados através das expressões 4.51.

$$[K_T] = \sum_e [K_T^e] \quad (4.51.a)$$

$$\{\Delta d\} = \sum_e \{\Delta u^e\} \quad (4.51.b)$$

$$\{\Delta f\} = \sum_e \{\Delta f^e\} \quad (4.51.c)$$

Apenas falta referir que o símbolo de somatório deverá ser interpretado como a soma assemblada das matrizes elementares e não uma soma algébrica, componente a componente.

4.4.2. – Actualização das tensões e deformações

Depois de calculado o vector dos incrementos dos deslocamentos nodais, $\{\Delta d\}$ a partir da equação 4.50, é possível definir os incrementos do vector das deformações, definindo-se a expressão 4.52.

$$\{\Delta \varepsilon\} = \left[[B_i] + [B_{nl}] + \frac{1}{2} [\Delta B_{nl}] \right] \{\Delta u\} \quad (4.52)$$

Tendo em consideração que o vector do incremento das tensões, $\{\Delta \sigma\}$, considerado em 4.39 e desconhecendo o incremento das deformações, é possível calcular o vector actual das tensões, através de 4.54. A expressão 4.53 possibilita determinar o incremento das deformações, actualizando assim as principais variáveis do domínio estrutural.

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \{\varepsilon\} + \{\Delta \varepsilon\} \quad (4.53)$$

$$\{\bar{\sigma}\} = \{\sigma\} + \{\Delta \sigma\} \quad (4.54)$$

No caso do vector global de deslocamentos nodais da estrutura, $\{\Delta d\}$, a actualização é associativa, pelo que se utiliza a seguinte expressão.

$$\{\bar{d}\} = \{d\} + \{\Delta d\} \quad (4.55)$$

4.5. - Elemento de Viga

O início dos anos sessenta marca a introdução da análise não linear no método dos elementos finitos. Após a introdução dos elementos finitos tipo barra, numerosos autores fizeram aparecer o elemento finito tipo viga. A razão essencial prende-se com o facto do elemento ser bastante utilizado no cálculo e na mecânica das estruturas. Cada vez mais surgem comportamentos que implicam a necessidade de utilizar este tipo de elemento no domínio não linear. A abundância de diferentes comportamentos origina diferentes hipóteses formuladas, cada uma das quais, com um domínio próprio de aplicação.

O objectivo deste sub-capítulo será apresentar os principais tipos de elementos e compará-los. Esta análise será feita no domínio bidimensional, sendo posteriormente explorada a

formulação tridimensional do elemento de viga que serviu de base ao estudo numérico do capítulo 9.

Antes de se abordar a característica não linear, vai ser apresentada a teoria linear da viga, do ponto de vista analítico e numérico. Este estudo irá permitir evidenciar o fenómeno de sobre-rigidez (“locking”) de certos elementos finitos e propor soluções alternativas para o ultrapassar.

Segundo Ville de Goyet [4.23], os elementos finitos com fracos resultados no domínio elástico terão poucas hipóteses de se comportarem eficientemente no domínio não linear. Esta constatação é justificada através da experimentação numérica e intuitivamente, pelo facto do método incremental utilizado na análise não linear ser uma sequência da análise infinitesimal.

4.5.1. - Teoria Clássica analítica. Vigas de Hencky Mindlin

O campo de deslocamentos de uma viga pode ser descrita em termos de deslocamentos generalizados da seguinte forma.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x) - y \sin \theta(x) \\ v(x, y) &= v(x) - y[1 - \cos \theta(x)] \end{aligned} \quad (4.56)$$

A este campo estão associadas algumas hipóteses de partida, de onde se destacam, o facto do elemento estrutural ser considerado um corpo rígido transversalmente, a secção recta permanecer plana e não empenada, a secção recta ser constante e a linha dos eixos de gravidade serem ortogonais à secção recta, antes da deformação.

Na figura 4.6 pode-se verificar a viga antes e depois de deformada, bem como, os deslocamentos sofridos por um determinado ponto da secção.

Admitindo uma hipótese adicional relacionada com pequenos deslocamentos (teoria linear), a equação 4.56 transforma-se na equação 4.57, uma vez que quando $\theta(x)$ é pequeno, o seno do ângulo aproxima-se do valor do próprio ângulo e o valor do cosseno aproxima-se da unidade.

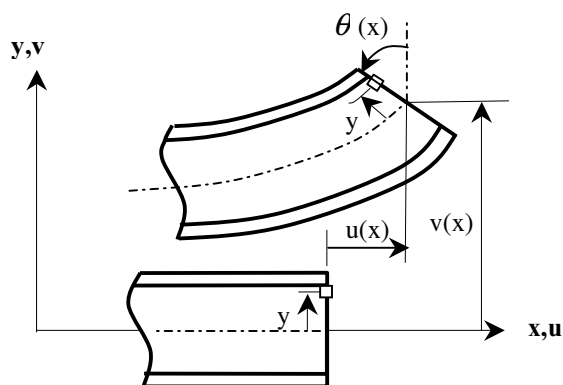


Fig. 4.6 – Deformada de uma viga no plano.

O novo campo de deslocamentos, baseado na simplificação introduzida, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x) - y\theta(x) \\ v(x, y) &= v(x) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Relativamente ao campo das deformações, as únicas componentes não nulas do tensor das deformações, ϵ_{ij} , são definidas segundo a mesma teoria, podendo ser determinadas através de:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ 2\epsilon_{xy} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Substituindo a expressão 4.57 em 4.58, obtêm-se as expressões para o campo de deformações presente, ou seja:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u'(x) - y\theta'(x) \\ 2\epsilon_{xy} &= v'(x) - \theta(x) \end{aligned} \quad (4.59)$$

As equações de equilíbrio são habitualmente obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais, que se explicita na expressão 4.60.

$$\int_{V_0} (\sigma_{xx} \delta\epsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta\epsilon_{xy}) dV_0 = \int_{V_0} [f_x \delta u(x, y) + f_y \delta v(x, y)] dV_0 \quad (4.60)$$

Admitindo uma viga plana como a representada na figura 4.7, e submetida a um sistema de esforços transverso, normal e flector, o segundo membro da expressão 4.60 deverá ser escrito na forma da equação 4.61.

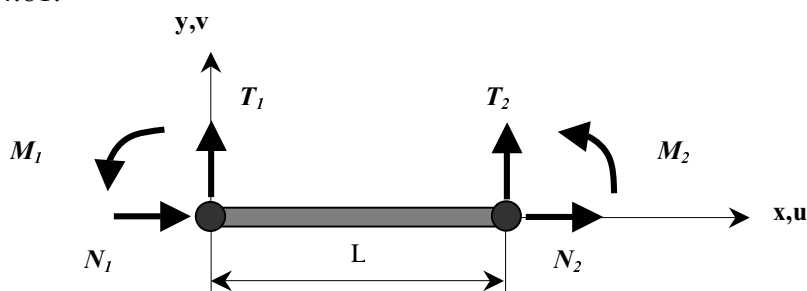


Fig. 4.7 – Esforços aplicados nas extremidades da viga.

$$\int_{V_0} (\sigma_{xx} \delta\epsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta\epsilon_{xy}) dV_0 = N_1 \delta u_1 + T_1 \delta v_1 + M_1 \delta \theta_1 + N_2 \delta u_2 + T_2 \delta v_2 + M_2 \delta \theta_2 \quad (4.61)$$

Aplicando a definição do campo de deformações, o primeiro membro da expressão anterior poderá ser reescrito conforme a equação 4.62.

$$\int_{V_0} \left(\sigma_{xx} (\delta u'(x) - y \delta \theta'(x)) + 2\sigma_{xy} \left(\frac{1}{2} (\delta v'(x) - \delta \theta(x)) \right) \right) dV_0 = \int_0^L \int_A \sigma_{xx} dA \delta u'(x) dx - \int_0^L \int_A \sigma_{xx} y dA \delta \theta'(x) dx + \int_0^L \int_A \sigma_{xy} dA \delta v'(x) dx - \int_0^L \int_A \sigma_{xy} dA \delta \theta(x) dx \quad (4.62)$$

Os integrais no domínio da secção recta podem ser escritos em função dos esforços internos normal, transverso e momento flector, no caso de se aplicarem as seguintes definições.

$$\bar{N} = \int_A \sigma_{xx} dA \quad \bar{M} = - \int_A \sigma_{xx} y dA \quad \bar{T} = \int_A \sigma_{xy} dA \quad (4.63)$$

Efectuando a integração por partes da expressão 4.62, obtém-se a forma fraca dos integrais, conforme expressão 4.64.

$$\begin{aligned} & \int_0^L \bar{N} \delta u'(x) dx + \int_0^L \bar{M} \delta \theta'(x) dx + \int_0^L \bar{T} \delta v'(x) dx - \int_0^L \bar{T} \delta \theta(x) dx = \\ & \left[\bar{N} \delta u(x) \right]_0^L - \int_0^L \bar{N}' \delta u(x) dx + \left[\bar{M} \delta \theta(x) \right]_0^L - \int_0^L \bar{M}' \delta \theta(x) dx + \left[\bar{T} \delta v(x) \right]_0^L \\ & - \int_0^L \bar{T}' \delta v(x) dx - \int_0^L \bar{T} \delta \theta(x) dx = \quad (4.64) \\ & \bar{N}_2 \delta u_2 - \bar{N}_1 \delta u_1 + \bar{M}_2 \delta \theta_2 - \bar{M}_1 \delta \theta_1 + \bar{T}_2 \delta v_2 - \bar{T}_1 \delta v_1 - \int_0^L \bar{N}' \delta u(x) dx - \int_0^L \bar{M}' \delta \theta(x) dx \\ & - \int_0^L \bar{T}' \delta v(x) dx - \int_0^L \bar{T} \delta \theta(x) dx \end{aligned}$$

Admitindo um campo de deslocamentos virtual com a forma $\langle \delta u(x, y), \delta v(x, y), \delta \theta(x, y) \rangle$ cinematicamente admissível e igualando 4.64 ao segundo membro da equação 4.61 obtém-se as equações de equilíbrio do volume.

$$\begin{aligned} \bar{N}' &= 0 && ; \text{onde N for constante} \\ \bar{T}' &= 0 && ; \text{onde T for constante} \\ \bar{M}' + \bar{T} &= 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

Na extremidade, a equação de equilíbrio poderá ser escrita da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= -N_1 && \bar{N}_2 &= N_2 \\ \bar{T}_1 &= -T_1 && \bar{T}_2 &= T_2 \\ \bar{M}_1 &= -M_1 && \bar{M}_2 &= M_2 \end{aligned} \quad (4.66)$$

Depois da determinação das equações de equilíbrio, será conveniente introduzir a lei constitutiva de Hooke, que na forma mais simplificada se escreve de acordo com a expressão 4.67.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E\varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy}\end{aligned}\quad (4.67)$$

Esta expressão permite obter uma relação entre os esforços internos e os deslocamentos, no caso de se conjugarem as equações 4.59 e 4.63.

$$\begin{aligned}\bar{N} &= \int_A E\varepsilon_{xx} dA = E \int_A (u'(x) - y\theta'(x)) dA = Eu'(x)A - E\theta'(x) \int_A y dA = Eu'(x)A \\ \bar{M} &= - \int_A E\varepsilon_{xx} y dA = -E \int_A y(u'(x) - y\theta'(x)) dA = -Eu'(x) \int_A y dA + E\theta'(x) \int_A y^2 dA = EI\theta'(x) \\ \bar{T} &= \int_A 2G\varepsilon_{xy} dA = 2G \int_A \frac{1}{2} (v'(x) - \theta(x)) dA = Gv'(x) \int_A dA - G\theta(x) \int_A dA = GA^* [v'(x) - \theta(x)]\end{aligned}\quad (4.68)$$

Na equação 4.68 A representa a área da secção recta, I o momento de inércia da mesma secção, enquanto que A^* representa o valor da secção reduzida de corte. Estas equações permitem determinar as soluções teóricas das deformadas e dos deslocamentos característicos, para qualquer caso de solitação.

4.5.1.1. - Exemplo de aplicação – Viga bi apoiada solicitada por momento constante.

Admita-se o carregamento de um momento constante como o da figura 4.8, em que se verifica a aplicação de um binário de valor M em cada uma das extremidades.

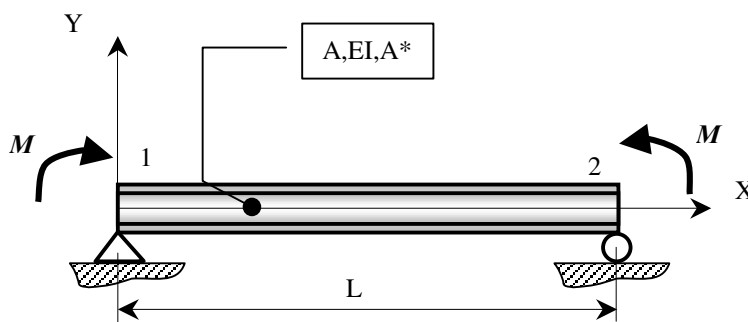


Fig. 4.8 – Elemento de viga com área A , momento de inércia I , módulo de elasticidade E e área reduzida de corte A^* .

Comparando os esforços representados na figura 4.8 com os da figura 4.7, pode-se concluir que :

$$\begin{aligned}N_1 &= N_2 = T_1 = T_2 = 0 \\ M_1 &= -M \\ M_2 &= M\end{aligned}\quad (4.69)$$

Da mesma forma e recorrendo às expressões 4.66 pode-se concluir que.

$$\begin{aligned}\bar{N}_1 &= \bar{N}_2 = \bar{T}_1 = \bar{T}_2 = 0 \\ \bar{M}_1 &= M \\ \bar{M}_2 &= M\end{aligned}\tag{4.70}$$

Combinando agora as equações 4.70, 4.65 e 4.68 obtém-se finalmente as equações do comportamento dos graus de liberdade considerados.

$$\begin{aligned}u(x) &= 0 \\ v'(x) &= \theta(x) \\ EI\theta''(x) &= 0\end{aligned}\tag{4.71}$$

Integrando uma vez a terceira equação das expressões 4.71, obtém-se:

$$EI\theta'(x) = a = M\tag{4.72}$$

Comparando esta última equação com a equação homóloga da expressão 4.68, facilmente se constata que o valor da constante a equivale ao valor do momento flector, pelo que integrando 4.72 outra vez, obtém-se a expressão para a rotação da secção recta.

$$\theta(x) = \frac{M}{EI}x + b\tag{4.73}$$

De acordo com a segunda equação da expressão 4.71, substituindo o resultado de 4.73, obtém-se a equação diferencial em função do deslocamento transversal.

$$v'(x) = \frac{M}{EI}x + b\tag{4.74}$$

Integrando mais uma vez a equação anterior, obtém-se:

$$v(x) = \frac{M}{EI} \frac{x^2}{2} + bx + c\tag{4.75}$$

onde as constantes b e c deverão ser determinadas através das condições fronteira (de apoio), pelo que, se pode obter o campo de deslocamentos generalizado representado na expressão 4.76:

$$\begin{aligned}
 u(x) &= 0 \\
 v(x) &= \frac{M}{2EI}(x^2 - xL) \\
 \theta(x) &= \frac{M}{2EI}(2x - L)
 \end{aligned}
 \tag{4.76}$$

Na figura 4.9 estão representadas as variações dos campos representativos do deslocamento e da rotação, em toda a extensão da viga.

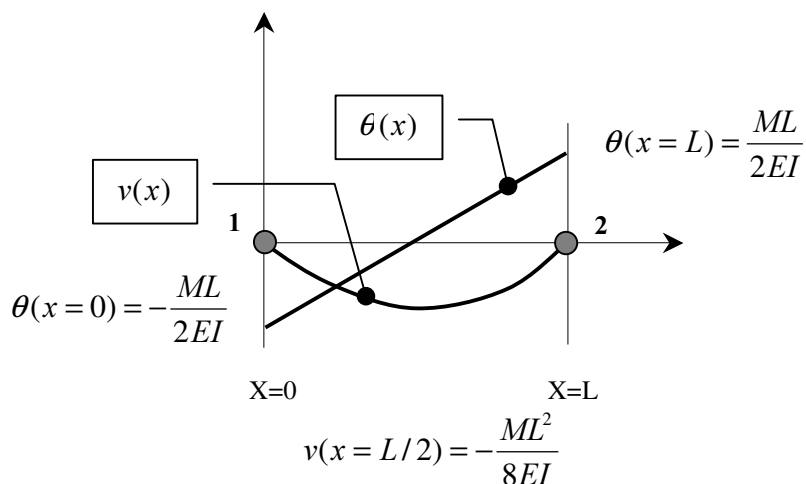


Fig.4.9 – Representação do campo de deslocamento transversal e de rotação, ao longo do comprimento da viga.

4.5.1.2. – Exemplo de aplicação - Viga em consola solicitada por um esforço transversal na extremidade.

Admita-se o carregamento ilustrado na figura 4.10, relativo a uma viga encastrada na extremidade esquerda e livre na extremidade oposta ($x = L$), com uma carga concentrada P .

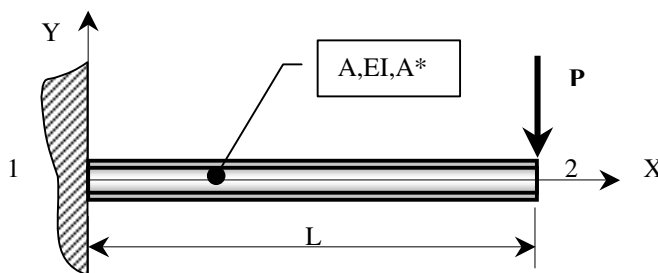


Fig. 4.10 – Elemento de viga com área A , momento de inércia I , módulo de elasticidade E e área reduzida de corte A^* .

Após análise das condições fronteira e comparando com a figura 4.7, pode-se concluir que os esforços normais são nulos, o mesmo não acontecendo para os restantes, transversal e momento flector. Assim, é possível escrever:

$$\begin{aligned} N_1 = N_2 &= 0 \\ T_1 &= P \\ T_2 &= -P \\ M_1 &= PL \end{aligned} \tag{4.77}$$

De acordo com a expressão 4.66 as equações de equilíbrio podem ser escritas:

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 = \bar{N}_2 &= 0 \\ \bar{T}_1 &= -P & \bar{T}_2 &= -P \\ \bar{M}_1 &= -PL & \bar{M}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Combinando 4.78 e 4.65 com 4.68, as equações diferenciais apresentam-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u(x) &= 0 \\ GA^* [v'(x) - \theta(x)] &= -P \\ EI\theta''(x) - P &= 0 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Efectuando semelhantes integrações às do exemplo anterior, e aplicando as condições fronteira do problema, obtém-se as equações que explicitam a rotação em qualquer ponto da viga e o deslocamento transversal. Na figura 4.11 encontram-se representadas as respectivas funções.

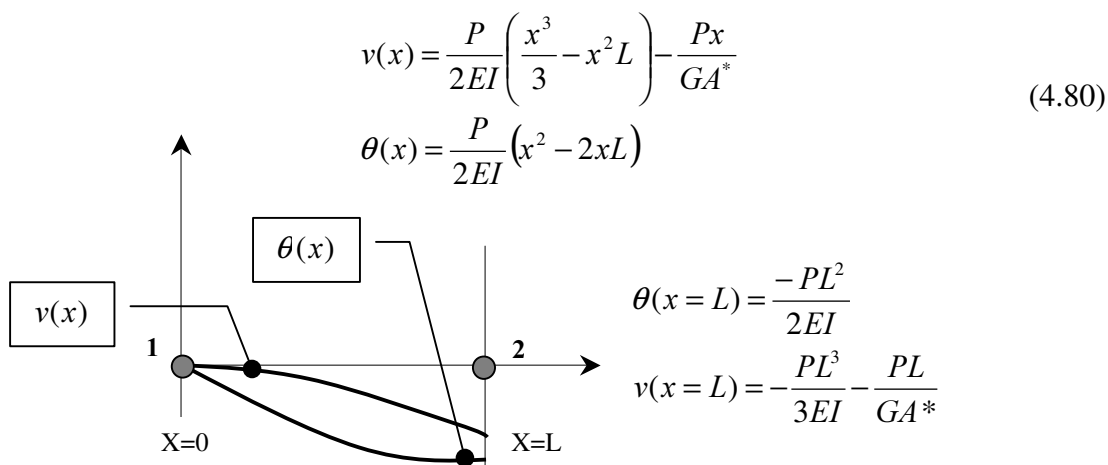


Fig. 4.11 – Representação do campo de deslocamento transversal e de rotação.

Verifica-se pelos resultados obtidos que o deslocamento transversal da viga depende do valor da área da secção reduzida A^* , ou seja, o esforço de corte contribui para o campo do deslocamento transversal.

O campo de deslocamentos proposto por Mindlin em 4.57 permite determinar a deformada exacta, no âmbito da mecânica dos materiais, qualquer que seja o esforço de corte.

4.5.2. - Descrição analítica do elemento de Euler Bernoulli

Bernoulli completa as hipóteses de Mindlin, impondo que, depois das deformações as secções rectas permaneçam ortogonais à fibra média. Será de salientar que, no domínio elástico, sendo os deslocamentos pequenos, o ângulo de rotação é similar à inclinação da deformada. Aparecem assim as seguintes expressões propostas para o campo de deslocamentos:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x) - yv'(x) \\ v(x, y) &= v(x) \end{aligned} \tag{4.81}$$

Como se pode verificar pela figura seguinte, as secções permanecem ortogonais relativamente à fibra média.

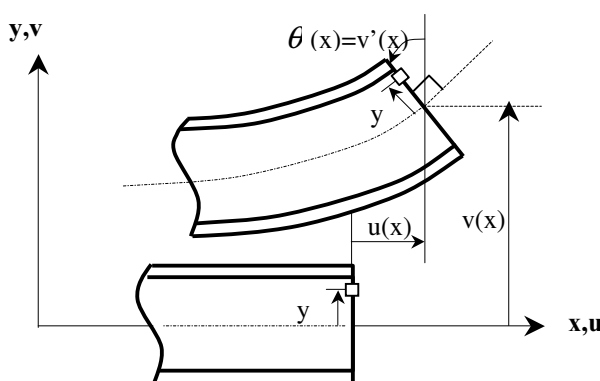


Fig. 4.12 – Deformada de viga da teoria de Euler Bernoulli.

O campo de deformações é facilmente deduzido através das expressões 4.58, ou seja:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u'(x) - yv''(x) \\ 2\epsilon_{xy} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = v'(x) + (-v'(x)) = 0 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Para estabelecer as equações de equilíbrio, procede-se da mesma forma apresentada para o elemento de viga anterior, tendo apenas que considerar as novas expressões das deformações. Depois de efectuar as substituições necessárias, e partindo novamente da expressão 4.61, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \int_{V_0} (\sigma_{xx} \delta\epsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta\epsilon_{xy}) dV_0 &= \int_0^L \int_A \sigma_{xx} \delta u'(x) dA dx - \int_0^L \int_A \sigma_{xx} y \delta v''(x) dA dx \\ &= \int_0^L \bar{N} \delta u'(x) dx + \int_0^L \bar{M} \delta v''(x) dx \end{aligned} \tag{4.83}$$

A respectiva integração por partes, deverá ser executada duas vezes, para que se possa comparar com a expressão 4.61.

$$\begin{aligned}
\int_{V_0} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2\sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy}) dV_0 &= \int_0^L \bar{N} \delta u'(x) dx + \int_0^L \bar{M} \delta v''(x) dx \\
&= \left[\bar{N} \delta u(x) \right]_0^L - \int_0^L \delta u(x) \bar{N}' dx + \left[\bar{M} \delta v'(x) \right]_0^L - \int_0^L \delta v'(x) \bar{M}' dx \\
&= \bar{N}_2 \delta u_2 - \bar{N}_1 \delta u_1 - \left(\int_0^L \delta u(x) \bar{N}' dx \right) + \bar{M}_2 \delta v_2' - \bar{M}_1 \delta v_1' - \left[\bar{M}' \delta v(x) \right]_0^L + \int_0^L \bar{M}'' \delta v(x) dx \\
&= \bar{N}_2 \delta u_2 - \bar{N}_1 \delta u_1 - \int_0^L \delta u(x) \bar{N}' dx + \bar{M}_2 \delta \theta_2 - \bar{M}_1 \delta \theta_1 - \bar{M}_2' \delta v_2 + \bar{M}_1' \delta v_1 + \int_0^L \bar{M}'' \delta v(x) dx
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Comparando a expressão 4.84 com a equação 4.61, pode-se concluir que, qualquer que seja o deslocamento virtual, se obtém.

$$\begin{aligned}
\bar{N}' &= 0, \text{ onde } \bar{N} \text{ for constante} \\
\bar{M}'' &= 0, \text{ onde } \bar{M}' \text{ for constante}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Na extremidade as equações de equilíbrio são representadas por:

$$\begin{aligned}
\bar{N}_1 &= -N_1 & \bar{M}_1' &= T_1 & \bar{M}_2' &= -T_2 \\
\bar{N}_2 &= N_2 & \bar{M}_1 &= -M_1 & \bar{M}_2 &= M_2
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Estas expressões combinadas com as das leis constitutivas, permitem determinar a deformada da viga solicitada por esforços exteriores aplicados à extremidade.

4.5.2.1. - Exemplo de aplicação – viga bi apoiada solicitada por momento constante.

Admita-se o mesmo tipo de carregamento constante na figura 4.8. Por analogia, e aplicando a mesma metodologia, obtém-se finalmente a equação do comportamento dos graus de liberdade considerados.

$$\begin{aligned}
u(x) &= 0 \\
EI v''(x) &= M
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Pelo que, após integração da equação 4.69, se obtém o campo de deslocamentos transversais.

$$v(x) = \frac{M}{2EI} (x^2 - xL) \tag{4.88}$$

Esta solução é idêntica no caso homólogo anterior, uma vez que a energia de deformação devida ao corte é nula.

4.5.2.2. - Exemplo de aplicação – viga em consola com carregamento transversal na extremidade.

Tendo em consideração que o esforço axial é nulo, a equação de equilíbrio da viga virá dada pela expressão 4.71.

$$EI v'''(x) = P \quad (4.89)$$

Integrando esta expressão três vezes, obtém-se o campo de deslocamento transversal.

$$v(x) = \frac{P}{2EI} \frac{x^3}{3} + a \frac{x^2}{2} + bx + c \quad (4.90)$$

Aplicando as condições fronteira já anteriormente utilizadas, pode-se concluir que:

$$v(x) = \frac{P}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - x^2 L \right) \quad (4.91)$$

A expressão para a rotação é facilmente obtida através da derivada da equação 4.73. Esta solução difere da expressão 4.80 por ausência do termo Px/GA^* , que tem em consideração a parte da deformação devida ao esforço de corte. Com efeito, na solução do elemento de Bernoulli, o valor da deformação de corte é zero.

4.5.3. - Elemento finito de viga Hencky - Mindlin

Nos parágrafos precedentes foi apresentado o elemento de Hencky Mindlin analítico que apresenta resultados exactos, mesmo que a viga seja ou não solicitada por um esforço de corte. Neste sub-capítulo vai ser evidenciado o fenómeno da sobre-rigidez que aparece, quando o campo de deslocamentos é discretizado no âmbito dos elementos finitos.

Examinando o campo de deslocamentos explicitado na equação 4.57, será necessário discretizar separadamente as incógnitas $u(x)$, $v(x)$ e $\theta(x)$, adoptando como variáveis desconhecidas, os valores nodais das incógnitas, ou seja, U_i , V_i e Θ_i ($i=1,2$) em dois pontos nodais, como se mostra na figura 4.13.

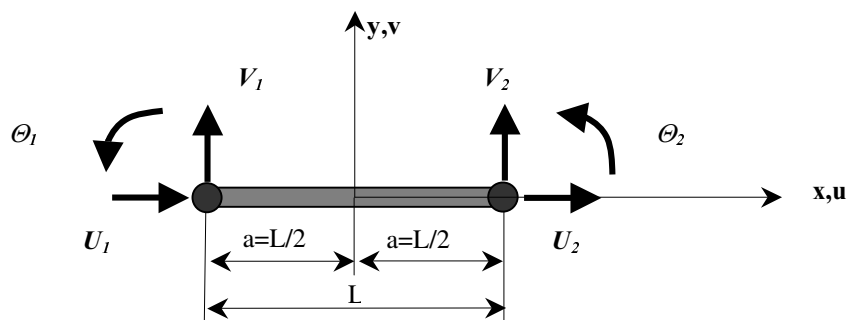


Fig. 4.13 – Elemento finito de viga com 6 graus de liberdade.

O campo discretizado dos deslocamentos será definido pela expressão 4.92, utilizando o valor nodal dos deslocamentos generalizados.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= U_i h_i(x) - y \theta_i h_i(x) \\ v(x, y) &= V_i h_i(x) \end{aligned} \tag{4.92}$$

Para este campo de deslocamentos estão previstas as seguintes funções de interpolação.

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \\ h_2(x) &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right) \end{aligned} \tag{4.93}$$

Estas funções possuem a característica de tomarem o valor unitário no nó correspondente ao índice e zero no nó oposto, variando linearmente entre estes dois valores. Esta característica linear implica um comportamento ou discretização linear do fenómeno em estudo.

O campo das deformações deriva do anterior, por aplicação da equação 4.58, ou seja:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{(U_2 - U_1)}{2a} - y \frac{(\Theta_2 - \Theta_1)}{2a} \\ 2\varepsilon_{xy} &= \frac{(V_2 - V_1)}{2a} - \frac{\Theta_1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{\Theta_2}{2} \left(1 + \frac{x}{a} \right) \end{aligned} \tag{4.94}$$

No método dos elementos finitos lineares, a determinação das equações de equilíbrio da estrutura derivam da constituição da matriz rigidez correspondente K_{HC} , que neste caso toma a seguinte forma:

$$K_{HC} = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ 0 & GA^* & GA^*a & 0 & -GA^* & GA^*a \\ 0 & GA^*a & EI + \frac{4}{3}a^2GA^* & 0 & -GA^*a & -EI + \frac{2}{3}a^2GA^* \\ -EA & 0 & 0 & EA & 0 & 0 \\ 0 & -GA^* & -GA^*a & 0 & GA^* & -GA^*a \\ 0 & GA^* & -EI + \frac{2}{3}a^2GA^* & 0 & -GA^*a & EI + \frac{4}{3}a^2GA^* \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

peço que a equação de equilíbrio elementar poderá ser escrita da seguinte forma:

$$[K_{HC}] \{p\} = \{P\} \quad (4.96)$$

com os seguintes vectores definidos em função dos graus de liberdade e forças generalizadas. N_i , T_i e M_i , representam esforços exteriores associados aos graus de liberdade do nó respectivo.

$$\{p\}^T = \langle p \rangle = \langle U_1 \quad V_1 \quad \Theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \Theta_2 \rangle \quad (4.97)$$

$$\{P\}^T = \langle P \rangle = \langle N_1 \quad T_1 \quad M_1 \quad N_2 \quad T_2 \quad M_2 \rangle \quad (4.98)$$

Estão assim resumidos os meios necessários para resolver os exemplos de aplicação atrás mencionados.

Para o caso da viga bi apoiada, solicitada por um momento constante, o terceiro campo destinado à rotação na extremidade, terá uma expressão, que no caso de se utilizar uma discretização apenas com um elemento finito será:

$$\Theta_{1E}(x=L) = \frac{ML}{2EI} \alpha \quad (4.99)$$

com o parâmetro α a ser determinado pela expressão 4.100.

$$\alpha_{1E} = \frac{1}{1 + \frac{L^2 GA^*}{12EI}} \quad (4.100)$$

No caso de se utilizarem dois elementos finitos, as expressões anteriores devem ser substituídas por 4.101 e 4.102, respectivamente;

$$\Theta_{2E}(x=L) = \frac{ML}{2EI} \beta \quad (4.101)$$

$$\beta_{2E} = \frac{1}{1 + \frac{L^2 GA^*}{48EI}} \quad (4.102)$$

A comparação destes resultados com a solução exacta, permite estabelecer algumas conclusões. A primeira diz respeito à relação existente entre o comprimento de viga L e a altura respectiva H , uma vez que quanto maior for o quociente L/H , pior resultados se obtêm. No caso de uma viga de secção rectangular com área de secção recta igual a $B \times H$, podem obter-se os seguintes resultados:

Viga de secção rectangular ($A^*=5/6BH$); ($I=BH^3/12$); ($E=2,6 G$)		
L/H	$\Theta_{1E} / \Theta_{Exacto}$	$\Theta_{2E} / \Theta_{Exacto}$
10	0,0302	0,1110
20	0,0077	0,0303
30	0,0034	0,0136
40	0,0019	0,0077

Tabela 4.1 – Análise comparativa dos valores da rotação na extremidade direita de uma viga sujeita a momento flector constante [4.23].

Os valores podem ser representados graficamente, sendo notória uma diminuição da qualidade dos resultados com o aumento da quociente L/H , bem como o melhoramento dos resultados com o aumento do número de elementos, ver figura 4.14.

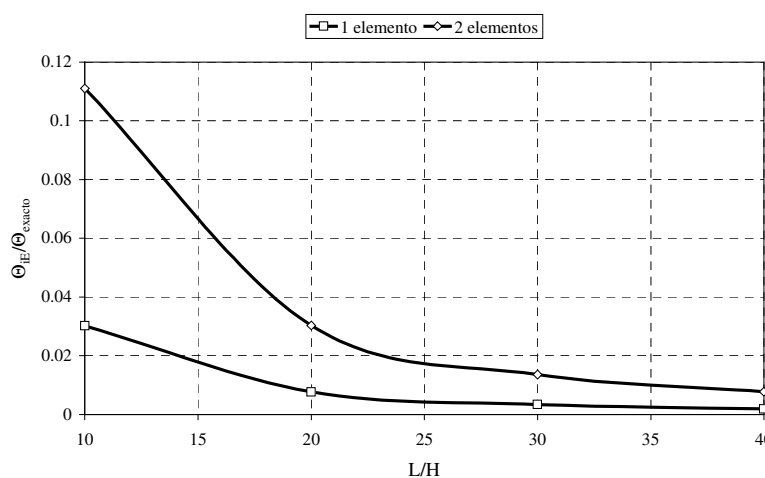


Fig. 4.14 - Valores do quociente entre rotação na extremidade do elemento finito e o respectivo valor exacto, função da razão entre comprimento e altura da viga.

Por outro lado, a rigidez ao corte, GA^* , não deveria aparecer nos resultados, uma vez que na solução exacta, o esforço transversal é nulo. Este não é o caso da solução do elemento finito apresentado, uma vez que a deformação e a tensão de corte valem, respectivamente:

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{-2\Theta_{1E}x}{L} \tag{4.103}$$

$$\tau_{xy} = \frac{-2G\Theta_{1E}x}{L} \tag{4.104}$$

No segundo exemplo de aplicação, a viga em caixão quando solicitada por uma carga transversal, permite obter os seguintes resultados.

$$\Theta_{1E}(x=L) = -\frac{PL^2}{2EI}\alpha \tag{4.105}$$

$$V_{1E}(x=L) = -\frac{PL^3}{4EI}\alpha - \frac{PL}{GA^*} \tag{4.106}$$

O parâmetro α deverá ser determinado pela mesma expressão definida em 4.100 .No caso de se efectuar a discretização para dois elementos finitos, obtém-se:

$$\Theta_{2E}(x=L) = -\frac{PL^2}{2EI}\beta \tag{4.107}$$

$$V_{2E}(x=L) = -\frac{5PL^3}{16EI}\beta - \frac{PL}{GA^*} \tag{4.108}$$

com β a ser determinado conforme expressão 4.102.

Como no caso do exemplo de aplicação anterior, é possível concluir que a solução será pior quanto maior for a relação L/H e que a deformação de corte varia linearmente em cada elemento, apresentando uma descontinuidade na passagem de um elemento para outro.

Relativamente à convergência dos elementos finitos, e quando o número de elementos utilizados a discretizar tender para infinito, os coeficientes α e β aproximam-se do valor unitário [4.23].

Relativamente à sobre-rigidez ao corte, este elemento propõe valores para o corte quando não deveriam existir e para os casos em que a existência de esforço de corte é uma realidade, o elemento sobre estima esse valor. Na referência [4.24], os autores descrevem o fenómeno de “Shear Locking”, que aparece sempre que os campos do deslocamento transversal e das rotações é discretizado separadamente. Pode-se ainda demonstrar que para elementos de vigas de três nós o fenómeno permanece. Na figura 4.15 encontram-se representados os graus de liberdade adoptados para este tipo de elemento.

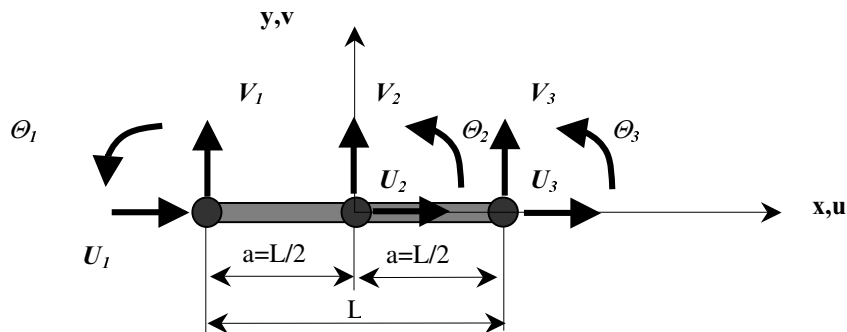


Fig. 4.15 – Elemento finito de viga com 9 graus de liberdade.

As funções de interpolação podem, neste caso, ser representadas por:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= -\frac{x}{2a} \left(1 - \frac{x}{a} \right) \\ h_2(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \\ h_3(x) &= \frac{x}{2a} \left(1 + \frac{x}{a} \right) \end{aligned} \quad (4.109)$$

Utilizando as expressões 4.58, 4.92 e 4.109 obtém-se facilmente o campo discretizado das deformações e em particular, da deformação de corte.

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{V_1}{2a} \left(\frac{2x}{a} - 1 \right) - 2V_2 \frac{x}{a^2} + \frac{V_3}{2a} \left(1 + \frac{2x}{a} \right) + \Theta_1 \left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{x}{2a} + \Theta_2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) - \Theta_3 \left(1 + \frac{x}{a} \right) \frac{x}{2a} \quad (4.110)$$

No caso de uma viga bi apoiada e solicitada por um momento de flexão aplicado à extremidade, este elemento finito de três nós não apresenta bons resultados, em termos de deslocamentos transversais [4.23].

4.5.4. - Elemento finito com integração reduzida

Para reduzir a rigidez ao corte do elemento finito, Stolarsky e Belytschko [4.24], entre outros autores, propõem calcular as componentes da matriz rigidez, integrando de maneira exacta os termos relativos à flexão e integrando de uma forma reduzida os termos relativos ao corte. Este tipo de integração é também denominado por integração selectiva. No caso do elemento de viga de dois nós, utilizam-se dois pontos de integração para os termos da flexão e apenas um para a integração dos termos relacionados com a parte do corte. A localização deste ponto ($x=0$) implica uma energia de deformação de corte nula para o primeiro exemplo de solicitação. Com esta metodologia espera-se obter resultados numéricos de melhor qualidade. A matriz rigidez para este tipo de elemento contém os seguintes termos:

$$[K] = \frac{1}{2a} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ 0 & GA^* & aGA^* & 0 & -GA^* & aGA^* \\ 0 & aGA^* & EI + a^2GA^* & 0 & -aGA^* & -EI + a^2GA^* \\ -EA & 0 & 0 & EI & 0 & 0 \\ 0 & -GA^* & -aGA^* & 0 & GA^* & -aGA^* \\ 0 & aGA^* & -EI + a^2GA^* & 0 & -aGA^* & EI + a^2GA^* \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

Para o caso da viga bi-apoiada, solicitada por um momento constante, o valor da rotação na extremidade da viga, qualquer que seja o número de elementos finitos utilizados, valerá:

$$\Theta(x) = \frac{ML}{2EI} \quad (4.112)$$

É possível afirmar que a solução obtida é exacta e sobretudo que, a contribuição devida ao corte (nulo em teoria) não influencia o resultado numérico.

Para o segundo caso de solicitação, da viga em consola solicitada por uma carga transversal, o valor da rotação e do deslocamento transversal, na extremidade valem:

$$\Theta_{1E}(x=L) = -\frac{PL^2}{2EI} \quad V_{1E}(x=L) = -\frac{PL^3}{4EI} - \frac{PL}{GA^*} \quad (4.113)$$

para o caso de dois elementos finitos, os resultados obtidos são idênticos em termos de rotação, mas ligeiramente diferentes em termos de esforço transversal.

$$\Theta_{2E}(x=L) = -\frac{PL^2}{2EI} \quad V_{2E}(x=L) = -\frac{5PL^3}{16EI} - \frac{PL}{GA^*} \quad (4.114)$$

Contrariamente ao elemento clássico descrito em 4.5.3, constata-se que a solução é independente do quociente L/H da viga, que o desacoplamento entre a flexão e o esforço transversal é assegurado e que a convergência deste elemento finito não dependerá da sua geometria, mas sim do número de elementos exclusivamente.

O que foi referido para o elemento de dois nós pode ser extrapolado para o elemento de três nós, utilizando para os termos de corte apenas dois pontos de integração ao longo do eixo do elemento.

4.5.5. - Elemento finito modificado

O tipo de elemento apresentado por Stolarski e Belytschko [4.24, 4.27], propõe uma explicação para o aparecimento do fenómeno de “Shear Locking”. Por um lado, discretizando o campo de deslocamentos 4.57, admitiu-se que o deslocamento transversal e a rotação seriam independentes, o que, embora não sendo coincidente com o desenvolvimento analítico, apresenta um relacionamento entre estes dois graus de liberdade, 4.71 e 4.79. Por outro lado, a condição necessária para assegurar uma boa convergência de um elemento finito consiste em verificar a capacidade de representar os modos de deformação constante. Segundo Goyet [4.23], o grau de interpolação dos deslocamentos é tal que a deformação de corte ε_{xy} não será constante, excepto quando $\Theta_1 = \Theta_2$, o que se revela muito restritivo. Assim e segundo o mesmo autor, para o caso de viga, com dois ou três nós, a deformação ε_{xy} , 4.94 e 4.110, pode ser escrita na forma:

$$2\varepsilon_{xy} = f_1(V_i, x) + f_2(\Theta_i, x) \quad (4.115)$$

onde a função f_2 será de grau superior à da função f_1 , em uma unidade, relativamente à variável x . No caso do elemento de viga de 3 nós, a primeira função deverá ser proporcional a x , enquanto que a função f_2 deverá ser proporcional à segunda potência de x . O modo da deformação constante nunca poderá ser obtido em todos os pontos da viga, porque a função ε_{xy} é ela própria a soma de outras funções de graus diferentes em x . Uma modificação da expressão ε_{xy} é fundamental para remediar o problema exposto. Goyet [4.23] propõe diminuir o grau da função $f_2(x)$ com o objectivo de encontrar o mesmo grau para a função $f_1(x)$:

$$2\varepsilon_{xy} = f_1(V_i, x) + F_2(\Theta_i, x) \quad (4.116)$$

em que a função F_2 deverá ser determinada em função do número de nós em consideração por elemento. No caso do elemento de dois nós, a função 4.117 é obtida através da média de $f_2(x)$.

$$F_2(\Theta_i, x) = \frac{1}{L} \int_L f_{2,e}(\Theta_i, x) dx \quad (4.117)$$

No caso do elemento de três nós, a função F_2 deverá ser determinada pela linearização da função correspondente pelo método dos mínimos quadrados.

$$F_2(\Theta_i, x) = \frac{1}{L} \int_L f_{2,e}(\Theta_i, x) dx + \frac{12}{3L} \int_L x f_{2,e}(\Theta_i, x) dx \quad (4.118)$$

A nova expressão da deformação discretizada vale, no caso da viga de dois nós:

$$2\varepsilon_{xy,m} = \frac{(V_2 - V_1)}{2a} - \frac{(\Theta_1 + \Theta_2)}{2} \quad (4.119)$$

No caso da viga de três nós, a expressão anterior é substituída por:

$$2\varepsilon_{xy,m} = \frac{(V_3 - V_1)}{2a} + (V_1 - 2V_2 + V_3) \frac{x}{2a} - \frac{(\Theta_1 + 4\Theta_2 + \Theta_3)}{6} + (\Theta_1 - \Theta_3) \frac{x}{2a} \quad (4.120)$$

Para obter a matriz de rigidez do elemento finito, aplica-se o principio dos deslocamentos virtuais. Graças às expressões 4.119 e 4.120 obtidas para definir o estado da deformação de corte, todos os termos podem ser integrados exactamente. As vantagens desta formulação são relativamente grandes, uma vez que o fenómeno de “Shear Locking” desaparece, todos os termos da matriz rigidez podem ser integrados exactamente.

4.5.6. – Elemento finito “exacto”

Tendo em consideração o campo de deslocamentos 4.57, a maneira mais simples de discretizar $v(x)$ e $\theta(x)$ será fazê-lo separadamente. Muito embora e após análise da equação 4.68, esta demonstre que existe uma relação entre as variáveis referidas, para a equação de equilíbrio, a solução proposta nos parágrafos precedentes verifica esta equação, em média, sobre o elemento finito [4.23].

$$EI\theta''(x) + GA^*[v'(x) - \theta(x)] = 0 \tag{4.121}$$

No caso da viga ser solicitada por cargas transversais repartidas e constantes $q(x)$, aparecerá uma relação suplementar a considerar;

$$\bar{T}' = -q \tag{4.122}$$

uma vez combinada a expressão 4.122 com 4.65 e 4.68, obtém-se a equação seguinte.

$$EI\theta'''(x) = q \tag{4.123}$$

O elemento que se pretende apresentar deverá ter em consideração os esforços da figura seguinte:

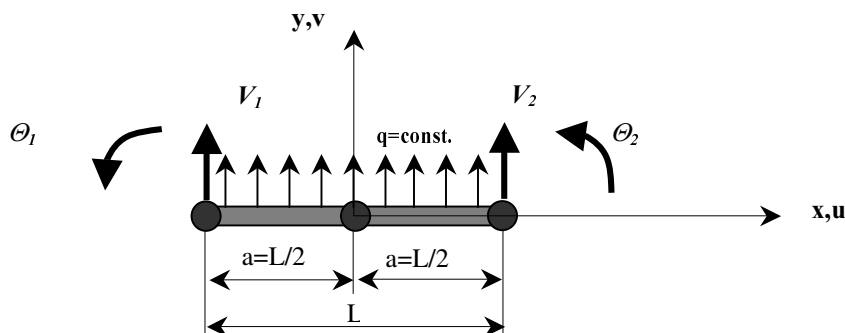


Fig. 4.16 – Elemento finito de viga.

Para formular este novo elemento finito, a discretização de $v(x)$ e $\theta(x)$ será feita de tal forma que as equações 4.121 e 4.123 sejam verificadas desde o início, em todos os pontos da viga. Assim e após a integração destas relações, obtém-se:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \left[\frac{qx^3}{6} + B\frac{x^2}{2} + Cx + D \right] / EI \\ v(x) &= \left[\frac{qx^4}{24} + B\frac{x^3}{6} + C\frac{x^2}{2} + Dx \right] / EI - \left[q\frac{x^2}{2} + Bx \right] / GA^* + F \end{aligned} \tag{4.124}$$

Estas expressões contêm quatro constantes que serão determinadas pelos valores de quatro variáveis nodais desconhecidas $V_1, \Theta_1, V_2, \Theta_2$, as quais possibilitam assegurar a continuidade dos deslocamentos e das inclinações. Determinam-se estas constantes através das condições fronteira.

$$\begin{aligned} V_1 &= v(x = -a) & \Theta_1 &= \theta(x = -a) \\ V_2 &= v(x = a) & \Theta_2 &= \theta(x = a) \end{aligned} \quad (4.125)$$

finalmente será possível escrever:

$$v(x) = h^*_3(x) \cdot V_1 + h^*_4(x) \cdot \Theta_1 + h^*_5(x) \cdot V_2 + h^*_6(x) \cdot \Theta_2 + h^*_7(x, q) \quad (4.126)$$

$$\theta(x) = h^*_8(x) \cdot V_1 + h^*_9(x) \cdot \Theta_1 + h^*_{10}(x) \cdot V_2 + h^*_{11}(x) \cdot \Theta_2 + h^*_{12}(x, q) \quad (4.127)$$

em que h^*_i , representa as funções de interpolação, determinadas em função das coordenadas naturais.

$$\begin{aligned} h^*_3(x) &= [\xi^3 - 3\xi + 2 + \alpha\xi / (1 + 3\alpha)] / 4 \\ h^*_4(x) &= [(\xi^3 - \xi) / (1 + 3\alpha) - \xi^2 + 1] a / 4 \\ h^*_5(x) &= [-\xi^3 + 3\xi + 2 - \alpha\xi / (1 + 3\alpha)] / 4 \\ h^*_6(x) &= [(\xi^3 - \xi) / (1 + 3\alpha) + \xi^2 - 1] a / 4 \\ h^*_7(x, q) &= [\xi^4 - 2\xi^2 + 1 + 12\alpha / (-\xi^2 + 1)] q a^4 / 24EI \\ h^*_8(x) &= [\xi^2 - 1] \beta / 4a(1 + 3\alpha) \\ h^*_9(x) &= [\xi^2 - 1] \beta / 4(1 + 3\alpha) + (1 - \xi) / 2 \\ h^*_{10}(x) &= [-\xi^2 + 1] \beta / 4a(1 + 3\alpha) \\ h^*_{11}(x) &= [\xi^2 - 1] \beta / 4(1 + 3\alpha) + (1 + \xi) / 2 \\ h^*_{12}(x) &= (\xi^3 - \xi) q a^3 / 6EI \end{aligned} \quad (4.128)$$

com os seguintes parâmetros:

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \alpha = \frac{EI}{a^2 GA^*} \quad (4.129)$$

Será através do parâmetro α que a energia de deformação devida ao corte é tomada em consideração. As funções de interpolação 7 e 12 representam a deformada de uma viga bi encastrada ($V_i = 0$ e $\Theta_i = 0$) submetida a um carregamento uniformemente distribuído de valor q .

Depois de apresentar as soluções analíticas de vigas baseadas nas duas hipóteses clássicas desta teoria (Henky Mindlin e Bernoulli), apresentaram-se diferentes tipos de elementos finitos, colocando em evidência as suas qualidades e defeitos, tudo no domínio bi-dimensional. Embora grande parte do trabalho numérico se dedique ao estudo não linear deste tipo de elemento,

decidiu-se apresentar os limites de diferentes formulações em elementos finitos lineares e ainda apresentar com algum detalhe o efeito de corte, propondo uma solução que seja possível adaptar no domínio não linear da parte numérica

É possível portanto estabelecer uma hierarquia dos diferentes tipos de elementos, conforme figura 4.17.

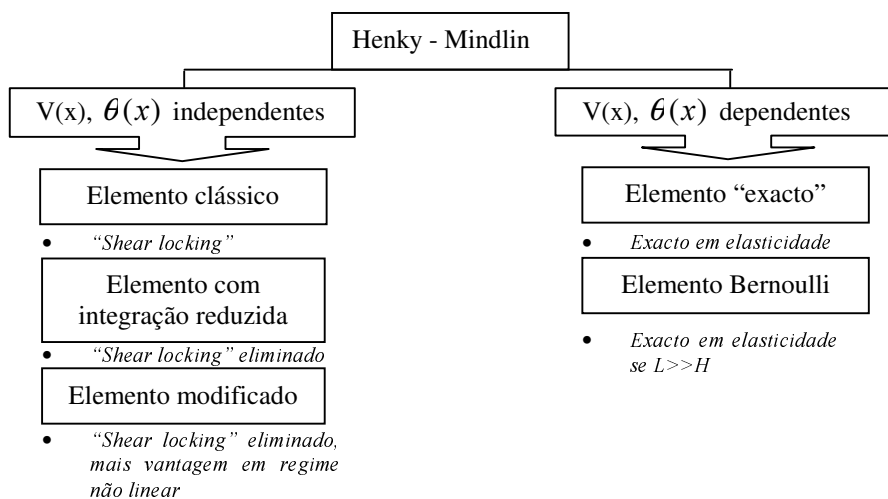


Fig. 4.17 - Esquema resumido de formulações de elementos finitos [4.23].

4.5.7. – Elemento finito tridimensional de três nós

Para o caso do elemento tridimensional, são consideradas as hipóteses seguintes:

Admite-se a hipótese inicial de Bernoulli, ou seja, na ausência de torção, as tensões de corte são nulas, bem como numa situação de flexão, a secção recta permanece perpendicular ao eixo do elemento e a energia de deformação devida ao esforço de corte não é considerada. Assim, importa estar particularmente atento ao facto dos resultados poderem estar imprecisos no caso de vigas muito curtas. Neste tipo de vigas curtas e no caso particular de um incêndio, a elevação da temperatura verifica-se desde o banzo inferior para o superior, pelo que o quociente entre o comprimento e a altura aumenta durante esta acção accidental. Assim será possível admitir que no caso de uma viga curta que seja sensível ao efeito de corte quando solicitada à temperatura ambiente, diminua essa sensibilidade ao longo do incêndio.

Admite-se também que o elemento de viga é indeformável ao longo da altura deste, pelo que o empenamento local (“local buckling”) não será considerado.

Outra das hipóteses a considerar tem a ver com as deformações axiais, consideradas muito pequenas relativamente à unidade, pelo que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \ll 1 \tag{4.130}$$

Admite-se ainda que algumas rotações são moderadas, excepto no caso da que se verifica em torno do próprio eixo, e que no caso de torção pura a secção sofre um empenamento cuja amplitude é proporcional ao aumento do ângulo de torção (hipótese de Vlassov).

Na figura 4.18 está representado um esquema do elementos de três nós, associado à secção recta que servirá de estudo numérico no capítulo 9.

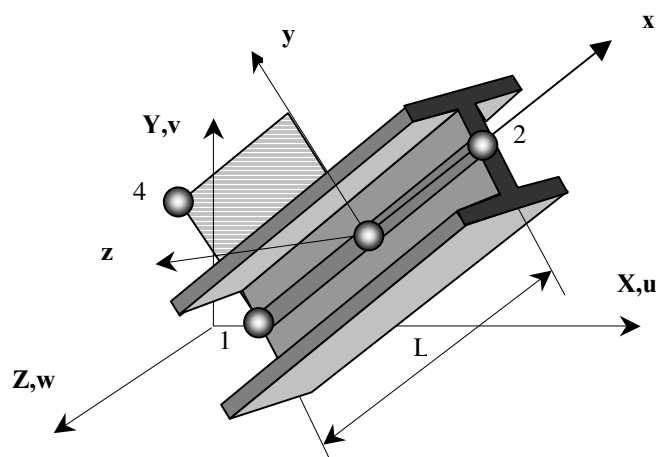


Fig. 4.18 – Elemento de viga tridimensional de três nós.

No modelo do elemento apresentado, os nós 1 e 2 situados na extremidade podem não ocupar a posição coincidente com o centróide ou até com o centro de corte da secção recta. A definição da localização ficará ao cargo do utilizador. Outros autores colocam a linha dos nós coincidente com o centróide da secção, ligando posteriormente dois elementos vizinhos através do centro de torção da secção, graças à introdução de uma matriz de assemblagem. Neste trabalho optou-se pela modelação anterior uma vez que o posicionamento nos centróides faz sentido no caso de comportamento elástico, mas não o fará no caso inelástico e no caso particular das estruturas sujeitas à acção do fogo. Por causa do aquecimento e das plastificações, a posição do centróide varia de um elemento para o outro. No caso de uma viga submetida à encurvadura lateral será mais fácil definir e distinguir onde as cargas estão aplicadas.

Os nós 1 e 2 definem a posição do eixo local “x”, que se situa sobre a linha dos nós, orientado do primeiro para o segundo, com origem a meia distância de ambos.

O nó 3 introduz a possibilidade de uma distribuição ou variação do deslocamento axial não linear.

O nó 4 é utilizado para definir a posição do eixo local “y”. Este eixo será perpendicular a “x”, estando situado num plano definido por “x” e pelo nó 4. A direcção do eixo “y” é obtida através da rotação do eixo “x” para o nó 4. O sistema local ficará totalmente definido através do produto vectorial seguinte.

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \quad (4.131)$$

A partir das hipóteses admitidas sobre o esforço de corte pode ser determinado o campo de deslocamentos e o tensor das deformações associados.

Admitindo então, que u, v, w representam os deslocamentos nas linhas dos nós e U, V e W , correspondentes a um ponto qualquer da viga, e que $\psi(x)$ representa a rotação em torno do eixo da viga, pode-se então admitir que:

$$\begin{aligned}
U(x, y, z) &= u(x) - y[v'(x)] - z[w'(x)] - yw'(x)\psi(x) + zv'(x)\psi(x) - w(y, z)\psi'(x) \\
V(x, y, z) &= v(x) - z[\psi(x)] \\
W(x, y, z) &= w(x) + y[\psi(x)]
\end{aligned} \tag{4.132}$$

Nestas expressões a primeira parcela do campo de deslocamentos axial representa o deslocamento axial das linhas dos nós, enquanto que a segunda e a terceira corresponde ao facto do aparecimento de um deslocamento provocado pela rotação da secção em volta dos eixos situados no plano desta. O termo de acoplamento da quarta e quinta parcela corresponde ao facto da secção ao ter rodado em torno de um eixo no plano, sofrer uma rotação adicional. Por fim, o último termo representa o efeito do empenamento da secção, criado pela torção.

Ao analisar problemas de grandes deslocamentos, as relações deformação – deslocamento não são lineares e as componentes das deformações são dadas pelo tensor de Green Lagrange.

O campo das deformações poderá ser deduzido a partir da derivação das equações anteriores, conforme expressão 4.8.

Todas as parcelas com ordem superior a dois deverão ser desprezadas, dando origem às diversas componentes de deformação.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \times \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \times \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \times \frac{\partial W}{\partial x} \right] \\
&= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right] \\
&= \frac{\partial u(x)}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \psi(x) + z \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \psi(x) - \omega(y, z) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)^2 + (y^2 + z^2) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 \right] \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \times \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \times \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \times \frac{\partial W}{\partial y} \right] \\
&= -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \left[z + \frac{\partial \omega(y, z)}{\partial y} \right] \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \times \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \times \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \times \frac{\partial W}{\partial y} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \left[y - \frac{\partial \omega(y, z)}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{4.133}$$

A quantidade $(y^2 + z^2)$ poderá ser designada por r^2 , e as variáveis do campo de deslocamento u, v, w, ψ escritas sem referência à respectiva dependência na ordenada de domínio x .

O modelo numérico possui característica de efectuar cálculos termo-elasto-plásticos, com grandes deslocamentos e com tratamento de materiais não lineares. Este programa possui ainda a possibilidade de ter em consideração o empenamento das secções, bem como de discretizar a

secção recta num modelo de fibras. O comportamento do material em cada fibra é calculado no centróide e admitido constante em toda ela. Cada fibra possui o seu próprio material que possibilita o tratamento de vigas de secção composta, constituídas eventualmente de materiais diferentes.

4.5.7.1. - Discretização do elemento

A discretização do campo de deslocamentos do elemento recorre a 15 variáveis nodais desconhecidas (graus de liberdade). Neste elemento de três nós, os da extremidade são referenciados por 1 e 2, contendo em cada um três deslocamentos, três rotações e uma amplitude de empenamento. No seu nó central 3, é introduzida uma componente do deslocamento axial U , habilitando-o com capacidades não lineares (grau de liberdade 15), conforme se verifica na figura 4.19. A introdução deste grau de liberdade transforma o deslocamento axial numa função de segundo grau em x . O objectivo deste grau adicional introduzido por Boeraeve [4.42] consiste em impor que a deformação não seja constante sobre o elemento.

A discretização dos campos de deslocamentos U, V e W é efectuada de uma forma clássica através de polinómios de grau 2 e 3. Também para o caso da rotação em X , será utilizado uma interpolação cúbica, pelo que o sétimo e décimo quarto grau de liberdade do elemento, representativo da função de empenamento da secção, é determinado pela derivada em ordem a x desta rotação.

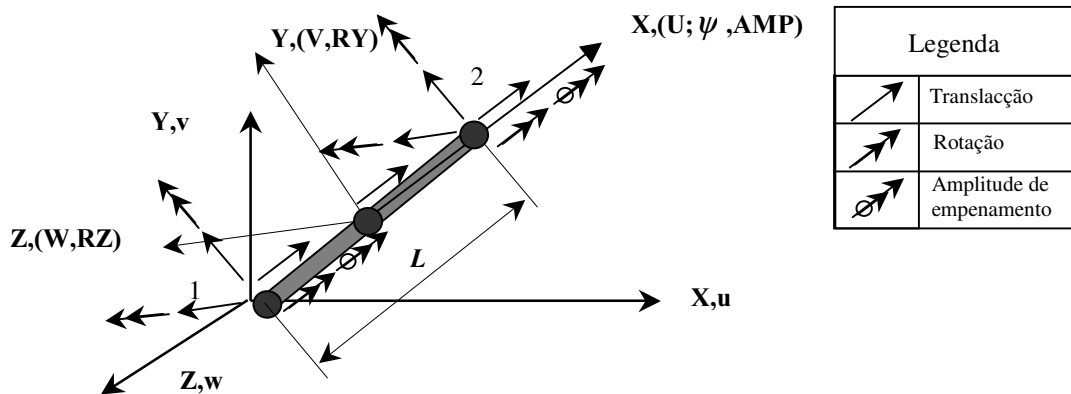


Fig. 4.19 - Representação dos graus de liberdade no elemento.

$$\begin{aligned}
 U(x) &= a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 & RY(x) &= \frac{\partial W(x)}{\partial x} = a_9 + 2 \cdot a_{10} \cdot x + 3 \cdot a_{11} \cdot x^2 \\
 V(x) &= a_4 + a_5 \cdot x + a_6 \cdot x^2 + a_7 \cdot x^3 & RZ(x) &= \frac{\partial V(x)}{\partial x} = a_5 + 2 \cdot a_6 \cdot x + 3 \cdot a_7 \cdot x^2 \\
 W(x) &= a_8 + a_9 \cdot x + a_{10} \cdot x^2 + a_{11} \cdot x^3 & & \\
 \psi(x) &= a_{12} + a_{13} \cdot x + a_{14} \cdot x^2 + a_{15} \cdot x^3 & AMP(x) &= \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} = a_{13} + 2 \cdot a_{14} \cdot x + 3 \cdot a_{15} \cdot x^2
 \end{aligned} \tag{4.134}$$

Ou seja, introduzindo a formulação matricial e tendo em consideração as quinze incógnitas nodais, pode-se definir uma matriz que relaciona os sete deslocamentos generalizados com as quinze incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} U \\ V \\ W \\ \psi \\ RY \\ RZ \\ AMP \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & x & x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \end{array} \right\} \tag{4.135}$$

Diversos autores, como Goyet [4.23], recorrem a interpolações hiperbólicas para representar a função de empenamento. Franssen [4.26] recorre à solução apresentada, justificando melhores características computacionais.

Para determinar as funções de interpolação em função dos graus de liberdade, será necessário substituir em 4.135, os valores dos 15 deslocamentos generalizados. O grau de liberdade quinze representará a componente não linear do deslocamento axial a meio do elemento e não o próprio deslocamento. Esta forma possibilita a obtenção de um deslocamento linear, caso de anule este grau de liberdade.

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \\ p_9 \\ p_{10} \\ p_{11} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{14} \\ p_{15} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{-L^3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{-L^3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{-L^3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & \frac{3L^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & \frac{3L^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -L & \frac{3L^2}{4} \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{4} & \frac{L^3}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & L & \frac{3L^2}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-L}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{14} \\ a_{15} \end{Bmatrix} \tag{4.136}$$

Esta matriz designada por $[B]$, relaciona as incógnitas nodais com os graus de liberdade.

$$\{p_i\} = [B]\{a_i\} \Leftrightarrow \{a_i\} = [B]^{-1}\{p_i\} \tag{4.137}$$

pelo que, qualquer deslocamento generalizado dos sete explicitados poderá ser determinado através da seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \\ \psi \\ RY \\ RZ \\ AMP \end{Bmatrix} = [d]\{a_i\} = [d][B]^{-1}\{p_i\} = [N]\{p_i\} \quad (4.138)$$

em que a matriz $[N]$ apresenta as funções de interpolação dos deslocamentos generalizados. Cada um destes sete graus de liberdade pode ser calculado através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} U(x) &= h_1(x)p_1 + h_4(x)p_8 + h_7(x)p_{15} \\ V(x) &= h_2(x)p_2 + \frac{L}{2}h_3(x)p_6 + h_5(x)p_9 + \frac{L}{2}h_6(x)p_{13} \\ W(x) &= h_2(x)p_3 - \frac{L}{2}h_3(x)p_5 + h_5(x)p_{10} - \frac{L}{2}h_6(x)p_{12} \\ \psi(x) &= h_2(x)p_4 + \frac{L}{2}h_3(x)p_7 + h_5(x)p_{11} + \frac{L}{2}h_6(x)p_{14} \\ RY(x) &= h_2'(x)p_3 - \frac{L}{2}h_3'(x)p_5 + h_5'(x)p_{10} - \frac{L}{2}h_6'(x)p_{12} \\ RZ(x) &= h_2'(x)p_2 + \frac{L}{2}h_3'(x)p_6 + h_5'(x)p_9 + \frac{L}{2}h_6'(x)p_{13} \\ AMP(x) &= h_2'(x)p_4 + \frac{L}{2}h_3'(x)p_7 + h_5'(x)p_{11} + \frac{L}{2}h_6'(x)p_{14} \end{aligned} \quad (4.139)$$

Nestas expressões as funções h_i , representam as funções de interpolação polinomiais, descritas da forma seguinte:

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{1}{2} - \frac{x}{L} & h_5(x) &= \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x}{2L} + \frac{1}{2} \\ h_2(x) &= \frac{2x^3}{L} - \frac{3x}{2L} + \frac{1}{2} & h_6(x) &= \frac{2x^3}{L^3} + \frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{2L} - \frac{1}{4} \\ h_3(x) &= \frac{2x^3}{L^3} - \frac{x^2}{L^2} - \frac{x}{2L} + \frac{1}{4} & h_7(x) &= 1 - \frac{4x^2}{L^2} \\ h_4(x) &= \frac{1}{2} + \frac{x}{L} & & \end{aligned} \quad (4.140)$$

No caso de se utilizar a expressão 4.133 para determinar a deformação axial, o campo de deslocamentos discretizado da forma apresentada conduz a uma rigidez excessiva, ou seja, o fenómeno de “locking” aparece. Com efeito, os diferentes termos da deformação axial que possuem o mesmo grau em “y” e em “z”, não possuem o mesmo grau em “x”, de maneira que

não será possível representar correctamente o modo de flexão constante. Para resolver este problema, Franssen [4.26] recorre a uma solução que substitui os termos quadráticos das derivadas dos deslocamentos laterais e transversais v'' , w'' por uma constante igual à média sobre o comprimento do elemento, para lhes conferir o mesmo grau polinomial em “x” que ao termo u' . Este termo é de grau zero, pelo que, por simetria o grau de liberdade 15 terá um valor nulo para este tipo de solicitação.

Os termos de acoplamento $w''\psi$ e $v''\psi$ serão substituídos por uma função linear em x , permitindo obter o mesmo grau do polinómio que os termos em v'' , w'' e ψ'' . Esta função linear é determinada pelo método dos mínimos quadrados, através da minimização da diferença entre a nova expressão e a expressão inicial.

Através destas duas transformações, o campo das deformações que aparece em função da discretização escolhida é o seguinte.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & \frac{\partial u(x)}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} - y \left\{ \frac{3x}{2(L/2)^3} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \psi(x) \cdot x \cdot dx + \frac{1}{2L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \psi(x) dx \right\} + \\ & z \left\{ \frac{3x}{2(L/2)^3} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \psi(x) \cdot x \cdot dx + \frac{1}{2L/2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} \psi(x) dx \right\} - \omega(y, z) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \\ & \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \left[(y^2 + z^2) \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{xy} = & -\frac{1}{2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \left[z + \frac{\partial \omega(y, z)}{\partial y} \right] \\ \varepsilon_{xz} = & \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \left[y - \frac{\partial \omega(y, z)}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (4.141)$$

Este é o campo que é utilizado no cálculo das tensões longitudinais. Durante a determinação do incremento das deformações será conveniente adicionar certos termos para que os seis modos de deslocamentos rígidos não produzam variações nas deformações, facto que será importante para estabelecer o equilíbrio das forças nodais energeticamente equivalentes às tensões e para assegurar a convergência do elemento. A variação das deformações será dada pela expressões seguintes:

$$\begin{aligned}
 \delta \varepsilon_{xx} = & \delta u' + \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} [y' \delta v' + w' \delta w'] dx - y \delta v'' - z \delta w'' - \\
 & y \left[\frac{3x}{2(L/2)^3} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \delta \psi w'' x dx + \frac{L}{2} (p_{12} \delta p_{11} + p_5 \delta p_4) + \int_{-L/2}^{L/2} \psi \delta w'' x dx \right\} \right] + \\
 & \frac{1}{2(L/2)} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \delta \psi w'' dx + (p_{12} \delta p_{11} - p_5 \delta p_4) + \int_{-L/2}^{L/2} \psi \delta w'' dx \right\} + \\
 & z \left[\frac{3x}{2(L/2)^3} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \delta \psi v'' x dx - \frac{L}{2} (p_{13} \delta p_{11} + p_6 \delta p_4) + \int_{-L/2}^{L/2} \psi \delta v'' x dx \right\} \right] + \\
 & \frac{1}{2(L/2)} \left\{ \int_{-L/2}^{L/2} \delta \psi v'' dx + (p_{13} \delta p_{11} - p_6 \delta p_4) + \int_{-L/2}^{L/2} \psi \delta v'' dx \right\} + \\
 & r^2 \psi' \delta \psi' - w(y, z) \delta \psi'' \\
 \delta \varepsilon_{xy} = & -\frac{1}{2} \delta \psi' \left[z + \frac{\partial \omega(y, z)}{\partial y} \right] \quad \delta \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \delta \psi' \left[y - \frac{\partial \omega(y, z)}{\partial z} \right] \quad (4.142)
 \end{aligned}$$

4.5.7.2. - Integração numérica

Para efectuar integração numérica sobre a secção recta, esta deverá ser discretizada em elementos planos regulares de três ou quatro lados. Para cada nó presente deverá ser conhecida a evolução da temperatura ao longo do tempo, e para cada elemento deverá ser conhecida a posição do respectivo centróide (figura 4.20), o valor da respectiva área e a temperatura média deste.

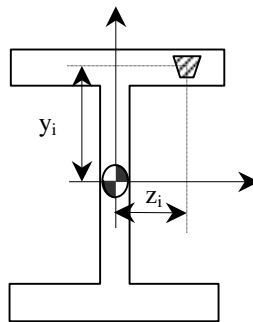


Fig.4.20 - Integração sobre a secção recta do elemento finito de viga.

Cada integração numérica das propriedades de rigidez e dos esforços deverá ser efectuada da seguinte forma.

$$\int_A E(y,z)y^a z^b dydz \cong \sum_{i=1}^N E_i(T_i)y_i^a z_i^b A_i$$

$$\int_A \sigma(y,z)y^c z^d dydz \cong \sum_{i=1}^N \sigma_i(T_i)y_i^c z_i^d A_i \quad (4.143)$$

em que T_i representa a temperatura média do elemento plano i , A_i define a área do elemento, a dupla de coordenadas (y_i, z_i) representam a localização do centróide do referido elemento, N corresponde ao número total de elementos na secção recta, enquanto que os inteiros positivos a, b, c e d , dependem do termo a calcular.

Cada elemento plano utilizado na evolução térmica constitui uma fibra no elemento de viga apresentado. Esta forma de proceder é genérica e permite descrever qualquer forma de secção recta e utilizar vários tipos de material.

A integração na direcção longitudinal é efectuada utilizando o método de Gauss, com a escolha do número de pontos adequados, no mínimo igual a dois. O fenómeno de sobre-rigidez associados aos elementos deste tipo podem ser demonstrados através do exemplo da viga encastrada submetida a uma carga transversal na extremidade.

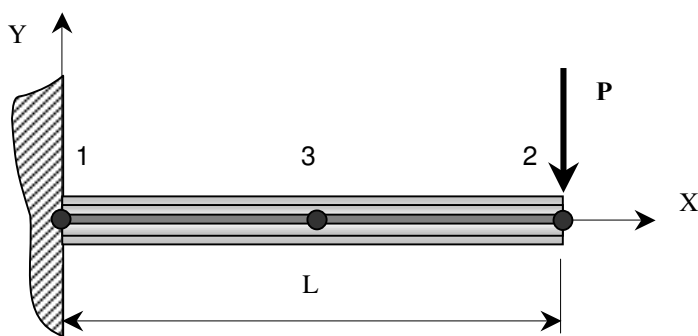


Fig.4.21 – Viga discretizada com 1 elemento finito.

No caso de se considerarem dois pontos de Gauss situados nas abcissas naturais $\xi = 0.211$ e $\xi = 0.789$, e admitindo que a relação momento curvatura da secção segue um comportamento elasto plástico, caracterizada por uma rigidez EI e por um momento plástico M_p , e admitindo ainda que a integração sobre a secção recta é exacta, é possível analisar a influência numérica deste fenómeno. Assim, no domínio elástico, o deslocamento vertical na extremidade livre da viga vale:

$$f = \frac{PL^3}{3EI} \quad (4.144)$$

O deslocamento será indeterminado para uma carga de $P = M_p / L$, pelo que, numericamente o comportamento será elástico até ao instante em que o primeiro ponto de Gauss atinge o momento plástico M_p . Neste instante e nesse local, $P(L - 0.211L) = M_p$. Este valor corresponde a uma carga de $P = 1.27 M_p / L$ que demonstra a carga de ruína subestimada em 27%. Para minimizar este problema, uma das opções seria a de aumentar o número de pontos de Gauss por forma a

que o primeiro dentre eles estivesse mais próximo do encastramento, detectando mais cedo a plastificação. Efectivamente, no caso de se utilizar três pontos de Gauss, o valor crítico de carga encontrada apenas subestima a carga de ruína em 13%, no entanto existem ainda os dois pontos restantes onde o comportamento ainda é elástico. A integração sobre o comprimento dá ao elemento uma rigidez por flexão que vale cerca de 25 % da rigidez elástica. A rigidez apenas se anulará no instante em que o segundo ponto de Gauss apresente plastificação, a que corresponderá uma carga $P = 1.40 M_p/L$. Demonstra-se assim que em vez de diminuir o problema, este ficou agravado, concluindo que se deverá aumentar o número de elementos finitos, em vez de aumentar a ordem de integração.

Na integração das partes das componentes de corte, criadas pela torção, e com vista a não desprezar a energia associada, considera-se que o módulo de corte do material G , mantém o mesmo valor calculado a 20[°C] durante o fogo. Os termos que aparecem durante a aplicação do PTV, e que têm em consideração o corte criado pela torção fazem aparecer as seguintes parcelas, que constituem a rigidez torsional.

$$\int_V G \left[\left(y + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(z + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dV \quad (4.145)$$

A parte linear da matriz rigidez relativas aos graus de liberdade torsionais, apresenta a forma seguinte, na ordem de p_4, p_7, p_{11} e p_{14} .

$$K_u = GC_t \begin{bmatrix} 0.6L/2 & 0.1 & -0.6L/2 & 0.1 \\ & 4/15 L/2 & -0.1 & -1/15 L/2 \\ & & 0.6L/2 & -0.1 \\ & & & 4/15 L/2 \end{bmatrix} \quad (4.146)$$

O produto GC_t representa a rigidez torsional do elemento.

4.6. – Torção não uniforme

Neste sub-capítulo é apresentado um estudo sobre o comportamento de secções de viga à torção não uniforme. Este modo de deformação não poderá ser desenvolvido se a secção recta não puder empenar ou se esse empenamento for limitado por condições de apoio adequadas.

Diz-se que uma secção recta plana empenará, logo que, depois de deformada sobre acção de um momento de torção exterior, ela não continua plana. Caso o empenamento seja impedido em $x=0$ ou se for parcialmente impedido, a secção recta resiste em torção não uniforme e mista, respectivamente. Caso o empenamento seja liberto, a secção recta resiste em torção uniforme.

Considerando um cilindro plano, de secção recta qualquer e cujas geratrizes sejam paralelas ao eixo dos “x” e que esteja submetido a uma torção em torno do eixo da viga. Na

figura 4.22 a secção recta encontra-se submetida a uma rotação α_x , tal que $\alpha_x = x\alpha$, onde α representa a rotação por unidade de comprimento.

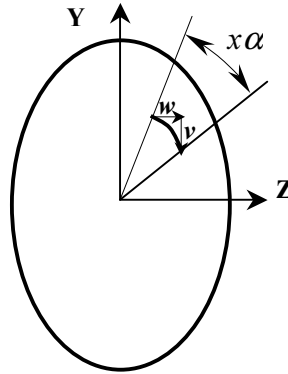


Fig. 4.22 - Secção recta com elemento sujeito a torção.

O movimento de um ponto $P(x,y,z)$ será definido pela seguinte hipótese de Saint Venant.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_x \times \omega(y, z) \\ v(x, y, z) &= z \times \alpha_x \\ w(x, y, z) &= -y \times \alpha_x \end{aligned} \quad (4.147)$$

Nestas expressões, u representa o empenamento da secção e $\omega(y, z)$ representa a função de empenamento. O valor do ângulo de rotação pode ser expresso em função das componentes das deformações a que o ponto está sujeito, conforme expressão seguinte.

$$\alpha_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (4.148)$$

As únicas deformações não nulas são:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} - y \right) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + z \right) \end{aligned} \quad (4.149)$$

No caso de materiais isotrópicos, as componentes do tensor das tensões não nulas são σ_{zx} e σ_{yx} , pelo que a equação de equilíbrio de um elemento de volume se reduz a:

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4.150)$$

com as duas componentes em referência a igualar.

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz} = G\alpha\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - y\right) \\ \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} = G\alpha\left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + z\right)\end{aligned}\quad (4.151)$$

Neste caso a expressão dos trabalhos virtuais pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_A (\delta\varepsilon_{xz} G\varepsilon_{xz} + \delta\varepsilon_{xy} G\varepsilon_{yx}) dA = 0 \quad (4.152)$$

As variações virtuais das deformações de corte em causa podem ser escritas conforme se apresenta na expressão seguinte:

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial\delta\omega}{\partial z} \\ \delta\varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial\delta\omega}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.153)$$

Finalmente a equação 4.152 pode ser escrita em função da incógnita ω que se pretende determinar.

$$\int_A \left(\frac{\partial\delta\omega}{\partial z} \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} - y \right) + \frac{\partial\delta\omega}{\partial y} \left(\frac{\partial\omega}{\partial y} + z \right) \right) dA = 0 \quad (4.154)$$

Esta equação servirá de base ao cálculo da função de empenamento e da rigidez à torção do elemento de viga tridimensional.

Prandtl introduziu uma função ϕ definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial y} &= \sigma_{xz} = G\gamma_{xz} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z} &= -\sigma_{xy} = -G\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (4.155)$$

As equações de compatibilidade permitem escrever

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 0\end{aligned}\quad (4.156)$$

Substituindo a expressão 4.155 em 4.156, obtêm-se duas equações diferenciais em função da variável ϕ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{4.157}$$

Partindo da expressão 4.155 é possível, após nova diferenciação, relacionar a função de Prondtl com as deformações de corte.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial z} = G \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = -2G\alpha \tag{4.158}$$

A função $\phi(y,z)$ pode ser representada graficamente num referencial cartesiano, como uma superfície curva, de tal forma que o gradiente dessa função represente o valor da tensão. A condição de tensão nula ao longo da superfície exterior, implica que a função $\phi(y,z)$ seja constante ao longo da periferia da secção.

Em resumo, se para uma dada secção recta se puder determinar uma função $\phi(y,z)$ que satisfaça a equação 4.158 e além disso, verifique as condições fronteira, então a solução apresentada resolve o problema da torção [4.28].

Pretendendo aplicar esta teoria às secções de paredes finas, obtêm-se uma distribuição da função de empenamento ω definida pelas expressões que se seguem e representadas na figura 4.23, para o caso de uma secção aberta em I.

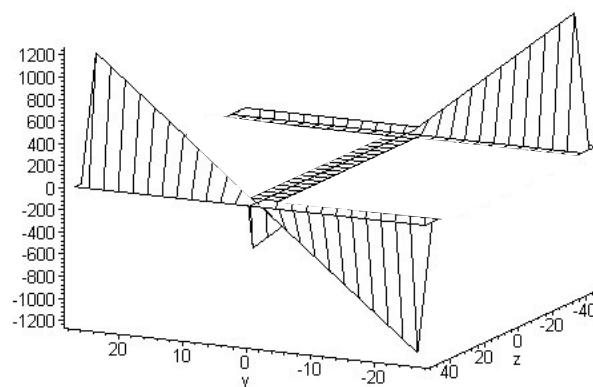


Fig. 4.23 – Representação da função de empenamento ω .

Considerando a hipótese segundo a qual a camada superior do perfil (banzo) é equivalente a uma placa fina, deduz-se das expressões da mecânica dos sólidos que:

$$\gamma_{xz} = 0 \tag{4.159}$$

Utilizando a equação 4.158 e substituindo nela a expressão 4.159, pode-se escrever que:

$$G \left[\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right] = -2G\alpha \Leftrightarrow \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = -2\alpha \quad (4.160)$$

Após integração, pode-se deduzir que:

$$\gamma_{xy} = -2\alpha \left(z - \frac{d'}{2} \right) \quad (4.161)$$

em que $d' = h - tf$, sendo h a altura do perfil e tf a espessura dos banzos. Substituindo o resultado de 4.161 na expressão 4.151, obtém-se após integração na direcção “y”, a seguinte expressão.

$$\omega = (d' - z)y \quad (4.162)$$

É possível impor as mesmas hipóteses simplificativas para o caso da alma. Neste caso e partindo da mesma hipótese simplificativa, pode-se escrever:

$$\gamma_{xy} = 0 \quad (4.163)$$

Introduzindo na expressão 4.158 conclui-se que:

$$\gamma_{xz} = 2y\alpha \quad (4.164)$$

pele que, depois da introdução deste resultado em 4.151, é possível determinar a variação da função ω na alma do perfil.

$$\omega = yz \quad (4.165)$$

A função obtida corresponde à distribuição apresentada na figura 4.24.

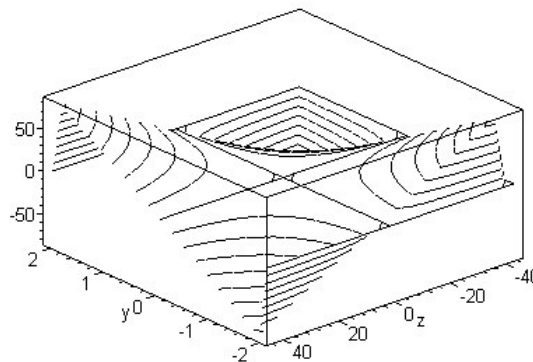


Fig. 4.24 – Distribuição espacial da função de empenamento na alma de um perfil IPE100. Dimensões em [mm].

Utilizando o mesmo raciocínio para o banzo inferior, obtém a expressão para a função de empenamento.

$$\omega = -y(z + d') \quad (4.166)$$

Estas aproximações podem ser utilizadas na resolução de problemas de torção, em vez do cálculo numérico no domínio das equações diferenciais.

4.7. - Solução de equações não lineares

Quando se analisam problemas estruturais caracterizados pela ocorrência de fenómenos não lineares, quer do âmbito geométrico (associados aos grandes deslocamentos) quer devidos ao comportamento não linear do material, as equações de equilíbrio não lineares não são passivas de resolução recorrendo a métodos de solução directa. Esta situação pode ser no entanto ultrapassada adoptando formas incrementais das equações de equilíbrio e onde as cargas exteriores são aplicadas gradativamente, ou seja, por incrementos, até que o seu valor total ou limite seja atingido.

Existem dois tipos de métodos de solução incrementais que podem ser utilizados. Um deles, puramente incremental, baseado nos pressupostos acima referidos e um outro, do tipo incremental e iterativo, onde o processo incremental é secundado por um processo iterativo no sentido de o tornar mais eficiente e preciso [4.32]. No primeiro caso, o problema não linear é substituído por uma sequência de soluções lineares, aplicando para o efeito, as cargas exteriores por incrementos. Este método muito simples de programação, apresenta alguns problemas quando encontra situações não lineares bem vincadas, podendo conduzir a um significativo afastamento da solução procurada. O equilíbrio nunca se verifica para os diferentes níveis de carga aplicados, o que conduz a uma acumulação de erros do processo incremental. No segundo caso, uma vez que se utiliza um processo iterativo para cada nível de carga, os erros transmitidos ao nível de carga seguinte são pequenos, garantindo desta forma um melhor comportamento.

Apesar das boas características de convergência de alguns métodos, os iterativos tornam-se demasiadamente lentos por, em alguns casos, ser necessário recalcular em todas as iterações do processo incremental, a matriz rigidez global da estrutura e determinar a sua inversa. Esta situação tem levado diversos investigadores a dedicarem especial atenção ao desenvolvimento de processos numéricos adequados. Na figura 4.25 está esquematizado todo o processo de obtenção de soluções para problemas não lineares unidimensionais.

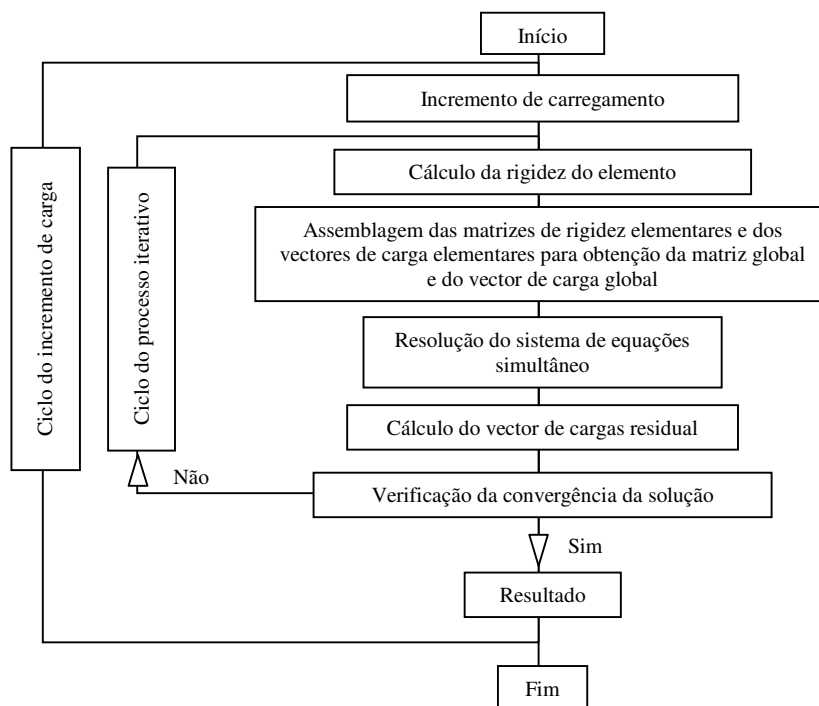


Fig. 4.25 – Organização de um programa para aplicações unidimensionais não lineares.

4.7.1. - Método Puramente Incremental

Neste método procura-se obter a solução das equações de equilíbrio para o incremento de ordem n admitindo que é conhecida a solução para o incremento anterior, $n-1$. O vector dos incrementos dos deslocamentos $\{\Delta d\}^n$ procurado, pode ser obtido recorrendo à relação 4.167,

$$[K_r]^n \{\Delta d\}^n = \{\Delta f\}^n - \{\Psi\}^{n-1} \tag{4.167}$$

onde $[K_r]$ representa a matriz de rigidez tangencial da estrutura definida a partir das condições geométricas e materiais encontradas no final do incremento $n-1$, enquanto que o vector das forças residuais ou não equilibradas, $\{\Psi\}^{n-1}$, obtidas nesse mesmo instante, pode ser determinado através da expressão 4.168,

$$\{\psi\}^{n-1} = \{r\}^{n-1} - \{f\}^{n-1} \neq 0 \tag{4.168}$$

em que o vector $\{r\}^{n-1}$ é definido genericamente pela expressão 4.169 e representa o vector de forças nodais equivalentes à distribuição de tensões encontrada.

$$\{r\}^{n-1} = \int_V ([B]^{n-1})^T [\sigma]^{n-1} dV \tag{4.169}$$

O vector $\{f\}^{n-1}$ representa o vector de forças nodal total e exteriormente aplicadas no incremento anterior.

A utilização deste método na análise de problemas com características não lineares bem vincadas apresenta diversas dificuldades, podendo conduzir a um significativo afastamento da solução procurada, onde o equilíbrio nunca é atingido, para os diversos níveis de carga aplicados e os erros acumulam-se ao longo do processo incremental. Em alguns casos, se os incrementos de carga não forem suficientemente pequenos, o processo de análise pode mesmo tornar-se instável.

No caso do processo ser convergente, quando n tende para infinito, a solução tende para o seu valor exacto. Conforme se poderá verificar, será necessário recalcular a matriz rigidez em cada iteração. O método para fazer parar o processo poderá passar pelo cálculo das diferenças sucessivas de solução, ou habitualmente, através da normas das variáveis do problema. Apresenta-se na figura 4.26 um procedimento gráfico de convergência de solução para o caso de uma variável simples.

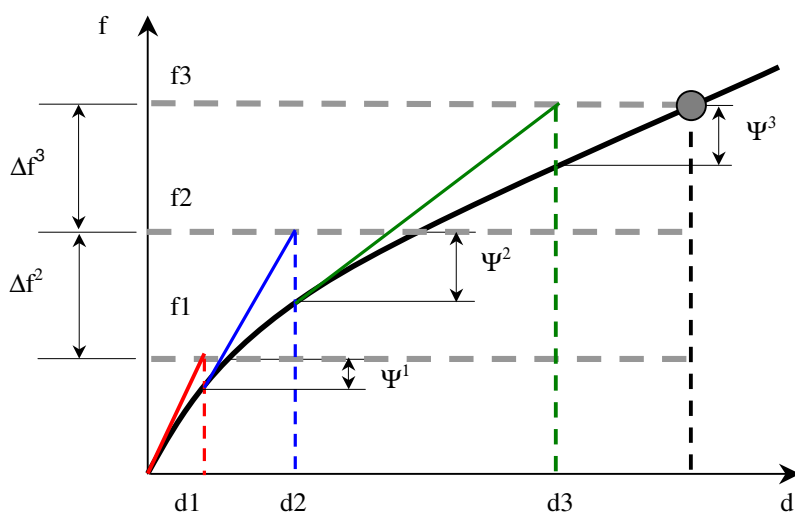


Fig.4.26 – Exemplo do processo puramente incremental.

4.7.2. - Métodos Incrementais e Iterativos

Nestes métodos é aplicado um processo iterativo para cada nível de carga aplicado, até ser satisfeito um determinado critério de convergência devidamente escolhido para o efeito. Pretende-se assim tornar o vector das forças residuais suficientemente pequeno, ou seja, $\Psi \cong 0$ antes de se passar ao incremento de carga seguinte.

Admitindo o conhecimento de uma solução para a equação 4.167, para a iteração de ordem i , o problema a resolver toma agora a forma genérica, para a iteração de ordem $i + 1$:

$$[K_T]_i^n \{\delta d\}_i^n = -\{\Psi\}_i^{n-1} \tag{4.170}$$

com o vector de forças residuais a ser calculado através da expressão 4.171, possibilita-se o

cálculo de variação iterativa dos deslocamentos $\{\delta d\}_i^n$ na iteração corrente.

$$\{\Psi\}_i^n = \{r\}_i^n - \{f\}_i^n \quad (4.171)$$

Esta aproximação, em que o vector $\{\delta d\}_i^n$ é obtido utilizando a matriz de rigidez tangencial, correspondente à última configuração encontrada $\{K_T\}_i^n$, é normalmente conhecida pelo método de Newton Raphson.

Estas aproximações possibilitam obter as seguintes actualizações ao nível do deslocamento, para cada nível de carregamento n , de acordo com as expressões 4.172 e 4.173.

$$\{\Delta d\}_{i+1}^n = \{\Delta d\}_i^n + \{\delta d\}_i^n = \{\delta d\}_0^n + \sum_{j=1}^i \{\delta d\}_j^n \quad (4.172)$$

$$\{d\}_{i+1}^n = \{d\}_i^n + \{\delta d\}_i^n = \{d\}_0^n + \{\Delta d\}_{i+1}^n \quad (4.173)$$

em que o deslocamento para o nível de carga n e para a primeira iteração pode ser aproximado pelo deslocamento final obtido no incremento de carga $n-1$ e o vector da variação iterativa do deslocamento no nível de carga n e iteração zero, pode ser aproximado pelo incremento de deslocamento na iteração 1, ou seja, pela equação 4.174.

$$\{\delta d\}_0^n = \{\Delta d\}_1^n \quad (4.174)$$

4.7.2.1 - Método de Newton Raphson (KT)

Num problema de mecânica estrutural procura-se a solução de um sistema de equações de equilíbrio que, no caso de se optar por uma formulação em elementos finitos pode ser descrito pela expressão seguinte:

$$[K]\{d\} = \{f\} \quad (4.175)$$

onde a primeira matriz $[K]$ deverá ser simétrica e não singular, caracterizando a rigidez global da estrutura em estudo, sendo obtida a partir das contribuições individuais dos vários elementos finitos considerados. O vector das incógnitas é representado pela vector $\{d\}$, enquanto que o vector $\{f\}$ representa o vector de cargas exteriormente aplicadas.

Sendo a matriz $[K]$ dependente dos deslocamentos $\{d\}$ e eventualmente das suas derivadas, é impossível resolver o sistema 4.175 através de uma simples inversão da matriz. Por forma a contornar este obstáculo, recorre-se aos métodos iterativos conhecidos, dos quais se apresenta um dos mais divulgados.

Definindo o resíduo através da expressão 4.176, facilmente se constata que este, também depende do campo de deslocamentos.

$$\{\Psi(\{d\}^n)\} = \{r\}(\{d\}^n) - \{f\}^n \quad (4.176)$$

Sendo $\{f\}^n$ o vector das forças nodais exteriormente aplicadas e associadas ao incremento de carga n , enquanto que $\{d\}^n$ representa o vector dos deslocamentos nodais procurado, $\{\Psi(\{d\}^n)\}$ representa o vector das forças nodais equivalentes à distribuição de tensões encontradas no fim do incremento de carga n e cujo valor é determinado pela expressão 4.177.

$$\{r\}^n = \int_V ([B]^T)^n \{\sigma\}^n dV \quad (4.177)$$

O resíduo, apresentado pela letra Ψ , representa o valor das forças residuais não equilibradas, associadas ao incremento de carga n .

No caso de se designar por $\{d\}_i^n$, uma estimativa do vector de deslocamentos para a iteração i , à qual corresponde um vector de forças residuais $\{\Psi(\{d\}_i^n)\} \leq \{0\}$, pode-se obter um valor melhorado para os deslocamentos na iteração $i+1$, recorrendo ao desenvolvimento em série de Taylor limitada de $\{\Psi(\{d\}_{i+1}^n)\}$ na vizinhança de $\{d\}_i^n$, determinado pela expressão 4.178.

$$\{\Psi(\{d\}_{i+1}^n)\} \approx \{\Psi(\{d\}_i^n)\} + \left. \frac{\partial \{\Psi(\{d\})\}}{\partial \{d\}} \right|_i^n \{\delta d\}_i^n = 0 \quad (4.178)$$

Esta expressão pode ser escrita de outra maneira, conforme a expressão seguinte.

$$\{\Psi(\{d\}_{i+1}^n)\} + [K_T]_i^n \{\delta d\}_i^n = 0 \quad (4.179)$$

Desta forma, o vector variação virtual dos deslocamentos pode ser calculado através da equação 4.180:

$$\{\delta d\}_i^n = -([K_T]_i^n)^{-1} \{\Psi(\{d\}_{i+1}^n)\} \quad (4.180)$$

em que a matriz $[K_T]_i^n$, representa a matriz rigidez tangencial da estrutura global em análise, sendo definida de acordo com a expressão 4.181.

$$[K_T]_i^n = \left. \frac{\partial \{\Psi(\{d\})\}}{\partial \{d\}} \right|_i^n \quad (4.181)$$

Esta aproximação possibilita determinar a actualização do vector de deformação, calculado através da expressão seguinte.

$$\{d\}_{i+1}^n = \{d\}_i^n + \{\delta d\}_i^n \quad (4.182)$$

A representação gráfica deste processo pode ser verificada na figura 4.27, tendo sido apenas esquematizado um incremento de carga.

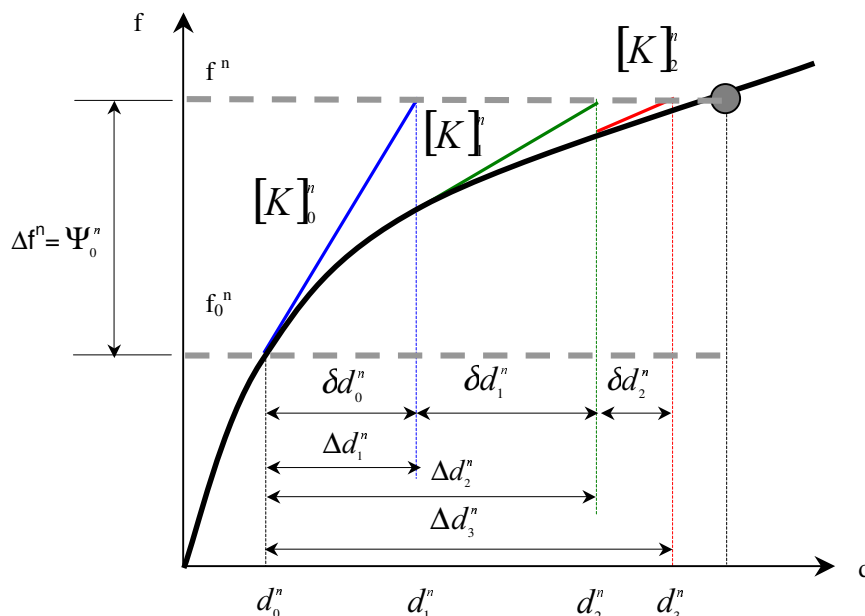


Fig.4.27 - Representação gráfica do método de Newton Raphson, para um sistema unidimensional.

O processo iterativo ficará concluído, quando for satisfeito um determinado critério de convergência, devidamente escolhido para o efeito. No caso da carga exterior aplicada ser conservativa, a matriz rigidez tangencial é calculada pela expressão 4.183.

$$[K_r] = \frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{d\}} = \frac{\partial \{r\}}{\partial \{d\}} \quad (4.183)$$

Uma vez que o vector de cargas nodais exteriores $\{f\}$, não depende do vector deslocamentos $\{d\}$, conduz naturalmente ao anulamento da contribuição da segunda parcela implícita da expressão 4.181.

4.7.2.2 - Método de Newton Raphson modificado

A utilização do método de solução Newton Raphson (KT) na resolução do sistema de equações não linear, exige a definição da matriz de rigidez tangencial da estrutura, assim como, a determinação da inversa em cada iteração do processo incremental. Tal facto torna o processo de cálculo demasiadamente lento e dispendioso, em especial, quando se utiliza um grande número de incrementos de carga. Para aligeirar este método, criaram-se várias variantes deste, das quais se destacam: o método da rigidez inicial e o método KT1 e KT2. Nestes métodos a matriz de rigidez tangencial é mantida constante durante grande parte do processo, sendo ocasionalmente actualizada, como se representa na figura 4.28.

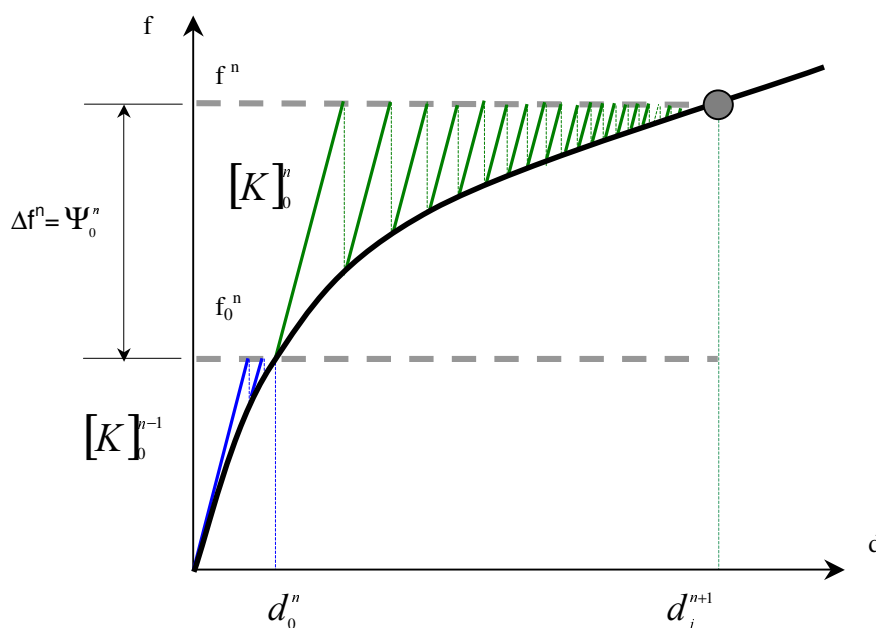


Fig. 4.28.- Representação do método de Newton Raphson modificado.

4.7.2.2.1. - Método da Rigidez Inicial (KO)

Este método, desenvolvido e apresentado por Zienkiewicz [4.31], possui uma característica positiva e outra negativa. Se bem que não seja preciso determinar a matriz de rigidez para cada iteração, o processo de convergência apresenta uma velocidade muito baixa, podendo mesmo conduzir à divergência do processo, em situações onde as características não lineares são importantes.

No sentido de conciliar este método com o anteriormente apresentado, KT, serão apresentados dois outros métodos, para os quais se procede à actualização da matriz uma única vez, em cada incremento de carga.

4.7.2.2.2. - Métodos KT1 e KT2

Estas duas variantes do método de Newton - Raphson distinguem-se apenas pelo momento do processo iterativo onde se faz a actualização da matriz de rigidez global da estrutura. Enquanto que no método KT1 a matriz $[K_T]$ é actualizada na primeira iteração de cada incremento de carga (ver figura 4.29), no método KT2 a actualização de $[K_T]$ far-se-á no início da segunda iteração e após a aplicação do incremento de carga na primeira iteração, como se poderá verificar na figura 4.29.

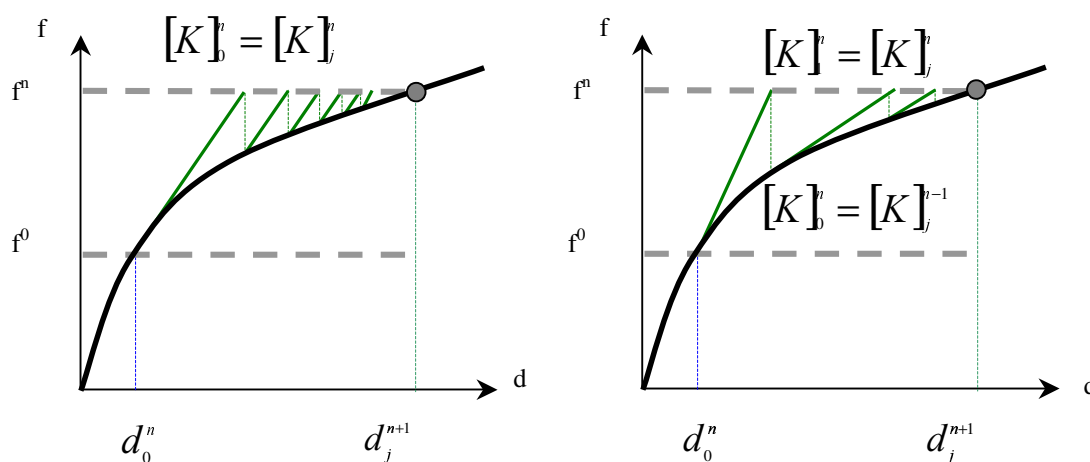


Fig. 4.29 - Método KT1 KT2 para sistema unidimensional.

Sendo assim, a utilização da equação 4.180, para o caso do método KT1 será aproximada por:

$$\{\delta d\}_{i-1}^n = -([K_T]_b)^{-1} \{\psi(\{d\}_{i-1}^n)\} \quad , i \geq 1 \tag{4.184}$$

enquanto que no caso do método KT2, será aproximada pela expressão 4.185.

$$\{\delta d\}_{i-1}^n = -([K_T]_i)^{-1} \{\psi(\{d\}_{i-1}^n)\} \quad , i \geq 2 \tag{4.185}$$

A utilização destes métodos na análise de problemas onde as características não lineares são significativas, conduz normalmente ao aparecimento de dois tipos de situações: por um lado, uma diminuição significativa da velocidade de convergência, que é quadrática no caso do método de Newton-Raphson [4.32], ou por outro, pode conduzir mesmo à divergência do processo iterativo. A primeira verifica-se sempre que se regista uma diminuição da rigidez do sistema durante o incremento de carga, causada, por exemplo, pelo comportamento elasto-plástico de muitos materiais acima de um determinado nível de tensão. O aparecimento do fenómeno de divergência pode ser devido a um aumento de rigidez provocado pelo comportamento não linear geométrico da estrutura, situação que pode ser contornada impondo incrementos de carga mais pequenos, ou ainda a um aumento de rigidez resultante de um descarregamento do material provocado por uma redistribuição de tensões (mesmo em regime de carregamento crescente). Neste caso, a redução do incremento de carga, só por si, não é suficiente para tornar o processo convergente, havendo a necessidade de se proceder a uma redefinição da matriz de rigidez da estrutura.

4.7.2.3 - Método do Comprimento de Arco (ALC)

Muitos dos problemas que se colocam na análise estrutural estão ligados ao aparecimento de fenómenos não lineares vinculados, como são os casos, dos comportamentos do tipo 'snap-through' e 'snap-back', conforme se encontra explicado em [4.30] e [4.33]. Este tipo de situações,

muito frequentes na análise da instabilidade geométrica de elementos estruturais, tornam os métodos iterativos convencionais inadequados para a completa definição da curva de equilíbrio, cujo conhecimento é essencial para a obtenção das condições de colapso da estrutura.

Na figura 4.30 apresenta-se um exemplo de uma curva de equilíbrio característica onde se encontram evidenciadas as dificuldades acima mencionadas. Assim, se for adoptada uma análise incremental relativamente às cargas aplicadas, verificar-se-ia que, uma vez atingido o ponto B da curva, a solução passaria para o ponto D, tornando impossível o conhecimento do comportamento do sistema relativamente ao segmento BD da curva de equilíbrio. Está-se perante um fenómeno do tipo 'snap-through' e que corresponde a um 'salto' dinâmico da solução para um novo estado de deslocamentos em regime de carga constante.

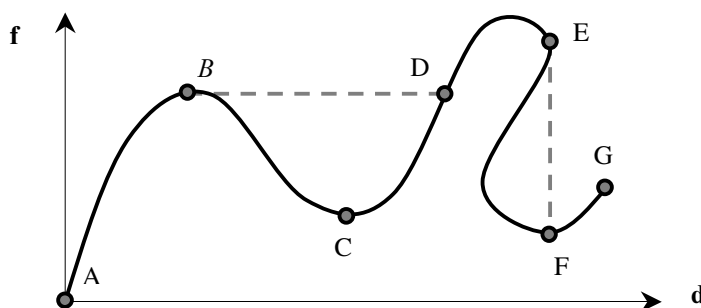


Fig. 4.30- Exemplo de curva de equilíbrio em regime não linear geométrico.

Esta situação poderá ser contornada se for adoptada uma análise onde os deslocamentos sejam prescritos incrementalmente. Toma-se assim possível traçar toda a curva de equilíbrio existente entre B e D e prosseguir a análise até ao ponto E, altura em que se verificara um 'salto' dinâmico da solução para o ponto F. Esta variação do nível de carga em regime de estado de deslocamentos constante, conhecida por fenómeno do tipo 'snap-back', torna inacessível ao projectista o conhecimento do comportamento da estrutura no ramo EF da curva de equilíbrio.

Como consequência do que foi exposto, surgiram os métodos do Controlo do Comprimento de Arco que tomaram possível a definição da curva de equilíbrio para lá dos pontos limite, permitindo portanto, definir as causas do colapso da estrutura em estudo. Estas técnicas possibilitam ainda a melhoria significativa das características de convergência dos métodos iterativos convencionais, como são os casos dos métodos de Newton - Raphson Modificados.

No sentido de permitir a análise do comportamento estrutural além dos pontos limites, Riks [4.34] e Wempner [4.35] propuseram a adição às equações de equilíbrio de uma equação de constrangimento que, para o incremento de carga corrente, apresenta a forma da expressão seguinte:

$$(\{\Delta d\}_i)^T \{\Delta d\}_i + b(\Delta \lambda_i)^2 \{f\}^T \{f\} = (\Delta l)^2 \quad (4.186)$$

onde $\{\Delta d\}_i$ e $\Delta \lambda_i$ são, respectivamente, o vector total dos incrementos dos deslocamentos e o factor total dos incrementos de carga na iteração i , $\{f\}$ é o vector das forças nodais exteriormente aplicadas, Δl é o valor prescrito do comprimento de arco para o incremento de carga corrente e b representa um factor de escala.

Segundo Park [4.36] o factor b deverá estar relacionado com o parâmetro da Rigidez Corrente de Bergan [4.37], de forma que a um aumento de rigidez da estrutura corresponda um aumento da contribuição do termo das cargas na equação anterior. Contudo Crisfield [4.38,4.39] sugere o valor $b = 0$, com base na sua experiência numérica associada à aplicação do método.

Verifica-se no entanto, que o processo enunciado por Ricks Wempner não é adequado para ser utilizado conjuntamente com o método dos elementos finitos, em virtude da equação 4.186 destruir a forma em banda e simetria das equações de equilíbrio. Este problema pode, felizmente, ser contornado, adoptando um processo análogo ao método do controlo do deslocamento proposto por Batoz e Dhatt [4.40].

Na figura 4.31 está representado o efeito do incremento de carga nos deslocamentos.

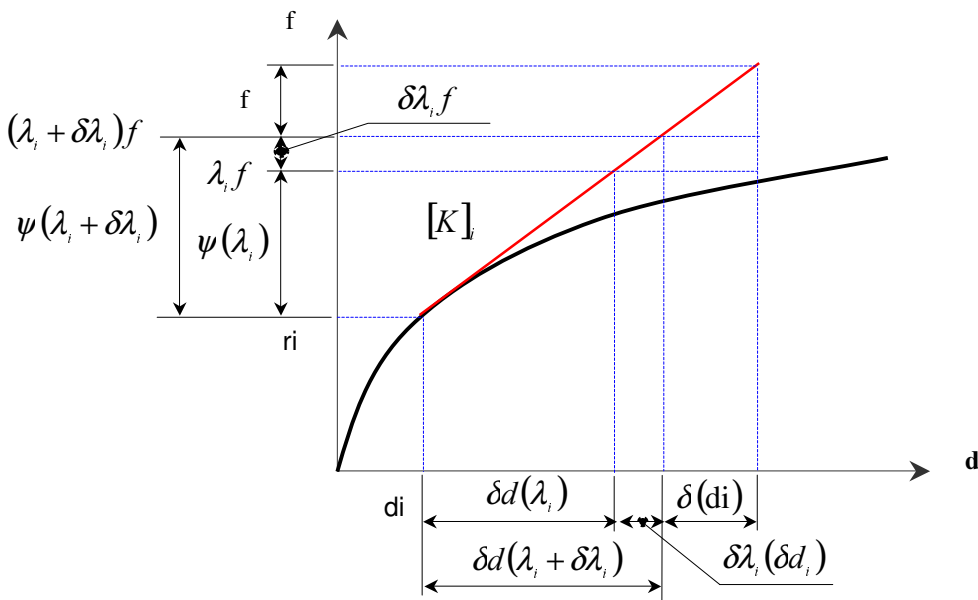


Fig. 4.31 - Efeito da variação do nível de carga na variação dos deslocamentos.

Tendo em conta a equação 4.180 pode escrever-se:

$$\{\delta d(\lambda_i + \delta \lambda_i)\} = -([K_T]_i)^{-1} \{\psi(\lambda_i)\} + \delta \lambda_i ([K_T]_i)^{-1} \{f\} \quad (4.187)$$

ou ainda, numa forma mais condensada,

$$\{\delta d_i\} = \{\delta \bar{d}_i\} + \delta \lambda_i \{\delta d_i\} \quad (4.188)$$

em que λ_i representa o factor do nível de carga associado à iteração corrente, figura 4.31.

A equação 4.188 constitui a base de todos os métodos do Controlo do Comprimento de Arco e que apenas diferem entre si, na definição do parâmetro $\delta \lambda_i$ (factor iterativo de variação

do nível de carga), ou seja, na forma como a solução é obrigada a seguir um determinado 'caminho' durante o processo iterativo.

4.7.3. - Critérios de convergência

Num processo de análise do tipo incremental e iterativo torna-se necessário testar a solução obtida no final de cada iteração para verificar se houve convergência para uma solução aceitável, dentro de uma determinada tolerância, ou se o processo deverá continuar. A tolerância a utilizar deverá ser bem escolhida, para que, por um lado represente um valor realista e por outro não seja demasiadamente onerosa em termos computacionais.

Para cada incremento a considerar deverá ser especificado um número máximo de iterações para que o processo iterativo seja interrompido no caso de ocorrer divergência ou se não for possível encontrar convergência em tempo útil.

Existem vários tipos de critérios de convergência que poderão ser considerados no caso de problemas deste género, entre os quais se destacam os baseados em deslocamentos, forças e em critérios energéticos. No primeiro caso é utilizada a variação iterativa dos deslocamentos para verificar a convergência, que acontecerá quando a norma Euclidiana destes for inferior a uma percentagem da norma Euclidiana dos deslocamentos finais. No segundo caso são comparadas as forças residuais encontradas no final de cada iteração com o valor das respectivas forças externas (aplicadas e reacções), enquanto que no terceiro caso, se compara o acréscimo de energia verificado em cada iteração com a energia desenvolvida no início do processo iterativo, sendo este o processo utilizado no programa SAFIR. Neste programa é determinado o valor de uma quantidade com unidades de energia, que resulta da norma do produto das forças internas pelo deslocamento incremental associado ao passo de tempo i da iteração j .

$$NE = \sum_{k=1}^{NDOF} \left| du_k^{i,j} \cdot F_k^{\text{int}} \right| \quad (4.189)$$

Nesta expressão $du_k^{i,j}$ representa o deslocamento incremental associado aos grau de liberdade em questão e F_k^{int} , o valor das forças calculadas nos nós, como resultantes das forças internas vindas dos elementos. Da forma que se representa esta expressão 4.189, os binómios força-deslocamento e momento-rotação são tratados de modo idêntico.

4.8. – Conclusões

A determinação dos deslocamentos na estrutura foi feita em regime não linear geométrico e material, através do método dos elementos finitos, recorrendo a procedimentos numéricos iterativos e incrementais. A descrição do movimento foi efectuada através da expressão incremental do princípio dos trabalhos virtuais, utilizando a descrição Lagrangeana. A utilização de uma versão linearizada das equações referidas é preferível para um grande número de situações, uma vez que facilita o processo de cálculo.

Dos elementos de viga será importante referir que estes são baseados em hipóteses teóricas de comportamentos que se aproximam do comportamento real, pelo que nunca deixarão de ser aproximações.

Foram apresentadas as teorias clássicas do elemento Hencky Mindlin e do elemento de Euler Bernoulli. Para cada uma destas teorias foram apresentados os respectivos elementos finitos a que deram origem, bem como estudos de convergência da solução.

Foi feita referência ao excesso de rigidez e aos métodos numéricos de integração para evitar o fenómeno do “Shear Locking”.

Finalmente foi apresentado o elemento de viga tridimensional utilizado no programa SAFIR, demonstrando as suas capacidades de análise à torção, associadas às hipóteses de Bernoulli para estados de flexão puros. Aspectos relacionados com a integração numérica, com a resolução de equações não lineares e com métodos incrementais foram utilizados para resolução deste tipo de problemas.

4.9. - Referências

- [4.1]- Soares, Carlos Mota; “Princípios e métodos variacionais em mecânica dos sólidos; CEMUL; Relatório M1.81.01; Dezembro 1981.
- [4.2]- Peterson, Ohosen; “Introduction to the finite element method”; Prentice Hall; 1st edition; 1992.
- [4.3]- Dhatt, Gilbert; “Une presentation de la méthode des éléments finis”; Maloine S.A. Editeur Paris; 2^{ème} édition; 1984.
- [4.4]- Reddy; “An introduction to the finite element method”; International student edition - McGraw Hill; 1985.
- [4.5]- Frey, F.; “Leçons sur l’ élasticité dite finie et son application au calcul des structures par la méthode des éléments finis”; Rapport interne n° 44; M.S.M.; Université de Liège; 1973.
- [4.6]- Barbosa J. A. Trigo; “Análise não linear por elementos finitos de placas e cascas reforçadas – Aplicação a laminados anisotrópicos”; Dissertação para obtenção do grau de doutor; FEUP; Novembro de 1992.
- [4.7]- Póvoas, R. H. C. de F., "Modelos Não Lineares de Análise e Dimensionamento de Estruturas Laminadas de Betão Incluindo Efeitos Diferidos", Tese de Doutoramento em Eng. Civil, Fac. de Engenharia, Univ. do Porto, Porto, Portugal, 1991.
- [4.8]- Kleiber, M.; Konig, J. A.; Sawczak, A.; "Studies on Plastic Structures: Stability, Anisotropic Hardening, Cyclic Loads", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 33, 487-556, 1982.
- [4.9]- Sa, J. M. A. C. de; "Numerical Modelling of Incompressible Problems in Glass Forming and Rubber Technology", Ph. D. Thesis, C/Ph/91186, Univ. of Wales, Swansea, U.K., 1986.
- [4.10]- Bathe, K.-J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1982.
- [4.11]- Noor, A. K.; Andersen, C. M.; "Mixed Models and Reduced/Selective Integration Displacement Models for Nonlinear Shell Analysis", Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, 1429-1454, 1982.

- [4.12]- Saleeb, A. F.; Chang, T. Y., "An Efficient Quadrilateral Element for Plate Bending Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 24, 1123-1155, 1987.
- [4.13]- Mattiasson, K.; "On the Co-Rotational Finite Element Formulation for Large Deformation Problems", *Chalmers Univ. of Tech., Dept. of Struct. Mech., Publ. 83:1*, Goteborg, Sweden, 1983.
- [4.14]- Bathe, K.-J., Ramm, E. e Wilson, E. L., "Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, 353-386, 1975.
- [4.15]- Fung, Y. C., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1965.
- [4.16]- Malvern, L. E., "Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A., 1969.
- [4.17]- Ekmark, B., "On Large Strain Theories in Sheet Metal Forming - General Theories and Numerical Considerations with Particular Emphasis on Strain Analysis, Non Conservative Loading and Plastic Anisotropy", *Doctoral Thesis, 1983: 24D*, Hogskolan i Lulea, Lulea University, Sweden, 1983.
- [4.18]- Oden, J. T.; "Finite Elements of Nonlinear Continua", McGraw-Hill Book Comp. Ltd., New York, U.S.A., 1972.
- [4.19]- Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", 3rd Edition, McGraw-Hill Book Comp. Ltd., London, U.K., 1979.
- [4.20]- Owen, D. R. J.; Hinton, E., "Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice", Pineridge Press Ltd., Swansea, U.K., 1980.
- [4.21]- Kreyszig, E.; "Advanced Engineering Mathematics", 4th Edition, John Wiley & Sons Inc.; New York; U.S.A.; 1979.
- [4.22]- Timoshenko, S. P.; Young, D. H., "Theory of Structures", *Int. Stud. Edition, 2nd Edition*, McGraw-Hill Book Kogakusha Ltd., Tokyo, Japan, 1965.
- [4.23]- Goyet, Vicent de Ville de; "L'analyse statique non lineaire par la methode des éléments finis des structures spatiales formées de poutres a section non symetrique"; Thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique de Docteur en science Appliquées; Université de Liège – faculté des Sciences appliquées; 1989.
- [4.24]- Stolarsky, H.; Belytschko, T.; "Shear and membrane locking in curved C° elements"; *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*; vol 41; 1983.
- [4.25]- Talamona, Didier; "Flambement de poteaux metalliques sous charge excentrée, a haute temperatures"; thèse présentée pour obtenir le grade de docteur d'Université Blaise Pascal – École Doctorale de Sciences pour L'ingenieur de Clermont ferrand; 1995.
- [4.26]- Franssen, Jean-Marc; "Contribution à la modelisation des incendes dans les batiments et leur effects sur les structures"; thèse présentée en vue de l'obtention du grade d'agrégé de l'enseignement Supérieurs; Université de Liège; Année academique 1997/98.
- [4.27]- Stolarsky, H.; Belytscheko, T.; "membrane locking and reduced integration for curved elements"; *Transactions of the American Society of mechanical Engineers (ASME)*; volume 49; March 1982.
- [4.28]- Vaz, Mário A. P.; "Estudo das tensões devidas à torção em veios de secção constante"; lição de sintese; FEUP; Janeiro de 1988.

- [4.29]- Marques, J. M. M. C.; "Nonlinear Finite Element Solutions with Quasi- and Secant-Newton Methods"; em "Numerical Methods for Non-Linear Problems Vol. 3"; 1117-1147; Pineridge Press Ltd.; Swansea; U.K.; 1986.
- [4.30]- Rahman, H. H. A.; "Computational Models for the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems"; Ph. D. Thesis; C/Ph/66182; Univ. of Wales; Swansea; U.K.; 1982.
- [4.31]- Zienkiewicz, O. C.; Valliappan A.; King P.; "Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems "initial Stress"; Finite Element approach"; Int. Journal Num. Methods in Eng.; vol 1; 75-100; 1982.
- [4.32]- Matthies, H.; Strang, G.; "The solution of nonlinear finite element equations"; Int. Journal Num. Methods in Eng.; vol 14; 1613-1626; 1979.
- [4.33]- Crisfield, M. A.; "Snap-Through and Snap-Back Response in Concrete Structures and the Danger of Under-Integration"; Int. J. Num. Meth. Engng.; Vol. 22; 751-767; 1986.
- [4.34]- Riks, E.; "The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability", J. Appl. Mech.; Vol. 39; 1060-1066; 1972.
- [4.35]- Wempner, G. A.; "Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids"; Int. J. Solids Structures; Vol.; 1581-1599; 1971.
- [4.36]- Park, K. C.; "A Family of Solution Algorithms for Non-Linear Structural Analysis Based on Relaxation Equations"; Int. J. Num. Meth. Engng.; Vol. 18; 1337-1347; 1982.
- [4.37]- Bergan, P. G.; Horrigmoe, G.; Kråkeland, B.; Soreide, T. H., "Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems", Int. J. Num. Meth. Engng.; Vol. 12; 1677-1696; 1978.
- [4.38]- Crisfield, M. A.; "A Fast Incremental / Iterative Solution Procedure that Handles 'Snap-Through"; Computers & Structures; Vol. 13; 55-62; 1981.
- [4.39]- Crisfield, M. A., "An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations", Int. J. Num. Meth. Engng.; Vol. 19; 1269-1289; 1983.
- [4.40]- Batoz, J. L.; Dhatt, G., "Incremental Displacement Algorithms for Nonlinear Problems", Int. J. Num. Meth. Engng.; Vol. 14; 1262-1267; 1979.
- [4.41]- Franssen, Jean - Marc.; "Étude du comportement au feu des structures mixtes acier – béton"; Thèse présentée à la faculté des sciences appliquées de l'université de Liège en vue de l'obtention du grade scientifique de docteur en sciences appliquées; 1986.
- [4.42]- Boreave, Phillippe; " Contribution a l'analyse statique non lineaire des structures mixtes planes formées de poutres avec prise en compte des effects differés et des phases de construction"; thèse présentée en vue de l'obtention du grade scientifique de docteur en sciences appliquées; Université de Liège; Année academique 1990/91.

Capítulo 5

Cálculo de temperaturas

5.1. - Introdução

O efeito de um incêndio numa estrutura tem como consequência directa o aumento da temperatura no material. Este facto por sua vez tem influência na variação das propriedades mecânicas e térmicas, fazendo diminuir a resistência ao fogo e alterando o comportamento dos deslocamentos de uma estrutura bem como a orientação e posição do carregamento que esta suporta. Estas modificações podem conduzir ao colapso da estrutura após determinado período de tempo, que deverá ser determinado a fim de se poder evitar consequências mais dramáticas. É portanto essencial determinar correctamente o campo térmico transitório existente na estrutura para verificar se esta é capaz ou não de suportar um incêndio e neste caso a duração da resistência ao fogo.

Neste capítulo será apresentado o método dos elementos finitos para resolução da equação do calor e utilizados esquemas de integração temporal para determinar o campo de temperaturas em regime transiente.

5.2. - Equação do comportamento térmico

Para simular o comportamento térmico de uma estrutura, será necessário estabelecer algumas hipóteses previstas durante o incêndio. Assim, admitindo que a estrutura não estará animada de velocidade, que o material é isotrópico, incompressível e sem dissipação mecânica, a equação de equilíbrio térmico num sólido pode ser escrita tendo em consideração o balanço de fluxos de energia no corpo sólido, conforme equação 5.1.

$$\sum \phi_{entram} - \sum \phi_{saem} = \Delta U \quad (5.1)$$

O elemento de volume que vai permitir deduzir a equação apresenta-se na figura 5.1.

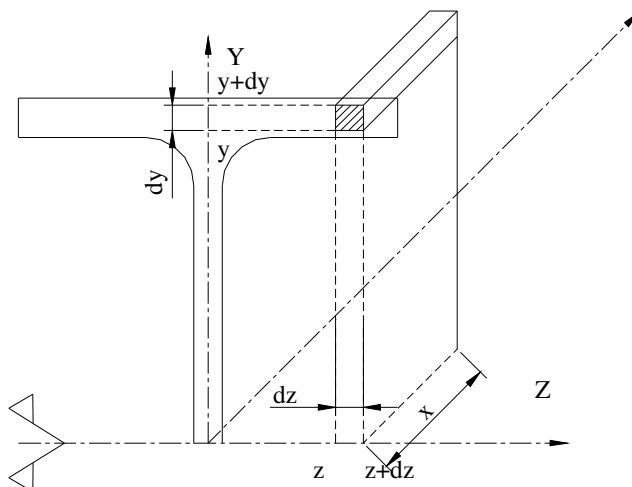


Fig. 5.1 - Representação do elemento de volume.

No elemento de volume entra e sai fluxo de calor segundo as direcções “y” e “z”, sendo apenas apresentado o estudo do balanço numa das direcções.

$$\Delta\phi_z = -\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_z (dy \cdot x) - \left[-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z+dz} (dy \cdot x)\right] \quad (5.2)$$

O fluxo de calor na fronteira do elemento de volume $z + dz$ pode ser escrito em função do fluxo de calor na fronteira “z”, recorrendo à expansão de Taylor até à primeira derivada, conforme expressão 5.3.

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z+dz} = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_z + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_z\right] dz \quad (5.3)$$

Depois de introduzir na expressão 5.2, o balanço na direcção “z” pode ser determinado a partir de:

$$\Delta\phi_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_z (dz \cdot dy \cdot x) \right] \quad (5.4)$$

O balanço térmico segundo a direcção “y” pode ser determinado de uma forma semelhante, dando origem à equação 5.5.

$$\Delta\phi_y = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)_y (dy \cdot dz \cdot x) \right] \quad (5.5)$$

Para escrever a equação 5.1 numa forma diferencial, basta prever a variação de energia interna no elemento de volume considerado.

$$\Delta U = \rho C (dz \cdot dy \cdot x) \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.6)$$

Finalmente substituindo 5.4 a 5.6 em 5.1, obtém-se:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (5.7)$$

onde T representa a temperatura, λ a condutividade do material, ρ a sua massa específica, t representa o tempo e x, y, z as coordenadas espaciais do domínio térmico.

As condições fronteira podem ser de vários tipos, sendo possível agrupá-las em dois grupos. Um grupo representa as condições de Dirichlet, onde se pode impor um valor de temperatura prescrita, enquanto que o segundo grupo representa as condições de Cauchy, onde se pode impor um fluxo de calor por convecção e/ou radiação com a superfície envolvente, como é o caso do fogo, ver figura 5.2.

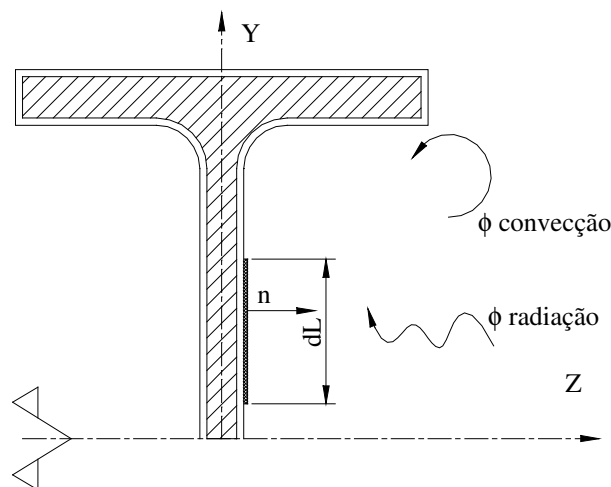


Fig. 5.2- Representação das condições fronteira.

A expressão que traduz esta condição pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left[\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \vec{j} + \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \vec{k} \right] \cdot \vec{n} \cdot dL = -\phi \sigma \varepsilon (T_g^4 - T_L^4) - \alpha (T_g - T_L) \quad (5.8)$$

em que ϕ representa o factor de forma, σ a constante de Stefan Boltzmann, ε a emissividade, enquanto que T_L e T_g , representam respectivamente a temperatura da superfície e a temperatura dos gases da envolvente.

O contacto perfeito entre dois materiais com propriedades diferentes é traduzido pela igualdade dos fluxos apresentados, na figura 5.3, em cada ponto da linha comum dos dois domínios.

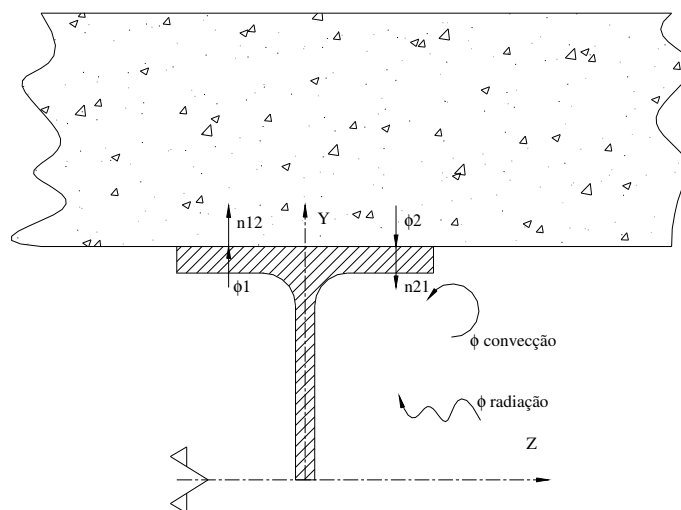


Fig. 5.3- Representação do contacto entre dois materiais.

Neste caso o fluxo de calor nos dois sentidos deverá ser igual, conforme se representa na equação 5.9.

$$\left[\left(-\lambda \frac{\partial T_1}{\partial y} \right)_{nx} + \left(-\lambda \frac{\partial T_1}{\partial z} \right)_{ny} \right] = \left[\left(-\lambda \frac{\partial T_2}{\partial y} \right)_{nx} + \left(-\lambda \frac{\partial T_2}{\partial z} \right)_{ny} \right] \quad (5.9)$$

A integração destas parcelas em todo o domínio do problema, é nulo, uma vez que as normais às superfícies de contacto dos dois materiais têm sentidos opostos, pelo que:

$$\int_V (\vec{A} \cdot \vec{n}) dV = \int_{V_1} (\vec{A} \cdot \vec{n}_{12}) dV + \int_{V_2} (\vec{A} \cdot \vec{n}_{21}) dV = 0 \quad (5.10)$$

em que \vec{A} representa o fluxo de calor em qualquer direcção.

5.3. - Formulação integral fraca

Este método possibilita passar as equações de equilíbrio de forma diferencial para a forma integral. A aproximação por elementos finitos permite discretizar esta formulação integral em cada elemento.

A equação 5.7 pode ser escrita numa forma mais simplificada, conforme expressão 5.11:

$$L(T) + U = 0 \quad (5.11)$$

em que, L representa o operador diferencial e U o valor do termo independente.

O objectivo desta formulação será procurar a função T que anula a forma integral apresentada na expressão 5.12.

$$\int_V \psi(y, z) \cdot [L(T) + U] dv = \sum_{ele} \int_{V_e} \psi(y, z) \cdot [L(T) + U] dV_e = 0 \quad (5.12)$$

Nesta expressão $\psi(y, z)$ representa o peso da função escolhida no método dos resíduos pesados [5.9].

É possível substituir a equação diferencial 5.7 na expressão 5.12, tendo em consideração que nem todas as parcelas contêm derivadas de primeira ordem, pelo que deverá ser utilizado o teorema de Ostrogradsky para diminuir uma ordem as derivadas, escrevendo a forma integral na denominada forma fraca.

O teorema refere que o integral de divergência de um vector, estendido a um volume, deverá igualar o fluxo desse vector que sai na superfície que o delimita. Embora este teorema faça referência a um volume, é possível aplicar ao caso bidimensional, uma vez que o vector em causa não possui componente segundo “x”, conforme se representa na figura seguinte.

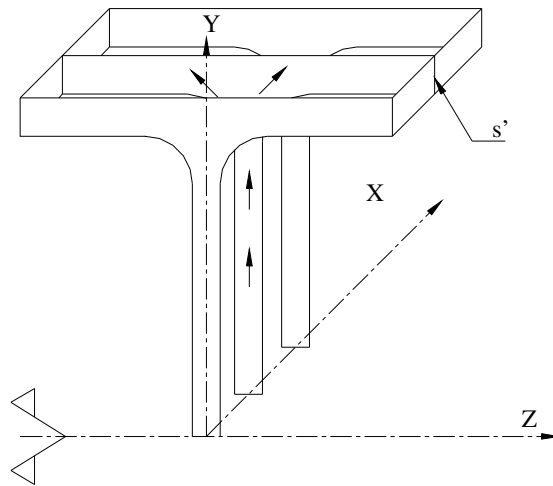


Fig. 5.4- Extensão do teorema de Ostrogradsky.

Partindo do princípio que tudo se passa de uma forma idêntica para qualquer secção “x”, o integral de condução no domínio, pode ser escrito na seguinte forma:

$$\iiint_{y z x} \text{div}(\vec{V}) \cdot dx \cdot dz \cdot dy = \iiint_{y z x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (5.13)$$

em que \vec{V} se encontra definido na expressão 5.14 e S representa a fronteira do volume. Tendo em consideração que a parte integranda não é função de x , pode então fazer-se a integração nesta direcção. O integral de superfície S pode ser simplificado, uma vez que o produto interno do vector genérico \vec{V} com a respectiva normal se anula nas faces de topo.

$$\vec{V} = \left\langle 0, \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \quad (5.14)$$

$$c \cdot \int \int \int_{y,z} \text{div}(\vec{V}) \cdot dx \cdot dz \cdot dy = c \oint_{S'} \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dS' \quad (5.15)$$

Neste caso, S' representa a fronteira de qualquer secção recta, considerada do perfil.

Utilizando a propriedade vectorial da divergência de um vector, pode-se escrever:

$$\text{div}(\psi \cdot \vec{V}) = \psi \cdot \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \text{grad}(\psi) \quad (5.16)$$

Conjugando esta propriedade com as equações 5.12 e 5.13, resulta que:

$$\begin{aligned} \sum_{ele \ V_e} \int \psi(y,z) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \right] \cdot dVe = 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{ele \ V_e} \int \left[\psi(y,z) \cdot \text{div}(\vec{V}) \right] \cdot dVe - \sum_{ele \ V_e} \int \psi(y,z) \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dVe = 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{ele \ V_e} \int \text{div}(\psi \vec{V}) \cdot dVe - \sum_{ele \ V_e} \int \vec{V} \cdot \text{grad}(\psi) \cdot dVe - \sum_{ele \ V_e} \int \psi(y,z) \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dVe = 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{ele \ S_e} \oint \psi \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dSe - \sum_{ele \ V_e} \int \vec{V} \cdot \text{grad}(\psi) \cdot dVe - \sum_{ele \ V_e} \int \psi(y,z) \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dVe = 0 &\Leftrightarrow \\ \sum_{ele \ S_e} \oint \psi \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} n_y + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) \cdot dSe - \sum_{ele \ V_e} \int \left\langle 0, \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle \cdot dVe & \\ - \sum_{ele \ V_e} \int \psi(y,z) \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dVe = 0 & \end{aligned} \quad (5.17)$$

A aplicação deste teorema permitiu diminuir o grau da derivada em T , contudo as exigências de diferenciabilidade relativamente à função ψ sofreram um aumento.

A primeira parcela da equação 5.17 representa o integral das condições fronteira ou de troca de calor com o exterior (condições do tipo Cauchy) que deverá ser substituído parcialmente de acordo com 5.8, enquanto que a última parcela representa o integral de variação da energia interna.

5.4. - Aproximação por elementos finitos

O método dos elementos finitos consiste em dividir o volume total no qual se procura determinar a solução, num número finito de elementos. No seio de cada elemento, admite-se a hipótese da forma da distribuição espacial da solução pretendida, neste caso da distribuição da temperatura.

$$T^{ele} = \sum_{i=1}^{me} T_i N_i \quad (5.18)$$

Na expressão 5.18, T^{ele} representa a temperatura no interior do elemento, função dos respectivos valores nodais.

No programa de elementos finitos SAFIR e para os fenómenos em estudo, são utilizados dois tipos de elementos bidimensionais isoparamétricos lineares de 3 e de 4 nós. Assim e por definição, a geometria e o campo de temperaturas são representados pelas mesmas funções de interpolação. A expressão para a geometria dos elementos, obedece às seguintes expressões:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{me} y_i N_i \\ z &= \sum_{i=1}^{me} z_i N_i \end{aligned} \quad (5.19)$$

As funções de interpolação linear, expressas em coordenadas isoparamétricas são função do número de nós e do tipo de elemento. Na expressão 5.20 estão representadas as funções utilizadas pelo elemento de 4 nós.

$$\langle N \rangle = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1-\eta) \quad (1+\xi)(1+\eta) \quad (1-\xi)(1+\eta) \rangle \quad (5.20)$$

Na figura 5.5 os elementos são representados numa forma regular, porque estão definidos num sistema de coordenadas natural. Nas coordenadas cartesianas a forma dos quadriláteros e triângulos pode ser qualquer, mas sempre com a fronteira recta.

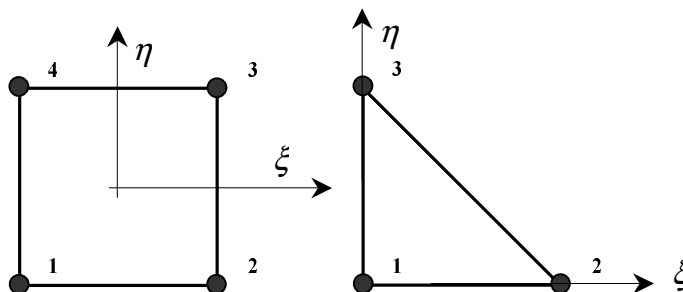


Fig. 5.5- Representação do elemento finito plano isoparamétrico.

As funções de interpolação presentes em 5.19 a 5.20 dão origem a uma geometria e a uma solução com continuidade C^0 . Não se verifica descontinuidade de material entre dois elementos adjacentes. Numa fronteira comum de dois elementos, a temperatura é idêntica em ambos os elementos separados pela mesma fronteira. A solução é contínua, mas não continuamente diferenciável.

Como as funções de interpolação são, neste caso, lineares, em cada uma das coordenadas naturais, o campo das temperaturas varia linearmente de acordo com cada direcção, ou seja, de um nó para outro adjacente. Na referência [5.2] é apresentado um estudo comparativo de elementos planos bidimensionais com 4 e 8 nós isoparamétricos, possibilitando a utilização de elementos de segunda ordem. Neste enquadramento, cujo objectivo final será determinar o estado termo estrutural de um elemento sujeito à acção do fogo, seria desejável obter o campo de temperaturas a partir de um grau de interpolação mais elevado, contudo e tendo em consideração

o domínio de cálculo, a boa condutividade material e o estudo da encurvadura lateral de vigas a temperaturas uniformes, esta diferença não é significativa. Caso se pretenda determinar o efeito da acção térmica sobre um elemento estrutural, quando submetido à acção de uma curva normalizada do tipo ISO834, valerá a pena aumentar o número de elementos, diminuindo a diferença de cálculo linear relativamente ao esforço computacional exigido com funções quadráticas.

No caso de se utilizar o método de Galerkin para resolver a equação 5.17, será necessário substituir a função de peso ψ pela variação virtual δT . Este parâmetro também poderá ser aproximado utilizando as mesmas funções de interpolação, ou seja:

$$\delta T = \sum_{i=1}^{nmc} \langle N_i \rangle \cdot \{ \delta T_i \} = \sum_{i=1}^{nmc} \langle \delta T_i \rangle \cdot \{ N_i \} \quad (5.21)$$

A função ψ anula-se em todos os pontos onde a temperatura é conhecida.

A integração numérica a utilizar recorre à mudança de referencial cartesiano para coordenadas naturais, pelo que os integrais da expressão 5.17 deverão sofrer a alteração do domínio de integração e por consequência os respectivos ajustes. Quando se pretende alterar o integral do domínio real para o domínio natural ou de referência será necessário proceder à substituição das variáveis de integração e à substituição do respectivo domínio de integração, conforme expressão 5.22 e 5.23, para integrais de volume e de superfície respectivos.

$$\int_{V_e} f(y, z) \cdot dy \cdot dz = \int_{V_r} f[y(\xi, \eta), z(\xi, \eta)] \det[J] d\xi d\eta \quad (5.22)$$

$$\int_{S_e} f(X) \cdot dS = \int_{S_r} f[X(\xi, \eta)] \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial S}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial S}\right)^2} \cdot dS_r \quad (5.23)$$

Nestas expressões V_e e S_e , representam os integrais de volume e de superfície a calcular em função da substituição de coordenadas. Relativamente à primeira transformação, o jacobiano da transformação é determinado de acordo com a fórmula da derivação em cadeia, para se poderem calcular as primeiras derivadas de uma função em relação às coordenadas naturais.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Uma vez que se procede à aproximação das derivadas das coordenadas cartesianas, recorrendo à expressão 5.19, é possível aproximar o jacobiano por 5.25.

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{nne} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \times z_i & \sum_{i=1}^{nne} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \times y_i \\ \sum_{i=1}^{nne} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \times z_i & \sum_{i=1}^{nne} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \times y_i \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Na expressão 5.23 “s” será igual a ξ ou a η , conforme se integra segundo ξ , desde $\eta = -1$ até $\eta = +1$ ou vice versa. Isto significa que se deverá aproximar de uma forma semelhante o valor das derivadas presentes nessa equação de acordo com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial s} &= \sum_{i=1}^{nne} \frac{\partial N_i}{\partial s} \{z_i\} \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= \sum_{i=1}^{nne} \frac{\partial N_i}{\partial s} \{y_i\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

A derivada relativamente ao tempo deverá também ser aproximada, utilizando as funções de interpolação. A discretização parcial é feita de acordo com a expressão 5.27.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i=1}^{nne} N_i \frac{\partial \{T_i\}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{nne} N_i \{\dot{T}_i\} \quad (5.27)$$

5.5. - Formulação matricial

O objectivo desta formulação será produzir matrizes elementares, como consequência da discretização efectuada, e posteriormente, “adicionar” estas matrizes elementares para construir um sistema global de equações, a partir do qual se poderá calcular os graus de liberdade em todos os nós.

Partindo da expressão 5.17, pode-se verificar que a primeira parcela se anula para o caso dos elementos finitos se situarem no interior da malha de elementos finitos, bastando para tal verificar o percurso de integração na fronteira dos mesmos.

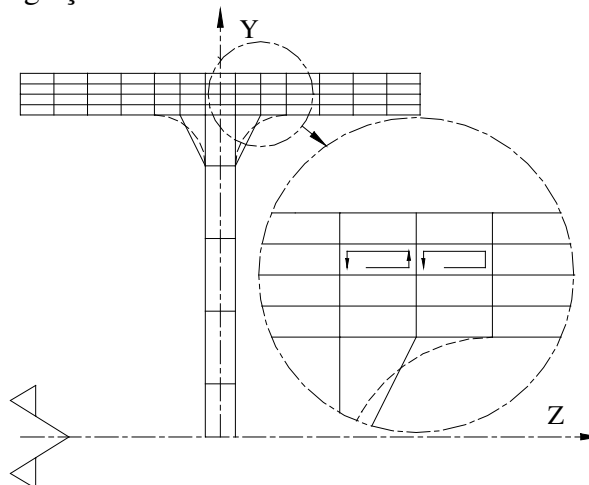


Fig. 5.6- Malha de elementos finitos. Integrais de percurso.

Para os elementos em contacto com a fronteira geométrica, a parcela do integral deverá ser substituída pela condição fronteira referida, impondo convecção e radiação, no caso de fogo. Assim esta parcela deverá ser igual a:

$$\sum_{ele} \oint_{Se} \psi \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} ny + \lambda \frac{\partial T}{\partial z} nz \right) dSe = \sum_{ele} \oint_{Se} \psi \left[\alpha (T_g - T) + \sigma \phi \epsilon (T_g^4 - T^4) \right] dSe \quad (5.28)$$

Este integral pode e deve ser simplificado de acordo com a separação das incógnitas e dos dados de utilização. Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{ele} \oint_{Se} \psi \alpha (T_g - T) dSe &= \sum_{ele} \oint_{Se} \langle \delta T_i \rangle \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_j \rangle \{N_k\} \{T_g^k\} dSe - \sum_{ele} \oint_{Se} \langle \delta T_i \rangle \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_j \rangle \{N_k\} \{T_k\} dSe \\ \sum_{ele} \oint_{Se} \psi \cdot \sigma \epsilon^* (T_g^4 - T^4) dSe &= \sum_{ele} \oint_{Se} \psi \cdot \alpha_{rad} (T_g - T) dSe = \\ &= \sum_{ele} \oint_{Se} \langle \delta T_i \rangle \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_{rad}^j \rangle \{N_k\} \{T_g^k\} dSe - \sum_{ele} \oint_{Se} \langle \delta T_i \rangle \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_{rad}^j \rangle \{N_k\} \{T_k\} dS \end{aligned} \quad (5.29)$$

Após linearização da equação relativa ao fluxo por radiação, $\sigma \epsilon \phi (T_g^4 - T^4) = \alpha_{rad} (T_g - T)$, é possível escrever:

$$\alpha_{rad} = \sigma \epsilon^* (T_g^2 + T^2) (T_g + T) \quad (5.30)$$

Utilizando agora o domínio de integração natural, é possível reescrever todas as sub parcelas da equação 5.17, de acordo com a expressão 5.29.

$$\begin{aligned} \sum_{ele} \oint_{Se} \psi \alpha (T_g - T) dSe &= \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{Sref} \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_j \rangle \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_g^k\} \\ &\quad - \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{Sref} \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_j \rangle \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_k\} \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \sum_{ele} \oint_{Se} \psi \cdot \sigma \epsilon^* (T_g^4 - T^4) dSe &= \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{Sref} \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_{rad}^j \rangle \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_g^k\} \\ &\quad - \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{Sref} \{N_i\} \{N_j\} \langle \alpha_{rad}^j \rangle \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_k\} \end{aligned} \quad (5.32)$$

em que “s” poderá ser igual a ξ quando se integra segundo ξ , ou igual a η quando se integra na respectiva direcção.

A segunda parcela do integral da expressão 5.17 diz respeito à condução do calor no interior do domínio, sendo igualmente necessário efectuar as respectivas substituições.

$$\begin{aligned} \sum_{ele} \int_{V_e} \left\langle 0, \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \bullet \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle dV_e &= \sum_{ele} \int_{V_e} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} dV_e \\ &= \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \int_{V_e} \left[\begin{matrix} \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{matrix} \right] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} dV_e \{T_j\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Tendo em consideração que a matriz resultante $[B]$, que se encontra no integrando da expressão anterior, pode ser escrita em função das coordenadas naturais.

$$[B_{zy}] = [B_{\xi\eta}] \cdot [J^{-1}] \Rightarrow [B_{zy}] = [J^{-1}] [B_{\xi\eta}] \quad (5.34)$$

A parcela em causa tomará a seguinte forma:

$$\sum_{ele} \int_{V_e} \left\langle 0, \lambda \frac{\partial T}{\partial y}, \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \bullet \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\rangle dV_e = \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \int_{V_{ref}} [B_{\xi\eta}] [J^{-1}] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} [J^{-1}] [B_{\xi\eta}] \det[J] dv \{T_j\} \quad (5.35)$$

A terceira e última parcela do integral da expressão 5.17 diz respeito à variação da energia interna, a qual, depois de devidamente aproximada será igual a:

$$\begin{aligned} \sum_{ele} \int_{V_e} \psi(y, z) \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dV_e &= \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \int_{V_e} \{N_i\} \rho C \langle N_j \rangle dV_e \left\{ \frac{\partial T_j}{\partial t} \right\} \\ &= \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \int_{V_{ref}} \{N_i\} \rho C \langle N_j \rangle \cdot \det[J] dV \cdot \left\{ \frac{\partial T_j}{\partial t} \right\} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Torna-se agora possível substituir na equação 5.17 as expressões matriciais, escritas no domínio de referência.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \int_{V_{ref}} [B_{\xi\eta}] [J^{-1}] \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} [J^{-1}] [B_{\xi\eta}] \det[J] dV \{T_j\} \\
& + \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{S_{ref}} \{N_i\} \{N_j\} \{ \alpha_j \} \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_g^k\} \\
& - \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{S_{ref}} \{N_i\} \{N_j\} \{ \alpha_j \} \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_k\} \\
& + \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{S_{ref}} \{N_i\} \{N_j\} \{ \alpha_{rad}^j \} \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_g^k\} \\
& - \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \oint_{S_{ref}} \{N_i\} \{N_j\} \{ \alpha_{rad}^j \} \{N_k\} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2} dS \{T_k\} \\
& = \sum_{ele} \langle \delta T_i \rangle \int_{V_{ref}} \{N_i\} \rho C \{N_j\} \cdot \det[J] dV \{ \dot{T}_j \}
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Ou de uma forma mais simplificada;

$$[RET] \{T_n\} + [SOL] \{U_p\} = [CAP] \{ \dot{T}_n \} \tag{5.38}$$

Neste sistema $[RET]$ representa a matriz de rigidez equivalente ou condutiva, $[SOL]$ a matriz de solitação, $[CAP]$ a matriz capacitiva, enquanto que $\{U_p\}$, $\{T_n\}$ e $\{ \dot{T}_n \}$ representam os vectores de solitação, temperatura e variação da temperatura nodal.

A técnica utilizada para se obter a forma integral global, poderá ser a assemblagem por expansão, isto é, a introdução de linhas e de colunas de zero nos locais que não pertencem ao elemento em estudo.

5.6. - Esquemas de integração

As matrizes apresentadas na expressão 5.38 deverão ser determinadas previamente à resolução do sistema. Cada elemento de cada matriz é um integral volúmico ou superficial e como tal deverá ser integrado numericamente.

As matrizes elementares mais importantes e necessárias para a constituição do sistema referido são: a matriz $[B]$, $[J^{-1}]$ e respectivas transpostas, bem como a matriz resultante do produto das funções de interpolação. Assim, todas estas matrizes deverão ser determinadas em cada ponto de integração.

Para integrar as matrizes do capítulo anterior, devem ser utilizados métodos numéricos. Estes consistem na integração nas duas direcções em estudo, apresentando-se a regra de Gauss com exemplo. Torna-se assim possível integrar exactamente o produto do polinómio de grau 3

$(2 \times npg - 1)$, em ξ , pelo polinómio de mesmo grau em η . Esta técnica de integração utiliza duas funções de peso.

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i \text{ gauss}=1}^{npg} \sum_{j \text{ gauss}=1}^{npg} w_i \cdot w_j \cdot f(\xi_i, \eta_j) \quad (5.39)$$

Na equação 5.39, a função f representa qualquer função integranda das parcelas da equação 5.37. Na figura que se segue pretende-se representar geometricamente o significado dos valores destes pesos como áreas de influência.

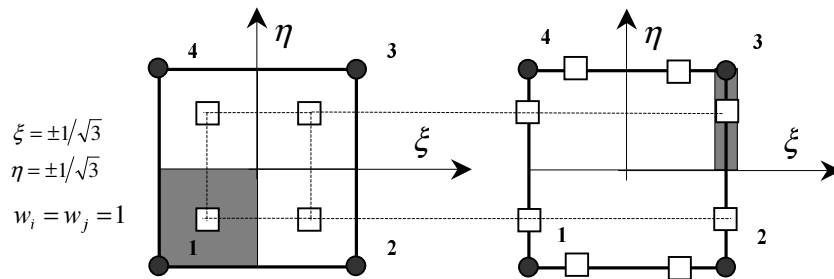


Fig. 5.7 - Coordenadas e pesos de integração de Gauss em área e em linha.

Este tipo de integração é utilizada no caso dos integrais de volume de referência e para os casos de integrais de superfície deverá ser utilizado o esquema do lado direito da figura 5.7. Nas aplicações deste último caso, será necessário calcular para cada face um factor correspondente à transformação de coordenadas. Este factor varia de face para face e o seu valor depende das coordenadas cartesianas dos pontos extremos de cada face [5.2].

O método de resolução da equação 5.38 deverá ser capaz de resolver problemas não lineares materiais, uma vez que as propriedades são função da temperatura. A resolução de um problema instacionário necessita de um esquema de integração temporal. O esquema utilizado pelo programa SAFIR é implícito, o que garante maior estabilidade comparativamente ao método de Euler explícito.

No caso de ser conhecido o valor da solução no instante t_n , e se a solução em t_{n+1} for designada por $\{T_{n+1}\}$, admite-se que a solução varia linearmente entre os referidos instantes, ver figura 5.8. Assim, para qualquer instante $t_\theta \in]t_n, t_{n+1}]$, pode-se escrever o valor da solução tendo por base a variação referida. **Solução**

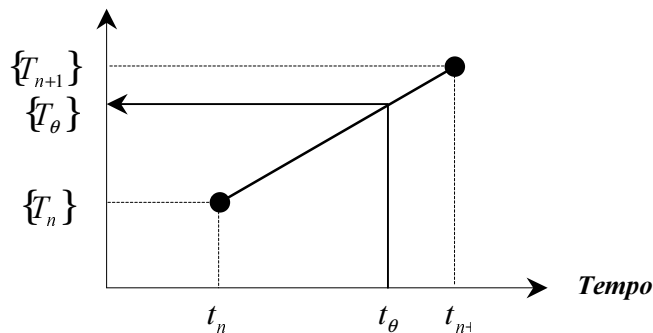


Fig. 5.8 - Esquema de progressão temporal.

$$\{T_\theta\} = \{T_n\} + \theta[\{T_{n+1}\} - \{T_n\}] \quad (5.40)$$

com $t_\theta = t_n + \theta(t_{n+1} - t_n) = t_n + \theta.\Delta t$, sendo θ um factor que deverá estar compreendido entre $]0,1[$ e que define, dentro de cada intervalo de tempo, o instante em que as equações 5.58 devem ser satisfeitas [5.9].

A derivada temporal do vector temperatura é constante em cada intervalo de tempo, podendo ser calculada pela equação seguinte.

$$\{\dot{T}_\theta\} = \frac{\{T_{n+1}\} - \{T_n\}}{\Delta t} = \frac{\{T_\theta\} - \{T_n\}}{\theta.\Delta t} \quad (5.41)$$

Admitindo o equilíbrio térmico no instante t_θ , para obter uma primeira aproximação da solução, supõe-se que a taxa de variação permanece igual à corrida do passo precedente, obtendo assim:

$$\{T_\theta\}^{(1)} = \{T_n\} + \theta.(\{T_n\} - \{T_{n-1}\}) \quad (5.42)$$

Se esta solução for exacta, ela verificará a equação 5.38, podendo ser escrita da seguinte forma:

$$[RET]\{T_\theta\}^{(1)} - [CAP]\{\dot{T}_\theta\}^{(1)} + [SOL]\{U_p\} = \{0\} \quad (5.43)$$

ou ainda tendo em consideração a equação 5.41, e substituindo o valor da derivada da temperatura, é possível obter a fórmula de recorrência 5.44.

$$[RET]\{T_\theta\}^{(1)} - [CAP]\frac{\{T_\theta\}^{(1)} - \{T_n\}}{\theta.\Delta t} + [SOL]\{U_p\} = \{0\} \quad (5.44)$$

Em geral esta distribuição de temperatura, extrapolada depois do passo de tempo precedente, não é exacta e o equilíbrio não se verifica. Acaba sempre por aparecer um resíduo, não nulo, na equação 5.44, que poderá ser determinado da seguinte forma:

$$\text{Resíduo} = r(\{T_\theta\}^{(1)}) = [RET]\{T_\theta\}^{(1)} - [CAP]\frac{\{T_\theta\}^{(1)} - \{T_n\}}{\theta.\Delta t} + [SOL]\{U_p\} \neq 0 \quad (5.45)$$

Será necessário determinar a correcção $\{\Delta T_\theta\}^{(1)}$ a efectuar a $\{T_\theta\}^{(1)}$ para que o novo valor da solução respeite o equilíbrio, ou seja, que torne o resíduo nulo.

$$r(\{T_\theta\}^{(1)} + \{\Delta T_\theta\}^{(1)}) = 0 \quad (5.46)$$

O método de linearização de Newton permite estimar o valor residual através da derivação da expressão 5.46.

$$r(\{T_\theta\}^{(1)} + \{\Delta T_\theta\}^{(1)}) = r(\{T_\theta\}^{(1)}) - \frac{\partial r}{\partial \{T\}} \cdot \{\Delta T_\theta\}^{(1)} \quad (5.47)$$

De acordo com a expressão 5.46, e admitindo que o membro da direita da equação 5.47 deva ser nulo, é possível obter a equação que permite calcular a correcção a efectuar à solução.

$$\{\Delta T_\theta\}^{(1)} = - \left[\frac{\partial r}{\partial \{T\}} \right]^{-1} r(\{T_\theta\}^{(1)}) \quad (5.48)$$

Conhecendo esta segunda estimativa da solução em t_θ , $\{T_\theta\}^{(1)} + \{\Delta T_\theta\}^{(1)}$ a equação 5.48 pode ser sucessivamente aplicada na forma geral da expressão 5.49 até se atingir o equilíbrio.

$$\{\Delta T_\theta\}^{(i)} = - \left[\frac{\partial r}{\partial \{T\}} \right]^{-1} r(\{T_\theta\}^{(i)}) \quad (5.49)$$

A derivada do resíduo que intervém na equação 5.49 é calculada através da expressão 5.45 de acordo com a expressão seguinte.

$$\left[\frac{\partial r}{\partial \{T\}} \right] = \frac{\partial [RET]}{\partial \{T\}} \{T\} + [RET] - \frac{\partial [CAP]}{\partial \{T\}} \times \frac{\{T_\theta\}^{(i)} - \{T_n\}}{\theta \cdot \Delta t} - \frac{[CAP]}{\theta \cdot \Delta t} + \frac{\partial \{U_p\}}{\partial \{T\}} \quad (5.50)$$

Nesta expressão as matrizes que provêm de derivadas relativamente a T não são simétricas. Com o objectivo de poder utilizar um algoritmo de resolução de matrizes simétricas, os termos correspondentes à derivada da matriz rigidez equivalente térmica $[RET]$ e da matriz capacitiva $[CAP]$ são desprezados. Estas matrizes dependem da temperatura por intermédio das respectivas propriedades térmicas dos materiais em estudo e, num passo de tempo, esta dependência pode ser considerada pequena. O termo da derivada do vector carregamento apresenta uma forte dependência da temperatura, uma vez que no caso de incêndio se utiliza tipicamente o efeito da radiação e da convecção. Assim, e para manter a matriz simétrica, opta-se pela seguinte operação [5.1].

$$A(i, j) = \frac{A(i, j) + A(j, i)}{2} \quad (5.51)$$

A matriz $[A]$ deverá ser representada por:

$$[A] = \frac{\partial \{U_p\}}{\partial \{T\}} \quad (5.52)$$

Em conclusão, a expressão 5.53 será utilizada no cálculo da matriz iteração. Esta não será verdadeiramente exacta, e a convergência será um pouco lenta, contudo, a determinação do resíduo não será afectado pelas expressões simplificadas introduzidas e o processo de convergência decorrerá para a solução exacta.

$$\left[\frac{\partial r}{\partial \{T\}} \right] = [RET] - \frac{[CAP]}{\theta \cdot \Delta t} + \frac{\partial \{U_p\}}{\partial \{T\}} \quad (5.53)$$

A etapa seguinte à determinação da solução em equilíbrio relativo ao instante t_θ , é a extrapolação para o instante seguinte t_{n+1} , sempre na base de uma variação linear.

$$\{T_{n+1}\} = \{T_\theta\} + [\{T_\theta\} - \{T_n\}] \times \left(\frac{1-\theta}{\theta} \right) \quad (5.54)$$

A escolha do parâmetro θ é deixada à consideração do utilizador, sugerindo-se no entanto um valor superior ou igual a 0.5 [5.1].

5.7. - Modelação de vazios internos

As cavidades internas macroscopicamente ocupadas por ar estão presentes em diferentes tipos de situações, como são exemplo os perfis laminados protegidos por placas isolantes (ver figura 5.9) tubos metálicos, etc.



Fig. 5.9 – Protecção de perfis metálicos ao fogo com placas isolantes.

As hipóteses utilizadas para simular este tipo de situação de transferência de calor nos espaços considerados, são baseadas nas considerações de Wickström e posteriormente adaptadas por Franssen [5.1]. Na figura 5.10 está feita a representação discreta de um tipo de vazio com uma fronteira constituída por elementos finitos.

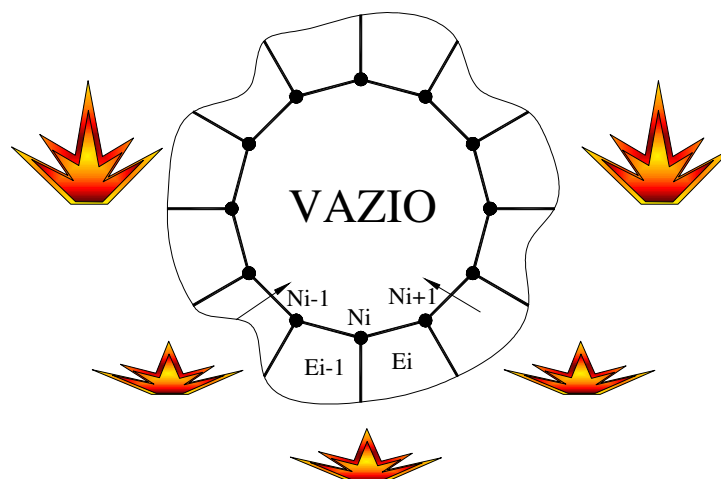


Fig. 5.10 – Modelação do vazio térmico convexo.

As trocas de calor por condução no ar/gás são desprezáveis, o calor específico do ar é desprezável. O ar é “transparente” ao fluxo radiativo e as paredes do corpo que formam o vazio consideram-se um corpo cinzento. De acordo com estas hipóteses as cavidades ou vazios internos são considerados como uma fronteira particular.

Tendo em consideração a parte convectiva do fenómeno de transferência, segue-se a hipótese de troca térmica à superfície da cavidade como uma função linear do gradiente térmico, conforme expressão 5.55.

$$q_c = \alpha_c (T_s - T_v) \quad (5.55)$$

T_s representa a temperatura na superfície do elemento, enquanto que T_v representa o estado térmico no interior do vazio. Uma vez que o calor específico do ar é desprezável, a temperatura do ar/gás T_v é a mesma em qualquer ponto, dentro daquela região. A temperatura da superfície varia de ponto para ponto da fronteira. Partindo do campo de temperaturas adoptado, esta variação é linear de nó para nó. Assim, é possível determinar a temperatura do ar no vazio, exprimindo que a soma dos fluxos convectivos seja nula.

$$\oint q \, dS = 0 \quad (5.56)$$

Nesta expressão, q_c representa o fluxo de calor por convecção e S , o valor do comprimento da fronteira que limita o vazio. Desenvolvendo a equação anterior numa forma discreta, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{NEC} \left(\sum_{n=1}^{nip} h_n \omega_n \alpha_{Ei} (T_v - T_s) L_{Ei} \right) &= 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{NEC} \frac{L_{Ei}}{2} \alpha_{Ei} (T_v - T_{Ni} + T_v - T_{Ni-1}) &= 0 \\
\Leftrightarrow T_v \sum_{i=1}^{NEC} L_{Ei} \alpha_{Ei} &= \sum_{i=1}^{NEC} \frac{L_{Ei}}{2} \alpha_{Ei} (T_{Ni} + T_{Ni-1}) \\
\Leftrightarrow T_v \sum_{i=1}^{NEC} L_{Ei} \alpha_{Ei} &= \sum_{i=1}^{NEC} T_{Ni} L_{Ni}
\end{aligned} \tag{5.57}$$

em que NEC representa o número de elementos em contacto com o vazio, n representa o número de pontos de integração nip . O peso de integração associado ao referido ponto é designado pelo símbolo ω_n . As funções de forma são representadas por h_n nos pontos de integração. O coeficiente de convecção afecto ao elemento E_i será designado por α_{Ei} , enquanto que L_{Ei} representa o valor do comprimento do lado do elemento que está em contacto com o vazio. T_{Ni} e L_{Ni} representam, respectivamente, a temperatura e o comprimento afectos ao nó i . O comprimento referido deverá ser determinado pela expressão 5.58.

$$L_{Ni} = \frac{\alpha_{Ei-1} \cdot L_{Ei-1} + \alpha_{Ei} \cdot L_{Ei}}{2} \tag{5.58}$$

O comprimento afecto ao nó i é ponderado pelo coeficiente de convecção do meio material em contacto com os dois elementos afectos ao mesmo nó.

A equação 5.57 possibilita expressar a temperatura do ar/gás no interior do vazio em função das temperaturas da superfície.

$$T_v = \frac{\sum_{i=1}^{NC} T_{Ni} L_{Ni}}{\sum_{i=1}^{NC} L_{Ni}} \tag{5.59}$$

O fluxo de calor convectivo associado a cada nó i da fronteira, necessário para determinação do resíduo, determina-se da seguinte forma.

$$r_i = L_{Ni} (T_v - T_{Ni}) \tag{5.60}$$

A derivada do fluxo necessária para determinar a matriz de iteração 5.53 deverá ser expressa pela equação 5.61.

$$\frac{\partial r_i}{\partial T_{Nj}} = L_{Ni} \frac{\partial T_v}{\partial T_{Nj}} = L_{Ni} \frac{L_{Nj}}{\sum_{k=1}^{NC} L_{Nk}} \tag{5.61}$$

Esta matriz é simétrica e como apenas depende das propriedades geométricas, será necessário calcular uma só vez. Esta hipótese para determinar a temperatura no vazio será válida, apenas, quando o coeficiente de convecção não depender da temperatura.

No que respeita às trocas de calor por radiação, é assumida a hipótese de uma cavidade limitada por um número finito de superfícies cuja temperatura se considera uniforme. A energia radiativa que atinge uma face do elemento “*i*” é parcialmente absorvida pela superfície do elemento e uma outra parte reflectida. Assim é possível escrever:

$$E_a + E_r = 1 \quad (5.62)$$

em que E_a e E_r representam respectivamente, a fracção de energia absorvida e reflectida por radiação. Para um corpo cinzento $E_a = \varepsilon_i$, em que ε_i representa a emissividade do mesmo.

A energia irradiada pela superfície *i* da face do elemento, pode ser obtida por integração da função de Plank, dada por:

$$E_{ir} = \varepsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4 \quad (5.63)$$

Esta equação reflecte a dependência desta energia relativamente à temperatura da superfície T_i , ao valor da emissividade e ainda da constante de Stefan-Boltzmann.

Tendo em consideração as equações 5.62 e 5.63, as equações que descrevem as trocas de energia por radiação no meio da cavidade ou vazio são:

$$J_i = \varepsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4 + (1 - \varepsilon_i) G_i \quad (5.64)$$

$$G_i = F_{ij} J_j \quad (5.65)$$

em que J_i e G_i representam o fluxo de calor emitido e recebido pela superfície, respectivamente. O balanço destas trocas pode ser dado pela diferença das equações 5.63 e 5.64.

$$q_i = \varepsilon_i \cdot \sigma \cdot T_i^4 - \varepsilon_i \cdot G_i \quad (5.66)$$

F_{ij} representa o factor de forma entre a superfície *i* e *j*, ou seja, representa a fracção de energia que é irradiada pela superfície *i* e que tem por destino a superfície *j*. Depois da eliminação sucessiva de G_i e de J_i das equações anteriores, pode-se escrever:

$$\left[\frac{F_{ij}(1 - \varepsilon_j)}{\varepsilon_j} - \frac{\delta}{\varepsilon_j} \right] q_j = F_{ij} \cdot \sigma \cdot T_j^4 - \sigma \cdot T_i^4 \quad (5.67)$$

nesta expressão δ_{ij} representa o símbolo de kroneker. Esta equação pode ser escrita na forma matricial que se segue.

$$[X]\{q\} = \sigma[Y]\{T^4\} \quad (5.68)$$

com as componentes das matrizes a serem determinadas de acordo com as expressões 5.69.

$$X_{ij} = \frac{F_{ij}(1 - \varepsilon_j) - \delta}{\varepsilon_j L_j} \quad (5.69)$$

$$Y_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij}$$

Através da inversão da matriz $[X]$, obtém-se a relação que permite calcular o fluxo libertado por cada superfície em função das temperaturas das faces dos elementos em contacto com o vazio.

$$\{q\} = [X]^{-1} \sigma[Y]\{T^4\} \quad (5.70)$$

O cálculo do produto matricial referido em 5.70 apenas deverá ser feito uma vez, caso os seus componentes dependam da geometria da secção e das emissividades das superfícies em causa. Por hipótese, estas últimas não variam com o tempo.

Para determinação do resíduo, este termo de carregamento deverá ser determinado de acordo com esta última equação, na qual se admite que a temperatura da face do elemento é igual à média aritmética dos valores nodais adjacentes. A energia libertada pela superfície é difundida através dos nós, num valor igual a metade por cada um.

5.8. - Exemplo de aplicação

O exemplo que se apresenta, pretende demonstrar as capacidades de modelação do fenómeno de incêndio em estruturas. Como já foi referido, o estudo de estruturas bidimensionais ou tridimensionais em que se utilize elementos de viga, necessita do efeito térmico caracterizado na secção, admitindo-se que o mesmo efeito é constante ao longo do comprimento da viga. Com o exemplo apresentado pretende-se comparar o efeito do fogo em secções metálicas sem e com protecções de vários tipos. Os resultados são comparados para alguns pontos particulares, tendo em consideração a variação de acidente com o tempo, utilizando como solicitação a curva de incêndio padrão ISO834, definida pela equação 3.6.

A secção recta do perfil comercial IPE100 servirá de base a este estudo nas três hipóteses apresentadas na figura 5.11. Na alínea a) o perfil encontra-se totalmente desprotegido, enquanto que na situação b) e c), o perfil está protegido com o mesmo material, apenas diferindo o modo de aplicação deste isolante.

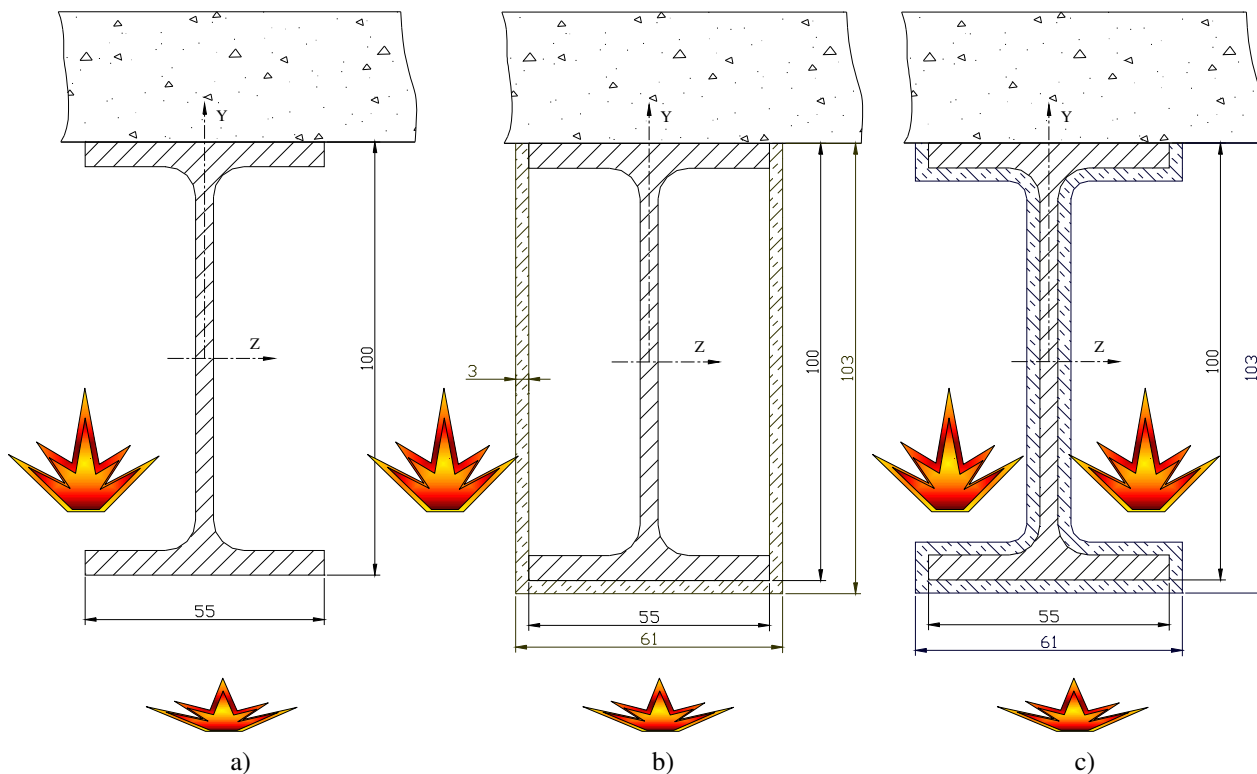


Fig.5.11 - Solicitações térmicas em estudo no perfil. a) sem protecção, b) com protecção em caixão, c) com protecção junto ao perímetro da secção.

O aço S235 utilizado encontra-se caracterizado conforme propriedades do Eurocódigo, tendo em consideração a variação destas com a temperatura. Trata-se portanto, de um processo não linear material.

A malha de elementos finitos utilizada para discretizar o perfil metálico foi exactamente a mesma, nas três situações analisadas, encontrando-se representada na figura 5.12.

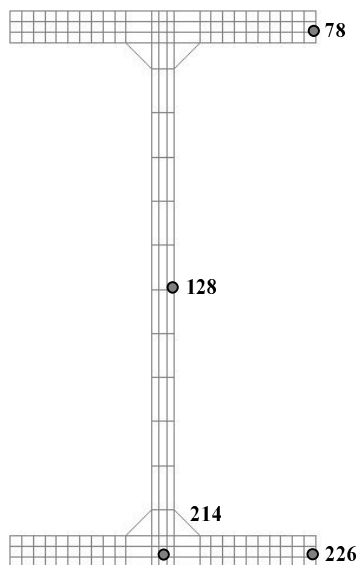


Fig.5.12 – Discretização do perfil metálico IPE100.

No caso da solicitação a), foi simulada o efeito de incêndio nas três faces inferiores do perfil, não utilizando qualquer protecção térmica, originando um campo de temperaturas no perfil, conforme figura 5.13. Foi admitido ainda que a face superior do banzo se encontrava isolado.

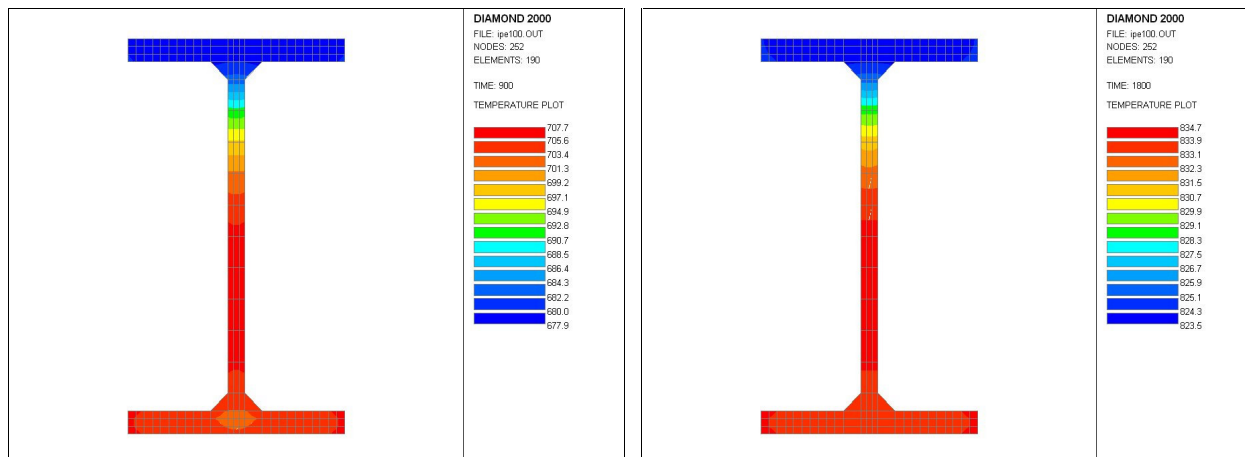


Fig. 5.13- Campo térmico correspondente à solicitação a), nos instantes 15 e 30 minutos.

No caso da solicitação b) da figura 5.11, foi utilizado o material isolante com condutividade igual a 0.9 [W/mK], calor específico 1100 [J/kgK] e massa específica de 1600 [kg/m³]. O coeficiente de convecção nas superfícies aquecidas foi de 25 [W/m²K], enquanto que nas superfícies não aquecidas o valor do coeficiente foi fixado em 9 [W/m²K] e a emissividade foi considerada a correspondente a um corpo cinzento ($\epsilon=0.9$). Estas propriedades associadas a uma espessura de 3 [mm], proporcionam uma barreira à passagem do efeito térmico do fogo, conforme se poderá verificar no estudo comparativo final. Nesta simulação o fluxo de calor ao atingir a placa protectora é diminuído, mesmo assim, parte deste acaba por passar, aumentando a temperatura dos dois vazios criados, facto que comparativamente à solução adiabática se apresenta com mais realismo. A figura 5.14 representa o campo de temperaturas da secção para os instantes correspondentes a 15 minutos e 30 minutos de exposição ao fogo.

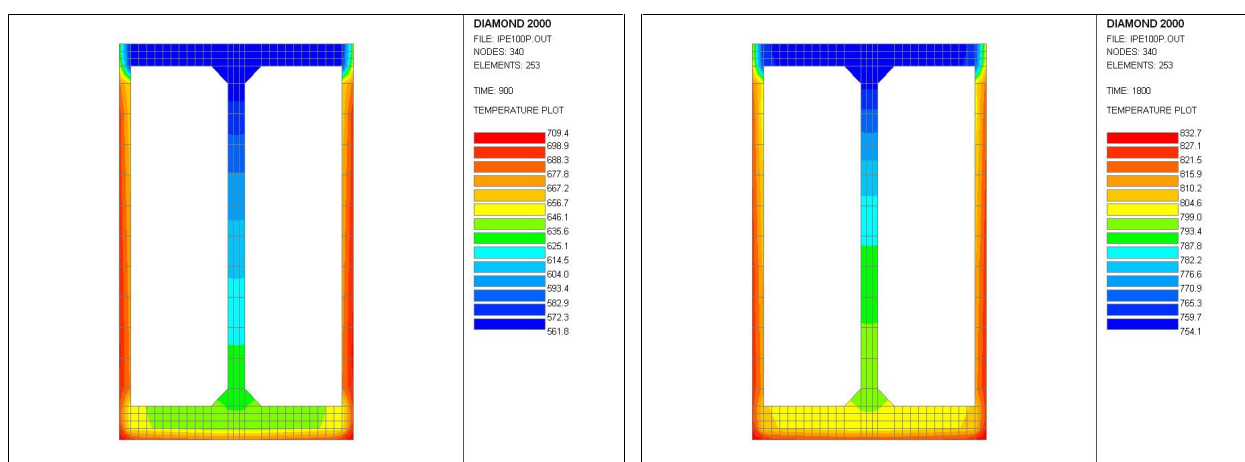


Fig. 5.14- Campo térmico correspondente à solicitação b), nos instantes 15 e 30 minutos.

Comparando os instantes homólogos das solicitações a) e b), é importante verificar a diminuição global do valor das temperaturas instaladas na secção do perfil em I, alterando também a forma do gradiente na secção.

Na simulação c) foi utilizada uma forma de protecção diferente, normalmente resultante da projecção de fibras minerais ou da utilização de tintas intumescentes, como se poderá observar na figura 5.15. Para se poder comparar o efeito das duas protecções, utilizou-se o mesmo material de protecção, com uma espessura de 3 [mm].

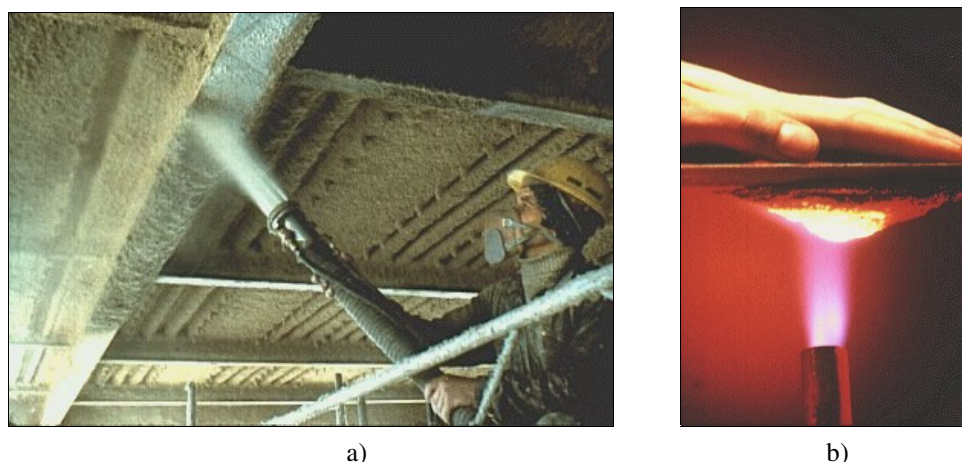


Fig. 5.15 – Sistemas de protecção; a) projecção de fibras minerais; b) tintas intumescentes.

Esta protecção é menos morosa e dispendiosa em termos de aplicação prática, conduzindo ao campo de temperaturas da figura 5.16, para os instantes correspondentes 15 e 30.

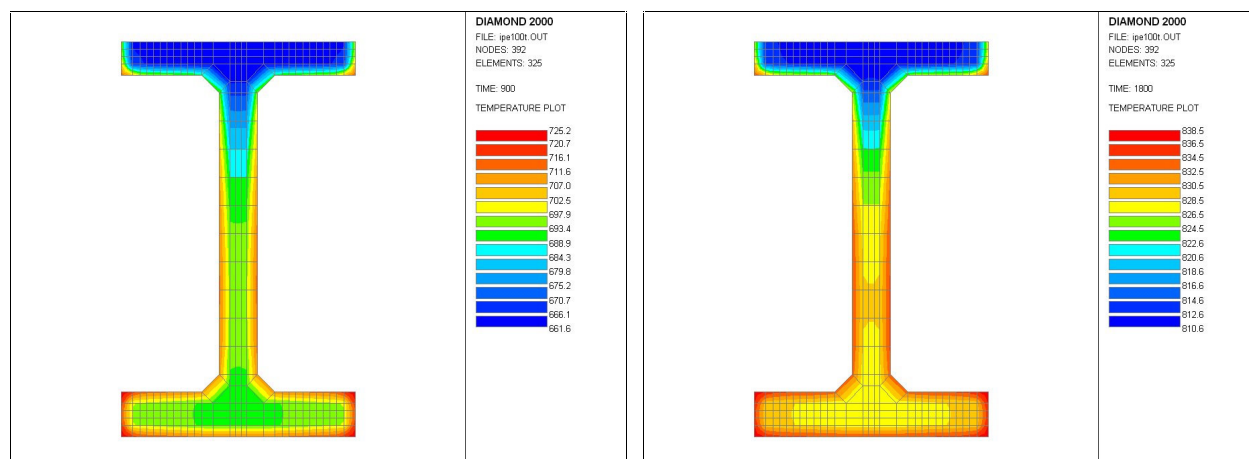


Fig. 5.16 - Campo térmico correspondente à solicitação c), nos instantes 15 e 30 minutos.

Para melhor verificar o atraso induzido por estas protecções apresentadas, foi possível comparar o valor das temperaturas nos nós apresentados na figura 5.11. A solicitação a) e c) apresentam valores próximos, com uma melhoria pouco significativa, quando comparada com os resultados da solução b), ver figura 5.16.

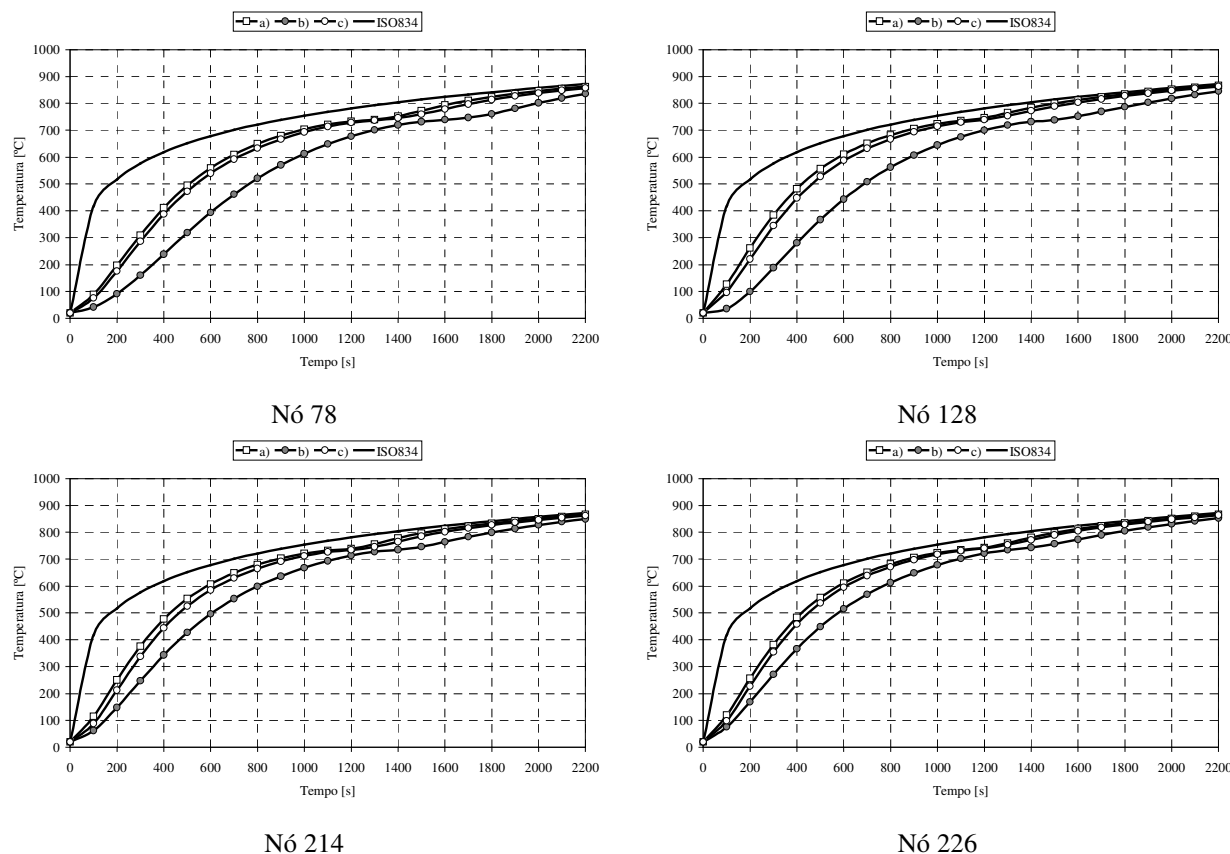


Fig. 5.16 – Evolução temporal da temperatura nos nós 78, 128, 214 e 226, em cada uma das solicitações.

Após comparação dos valores das temperaturas nos nós, a protecção que apresenta melhores resultados corresponde à solicitação b), protecção com placas, podendo induzir um atraso na propagação do efeito que poderá variar de 3.3 a 5 minutos. Na protecção tipo c), embora produzindo qualitativamente o efeito pretendido, o valor do atraso não é tão significativo como o apresentado pela protecção b).

5.9. - Conclusões

Foi apresentado a formulação por elementos finitos, partindo da equação diferencial de condução, para sólidos submetidos especificamente à acção do fogo. A formulação integral fraca e matricial serviram de base ao sistema algébrico de equações para o regime transitório. Foram apresentados esquemas de integração espacial e temporal.

Foi apresentado um método de cálculo de temperaturas em zonas indirectamente aquecidas pela acção do fogo, sem necessidade de discretização do meio.

A formulação utilizada no programa de elementos finitos SAFIR faz com que não exista acoplamento entre o fenómeno térmico e estrutural. A evolução do campo térmico é determinado ao longo do tempo de exposição ao fogo, independentemente das cargas aplicadas e do estado de tensão instalado na estrutura metálica. Assim a determinação dos deslocamentos na estrutura é resultante do efeito das cargas, considerando que as variações de temperatura introduzirão

deformações térmicas e produzirão variações nas propriedades mecânicas do material. Existirá um efeito da temperatura no estado de tensão, mas o inverso não se verifica.

Foi efectuado um estudo comparativo de isolamento de perfis, tendo por base o mesmo material isolante e diferentes configurações. Ficou demonstrado numericamente que a solução mais eficaz na situação apresentada de fogo por baixo do perfil, corresponde à situação de isolamento em caixão.

5.10. - Referências

- [5.1]- Franssen, Jean-Marc; “Contribution à la modelisation des incendes dans les batiments et leur effects sur les structures”; thèse présentée en vue de l’obtention du grade d’agrégé de l’enseignement Supérieurs; Université de Liège; Année academique 1997/98.
- [5.2]- Piloto, P.A.G.; “Formulação do método dos elementos finitos para problemas térmicos bidimensionais”; École Nationale Superieur des Mines de Paris; 1991.
- [5.3]- Dhatt, Gilbert; “Une presentation de la méthode des éléments finis”; Maloine S.A. Editeur Paris; 2ème édition; 1984.
- [5.4]- Franssen, Jean-Marc; “Progam Safir – Ver 1.3 – User Manual”; December 1996.
- [5.5]- Reddy; “An introduction to the finite element method”; International student edition - McGraw Hill; 1985.
- [5.6]- Bathe, K.-J.; "Finite Element Procedures in Engineering Analysis"; Prentice-Hall Englwood Cliffs; New Jersey; U.S.A.; 1982.
- [5.7]- Zienkiewicz, O. C.; "The Finite Element Method"; 3rd Edition; McGraw-Hill Book Comp. Ltd.; London; U.K.; 1979.
- [5.8]- Talamona, Didier; “Flambement de poteaux metalliques sous charge excentrée, a haute temperatures”; thèse présentée pour obtenir le grade de docteur d’Université Blaise Pascal – École Doctorale de Sciences pour L’ingenieur de Clermont ferrand; 1995.
- [5.9]- Vila Real, P.J.M.M.F.; “ Modelação por elementos finitos da solidificação e comportamento termo-mecânico de peças vazadas em moldações metálicas”; Dissertação apresentada à Universidade do Porto para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica; Setembro de 1993.

Capítulo 6

Caracterização da resistência ao fogo

6.1. – Introdução

Com o objectivo de caracterizar o desempenho de estruturas metálicas em situação de incêndio, os elementos estruturais e de compartimentação de um edifício, em Portugal, são classificados em classes de resistência ao fogo de acordo com a seguinte nomenclatura [6.1]:

EFxx - estável ao fogo, aplicando-se a elementos estruturais de suporte de cargas;

PCxx - pára chamas, aplica-se a elementos de construção de estanqueidade perante chamas e gases quentes;

CFxx - corta fogo, aplica-se aos elementos anteriores, com isolamento térmico, ou seja as temperaturas das faces não expostas do elemento estrutural não podem ultrapassar determinados valores limites.

Nestas designações *xx* representa o tempo em minutos durante o qual, qualquer uma das três funções acima referidas (estabilidade, estanqueidade e isolamento) se pode considerar satisfeita durante um ensaio de incêndio em que a temperatura média da fornalha aumenta de acordo com a curva de incêndio padrão ISO 834 [6.3], podendo variar de acordo com os seguintes valores: 15, 30, 60, 90, 120, 180, 240 e 360.

Na União Europeia e de acordo com o documento interpretativo CEN/TC 127 N 307 [6.4], relativo à directiva sobre os Produtos da Construção, a nomenclatura adoptada é ligeiramente diferente:

R - para capacidade resistente;

E - para a integridade face às chamas e gases quentes;

I - para a capacidade de isolamento térmico.

Assim, no domínio da construção metálica, uma laje deverá satisfazer os critérios *REI* simultaneamente, enquanto que pilares e vigas deverão satisfazer unicamente o critério *R*. Paredes não resistentes que devam desempenhar funções de compartimentação corta - fogo devem satisfazer os critérios *EI*.

Em Portugal, até à data, não existem fornalhas à escala real que permitam avaliar a resistência ao fogo de elementos de construção através de ensaios de incêndio normalizado. Este não é o caso de outros países Europeus, que dispõem de meios laboratoriais à escala real para teste deste tipo de elementos, com solicitações térmicas por meio de injectores, ver figura 6.1.

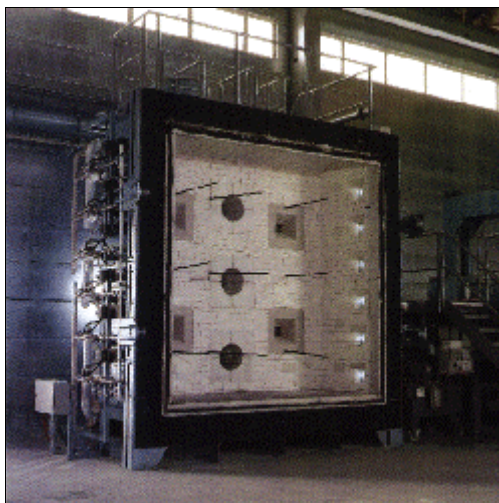


Fig.6.1 - Exemplo de fornalha vertical. Sintef, Noruega.

Neste trabalho irá ser apresentado um ensaio utilizando elementos de aquecimento resistivos. Assim a verificação só poderá ser feita através do recurso a resultados experimentais de ensaios realizados em outros países com elementos idênticos (não existentes até ao momento) ou pela via do cálculo numérico (caso estudado).

A resistência ao fogo de elementos estruturais pode assumir dois aspectos distintos. Caso se trate de um elemento com simples funções de suporte de cargas (vigas, pilares) pretende-se assegurar a sua estabilidade durante um certo período de sujeição ao incêndio (critério "R"). Se para além destas o elemento tem também funções de compartimentação relativamente ao incêndio (lajes, paredes resistentes) é necessário assegurar, durante aquele período, simultaneamente a sua integridade relativamente ao atravessamento por chamas e gases quentes (critério "E") e as suas funções de isolamento térmico (critério "I") [6.5]. Qualquer destas funções pode ser comprovada quer experimentalmente quer numericamente.

6.2. – Comportamento de uma estrutura metálica sujeita a vários cenários de incêndio

O cálculo da resistência ao fogo de um elemento com funções de compartimentação sob o ponto de vista do isolamento térmico implica, para além da caracterização da acção térmica, o conhecimento da variação com a temperatura das propriedades térmicas relevantes do material ou materiais que o constituem (calor específico, condutividade térmica), e a resolução de um problema de condução de calor num domínio com condições de fronteira conhecidas. Esta forma de proceder cai no domínio dos métodos avançados de cálculo e pressupõe o recurso a programas de cálculo automático adequados, como é exemplo o programa SAFIR.

Para o cálculo estático, a determinação das temperaturas na secção dos elementos estruturais governam o seu comportamento, qualquer que seja a maneira como elas foram

atingidas. Assim será possível definir para cada nível de carga, a temperatura de ruína do elemento, válida para todos os tipos de incêndio e todas as protecções de isolamento térmico que conduziram a esta temperatura.

A resistência ao fogo é definida como a capacidade de verificar as funções exigidas para uma exposição a este tipo de acidente, durante um período de tempo especificado. A análise estrutural permite verificar a capacidade de cumprir as referidas funções para qualquer nível de temperatura. As funções que uma estrutura deverá cumprir podem, na generalidade, ser de natureza diversa, contudo e no caso de uma estrutura porticada em aço, apenas a capacidade portante deva ser assegurada. Não é feita qualquer referência ao critério de deformação nem à velocidade de deformação, no entanto, logo que as deformações possam determinar um efeito desfavorável na integridade de elementos corta fogo suportados pelos elementos submetidos ao fogo, é recomendado utilizar uma lei tensão deformação modificada por forma a atribuir uma menor resistência ao aço.

O princípio do método de cálculo simples apresentado no Eurocódigo 3 é baseado na determinação da resistência elemento a elemento, verificando se as solicitações, em caso de incêndio, permanecem inferiores aos valores de resistência de cálculo, para o nível de temperaturas especificado. O referido documento distingue como elementos estruturais, a viga, o pilar e os elementos submetidos à compressão e flexão. Estes últimos caracterizam a estrutura em estudo que se apresenta de seguida.

O dimensionamento da estrutura, apresentada na figura 6.2, à temperatura ambiente conduziu à escolha de perfis IPE450 para as vigas e HEA300 para os pilares. Com estes perfis, foram determinados os deslocamentos máximos e as tensões instaladas, tendo-se verificado que suportavam com segurança o carregamento a que foram submetidos nestas condições.

No estudo de acções combinadas em situação accidental que se apresenta e com o objectivo de determinar o efeito paramétrico deste acidente numa estrutura metálica porticada de 3 pisos por dois vãos, foi utilizado um programa de elementos finitos não linear geométrico e material para a determinação da resistência da estrutura ao fogo, como método avançado de cálculo.

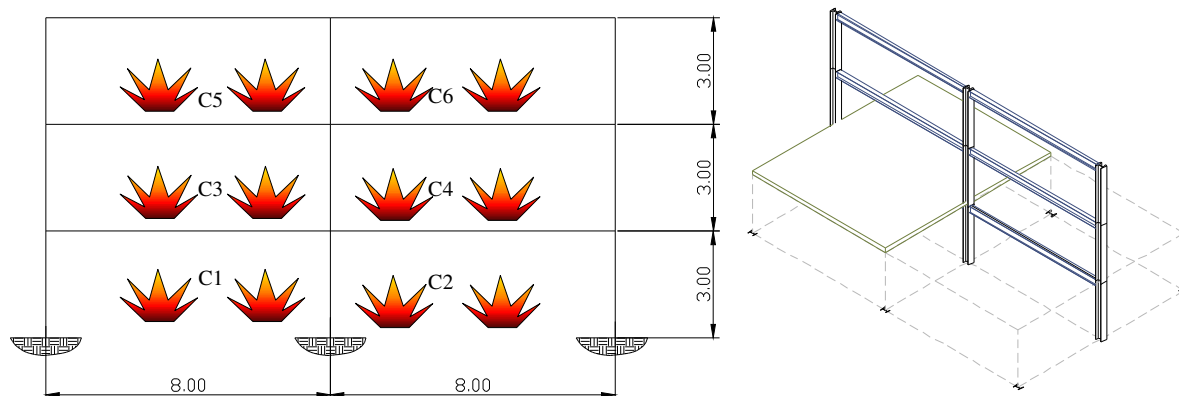


Fig.6.2- Representação esquemática da estrutura bidimensional, com 5 [m] entre pórticos.

Neste estudo foi considerado que o edifício, do tipo comercial, estaria exposto ao fogo em vários compartimentos, numa localidade situada a Norte – Este de Portugal, a 700 [m] de altitude. A combinação da acção permanente com as acções variáveis determinam um dos carregamentos que se apresenta, tendo considerado o vento com acção variável preponderante, ver figura 6.3.

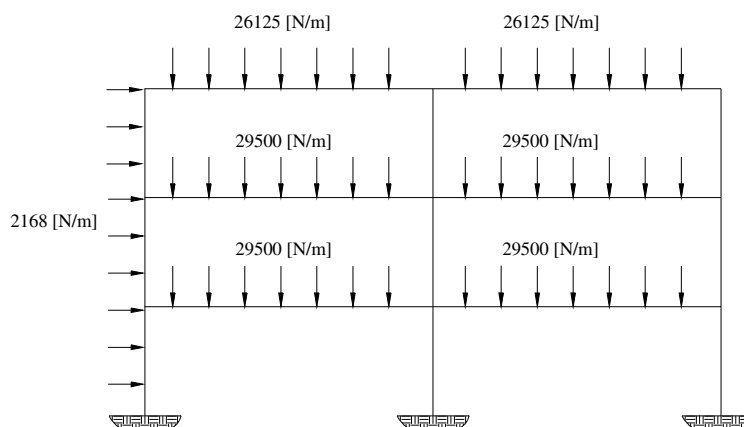


Fig. 6.3 - Carregamento correspondente à combinação das acções em que o vento é a acção dominante.

Este é pois o resultado da aplicação das acções mecânicas previstas nos documentos sobre acções em estruturas [6.8,6.9 e 6.10], e que aparecem combinadas de acordo com a expressão 3.17 do capítulo 3.

Os deslocamentos da estrutura, quando submetida ao incêndio, são grandes quando comparadas às condições de serviço normal. As alterações de geometria modificam as condições das solicitações, as quais devem ser tidas em consideração. A existência de grandes deformações e a presença de constrangimentos térmicos influenciam a duração da resistência ao fogo, e por conseguinte, a ruína da estrutura.

A solicitação de incêndio na parte estrutural é feita de acordo com a figura 6.4, tendo em consideração o número de faces expostas ao incêndio. O número de faces dos pilares expostas ao fogo varia de compartimento para compartimento, pelo que são apresentadas duas evoluções diferentes, tendo em consideração a exposição ao fogo de um só lado e de ambos os lados.

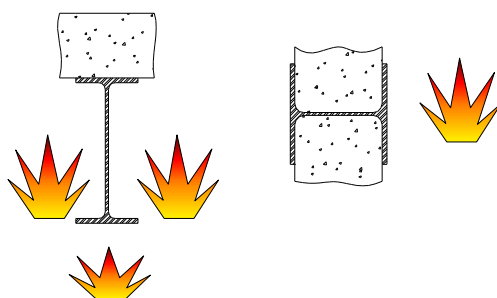


Fig.6.4 – Solicitação térmica nas secções rectas dos perfis metálicos.

Como resultado desta solicitação térmica, foram efectuadas simulações transientes do acidente de que resultaram os campos de temperatura que se apresentam na figura 6.5, correspondentes aos instantes 300, 1200, 3600 e 10800 [s] de exposição ao fogo.

Os resultados que se apresentam dizem respeito ao aquecimento dos pilares por um dos lados, correspondentes aos elementos estruturais dos extremos da estrutura apresentada na figura 6.2.

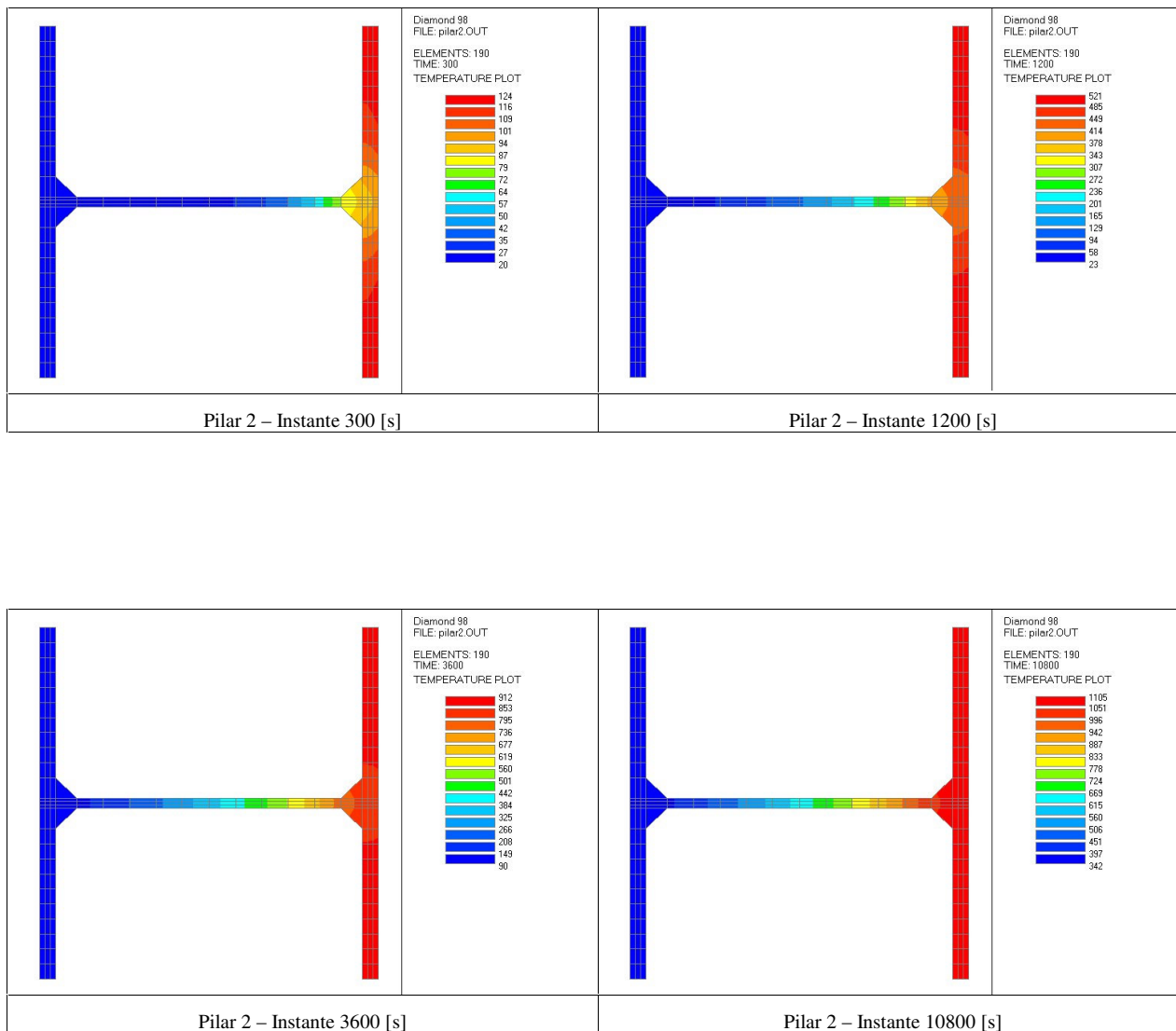


Fig.6.5 – Exposição dos pilares ao fogo apenas pelo interior; evolução até 10800[s]. Pilar 2 aquecido por um lado.

Na figura 6.6 estão representados os campos de temperatura obtidos por aquecimentos de ambos os lados dos perfis que constituem os pilares. Esta situação ocorre para os elementos que dividem os compartimentos esquerdos e direitos, localizados a meio.

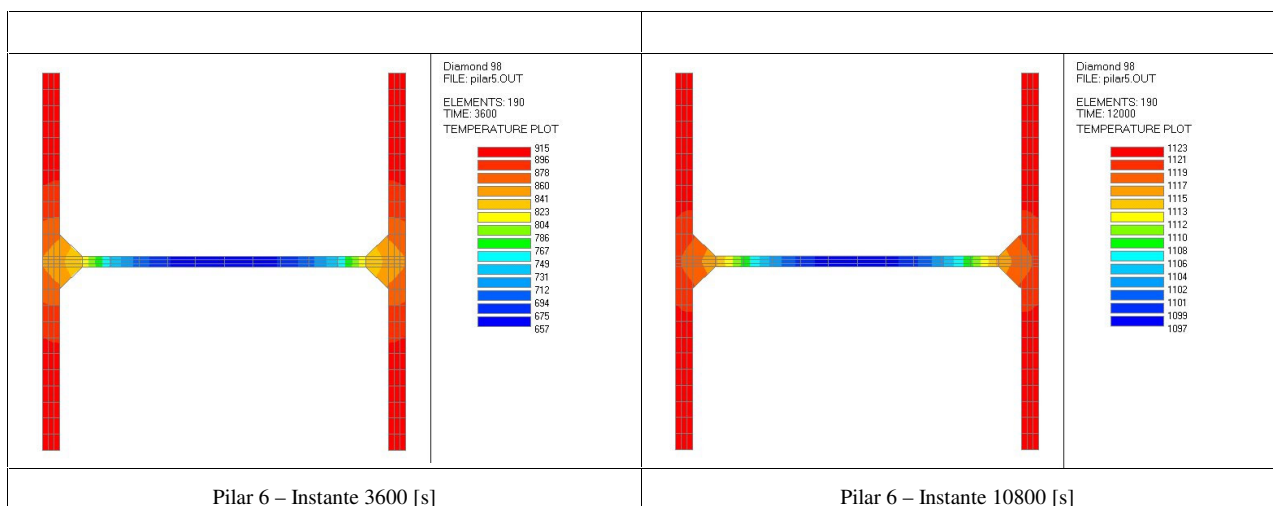
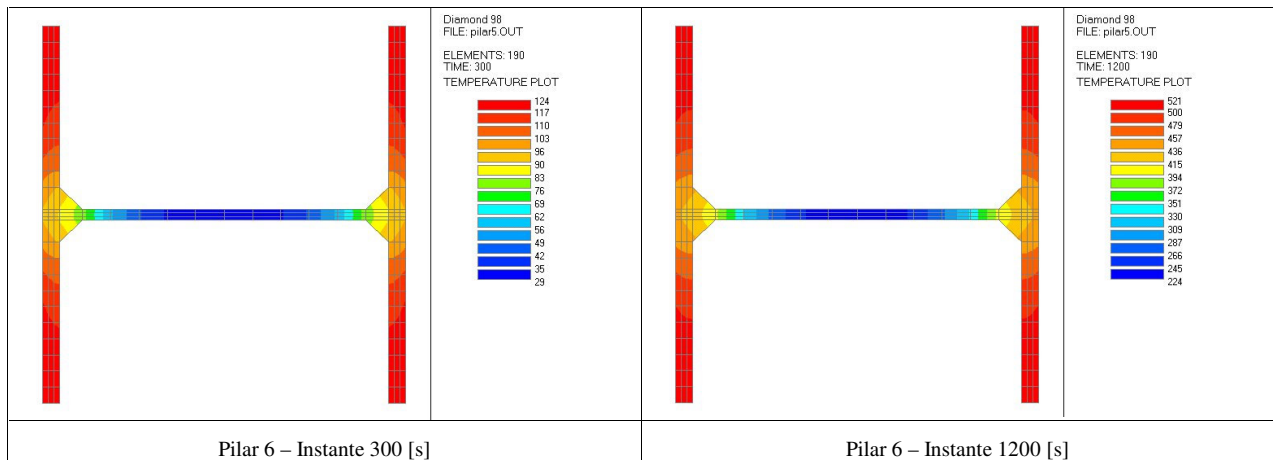


Fig.6.6 – Exposição ao fogo pelos dois lados; evolução até 10800[s]. – Pilar 6 aquecido por ambos os lados.

Comparativamente à solicitação dos restantes pilares, é notório verificar um aquecimento superior na secção recta que dará origem a uma maior diminuição de resistência, provocada pela redução das propriedades mecânicas do aço.

Da mesma forma foram efectuados cálculos térmicos transientes para as vigas. Todas se encontram solicitadas da mesma forma, isto é, com a acção do fogo a incidir directamente em três lados, exceptuando o banzo superior do elemento em contacto com a laje, considerado isolado para o efeito, ver figura 6.7.

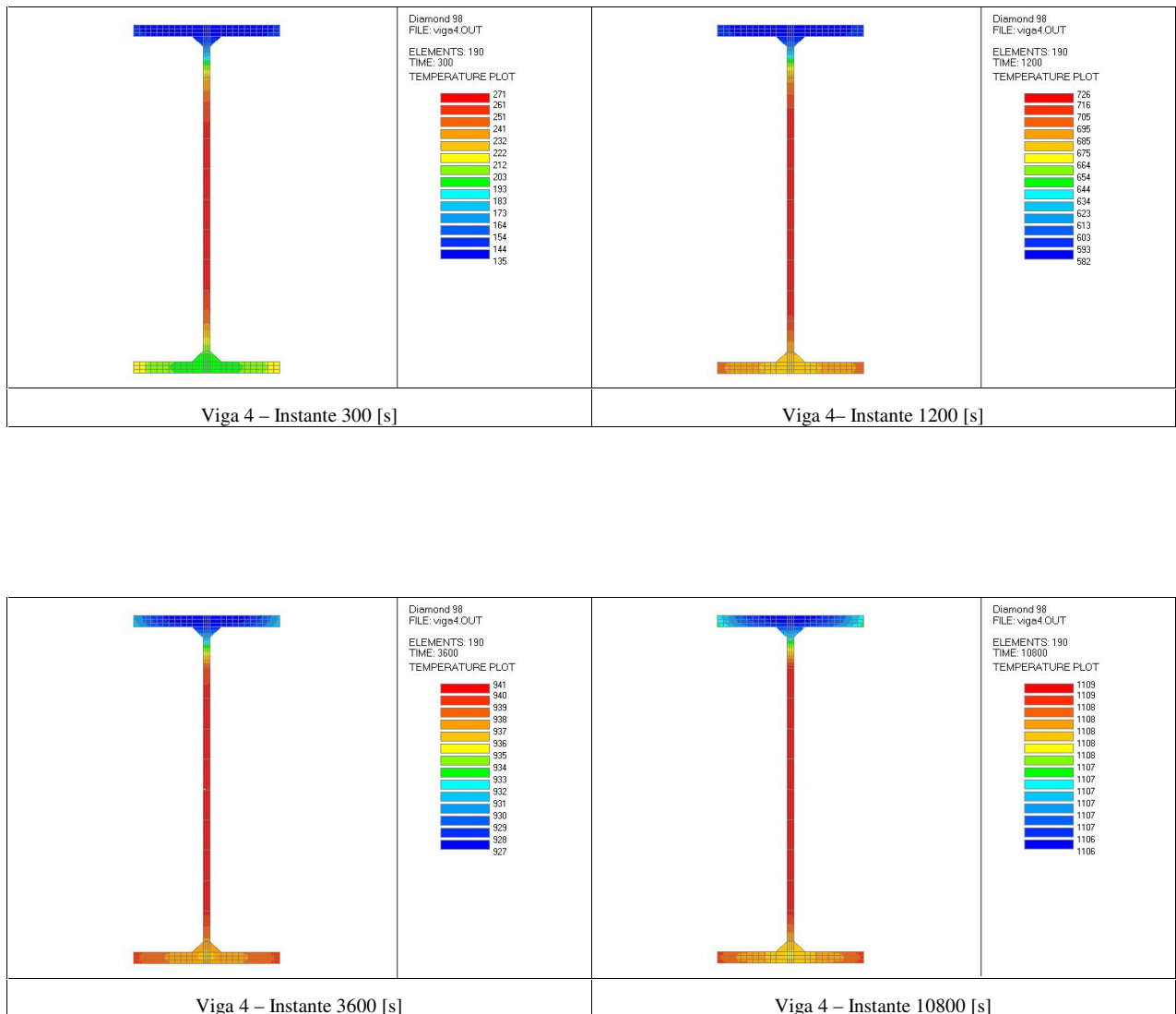


Fig.6.7 – Exposição da viga ao fogo, evolução até 3600[s].

As extremidades dos banzos encontram-se mais aquecidas que a restante parte do elemento, diminuindo desta forma a resistência lateral à flexão.

Partindo da hipótese de que a solução térmica pode ser desacoplada da solução mecânica, é feita a modelação da estrutura utilizando elementos de viga, com as fibras termicamente determinadas. Foi introduzida uma pequena imperfeição geométrica na estrutura de acordo com Eurocódigo 3 [6.11], com cerca de 0.01 [m] por cada andar em altura.

O comprimento dos elementos finitos utilizado teve em consideração a dimensão das ligações metálicas, dando origem à discretização apresentada na figura 6.8.

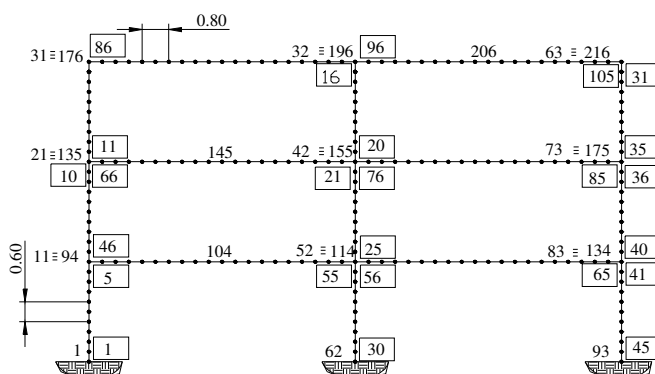


Fig. 6.8 - Discretização do domínio 2D. Nós a vermelho e elementos a verde.

Foram estudadas 18 cenários de incêndio, dos quais se representa um quadro resumo na figura 6.9. O valor da resistência ao fogo, em unidade de tempo, encontra-se referido por baixo da identificação de cada solicitação.

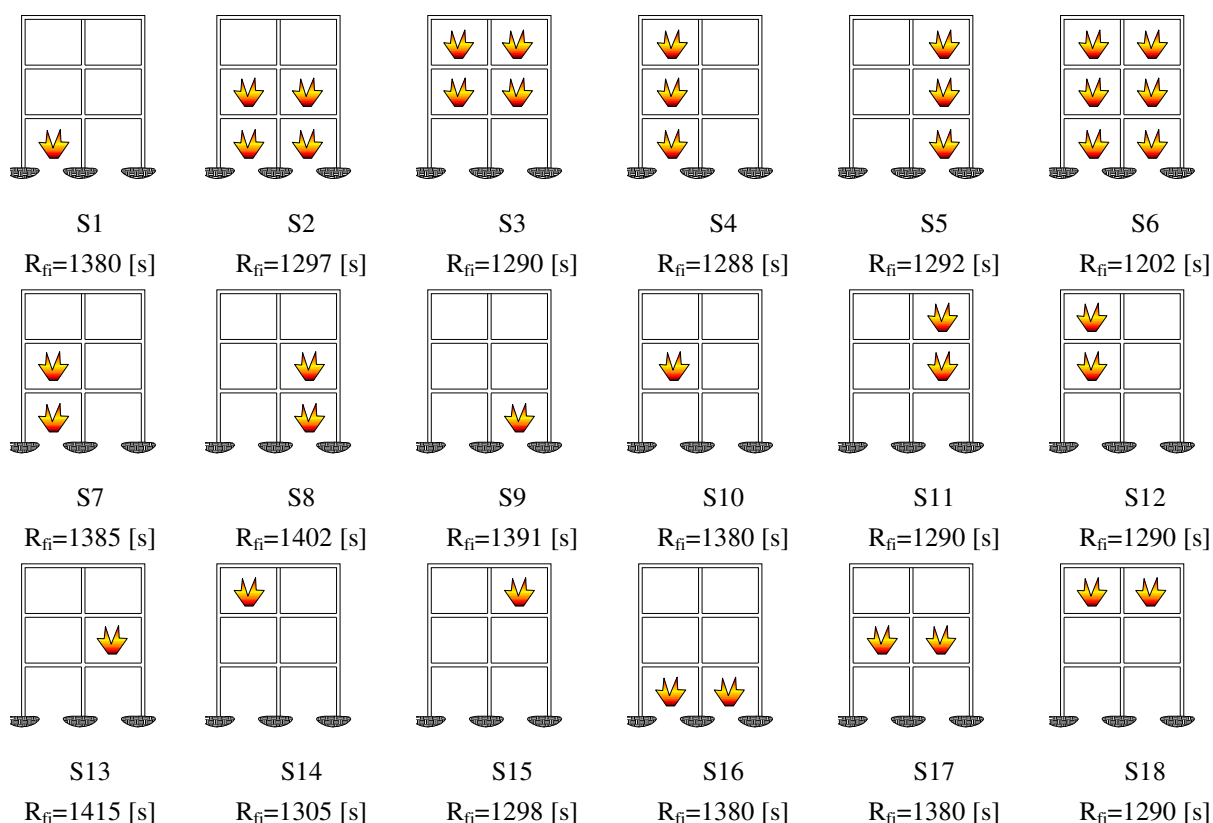


Fig 6.9 – Resistência ao fogo da estrutura para vários cenários de incêndio.

Na figura 6.10 apresenta-se a deformada da estrutura para a situação de incêndio generalizado em todos os compartimentos (quando o pórtico está submetido ao cenário 6) com a estrutura metálica desprotegida, conforme solicitação mecânica da figura 6.3.

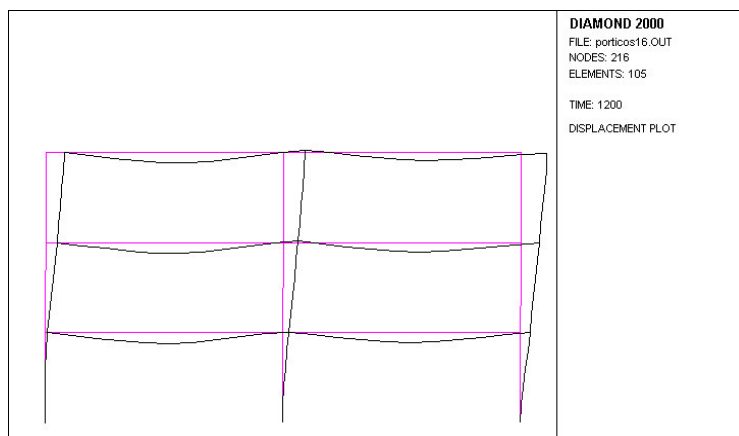


Fig. 6.10 – Deformada da estrutura antes do colapso – Cenário S6.

A resistência ao fogo da estrutura apresentada fica claramente abaixo dos valores admissíveis e regulamentares do documento [6.2]. Aqui, e de acordo com o anexo sobre medidas de segurança contra riscos de incêndio, a aplicar a estabelecimentos comerciais no seu ponto 3.2.1. sobre características construtivas, é explícito que para este tipo de edifícios, cuja altura não ultrapassa os 9 [m], a resistência ao fogo das estruturas deve ser, pelo menos, 30 minutos.

Neste contexto, o projectista deverá verificar a hipótese de protecção de perfis com material isolante, verificar a possibilidade da alteração da gama de perfis, verificará a influência do efeito térmico com a contribuição para a dissipação de calor pela laje de betão e eventualmente estudar a possibilidade da laje trabalhar em conjunto com a viga, ou seja, considerar uma situação de viga mista aço-betão. Neste âmbito foram desenvolvidos alguns testes dos sugeridos, tendo-se verificado em primeiro lugar a contribuição da laje no arrefecimento da viga, conforme disposição relativa da figura 6.11.

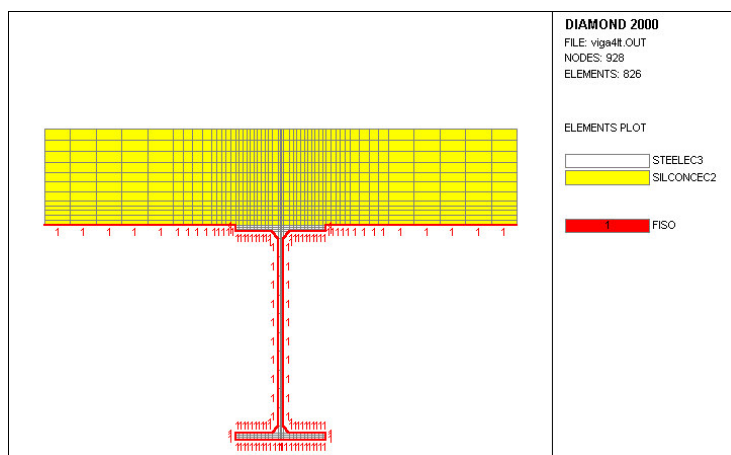


Fig. 6.11 - Malha de elementos finitos utilizada para discretizar a combinação dos dois materiais.

A figura 6.12 apresenta os campos de temperatura obtidos para vários instantes de tempo. Os resultados da análise transiente demonstraram que o efeito colaborante da laje, embora tenha reduzido o valor das temperaturas em instantes de tempo homólogos, aumentou os respectivos gradientes, não tendo por isso sido suficiente para aumentar a resistência global da estrutura.

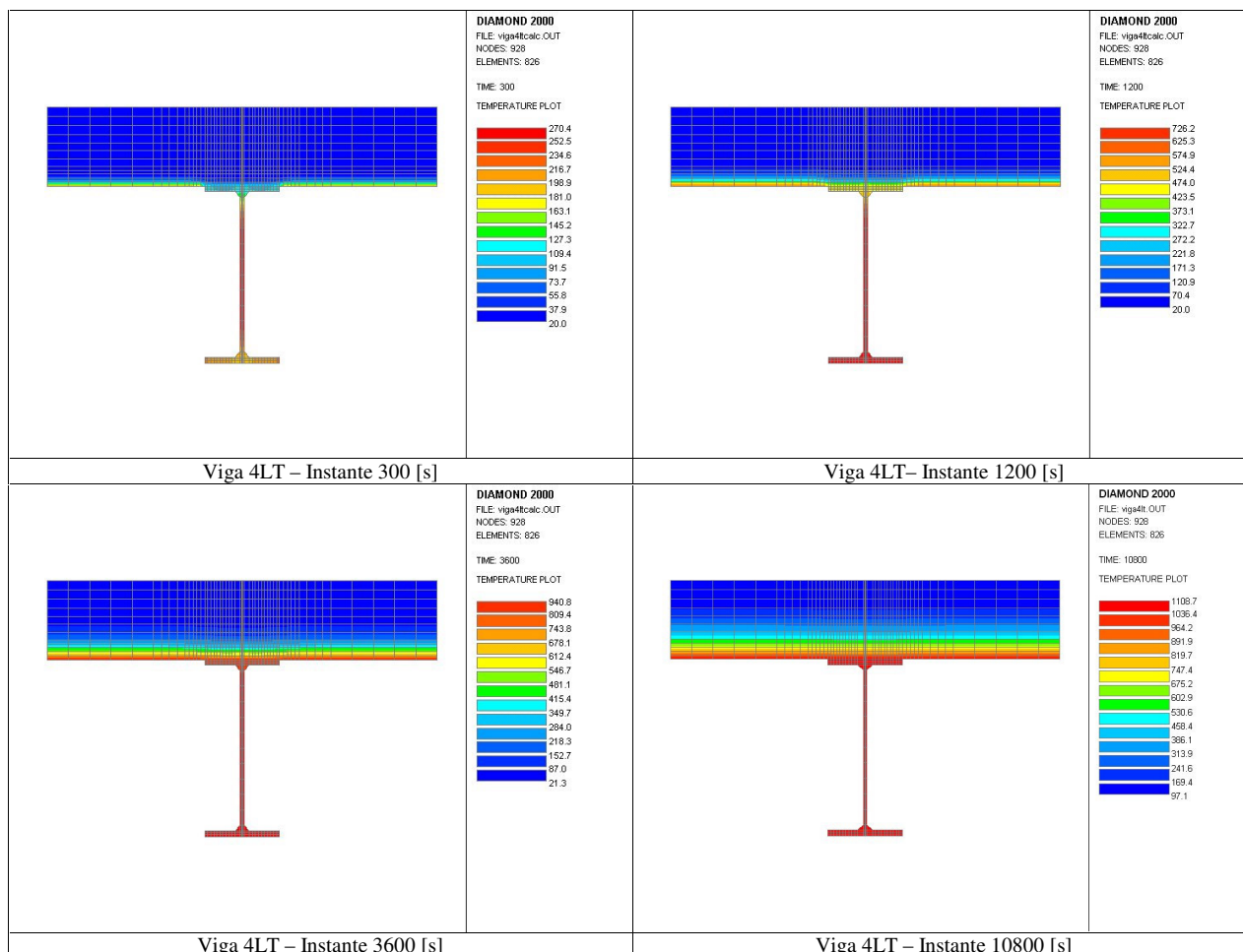


Fig. 6.12 – Efeito da contribuição da laje no arrefecimento da viga [2.5].

Contrariamente ao que seria de esperar, a resistência da estrutura para o cenário S6 diminuiu para 1189 [s], valor que se demonstra insuficiente e que não verifica o regulamento Português.

Numa tentativa de aumentar a resistência global da estrutura, sem modificar a escolha do perfil, decidiu-se proteger os perfis metálicos das vigas com material termicamente isolante, apresentando-se uma solução de isolamento com gesso de condutividade térmica 0,9 [W/mK], calor específico 1100 [J/kgK] e massa específica de 1600 [kg/m³]. Estas propriedades associadas a uma espessura de 8 [mm], possibilitam obter uma resistência térmica suficiente para manter a temperatura do perfil bastante baixa. Conforme se poderá verificar através da figura 6.13, os gradientes térmicos são ligeiramente inferiores no início, e os valores máximos das temperaturas são substancialmente inferiores, conferindo superior resistência ao elemento estrutural, e por conseguinte, à respectiva estrutura.

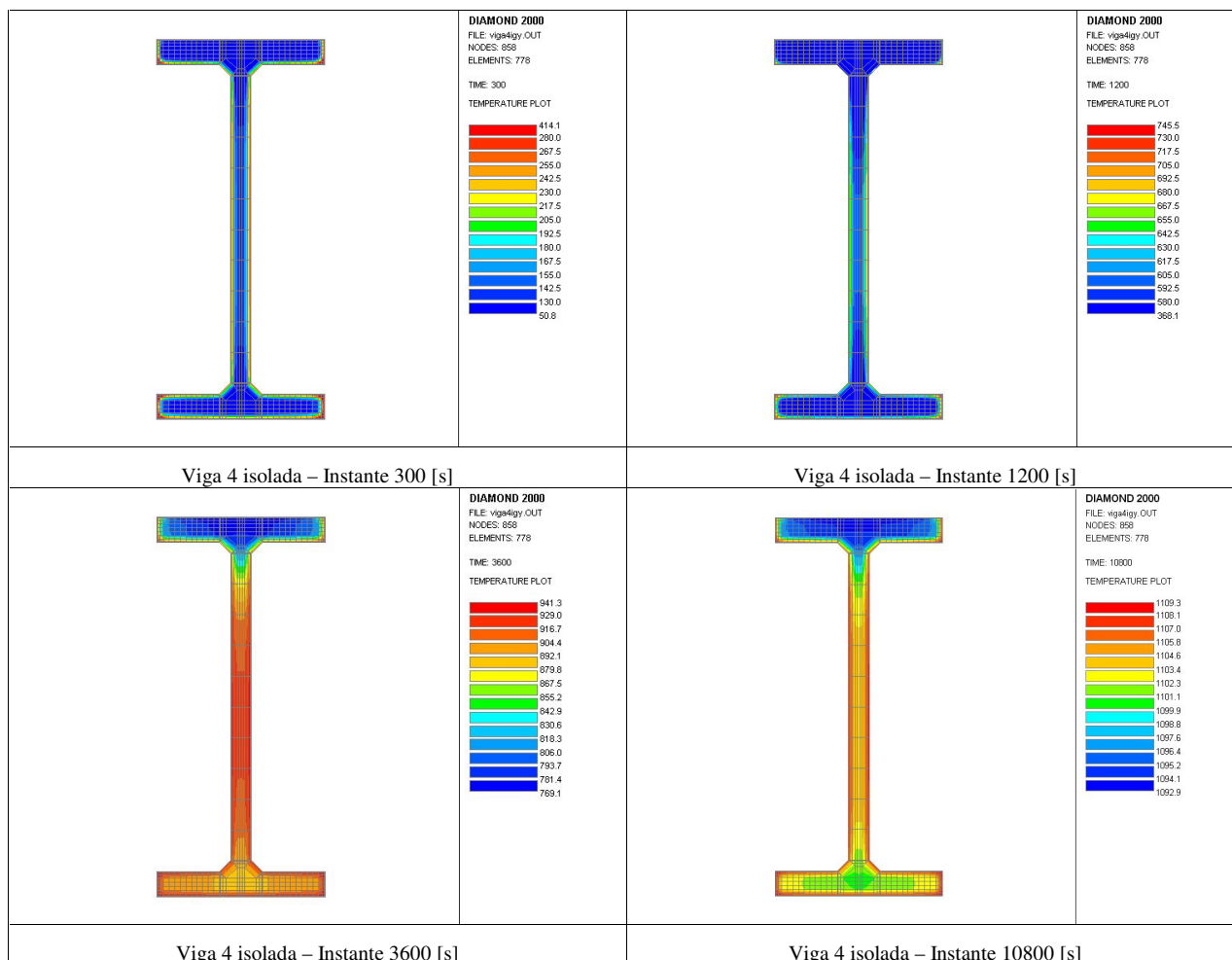


Fig. 6.13 – Valores de cálculo da temperatura para vários instantes, no caso de utilização de isolamento.

A estrutura terá uma resistência ao fogo aproximada de 30 minutos, valor mínimo regulamentar. A deformada da estrutura apresenta-se na figura 6.14, onde se poderá verificar o comportamento dos deslocamentos para um instante intermédio e para o instante imediatamente anterior à sua ruína.

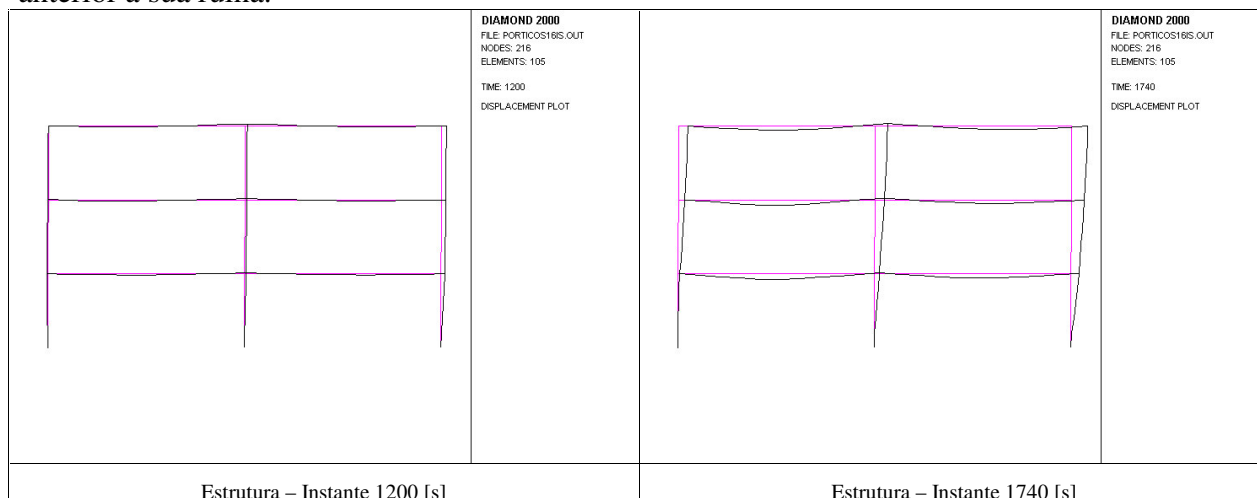


Fig. 6.14 – Resultados correspondentes ao cenário S6, com isolamento térmico das vigas.

Examinando convenientemente os deslocamentos a meio vão da viga do compartimento C6, nomeadamente no nó 206, representado na figura 6.3, pode-se verificar que a velocidade de deformação nas duas direcções será maior no caso da viga ser considerada com efeito térmico da laje. Os resultados encontram-se representados graficamente na figura 6.15.

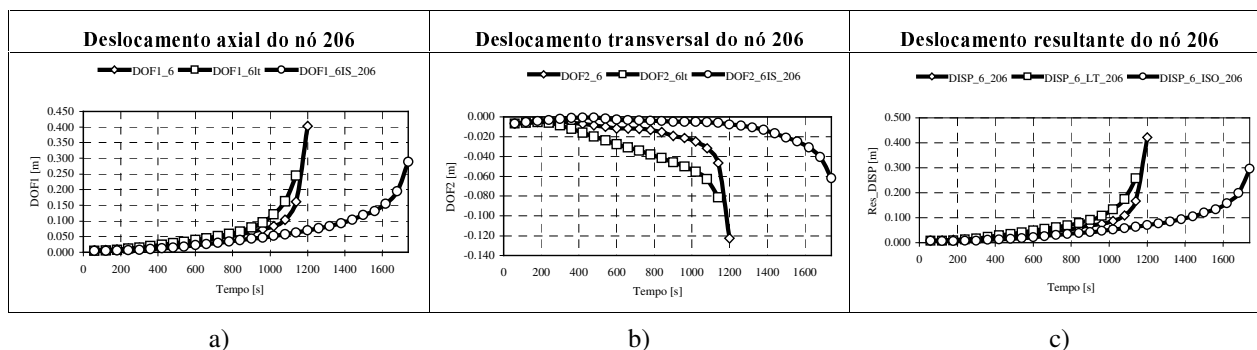


Fig. 6.15 – Comparação dos deslocamento do nó a meio vão para as três situações analisadas; a) perfil sem efeito térmico da laje e sem isolamento; b) perfil com efeito térmico da laje e sem isolamento, perfil com isolamento e sem efeito térmico da laje.

6.3. - Conclusões

O método apresentado enquadra-se nos métodos avançados de cálculo preconizados no Eurocódigo, devendo o processo de cálculo da resistência ao fogo de elementos com funções de suporte de cargas ser composto pelas seguintes fases representadas no diagrama.

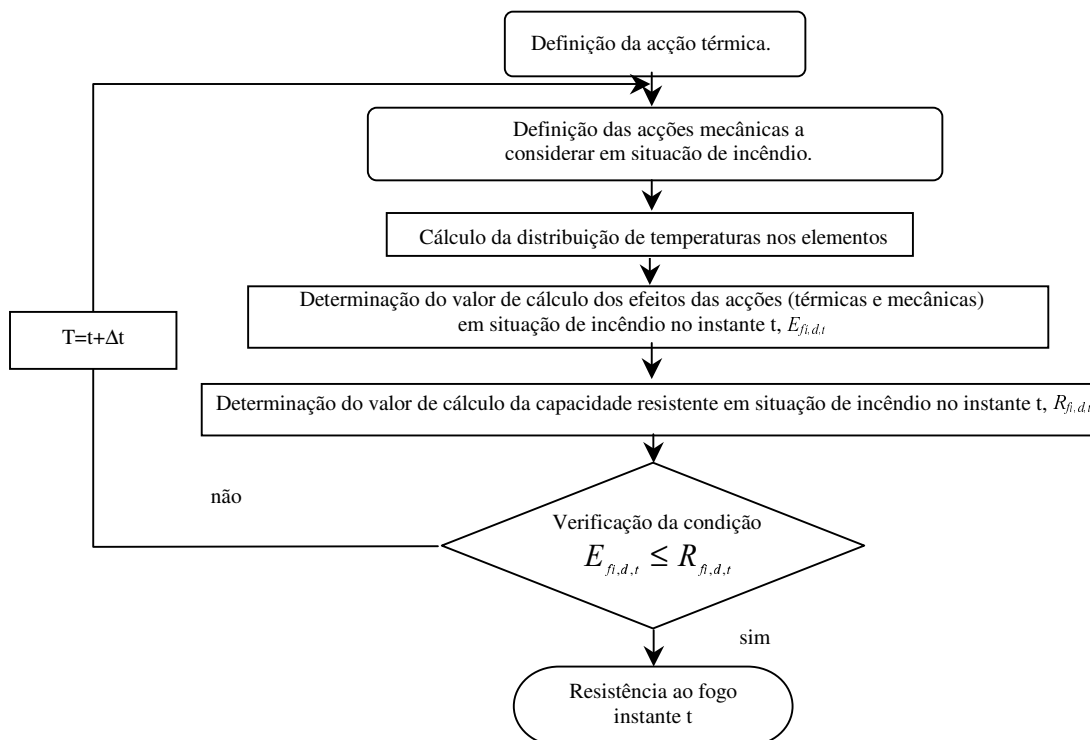


Fig. 6.17 – Fluxograma para determinação da resistência ao fogo.

No que se refere ao cálculo da distribuição de temperaturas nos elementos, o valor da condutividade térmica condiciona de forma decisiva o método a utilizar em estruturas metálicas. Assim, a elevada condutividade térmica do aço poderá facilitar a utilização da hipótese simplificativa, que considera homogênea em cada instante a temperatura em elementos de estrutura de aço (e nos perfis de alguns elementos mistos), o que possibilitou o desenvolvimento dos métodos simplificados de cálculo propostos nos Eurocódigos 3 [6.6] e [6.7] para os elementos metálicos.

6.4. - Referências

- [6.1]- LNEC (Laboratório Nacional de Engenharia Civil), Segurança Contra incêndio – Resistência ao fogo de materiais de construção – Métodos de ensaio e critérios de classificação, Especificação E 364-1990, Maio de 1990.
- [6.2]- Regulamento de Segurança contra incêndio DL 64/90, Porto Editora.
- [6.3]- CEN ENV 1991-2-2, Eurocode 1 – Basis of Design and Actions on Structures – Part 2.2- Actions on Structures – Actions on Structures Exposed to Fire; 1995.
- [6.4]- CEN, council Directiv 89/106/EEC on the approximations of laws regulations and administrative provisions of the member state relating to construction Products, Interpretative Document, Essential requirements, Safety in case of fire; CEN/TC 127N307.
- [6.5]- Vila Real, M. M. Paulo; Piloto, Paulo A. G.; Franssen, Jean - Marc; “Modelação numérica do comportamento de uma estrutura metálica, sujeita à acção do fogo – Análise de vários cenários de incêndio”, Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, LNEC, pag. 23 a 33; Março de 2000.
- [6.6]- CEN ENV 1993-1-2, Eurocode 3 – Design of steel Structures – Part 1.2: general rules Structural Fire Design; 1995.
- [6.7]- CEN ENV 1994-1-2, Eurocode 4 – Design of composit steel and concrete structures. Part 1.2 Strucutral Fire design.
- [6.8]- CEN ENV 1991-2-1; “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2-1: Actions on structures – Densisties, self weigth and imposed loads”; February 1995.
- [6.9]- CEN ENV 1991-2-3; “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2-3: Actions on structures – Snow loads”; February 1995.
- [6.10]- CEN ENV 1991-2-4; “Eurocode 1 – Basis of design and actions on structures – Part 2-4: Actions on structures – Wind actions”; May 1995.
- [6.11]- CEN ENV 1993-1-1, Eurocode 3 – Design of steel Structures – Part 1.1: general rules and rules for buildings; April 1992.
- [6.12]- Franssen, Jean - Marc; “Contribution à la modelisation des incendes dans les batiments et leur effects sur les structures”; thèse présentée en vue de l’obtention du grade d’agrégé de l’enseignement Supérieurs; Université de Liège; Année academique 1997/98.

Capítulo 7

Encurvadura lateral de vigas

7.1. - Introdução

Quando um sistema de forças é aplicado a uma viga de pequeno comprimento, o fenómeno de plasticidade localizada pode ser desenvolvido, nos locais em que o valor do momento flector ultrapassa a capacidade resistente da secção recta. Quando se efectua o carregamento em vigas mais esbeltas, sem suportes laterais, o fenómeno de instabilidade pode ocorrer. Ao solicitar uma viga com um sistema de forças equivalentes aos representados na figura 7.1, em que as forças e os momentos se encontram aplicados no plano de maior resistência, esta deforma-se no respectivo plano, até atingir um determinado nível de carga. A partir desse valor, aparece um estado de deformação em que se verifica um movimento lateral, acompanhado por uma rotação da secção recta da viga. Este fenómeno é conhecido pela encurvadura lateral de vigas. A carga que proporciona este tipo de instabilidade é conhecida pela força / momento crítico.

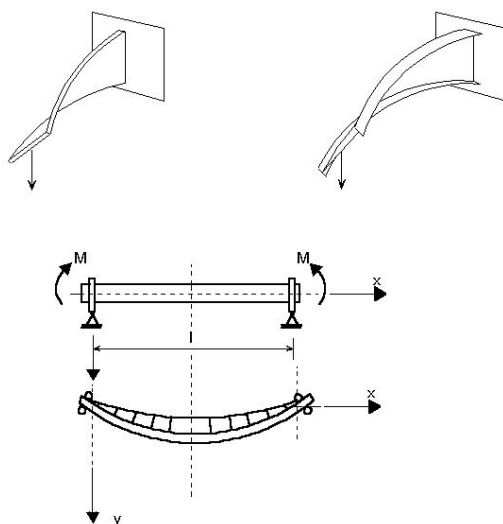


Fig.7.1 - Carregamentos que podem produzir encurvadura lateral em vigas de perfil aberto.

A determinação da carga crítica de encurvadura lateral para o caso teórico de vigas sem imperfeições geométricas recorre, normalmente, a uma resolução de um problema de valores próprios, tendo diversos investigadores colaborado na

determinação de cargas críticas em regime elástico, para diversos tipos de carregamento e de condições fronteira, como são exemplo: Bleich (1952), Timoshenko e Gere (1961), Lindler (1974) e Trahair (1983), entre outros.

Como consequência da rotação em torno do eixo longitudinal da viga, comparativamente à sua direcção inicial, a deformação resultante é uma combinação de torção com flexão.

Para uma viga carregada na direcção de maior resistência da secção, a encurvadura lateral torsional ocorre para um valor máximo de momento flector ou, para um valor máximo de tensão de compressão. Este valor é afectado por um conjunto de factores entre os quais se destacam a distribuição do momento ao longo da viga, as condições fronteira, o nível de aplicação das cargas transversais e ainda o tipo de secção recta, simétrica ou não simétrica.

Na figura 7.2 estão representados dois tipos de carregamento diferentes para o ensaio de vigas com apoios do tipo forquilha. O movimento característico deste estado de instabilidade é notório nas duas imagens.

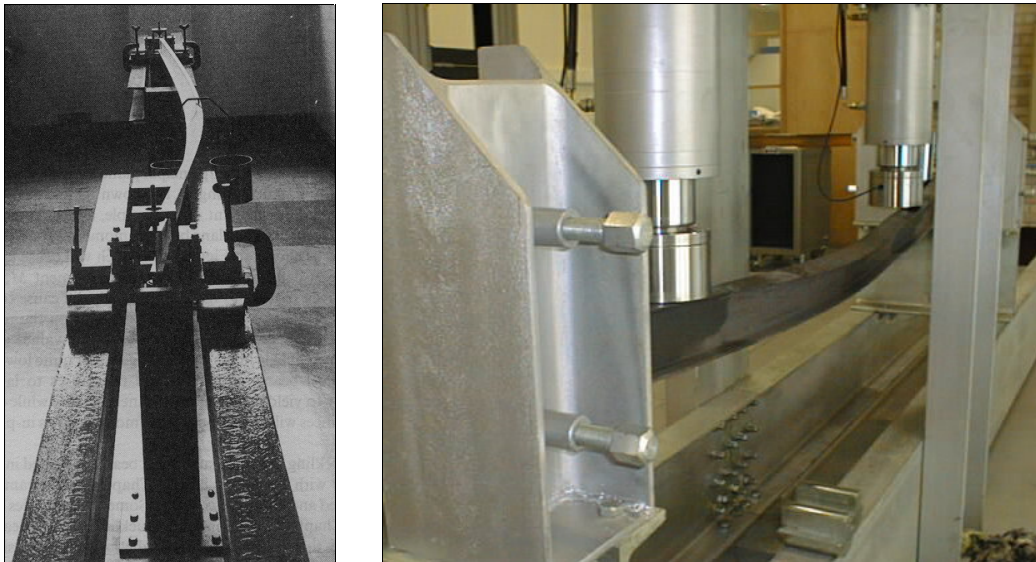


Fig. 7.2 – Encurvadura lateral de vigas com dois tipos de solicitação.

Na figura 7.3 encontra-se modelada, por elementos finitos, uma viga com 6 [m] de comprimento e sujeita a um estado de flexão pura. Neste tipo de análises com elementos do tipo casca é possível verificar visualmente o movimento da secção recta da viga e determinar o valor do momento resistente à encurvadura.

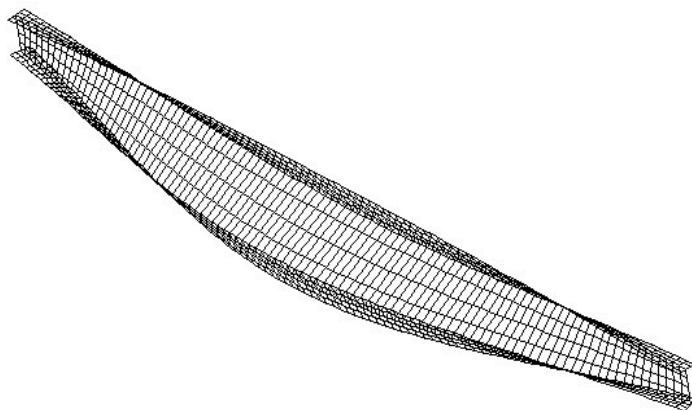


Fig. 7.3 – Modelação de uma viga ao fenómeno de encurvadura lateral torsional.

O empenamento é uma forma de deformação associada com o esforço de torção, no qual os banzos, de uma secção recta do tipo I, apresentam um movimento semelhante ao da figura 7.4, e já estudado no capítulo 4.

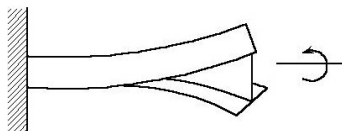


Fig. 7.4 – Empenamento da secção.

O tratamento matemático do fenómeno de encurvadura lateral torsional recorre à adimensionalização da esbelteza, bem como à caracterização do tipo de secção recta. Esta depende da proporção de cada elemento da secção que se encontra em compressão.

7.2. - Estado limite – Resistência à encurvadura lateral

Numa análise semelhante à encurvadura de Euler é possível determinar as equações envolvidas no processo e determinar as condições críticas para cada tipo de carregamento do elemento estrutural.

O dimensionamento ou cálculo do momento resistente à encurvadura de uma viga lateralmente sem constrangimentos e à temperatura ambiente deverá ser determinada através da expressão seguinte [7.7]:

$$M_{b,Rd} = \chi_{LT} \cdot \beta_w \cdot W_{pl,y} \cdot f_y / \gamma_{M1} \quad (7.1)$$

onde cada um dos parâmetros pode ser determinado em função da classe da secção recta. No caso de um perfil de secção aberta de dimensões tipo IPE100 deverá ser considerado $\beta_w=1$ (secções rectas de classe 1 e 2). O valor para o factor de redução χ_{LT} deverá ser determinado a partir da esbelteza adimensional $\bar{\lambda}_{LT}$. A esbelteza pode ser determinada através do quociente entre o comprimento de encurvadura da viga e o

seu raio de giração em torno do eixo relevante, ou eventualmente da forma que se apresenta a expressão 7.4.

O valor de χ_{LT} deverá ser sempre inferior à unidade, podendo ser determinado conforme expressão 7.2.

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + [\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2]^{0.5}} \quad (7.2)$$

Este factor deverá ser calculado em função de um novo parâmetro ϕ_{LT} , sendo dependente da esbelteza adimensional e de um factor de imperfeição α_{LT} , que por sua vez é função do tipo construtivo da secção recta a obter, ver figura 7.5.

$$\phi_{LT} = \frac{1}{2} [1 + \alpha_{LT} (\bar{\lambda}_{LT} - 0.2) + \bar{\lambda}_{LT}^2] \quad (7.3)$$

Assim, no caso de perfis obtidos por laminagem α_{LT} tomará o valor 0.21, enquanto que no caso de secções obtidas por soldadura valerá 0.49.

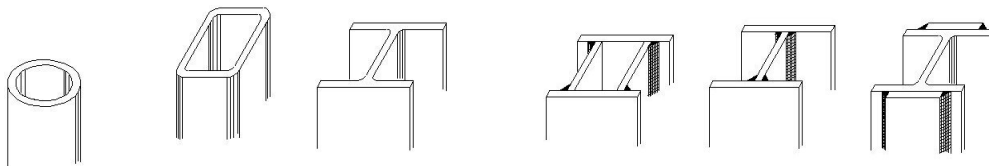


Fig. 7.5 - Secções laminadas e soldadas.

O valor da esbelteza adimensional poderá ser determinado a partir da seguinte expressão:

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\beta_w W_{pl,y} f_y / M_{cr}} = \left(\frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1} \right) \sqrt{\beta_w} \quad (7.4)$$

onde intervêm vários parâmetros diferentes, sendo de salientar o valor do momento crítico elástico à encurvadura lateral. Este depende das condições de carregamento e de apoio, que serão analisadas nos sub-capítulos seguintes. No que diz respeito ao valor da esbelteza adimensional, e segundo o Eurocódigo 3 parte 1.1, não haverá condições que permitam a ocorrência deste fenómeno para valores inferiores a 0.4.

A determinação da esbelteza λ_{LT} será efectuada através da expressão 7.5, de acordo com o documento [7.6].

$$\lambda_{LT} = \sqrt{\pi^2 E W_{pl,y} / M_{cr}} \quad (7.5)$$

Para determinar λ_1 , recorre-se à expressão 7.6, que é função do módulo de elasticidade e da tensão de cedência,

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \quad (7.6)$$

ou ainda através de outra expressão semelhante à anterior, devendo ser considerada a tensão de cedência nas unidades de [MPa].

$$\lambda_1 = 93.9 \epsilon = \pi \sqrt{E/f_y} \quad (7.7)$$

Neste caso, ϵ representa um factor que envolve o quociente entre a tensão de cedência f_y do material e o valor de referência, $\epsilon = [235/f_y]^{0.5}$.

Por outro lado a resistência plástica da secção pode ser calculada através da expressão:

$$M_{c,Rd} = W_{pl,y} f_y / \gamma_{M0} \quad (7.8)$$

em que o factor parcial de segurança γ_{M0} a utilizar deverá ser igual à unidade.

Dividindo o valor de cálculo do momento resistente à encurvadura $M_{b,Rd}$, pelo momento resistente de cálculo da secção, $M_{c,Rd}$, obtém-se a curva de cálculo à encurvadura lateral, representada na figura 7.6.

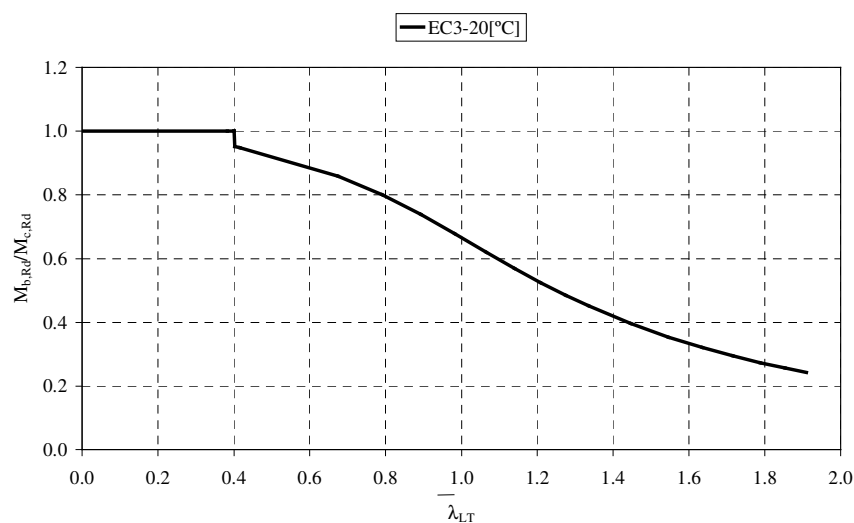


Fig. 7.6 – Curva de cálculo do momento resistente à encurvadura lateral, à temperatura ambiente.

7.3. - Equações de equilíbrio – método diferencial

Neste fenómeno de instabilidade, uma viga quando solicitada à flexão no plano de maior resistência, qualquer que seja o tipo de carregamento, pode encurvar lateralmente, conforme já foi referido. Esta encurvadura lateral é de extrema importância no dimensionamento de vigas sem apoios laterais, mesmo nos casos em que a viga apresenta maior rigidez à flexão no plano, comparativamente à direcção lateral. A

rotação da viga ocorre quando o banço comprimido se torna instável, como resultado de se encontrar submetido a tensões axiais induzidas por flexão. A encurvadura lateral tem importância relativa quando o banço comprimido não se encontrar lateralmente apoiado, como é o caso de aplicações práticas de vigas contínuas, vigas encastradas e pórticos.

Durante o período de tempo em que o carregamento esteja abaixo do valor crítico, a viga apresentará um comportamento estável. À medida que a carga vai aumentando pode ser atingido um novo equilíbrio em que o elemento estrutural pode apresentar uma rotação e um deslocamento vertical. A configuração plana da viga é agora instável e a menor carga para a qual esta condição crítica ocorre, representa a carga crítica do elemento (viga), ver figura 7.7.

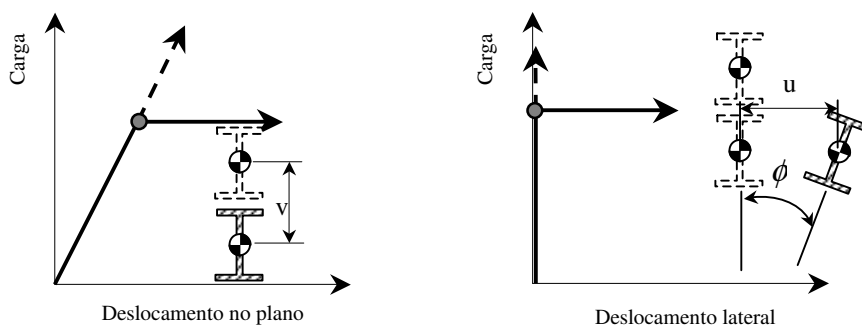


Fig. 7.7 – Flexão no plano e encurvadura na direcção ortogonal.

Neste movimento, a rotação provoca o aparecimento de momentos para fora do plano original de flexão, enquanto que as rotações laterais $\partial u/\partial z$ provocam componentes de binário em volta do eixo de rotação que passa pelo centro de corte.

Considerando o caso de uma viga simétrica, como a que se apresenta na figura 7.8, e assumindo um carregamento genérico que actua no plano yz, o elemento estrutural deforma-se-á conforme se ilustra na figura 7.8.

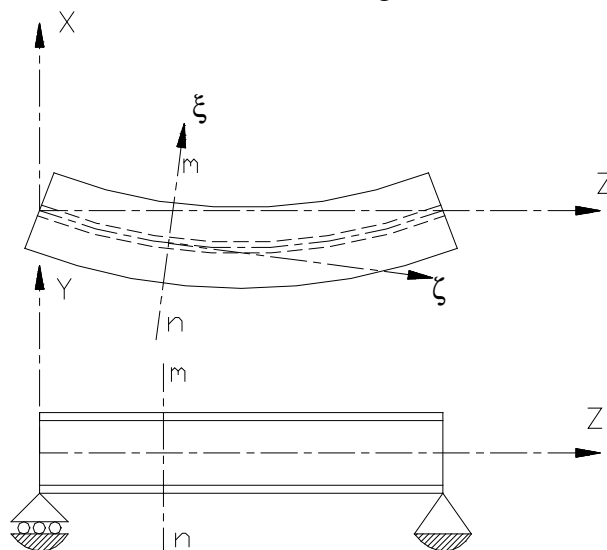


Fig.7.8- Encurvadura lateral de uma viga – representação esquemática.

No desenvolvimento das equações de equilíbrio será utilizado o sistema global cartesiano XYZ. Serão também utilizadas as coordenadas naturais ξ, η e ζ , no centróide de qualquer secção “mn”. Os eixos ξ e η , são eixos de simetria da secção e

por isso também eixos principais centrais de inércia. A direcção de ζ será definida como a direcção da tangente da deflexão da viga aquando da encurvadura. O deslocamento da viga é definido pelas coordenadas u e v , representativas do deslocamento do centróide da secção, considerados positivos no sentido dos semi-eixos positivos XY e ainda pelo ângulo de rotação ϕ , tomado como positivo, na direcção do eixo Z positivo (ver figura 7.9).

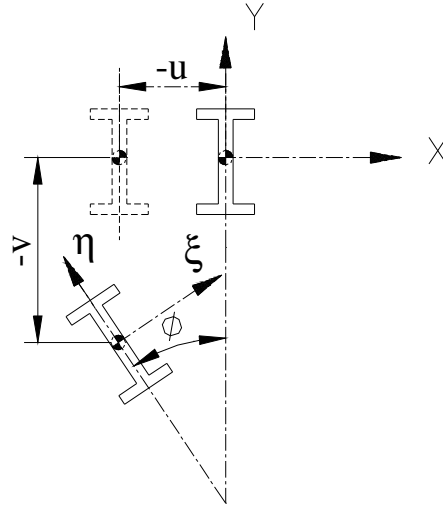


Fig.7.9 - Deslocamento e rotação da secção.

Quando os valores dos deslocamentos e da rotação em questão forem considerados muito pequenos, os co-senos directores deste sistema relativamente ao sistema global apresentam os seguintes valores [7.1].

	X	Y	Z
ξ	1	ϕ	$-\frac{\partial u}{\partial z}$
η	$-\phi$	1	$-\frac{\partial v}{\partial z}$
ζ	$\frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{\partial v}{\partial z}$	1

Tabela 7.1- Co-senos directores do sistema de coordenadas natural.

As curvaturas do eixo deflectido da viga nos planos XZ e YZ podem ser consideradas respectivamente: $\partial^2 u / \partial Z^2$ e $\partial^2 v / \partial Z^2$.

Para pequenos ângulos de rotação ϕ , pode ser assumido que a curvatura nos planos $\xi \zeta$ e $\eta \zeta$, tenham o mesmo valor. As equações diferenciais para flexão de viga podem ser então escritas da seguinte forma.

$$EI_{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} = M_{\xi} \tag{7.9}$$

$$EI_{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = M_{\eta} \quad (7.10)$$

Nestas equações, os momentos de segunda ordem dos eixos ξ e η são respectivamente I_{ξ} e I_{η} . Os momentos M_{ξ} e M_{η} representam o valor do momento flector relativamente aos mesmos eixos e são considerados positivos, de acordo com as seguintes convenções, ver figura 7.10.

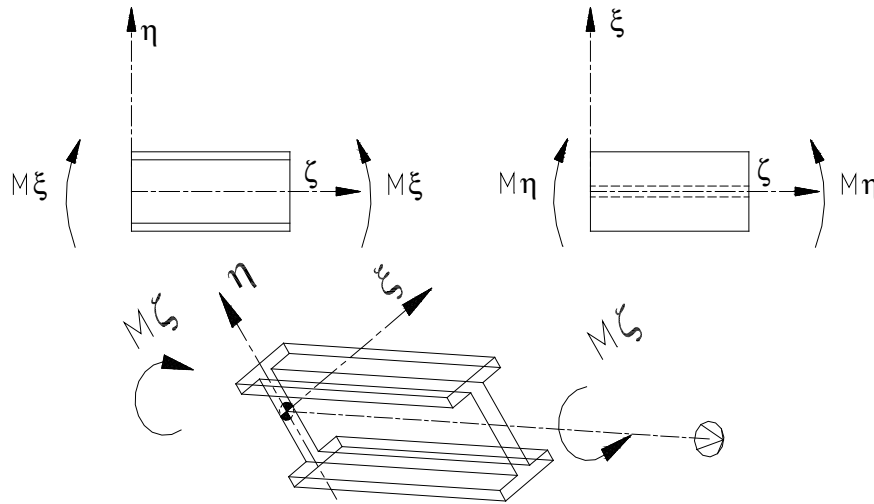


Fig. 7.10 - Definição dos sentidos positivos dos momentos.

A equação da rotação da viga será então definida conforme a expressão 7.11.

$$GJ \frac{\partial \phi}{\partial Z} - EC_w \frac{\partial^3 \phi}{\partial Z^3} = M_{\xi} \quad (7.11)$$

Nesta equação o produto GJ representa a rigidez torsional (designado adiante por C) e o coeficiente EC_w , a rigidez ao empeno (designado adiante por C_1). G representa o módulo de elasticidade ao corte e J a constante de torção, que no caso de vigas com secção aberta de paredes finas pode ser definido em função de:

$$J = \frac{1}{3} m t^3 \quad (7.12)$$

onde m representa o comprimento da linha média da secção recta e t o valor da espessura da parede do perfil. No caso da secção recta ser constituída por diferentes zonas com espessura diferente, J pode ser determinado através da expressão 7.13.

$$J = \frac{1}{3} \sum m_i t_i^3 \quad (7.13)$$

A equação apresentada é válida apenas para vigas de secção recta aberta e de parede fina. Para perfis laminados do tipo I a constante de torção pode ser determinada de acordo com a seguinte fórmula:

$$J = \frac{2bt_f^3 + ht_w^3}{3} \quad (7.14)$$

em que b e t_f representam respectivamente a largura e a espessura do banzo do perfil, enquanto que h representa a altura do perfil e t_w a espessura da alma.

A constante de empenamento, referenciada na equação 7.11, pode ser calculada em função da expressão seguinte.

$$C_w = \frac{t_f h^2 b^3}{24} \quad (7.15)$$

Estão assim apresentadas as três equações que definem a encurvadura lateral de vigas e através das quais se poderá determinar o valor da carga crítica.

7.3.1. - Encurvadura por flexão pura

No caso de flexão pura de uma viga, os momentos de flexão e de torção serão determinados através das componentes de M_0 (ver figura 7.11), projectados nos eixos naturais ξ , η e ζ .

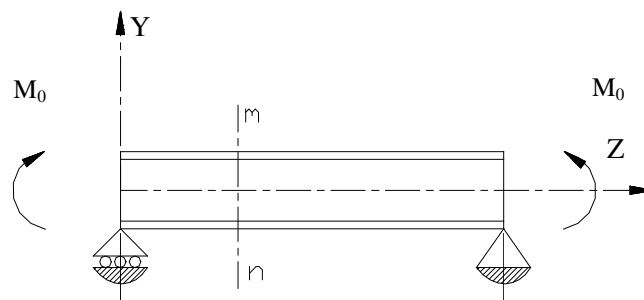


Fig. 7.11 – Viga submetida a momento uniforme.

Quando os momentos aplicados forem inferiores aos valores do momento crítico, a solução única para as equações diferenciais de equilíbrio será :

$$\begin{aligned} u &= 0 \\ \phi &= 0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

o que significa que a estrutura permanece não encurvada até se atingir o valor especificado. Nesse instante em que o momento iguala o valor crítico (ver figura 7.7), aparece a bifurcação da posição de equilíbrio dada pela equação 7.16 para uma nova posição de equilíbrio neutra definida pela equação 7.17.

$$\frac{u}{\delta} = \frac{\phi}{\theta} = \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad (7.17)$$

Recorrendo agora aos valores da tabela 7.1, e tendo em atenção os sentidos positivos dos momentos, obtém-se:

$$\begin{aligned} M_{\xi} &= M_0 \\ M_{\eta} &= \phi M_0 \\ M_{\zeta} &= -\frac{\partial u}{\partial Z} M_0 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Substituindo as expressões de 7.18 em 7.9, 7.10 e 7.11 obtêm-se as equações diferenciais em função das coordenadas naturais.

$$\begin{aligned} EI_{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} - M_0 &= 0 \\ EI_{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} - \phi M_0 &= 0 \\ C \frac{\partial \phi}{\partial Z} - C_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial Z^3} + \frac{\partial u}{\partial Z} M_0 &= 0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

Diferenciando a última equação do grupo 7.19 relativamente a “Z” e eliminando o factor $\partial^2 u / \partial Z^2$, através da combinação com a segunda desse mesmo grupo, obtém-se a seguinte equação modificada.

$$C_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial Z^4} - C \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - \frac{M^2_0 \phi}{EI_{\eta}} = 0 \quad (7.20)$$

Ou de uma forma simplificada:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial Z^4} - 2\alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial Z^2} - \beta \phi = 0 \quad (7.21)$$

em que os coeficientes α e β se representam conforme expressão 7.22.

$$\alpha = \frac{C}{2C_1} \text{ e } \beta = \frac{M^2_0}{EI_{\eta} C_1} \quad (7.22)$$

A resolução da equação diferencial 7.21 pode ser efectuada, admitindo uma solução do tipo:

$$\phi = A_1 \sin(mZ) + A_2 \cos(mZ) + A_3 e^{nZ} + A_4 e^{-nZ} \quad (7.23)$$

onde m e n representam quantidades reais consideradas positivas e definidas por:

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \\ n &= \sqrt{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \end{aligned} \quad (7.24)$$

As constantes de integração A_1, A_2, A_3 e A_4 determinam-se através das condições de apoio da viga. Assumindo que as extremidades da viga não podem rodar em torno do eixo dos “Z”, mas que se encontram-se livres de empenar, determinam-se as condições fronteira descritas na equação 7.25, para ambas as extremidades.

$$\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (7.25)$$

A partir destas condições conclui-se que a segunda constante se anulará e que a terceira será simétrica da quarta.

$$A_2 = 0, A_3 = -A_4 \quad (7.26)$$

O ângulo de torção ϕ poderá ser representado na forma mais simplificada:

$$\phi = A_1 \sin(mZ) - 2A_4 \sinh(nZ) \quad (7.27)$$

Utilizando as condições em $Z = l$, obtêm-se as equações que permitem determinar as constantes em estudo.

$$\begin{aligned} A_1 \sin(ml) - 2A_4 \sinh(nl) &= 0 \\ A_1 m^2 \sin(ml) + 2A_4 n^2 \sinh(nl) &= 0 \end{aligned} \quad (7.28)$$

Pretendendo obter soluções não nulas, para resolução deste sistema homogêneo, o determinante desta matriz deverá ser igual a zero, e sabendo que m e n são quantidades não nulas, conclui-se que:

$$\sin(ml) (n^2 \sinh(nl) + m^2 \sinh(nl)) = 0 \quad (7.29)$$

Esta imposição permite concluir, através de 7.29 que A_4 se deverá anular naturalmente. Assim, a expressão para a rotação da secção 7.27 ficará reduzida à equação.

$$\phi = A_1 \sin(mZ) \quad (7.30)$$

Esta expressão demonstra que a viga encurvará segundo a forma sinusoidal. O valor mais pequeno de m que satisfaz a equação 7.29 é dado pela expressão 7.31.

$$m = \pi/l \quad (7.31)$$

Substituindo o valor de m na expressão 7.24, obtém-se:

$$-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad (7.32)$$

Da mesma forma, substituindo os parâmetros α e β pelos respectivos valores, expressos em 7.22, pode ser encontrada a equação da carga crítica, representada por 7.33.

$$(M_0)_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{EI_{\eta} C \left(1 + \frac{C_1 \pi^2}{C l^2} \right)} \quad (7.33)$$

No caso do valor de m ter sido superior ao determinado pela expressão 7.31, o valor do momento crítico seria superior. Estes valores de momento crítico corresponderiam a modos de encurvadura que contivessem um ou mais pontos de inflexão, como é o caso de vigas lateralmente apoiadas, como se representa na figura seguinte.

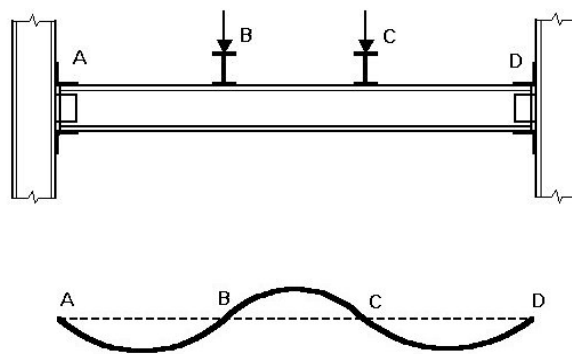


Fig. 7.12 – Vigas apoiadas lateralmente.

A expressão 7.33 demonstra que a resistência à encurvadura diminui com o aumento do comprimento da viga. O valor do momento crítico não depende da rigidez à flexão EI_{ξ} da viga no plano vertical. Esta conclusão é obtida como resultado da premissa de pequenos deslocamentos no plano vertical, que será tanto mais válida, quanto maior for a razão da rigidez vertical relativamente à rigidez lateral.

Depois de encontrado o valor do momento crítico, é possível determinar a tensão crítica, através da seguinte fórmula:

$$\sigma_{cr} = \frac{(M_0)_{cr}}{Z_{\xi}} \quad (7.34)$$

onde Z_{ξ} representa o valor do módulo à flexão na respectiva direcção e σ_{cr} o valor crítico da tensão, no caso de este se encontrar abaixo do valor limite de proporcionalidade do material.

A solução da equação 7.30 para determinação da resistência à encurvadura de perfis duplamente simétricos ignora o efeito das deformações no plano, na fase de pré encurvadura, transformando a viga num arco negativo, aumentando a sua resistência à encurvadura. Esta resistência $(M_0)_{cr}^*$ será mais precisa quando calculada através da expressão 7.35, [7.4].

$$(M_0)_{cr}^* = \frac{(M_0)_{cr}}{\sqrt{\left(1 - \frac{EI_y}{EI_x}\right) \left(1 - \left[GJ + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2}\right] / 2EI_x\right)}} \quad (7.35)$$

Para grande parte das vigas com secção I e tendo em consideração um sistema cartesiano rigidamente ligado à secção recta, a rigidez EI_x é muito superior ao valor da rigidez EI_y , GJ e EI_w/L^2 , sendo o valor calculado pela equação anterior ligeiramente superior ao determinado pela expressão 7.33. A equação 7.35 consegue demonstrar que a resistência das secções circulares abertas é infinitamente grande, uma vez que $EI_x = EI_y$.

No quadro seguinte é possível comparar o comportamento de diferentes secções rectas, quando submetidas à flexão pura, indicando-se a equação a utilizar para cada caso.




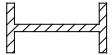
<i>Tipo de secção recta</i>	<i>Equação a utilizar</i>	<i>Comentário</i>
	7.33	Pode encurvar
	7.35	Raramente encurva
	7.35	Não encurva
	7.35	Não encurva

Tabela 7.2 – Caracterização das secções à encurvadura lateral torsional [7.4].

7.3.2. - Encurvadura por carregamento transversal concentrado

No caso de uma viga simplesmente apoiada e submetida à flexão no plano YZ, através de uma carga P , aplicada no centróide de uma secção recta a meio vão, figura 7.13, a encurvadura lateral poderá ocorrer quando a carga atingir um determinado valor crítico.

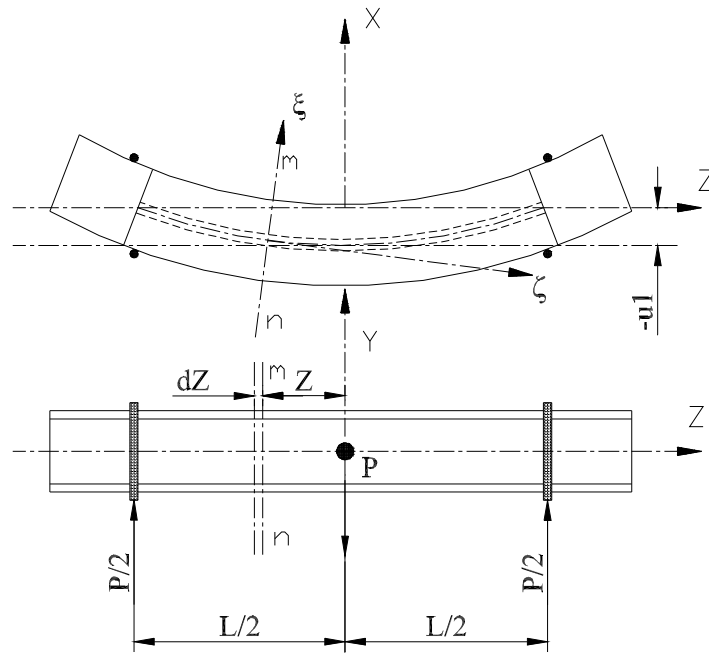


Fig. 7.13 - Viga sujeita à encurvadura lateral, com carregamento central.

É assumido que durante a deformação, as extremidades da viga não poderão rodar em torno de Z, enquanto que nas duas restantes direcções principais de inércia, a viga estará livre de o fazer. A encurvadura será acompanhada por uma rotação de secção, como no exemplo anterior.

Na determinação da carga crítica é assumido que ocorre uma pequena encurvadura, pelo que na determinação das equações diferenciais de equilíbrio e a partir das condições de apoio nas extremidades, determina-se a menor carga exigida para manter a viga naquela posição, ligeiramente encurvada.

Os momentos provocados por essa força no centróide da secção “mn”, paralelos às direcções X, Y e Z, são:

$$\begin{aligned}
 M_x &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \\
 M_y &= 0 \\
 M_z &= -\frac{P}{2} (-u_1 + u)
 \end{aligned}
 \tag{7.36}$$

O momento de flexão numa viga com este tipo de carregamento varia ao longo do comprimento desta. Na última expressão do conjunto de equações (7.37), u_1 representa o deslocamento lateral do centróide da secção recta a meio vão, enquanto que u representa o mesmo grau de liberdade em qualquer posição da secção recta “mn”, ao longo do respectivo comprimento.

Ambas as quantidades são consideradas positivas no sentido positivo dos eixos referenciados.

Utilizando o mesmo sistema de coordenadas natural ξ , η e ζ , e projectando os momentos das expressões 7.36 nesses eixos através da tabela dos co-senos directores, obtém-se:

$$\begin{aligned}
M_{\xi} &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \\
M_{\eta} &= \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \cdot \phi \\
M_z &= -\frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{P}{2} (u_1 - u)
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Substituindo agora as expressões 7.37 nas equações 7.9 a 7.11, as equações diferenciais de equilíbrio para a viga encurvada apresentam a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
EI_{\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) &= 0 \\
EI_{\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \phi &= 0 \\
C \frac{\partial \phi}{\partial z} - C_1 \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \frac{P}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{P}{2} (u_1 - u) &= 0
\end{aligned} \tag{7.38}$$

Eliminando o campo de deslocamentos, nomeadamente a componente u , das duas últimas equações, obtém-se:

$$C_1 \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - C \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{P^2}{4EI_{\eta}} \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 \phi = 0 \tag{7.39}$$

Integrando esta equação e utilizando as condições na extremidade da viga, demonstra-se que o valor da carga crítica poderá ser expresso na forma 7.40, ou seja:

$$P_{cr} = \frac{l^2 C}{C_1} \sqrt{EI_{\eta} C} \tag{7.40}$$

A localização do ponto de aplicação da carga P influencia os resultados da carga crítica. Um estudo efectuado, com várias simulações numéricas, para verificar a influência do posicionamento relativo, encontra-se resumido na referência [7.1].

Para o caso específico em que a força actua no centro de corte da secção em análise, as expressões podem ser aproximadas [7.4], utilizando:

$$\frac{(M_0)_{cr}^*}{(M_0)_{cr}} = \alpha_m = 1.35 \tag{7.41}$$

em que $(M_0)_{cr}^*$ representa o momento crítico elástico corrigido, relativamente ao valor correspondente à situação de flexão pura $(M_0)_{cr}$, expressão 7.33.

$$(M_0)_{cr}^* = \frac{P_{cr}L}{4} \tag{7.42}$$

Quando a carga exterior é aplicada a uma distância “a” do meio vão da viga, a expressão 7.41 deverá ser substituída pela seguinte:

$$\frac{(M_0)_{cr}^*}{(M_0)_{cr}} = 1.35 + 0.4 \left(\frac{2a}{L} \right)^2 \tag{7.43}$$

Outras soluções de carregamento estão representadas na figura 7.14, sendo o factor β representativo do quociente entre os valores dos momentos aplicados na extremidade.

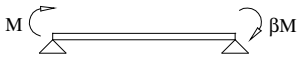
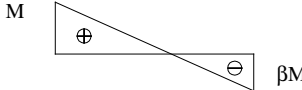
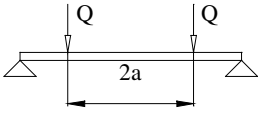
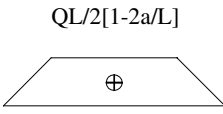
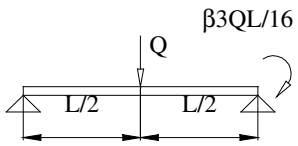
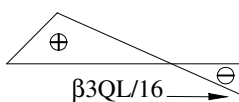
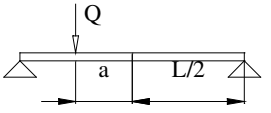
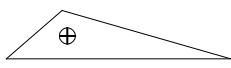
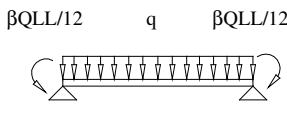
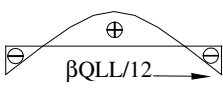
<i>Elemento de viga</i>	<i>Distribuição do momento flector</i>	α_M	<i>Intervalo</i>
		$1.75 + 1.05\beta + 0.3\beta^2$	$-1 < \beta < 1$
		$1.0 + 0.35 \left(1 - \frac{2a}{L} \right)^2$	$0 < \frac{2a}{L} < 1$
		$1.35 + 0.15\beta$ $-1.2 + 3.0\beta$	$0 < \beta < 0.89$ $0.89 < \beta < 1$
		$1.35 + 0.4 \left(\frac{2a}{L} \right)^2$	$0 < \frac{2a}{L} < 1$
		$1.13 + 0.12\beta$ $-2.38 + 4.8\beta$	$0 < \beta < 0.75$ $0.75 < \beta < 1$

Fig. 7.14 – Factores de momento α_m para vigas (cargas no centro de corte).

7.3.3. - Encurvadura por carregamento transversal distribuído.

A resistência à encurvadura de vigas duplamente simétricas com carregamento uniformemente distribuído q , é determinado de acordo com a expressão 7.44, para o caso do carregamento estar aplicado no respectivo centro de corte [7.4].

$$\frac{(M_0)_{cr}^*}{(M_0)_{cr}} = 1.13 \quad (7.44)$$

Este resultado é menor do que o valor da resistência à encurvadura determinado pela expressão 7.41, utilizado para o caso de vigas com cargas concentradas, uma vez que a variação da distribuição do momento é aproximadamente uniforme. Este facto reforça a conclusão de que o factor de momento α diminui com a aproximação da distribuição de momento por uma constante.

O valor de momento máximo ocorre a meio da viga, para o valor de:

$$M_m = \frac{qL^2}{8} \quad (7.45)$$

Na referência [7.4] são apresentados vários resultados numéricos, tendo em consideração o posicionamento da carga.

7.4. - Equações de equilíbrio - método energético

Em vez da carga crítica para a encurvadura lateral ser determinada por integração directa das equações diferenciais, o método da energia de deformação pode ser utilizado de uma forma mais vantajosa. Aplicando este método à viga da figura 7.13, quando esta encurva lateralmente, a energia de deformação aumenta, uma vez que a flexão na direcção lateral e a rotação ao longo do seu eixo, se adicionam na flexão do plano da alma. Ao mesmo tempo que o ponto de aplicação da carga P é deslocado no sentido do movimento, esta realiza uma certa quantidade de trabalho. O valor crítico da carga é determinado no pressuposto de que esta quantidade ΔT é numericamente igual à energia de deformação da viga ΔU .

$$\Delta U = \Delta T \quad (7.46)$$

O pequeno aumento na energia de deformação devido à flexão da viga no plano da alma, que ocorrerá durante o fenómeno de encurvadura, pode ser desprezado durante a aplicação do método da energia. Esta hipótese é equivalente à assumida previamente, quando se admite que a curvatura no referido plano é infinitamente pequena e pode ser desprezada na derivação das equações diferenciais de equilíbrio. O resultado destes pressupostos seria efectivamente real no caso da rigidez da viga no plano da alma ser infinitamente grande. No caso de vigas para as quais a rigidez no plano da alma é muito

grande quando comparado com a rigidez na direcção lateral, este pressuposto apresenta resultados suficientemente precisos para as aplicações práticas necessárias [7.1].

A energia de deformação devida à flexão e à torção, pode ser determinada utilizando a expressão genérica seguinte:

$$U = \frac{EI_{\eta}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{C}{2} \int_0^l \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz + \frac{C_1}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (7.47)$$

para a qual, os termos representam respectivamente, a energia de deformação devida à flexão lateral, à torção e ao empenamento da viga.

Tendo em consideração a simetria da viga encurvada, como por exemplo a figura 7.13, pode ser demonstrado que o aumento de energia devida à encurvadura lateral é dado pela expressão 7.48.

$$\Delta U = EI_{\eta} \int_0^{l/2} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^{l/2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{l/2} \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (7.48)$$

7.4.1. - Encurvadura por carregamento transversal concentrado

Para determinar a mínima carga crítica P capaz de provocar a encurvadura lateral, considere-se um elemento dz do eixo longitudinal. Admitindo-se a possibilidade de encurvadura no plano $\xi\xi$ e a secção recta “mn” considerada fixa, a extremidade da viga descreve um arco infinitamente pequeno, de valor:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz \quad (7.49)$$

No plano $\xi\xi$ a componente vertical deste arco será:

$$\phi \frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz \quad (7.50)$$

O abaixamento do ponto de aplicação da carga devido à encurvadura lateral é obtido a partir da soma das componentes verticais para todos os elementos de viga desde $Z = 0$ até $Z = l/2$. Determina-se então a expressão do trabalho devido ao momento da carga durante o movimento da viga.

$$\Delta T = P \int_0^{l/2} \phi \frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz \quad (7.51)$$

A equação para determinar o valor crítico da carga, torna-se assim, por igualdade da expressão 7.48 e 7.51, em:

$$P \int_0^{l/2} \phi \frac{d^2 u}{dz^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz = EI_{\eta} \int_0^{l/2} \left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)^2 dz + C \int_0^{l/2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{l/2} \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (7.52)$$

Substituindo o valor de $d^2 u / dz^2$ pelo valor da segunda expressão resultante de 7.38, obtém-se:

$$\frac{P^2}{4EI_{\eta}} \int_0^{l/2} \phi^2 \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 dz = C \int_0^{l/2} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz + C_1 \int_0^{l/2} \left(\frac{d^2 \phi}{dz^2} \right)^2 dz \quad (7.53)$$

Para determinar o valor crítico da carga, será necessário assumir para ϕ uma expressão que satisfaça as condições fronteira da viga e substituí-la na expressão 7.53. Tratando esta expressão com um ou mais parâmetros e ajustando-os de forma a constituir a força P , pode-se determinar o valor da carga crítica P_{cr} com precisão. Se as condições dos constrangimentos forem as evidenciadas na figura 7.13 pode-se aproximar uma solução para o ângulo de rotação ϕ , na forma de série trigonométrica, através de:

$$\phi = a_1 \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{l}\right) + a_2 \cos\left(3\frac{\pi \cdot z}{l}\right) + \dots \quad (7.54)$$

para a qual, cada termo em conjunto com as segundas derivadas se anulam nos extremos da viga. Tomando um ou mais termos da série apresentada, determina-se o valor correspondente a P_{cr} e comparando-o com o determinado através da integração das expressões 7.53, poderá ser testada a precisão do método. Assim e considerando apenas o primeiro termo para determinação da carga crítica, o erro será de apenas 0.5%, o que relativamente ao erro obtido com os dois primeiros termos da série, é cinco vezes maior [7.1].

Em conclusão, o método energético satisfaz e simplifica a determinação da carga crítica, proporcionando resultados aceitáveis para os casos práticos correntes. Também se demonstra na referência [7.2] que o valor da carga crítica determinada pelo método energético é sempre superior ao valor exacto.

É assumido nas expressões precedentes que a carga P é aplicada no centróide da secção recta média da viga. É de referir ainda que o valor crítico da carga diminui quando o ponto de aplicação é elevado, e aumenta quando este baixa. Este efeito na carga crítica pode ser considerado no método energético, sendo apenas necessário considerar a posição do ponto de aplicação da carga, relativamente ao centróide da secção e principalmente o movimento de rotação da secção recta média da viga.

No caso de se considerar “ ϕ_0 ” como ângulo de rotação e “ a ” como a distância na vertical do ponto de aplicação da carga, a partir do centróide da secção recta, considerado positivo quando localizado acima deste ponto de referência, pode-se admitir que o abaixamento adicional da carga é:

$$a(1 - \cos(\phi_0)) \approx \frac{a\phi_0^2}{2} \tag{7.55}$$

Assim, em vez de 7.53, obtém-se:

$$\frac{Pa\phi_0^2}{2} + \frac{P^2}{4EI_\eta} \int_0^{l/2} \phi^2 \left(\frac{l}{2} - z\right)^2 dz = C \int_0^{l/2} \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2 dz + C_1 \int_0^{l/2} \left(\frac{d^2\phi}{dz^2}\right)^2 dz \tag{7.56}$$

Esta equação pode ser resolvida em ordem a P, admitindo para ϕ uma aproximação em série do tipo já apresentado. Na referência [7.1] é demonstrado que elevando ou baixando o ponto de aplicação da carga, o efeito é mais sensível na carga crítica quanto mais pequena for a quantidade l^2C/C_1 .

7.4.2. - Encurvadura por carregamento transversal distribuído

O método descrito para o caso de uma carga concentrada a meio vão pode também ser utilizado quando a viga da figura 7.8 suportar uma carga uniformemente distribuída. O valor da carga crítica pode ser expressa na forma seguinte [7.4].

$$(q)_{cr} = \gamma_4 \frac{\sqrt{EI_\eta C}}{l^2} \tag{7.58}$$

Nesta expressão, γ_4 depende do quociente l^2C/C_1 e do posicionamento da carga. Os valores numéricos do factor γ_4 estão tabelados na tabela 7.3, para os casos em que a carga aplicada se situa no banzo superior, centróide e banzo inferior, respectivamente.

Local da Carga Aplicada	l^2C/C_1													
	0,4	4	8	16	24	32	48	64	80	128	200	280	360	400
Banzo Superior	92.9	36.3	30.4	27.5	26.6	26.1	25.9	25.9	25.8	26.0	26.4	26.5	26.6	26.7
centróide	143	53	42.6	36.3	33.8	32.6	31.5	30.5	30.1	29.4	29.0	28.8	28.6	28.6
Banzo Inferior	223	77.4	59.6	48.0	43.6	40.5	37.8	36.4	35.1	33.3	32.1	31.3	31.0	30.7

Tabela 7.3 – Valores do parâmetro γ_4 no caso de vigas simplesmente apoiadas com carregamento uniforme [7.4].

7.4.3.- Exemplo de aplicação

A aplicação que se segue corresponde ao tipo de ensaios experimentais que serão apresentados no capítulo seguinte. Trata-se de uma viga simplesmente apoiada com apoios de forquilha, com carregamento distribuído e concentrado, conforme se apresenta na figura 7.15, afastando-se de qualquer dos exemplos atrás mencionados.

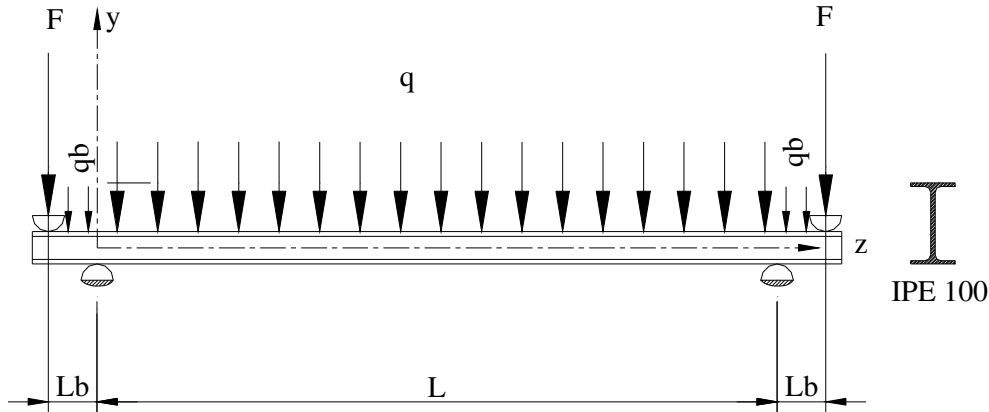


Fig. 7.15 – Carregamento da viga em estudo.

De uma forma semelhante ao que foi efectuado nos sub-capítulos anteriores relativamente à determinação da carga crítica, será admitida como solução possível para resolução das equações diferenciais, uma variação polinomial de segundo grau.

$$u = \delta \cdot \left(\frac{z}{L} - \frac{z^2}{L^2} \right) \quad (7.58)$$

$$\phi = \theta \cdot \left(\frac{z}{L} - \frac{z^2}{L^2} \right)$$

Nesta expressão u e ϕ representam o deslocamento lateral e a rotação da secção recta da viga, enquanto que δ e θ representam os mesmos graus de liberdade a meio da viga. Quando o carregamento apresentado é já suficientemente grande, o comportamento da viga bifurca o respectivo movimento. A equação de energia para esta nova posição encurvada será aproximada por:

$$\frac{1}{2} \int_0^L (EI_y u''^2 + EI_w \phi''^2 + GJ \phi'^2) dz + \frac{1}{2} \int_0^L 2M_x \phi u'' dz + \frac{1}{2} \int_0^L q(y_q - y_0) \phi^2 dz = 0 \quad (7.59)$$

O primeiro termo da equação representa o aumento na energia de deformação armazenada na viga durante a encurvadura, devido à curvatura por flexão u'' , mais a energia armazenada devido ao empeno e às rotações. O segundo termo representa a energia do trabalho realizado pelo momento flector M_x e esforço transverso, assim que a viga deflecte v , como combinação de acréscimo lateral u e da rotação por torção ϕ .

A interpretação física da primeira parte do decréscimo da energia potencial do sistema de cargas pode ser obtida pela consideração da curvatura $v'' = \phi u''$ no plano de flexão resultante pela curvatura do eixo de menor resistência e da rotação da secção.

Derivando duas vezes consecutivas as expressões admitidas para o movimento entre as duas posições referidas, bem como substituindo a expressão para o momento e carregamento distribuído na expressão de equilíbrio energético, 7.59, obtém-se:

$$\frac{2.E.I_y}{L^3} \delta^2 + \left(\frac{2EI_w}{L^3} + \frac{GJ}{6L} \right) \theta^2 + \delta\theta \left(\frac{F.L_b}{3.L} + \frac{q_b.L_b^2}{6.L} - \frac{q.L}{30} \right) = 0 \quad (7.60)$$

Modificando a expressão algébrica para o formato matricial, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \frac{2EI_y}{L^3} & \frac{1}{2} \left(\frac{F.L_b}{3L} + \frac{q_b.L_b}{6L} - \frac{qL}{30} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{F.L_b}{3L} + \frac{q_b.L_b}{6L} - \frac{qL}{30} \right) & \left(\frac{3EI_w}{L^3} + \frac{GJ}{6L} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.61)$$

Admitindo soluções não nulas, para este tipo de sistema homogéneo, deverá ser imposto o determinante da matriz igual a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \frac{2EI_y}{L^3} & \frac{1}{2} \left(\frac{F.L_b}{3L} + \frac{q_b.L_b}{6L} - \frac{qL}{30} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{F.L_b}{3L} + \frac{q_b.L_b}{6L} - \frac{qL}{30} \right) & \left(\frac{3EI_w}{L^3} + \frac{GJ}{6L} \right) \end{bmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F^2 \left[\left(\frac{L_b^2}{(6L)^2} \right) \right] - F \left[\frac{L_b \cdot q}{180} - \frac{q_b \cdot L_b^3}{36.L^2} \right] + \frac{q_b^2 L_b^2}{12^2 L^2} + \frac{q^2 L^2}{60^2} - \frac{q_b L_b q}{30 \times 12} - \frac{2EI_w}{L^3} \left(\frac{2EI_w}{L^3} + \frac{GJ}{6L} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (7.62)$$

A resolução desta equação, possibilita a obtenção da solução para a carga crítica F , função de várias propriedades e características da viga.

O valor do momento crítico será sempre obtido junto de qualquer dos apoios, através da expressão:

$$(M_0)_{cr} = -F^{cr} \times L_b - \frac{q_b \cdot L_b^2}{2} \quad (7.63)$$

Este momento crítico pode ser comparado com a situação de flexão pura, utilizando uma expressão semelhante à 7.41, tendo em consideração a variação de α_m em função do comprimento, conforme se evidencia na figura 7.16.

$$(M_0)_{cr}^* = \alpha_m (M_0)_{cr} = \alpha_m \times \frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \times \sqrt{\frac{I_w}{I_z} + L^2 \times \frac{GI_t}{\pi^2 EI_z}} \quad (7.64)$$

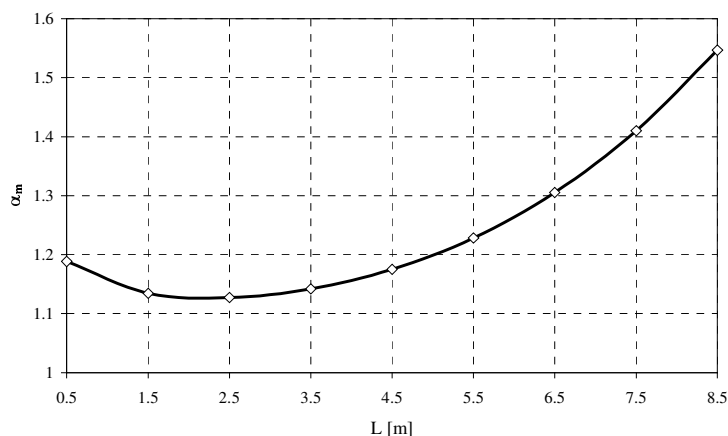


Fig. 7.16 – Variação do coeficiente de relação de momentos críticos.

A distribuição de momentos entre os dois apoios será tanto mais próxima do valor constante, quanto mais curta for a viga. A figura 7.17 pretende representar a distribuição de momentos flectores entre os apoios da viga, em função do aumento da carga F , bem como o valor do momento crítico elástico, para comprimentos de viga discretos, desde 0.5 [m] até 8.5 [m].

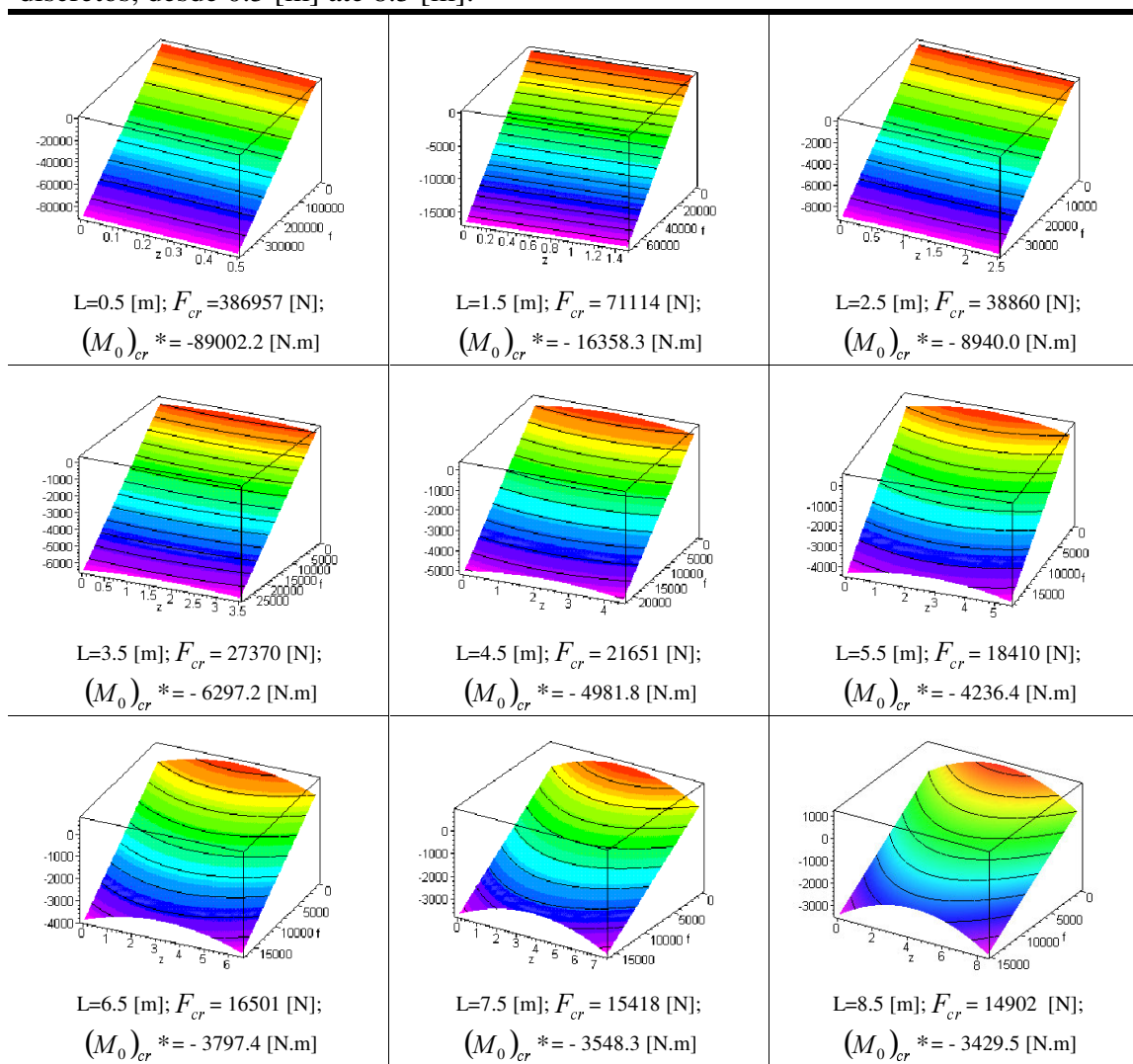


Fig. 7.17 – Variação do momento flector entre apoios, para diversos comprimentos de viga.

Pela figura 7.17 é possível interpretar o gráfico do coeficiente de momentos representado em 7.16. Assim, para comprimentos de viga pequenos, o valor do momento crítico aproxima-se do valor calculado pela expressão 7.33, onde se considera uma distribuição de momento uniforme. Para valores de comprimento superiores, a distribuição deixa de ser constante, razão pela qual o coeficiente aumenta significativamente.

7.5. - Encurvadura lateral de vigas em regime não elástico

No caso de uma viga, com as mesmas características geométricas, ser solicitada para além do nível de tensão cedência ou de proporcionalidade, a carga crítica deverá ser calculada utilizando o módulo de elasticidade tangente, E_t , que varia com a tensão, ao contrário do valor constante de E , em regime elástico.

Já foi demonstrado que a carga crítica, no caso de encurvadura lateral dentro do regime elástico, dependeria do valor da rigidez à flexão lateral EI_η , que por sua vez será proporcional ao módulo de elasticidade E . Por seu lado, a rigidez torsional C , será proporcional ao módulo de elasticidade transversal G . Para além do limite de proporcionalidade, a rigidez à flexão lateral diminui com o quociente E_t/E . Admitir-se-á que o valor de rigidez torsional diminui na mesma proporção, mantendo o quociente l^2C/C_t inalterado [7.4]. Esta hipótese pode ser considerada como beneficiando a segurança, uma vez que a rigidez à flexão lateral é devida essencialmente à rigidez dos banzos, que diminui na razão E_t/E , quando se ultrapassa o limite de proporcionalidade. Por outro lado a rigidez à torção, dependerá da rigidez da alma e dos banzos, e uma vez que uma parte da alma permanece sempre no domínio elástico, será de esperar que a rigidez à torção diminua numa razão inferior a E_t/E [7.1].

7.5.1. - Encurvadura por flexão pura

Começando com flexão pura e uma vez que o nível de tensão instalado é constante ao longo do comprimento da viga, o módulo de elasticidade será o mesmo para todas as secções rectas da viga, ultrapassado o limite de proporcionalidade. Como consequência indirecta, as equações permanecem inalteradas neste domínio, sendo necessário apenas substituir o valor da rigidez à flexão e à torção pelos valores respectivos, utilizando o módulo tangente. Assim a equação do momento crítico em regime não elástico $(M_0)_{cr}^n$, deverá ser calculada pela expressão 7.65 [7.4].

$$(M_0)_{cr}^n = \frac{\pi}{l} \sqrt{E_t I_\eta C_t \left(1 + \frac{C_t}{C_l} \frac{\pi^2}{l^2} \right)} \quad (7.65)$$

Esta expressão tem a mesma forma da equação 7.34, excepto no valor de rigidez à flexão utilizado, que recorre a E_t , em vez de E , e à notação de C_t , traduzida por:

$$C_t = C \frac{E_t}{E} \quad (7.66)$$

Uma vez que o quociente C_t / Cl^2 permanece inalterado para além do limite de proporcionalidade, pode ser demonstrado pela equação 7.65 que o valor do momento crítico é menor do que o calculado na hipótese de um comportamento perfeitamente elástico. No caso de ser conhecido o valor do quociente E_t/E para cada valor de tensão, o momento crítico poderá ser calculado pelo método da tentativa erro, conforme diagrama que se segue.

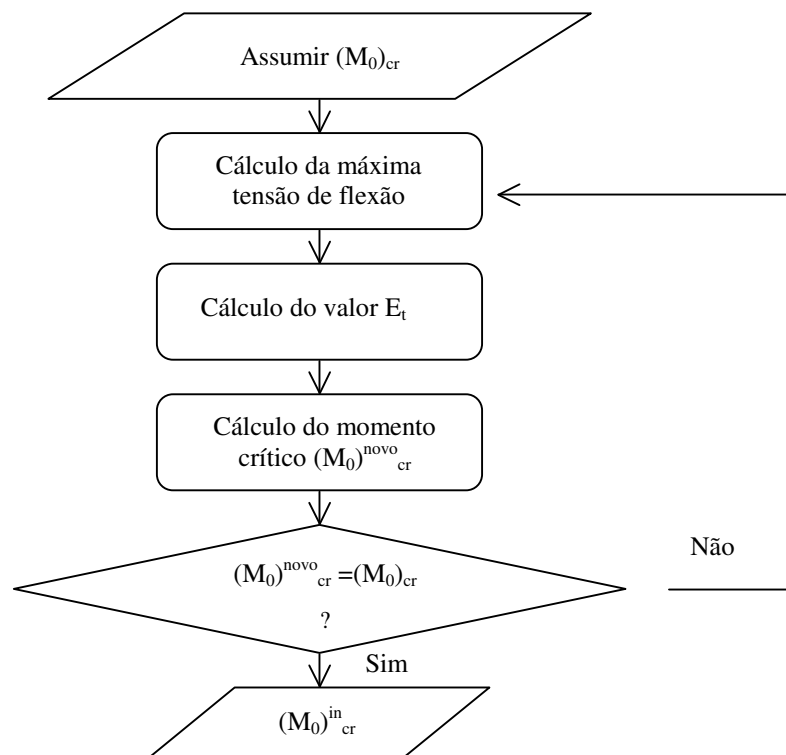


Fig. 7.18- Fluxograma para determinação da carga crítica, em regime não linear.

7.5.2. – Encurvadura por carregamento transversal

No caso de flexão provocada por cargas concentradas ou distribuídas, o valor da tensão varia nos banzos ao longo do comprimento da viga. Mesmo para além do limite de proporcionalidade, o módulo de elasticidade tangente E_t varia ao longo da viga, pelo que as equações diferenciais de equilíbrio para encurvadura lateral serão do mesmo tipo que as equações utilizadas para vigas de secção variável. Para simplificar este problema e aproximar o valor da carga crítica, considera-se um valor constante para E_t . Neste caso, o valor corresponde ao momento máximo e deverá ser substituído na equação diferencial de equilíbrio. A carga crítica será calculada da mesma maneira, sendo apenas necessário utilizar a rigidez à flexão $E_t I_\eta$ e C_t para a rigidez torsional. É evidente que

determinando a tensão crítica desta forma, colocará o projectista do lado da segurança, pois reduz-se a rigidez à flexão lateral e à torção ao longo de toda viga. Em algumas secções que forem solicitadas para além do limite elástico, esta diminuição será menor, não havendo redução nos locais onde a tensão de cedência não for superada. Assumindo tudo o que foi referido, o valor da carga crítica pode ser determinado pelo método iterativo, referido na figura 7.18 [7.1].

7.6. - Estado limite último em situação de incêndio – resistência à encurvadura lateral

7.6.1. – Proposta do Eurocódigo 3

O estado limite último de uma viga no que diz respeito à encurvadura lateral e em condições de temperaturas elevadas deverá ser tratada de uma forma diferente da apresentada no sub-capítulo 7.2, uma vez que o comportamento do material será não linear. Tendo em consideração as referidas variações que se encontram definidas no capítulo 2, é apresentada a metodologia simplificada do Eurocódigo 3, parte 1-2, onde a temperatura da viga pode ser obtida através da equação de condução do calor simplificada, ao longo do tempo. Admitindo a temperatura constante na secção, tendo em consideração a esbelteza adimensional $\bar{\lambda}_{LT,\theta,com}$ para a temperatura máxima no banzo comprimido, $\theta_{a,com}$, atingida no instante t , o valor de cálculo do momento resistente à encurvadura lateral em situação de incêndio no instante t , $M_{b,fi,t,Rd}$ deverá ser determinado a partir da equação seguinte:

$$M_{b,fi,t,Rd} = \frac{\chi_{LT,fi}}{1.2} w_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y \frac{1}{\gamma_{M,fi}} \quad (7.67)$$

onde $\chi_{LT,fi}$ representa o factor de redução para a encurvadura lateral, em caso de incêndio, $w_{pl,y}$ o módulo plástico da secção e $k_{y,\theta,com}$ traduz o efeito da variação da tensão de cedência à temperatura máxima do banzo em compressão $\theta_{a,com}$, atingida no instante t .

O factor de segurança parcial em caso de incêndio $\gamma_{M,fi}$ deverá ser igual a 1. A constante de 1.2 é um valor empírico utilizado como factor de correcção.

O factor de redução para o caso da encurvadura lateral em caso de situação de incêndio deverá ser determinado da mesma forma que à temperatura ambiente, ou seja:

$$\chi_{LT,fi} = \frac{1}{\phi_{LT,\theta,com} + \sqrt{[\phi_{LT,\theta,com}]^2 - [\bar{\lambda}_{LT,\theta,com}]^2}} \quad (7.68)$$

com

$$\phi_{LT,\theta,com} = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha (\bar{\lambda}_{LT,\theta,com} - 0.2) + (\bar{\lambda}_{LT,\theta,com})^2 \right] \quad (7.69)$$

A esbelteza adimensional $\bar{\lambda}_{LT,\theta,com}$, agora calculada com o efeito da temperatura, $\theta_{a,com}$, deverá ser determinada pela expressão alternativa à 7.4, que se apresenta em 7.70.

$$\bar{\lambda}_{LT,\theta,com} = \bar{\lambda}_{LT} \sqrt{\frac{k_{y,\theta,com}}{k_{E,\theta,com}}} \quad (7.70)$$

onde $\bar{\lambda}_{LT}$ representa a esbelteza adimensional à temperatura ambiente e $k_{E,\theta,com}$ o factor de redução do valor do módulo de elasticidade, à temperatura da flange de compressão $\theta_{,com}$, atingida no instante t. O parâmetro α representa o factor de imperfeição, já referido.

Os parâmetros a determinar em relação à temperatura ambiente, deverão ser determinados em função das expressões já apresentadas no sub-capítulo 7.2.

O momento elástico crítico para a encurvadura lateral deverá ser determinado em função do carregamento, de acordo com o anexo F do EC3 [7.7], onde estão representados alguns casos de carga. Para os testes experimentais a apresentar no capítulo seguinte, o carregamento corresponde ao apresentado no exemplo de aplicação da figura 7.15.

De uma forma semelhante ao que foi feito para a temperatura ambiente, será apresentado o processo de dimensionamento de vigas à encurvadura lateral, agora para temperaturas elevadas. A figura 7.19 representa a curva de cálculo da resistência da viga à encurvadura lateral, em situação de incêndio, para diferentes valores de esbelteza adimensional, relativamente ao momento plástico da secção.

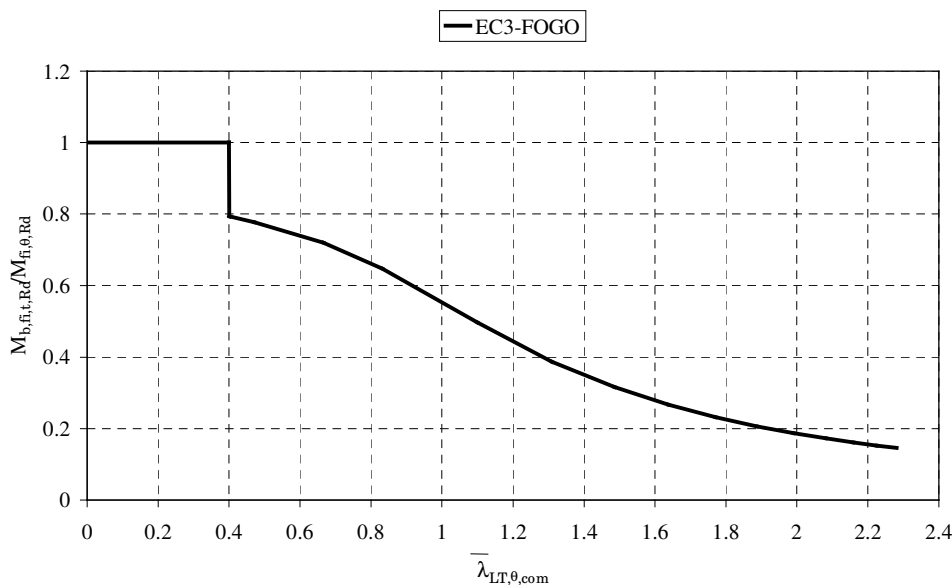


Fig. 7.19 – Curva de projecto de momento resistente à encurvadura, em situação de incêndio.

Tendo em consideração o facto de que o momento resistente da secção sofre uma redução de valor relativamente ao valor homólogo à temperatura ambiente, aquele

deverá ser determinado por influência do factor de redução $k_{y,\theta}$ e de outros factores de segurança.

$$M_{fi,\theta,Rd} = k_{y,\theta} \frac{\gamma_{M,0}}{\gamma_{M,fi}} M_{Rd} \quad (7.71)$$

Na expressão anterior, M_{Rd} representa o momento plástico da secção, determinado por:

$$M_{Rd} = \frac{W_{pl,y}}{\gamma_{M,0}} f_y \quad (7.72)$$

7.6.2. – Nova Proposta

Um dos objectivos deste trabalho consiste em validar uma nova proposta, baseada em resultados numéricos e em relações teóricas de tensões residuais e de imperfeições geométricas [7.9]. Essa proposta tem a particularidade de não apresentar o salto correspondente à esbelteza adimensional de 0.4 e de depender da qualidade do aço, como se poderá verificar.

Segundo Paulo Vila Real et al. [7.9] adoptando para a encurvadura lateral de vigas, a mesma proposta que Franssen et al [7.10] apresentaram para a encurvadura de colunas carregadas axialmente em situação de incêndio, o valor de cálculo do momento resistente à encurvadura lateral de vigas em situação de incêndio deverá ser determinado por:

$$M_{b,fi,t,Rd} = \chi_{LT,fi} W_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y \frac{1}{\gamma_{M,fi}} \quad (7.73)$$

onde $\chi_{LT,fi}$ e $\bar{\lambda}_{LT,\theta,com}$ deverão ser determinados pelas mesmas expressões, apresentadas em 7.68 e 7.70 respectivamente, excepto no que se refere ao valor do parâmetro $\phi_{LT,\theta,com}$, que deverá ser determinado pela expressão 7.74.

$$\phi_{LT,\theta,com} = \frac{1}{2} \left[1 + \alpha \bar{\lambda}_{LT,\theta,com} + \bar{\lambda}_{LT,\theta,com}^2 \right] \quad (7.74)$$

O coeficiente α na equação 7.74, que representa o factor de imperfeição, será agora função de um factor de severidade β a ser escolhido por forma a garantir um nível de segurança apropriado:

$$\alpha = \beta \varepsilon \quad (7.75)$$

O factor ε deverá ser calculado através da expressão seguinte, em função da tensão de cedência do aço:

$$\varepsilon = \sqrt{235 / f_y} \quad (7.80)$$

A curva de cálculo à encurvadura lateral varia agora com a tensão de cedência devido ao parâmetro ε que figura no factor de imperfeição.

Comparando a expressão 7.67 com a expressão 7.75 pode-se verificar que nesta nova proposta não se utiliza a constante empírica de 1.2, valor que é utilizado como factor de correcção no Eurocódigo 3.

As equações que possibilitam a determinação do momento resistente são exactamente as mesmas que o documento [7.7] define para temperatura ambiente, excepto que o limite de 0.2 para $\bar{\lambda}_{LT}$ não aparece na equação 7.74. Esta nova curva começa com um valor de $\chi_{LT} = 1.0$ para $\bar{\lambda}_{LT} = 0.0$ o qual vai progressivamente diminuindo, em vez da existência do patamar constante para esbeltezas adimensionais até ao valor de $\bar{\lambda}_{LT} = 0.4$ (ver figura 7.20).

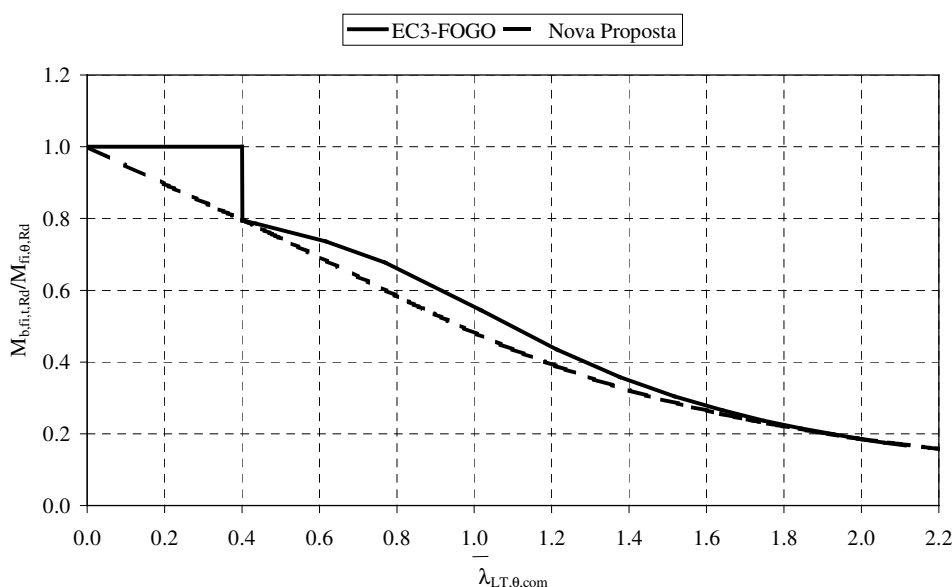


Fig. 7.20 – Nova proposta de curva de cálculo à encurvadura lateral, em situação de incêndio.

Quando confrontado este modelo simplificado de cálculo com resultados numéricos, Vila real et al [7.9] determinaram um valor de severidade igual a 0.65. Se este valor se confirmar após os ensaios experimentais, mantém-se a mesma filosofia actual do Eurocódigo 3, que consiste em adoptar as mesmas fórmulas para a encurvadura de pilares e para a encurvadura lateral de vigas.

7.7. - Conclusões

Neste capítulo fez-se a apresentação do estudo do fenómeno de encurvadura lateral de vigas, tendo-se apresentado o método de dimensionamento para a situações de temperatura normal e situações de acidente tipo fogo. As equações diferenciais de equilíbrio foram apresentadas e encontradas soluções para as mesmas. Procedeu-se ainda à determinação da carga crítica em regime elástico, quer através de integração directa das equações diferenciais que regem o fenómeno, quer através do método

energético. O comportamento não elástico também foi alvo de tratamento, tendo sido apresentado um método iterativo para determinação de tensões críticas.

O exemplo de aplicação da figura 7.15 será o modelo em estudo dos próximos capítulos, tendo sido feito o estudo da variação do coeficiente de momento em relação ao estado de flexão pura.

A verificação de segurança de vigas à encurvadura lateral, para a situação de acidente apresenta valores de projecto abaixo dos encontrados para a temperatura normal. Este facto fica essencialmente a dever-se à variação das capacidades de resistência do perfil, em consequência do aumento de temperatura.

Para que a nova proposta possa vir a ser aceite, necessita ainda de um estudo numérico mais alargado em que se considerem outras dimensões para os perfis metálicos e outros casos de carregamento. Deve ainda ser validada através de resultados obtidos experimentalmente, os quais serão apresentados no capítulo 8.

7.8 -Referências

- [7.1]- Timoshenko P.S.; Gere J.M.; “Theory of elastic stability”; McGraw Hill International editions – Mechanical Engineering series; 2nd edition; 1963.
- [7.2]- Timoshenko P.S.; “International Association Bridge Structural Eng.”; vol3; pp 401, 1935.
- [7.3]- Galambos T.V.; “ Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures”; 5th edition; John Wiley & Sons; USA; 1998.
- [7.4]- Trahair N.S.; “ Flexural – Torsional Buckling of structures”; E&FN SPON – Chapman & Hall; London; 1993.
- [7.5]- Lajos kollár; “Structural Stability in Engineering Practice”; E&FN SPON; New York; 1999.
- [7.6]- Zdenek P. Bazant, Luigi Dedolin; “Stability of structures –Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage theories”; 1991.
- [7.7]- CEN ENV 1993-1-1; “Eurocode 3, Design of Steel Structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings”; April 1992.
- [7.8]- CEN ENV 1991-2-2; “Eurocode 1, Basis of design and actions on structures – Part 2-2: Actions on structures – Actions on structures exposed to fire”; 1995.
- [7.9]- Vila Real, P.M.M.; Franssen, Jean - Marc; “Lateral buckling of steel I beams under fire conditions - Comparison between the EUROCODE 3 and the SAFIR code”, internal report No. 99/02 , Institute of Civil Engineering – Service Ponts et Charpents – of the University of Liege. 1999.
- [7.10]- Franssen, Jean-Marc; Schleich, Jean-Baptiste; Cajot; Louis-Guy; “A Simple Model for Fire Resistance of Axially-loaded Members According to Eurocode 3”, Journal Construct. Steel Research, Vol. 35, pp. 49-69; 1995.
- [7.11]- CEN ENV 1993-1-2; “Eurocode 3 – Design of steel structures – Part 1-2: General Rules – Structural fire design”;1995.
- [7.12]- Chen, W.F.; Lui, E.M.; “Stability Design of steel frames”; CRC Press; USA; 1991.
- [7.13]- Guz, A.N.; “Fundamentals of the three dimensional theory of stability of deformable bodies”; Springer, germany; 1999.

Capítulo 8

Análise experimental da encurvadura lateral de vigas I em situação de incêndio

8.1. – Introdução

Neste capítulo será apresentado um conjunto de resultados experimentais de vigas submetidas à encurvadura lateral em situações de temperatura normal e em situações de incêndio. Para testar este modelo foi necessário construir e adquirir equipamento auxiliar térmico de ensaio, para efectuar testes a temperaturas elevadas e equipamento estrutural de reacção, para carregamento mecânico dos perfis. No que diz respeito ao equipamento de domínio térmico, foi utilizado um sistema de potência térmica resistiva de 70 [kVA] em conjunto com resistências electro-cerâmicas de capacidade térmica elevada. Para completar o efeito termo-mecânico, foi utilizado um conjunto de dois actuadores de duplo efeito e um sistema electro-hidráulico capaz de exercer 60 [ton] em cada ponto de aplicação de força, para ensaiar 120 vigas de perfil comercial IPE100. Foi dimensionado um pórtico metálico de reacção e construído com rigidez suficiente para não influenciar a deformação da viga em teste.

O objectivo desta campanha experimental será realizar um conjunto de ensaios à escala real, poder comparar com resultados numéricos e verificar o ajustamento da nova proposta de modelo simples à encurvadura lateral de vigas [8.1]. Ao mesmo tempo, este estudo permitirá verificar o estado de tensões residuais em perfis comerciais, bem como a hipótese de imperfeição geométrica inicial. O estado inicial dos perfis foi caracterizado, tendo sido efectuados ensaios de resistência material e medições de imperfeições geométricas ao longo do comprimento do perfil e da secção recta, bem como do estado de tensão residual instalado que apresentavam os perfis, após transporte e armazenagem. Para medição da imperfeição geométrica foi utilizado o método do feixe laser, com verificação discreta da distância do perfil ao feixe. Para medição das tensões residuais, foi utilizado o método do furo com rosetas de extensómetros apropriadas.

Durante os ensaios de verificação do comportamento das vigas, foram registados deslocamentos em três direcções a meio da viga, utilizando para tal comparadores de relógio, com placas na extremidade.

As cargas das vigas em teste serão colocadas progressivamente e combinadas com a temperatura a impor. O efeito pretendido deverá resultar de uma possível simulação ao fogo do elemento estrutural.

A utilização intensiva do programa de análise não linear geométrico e material, SAFIR, deverá resultar num conjunto de resultados de análise e confirmação experimental relevante. Aparentemente, a forma da curva proposta pelo Eurocódigo a temperaturas elevadas não coincide com os resultados obtidos pelas múltiplas análises efectuadas, conduzindo a situações com falta de segurança.

Os comprimentos de encurvadura testados foram obtidos de vigas com comprimentos iniciais de 12 [m], identificados pelas letras Pi, conforme tabela 8.1, em que “i” identifica o perfil ensaiado.

Comprimento de encurvadura [m]	Temperaturas [°C]					
	20	200	300	400	500	600
0.5	P31	P31	P05	P06	P31	P03
	P31	P31	P02	P07	P31	P01
	P31	P04	P31	P31	P10	P31
1.5	P33	P33	P34	P08	P44	P45
	P33	P34	P34	P09	P42	P46
	P33	P33	P33	P20	P43	P43
2.5	P35	P38	P38	P40	P43	P42
	P36	P41	P37	P46	P42	P43
	P36	P39	P36	P44	P45	P46
3.5	P01	P38	P41	P40	P04	P09
	P02	P38	P40	P37	P06	P10
	P07	P39	P39	P41	P05	P03
4.5	P20	P23	P28	P15	P16	P13
	P17	P21	P24	P25	P14	P12
	P20	P30	P25	P26	P18	P19
5.5	P22	NE	NE	P25	P29	P28
	P23	NE	NE	P08	P27	P30
	P27	NE	NE	P09	P26	P22
6.5	P11	P19	P15	P18	P05	P01
	P17	P20	P16	P10	P07	P03
	P12	P14	P13	P02	P08	P04

Tabela 8.1. – Comprimentos de viga em teste (NE – vigas não ensaiadas).

Para cada comprimento de encurvadura e temperatura de ensaio foram efectuados três testes de acordo com a recomendação FEM 10.2.02 da SIMMA [8.3].

Estes ensaios experimentais foram elaborados na Escola Superior de tecnologia e de Gestão do Instituto Politécnico de Bragança e tiveram em consideração os estudos preliminares que se descrevem a seguir.

8.2. – Imperfeições geométricas

8.2.1. – Imperfeições longitudinais

As vigas em ensaio apresentam diferentes esbeltezas adimensionais tendo sido geometricamente verificadas por forma a determinar a variação da curvatura do perfil. As vigas com dimensões de menor comprimento foram controladas em três locais diferentes, enquanto que para vigas de dimensões superiores foram feitos cinco pontos de controlo, conforme figura seguinte.

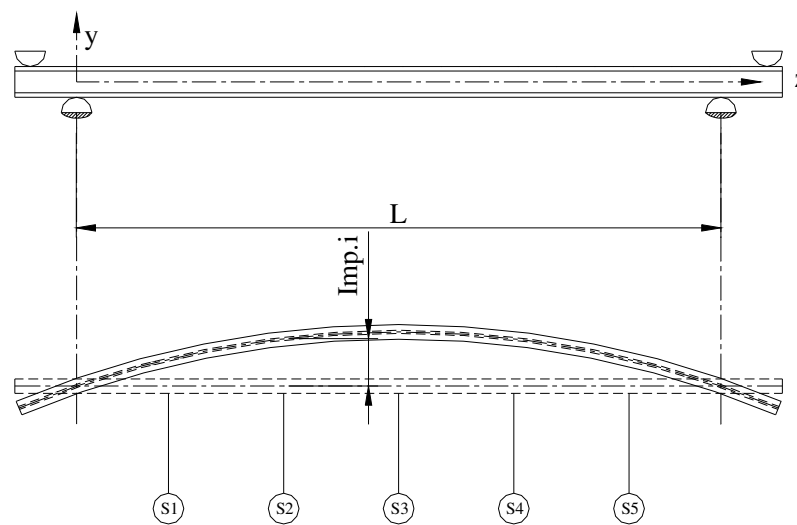


Fig. 8.1- Controle da imperfeição geométrica nos perfis.

A curvatura longitudinal que os perfis apresentam, resultam normalmente, do processo de fabrico, manuseamento e transporte, conferindo um raio semelhante ao desenhado na figura 8.1. Os resultados das medições efectuadas encontram-se na tabela 8.2. Para verificar a amplitude da imperfeição, foi utilizado um sistema baseado num feixe laser Helium Néon de 30 mW – classe III b, conforme se ilustra na figura seguinte.

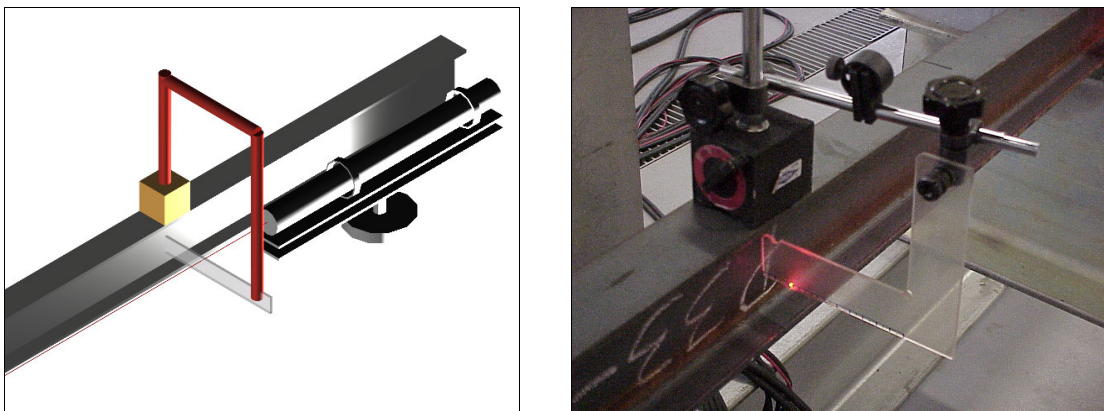


Fig. 8.2 – Montagem do equipamento auxiliar de medição.

Este conjunto de equipamento recorre a um braço magnético, com uma régua na extremidade, que deverá ser colocado nos pontos de controlo, registando o desvio relativo ao feixe. O laser foi colocado no alinhamento do perfil conforme se poderá verificar na figura 8.3.

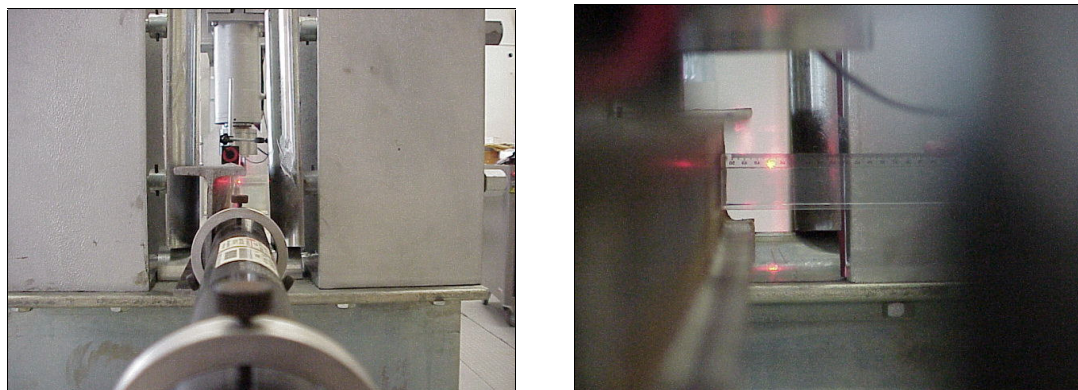


Fig.8.3 – Colocação do feixe laser no pórtico e desvio do perfil em relação ao feixe.

Os resultados desta medição foram feitos com uma precisão de 0.5 [mm], tendo sido possível detectar as seguintes imperfeições para cada uma das vigas em teste.

<i>Vigas de 1.5 [m] de encurvadura</i>																				
PONTOS	Z coord. [m]	20 [°C]			200 [°C]			300 [°C]			400 [°C]			500 [°C]			600 [°C]			
		P33	P33	P33	P33	P34	P33	P33	P34	P34	P20	P09	P08	P43	P42	P44	P46	P45	P43	
S1	0.25	0.10	0.10	0.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
S2	0.50	NM	NM	NM	0.02	0.05	0.00	0.00	0.00	0.05	0.10	0.05	0.00	0.05	0.05	0.05	0.10	0.00	0.10	0.10
S3	0.75	0.05	0.05	0.10	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10	0.15	0.10	0.05	0.10	0.10	0.10	0.15	0.00	0.15	0.15
S4	1.00	NM	NM	NM	0.02	0.05	0.00	0.05	0.00	0.05	0.15	0.05	0.00	0.05	0.05	0.05	0.10	0.00	0.10	0.10
S5	1.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
<i>Vigas de 2.5 [m] de encurvadura</i>																				
PONTOS	Z coord. [m]	20 [°C]			200 [°C]			300 [°C]			400 [°C]			500 [°C]			600 [°C]			
		P36	P35	P36	P38	P41	P39	P38	P37	P36	P40	P46	P44	P43	P42	P45	P42	P43	P46	
S1	0.25	0.15	0.05	0.00	0.10	0.00	0.10	0.00	0.10	0.00	0.05	0.10	0.20	0.10	0.10	0.05	0.00	0.05	0.10	
S2	0.75	0.15	0.00	0.05	0.05	0.10	0.15	0.10	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10	0.05	0.05	0.05	0.10	0.05	0.05	
S3	1.25	0.12	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00	0.10	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.00	0.00	
S4	1.75	0.05	0.05	0.00	0.00	0.10	0.15	0.10	0.10	0.10	0.05	0.05	0.15	0.05	0.10	0.05	0.10	0.05	0.00	
S5	2.25	0.00	0.15	0.00	0.10	0.00	0.15	0.00	0.10	0.00	0.05	0.10	0.20	0.10	0.10	0.05	0.00	0.05	0.10	
<i>Vigas de 3.5 [m] de encurvadura</i>																				
PONTOS	Z coord. [m]	20 [°C]			200 [°C]			300 [°C]			400 [°C]			500 [°C]			600 [°C]			
		P01	P02	P07	P38	P38	P39	P41	P39	P40	P40	P37	P41	P06	P04	P05	P10	P09	P03	
S1	0.25	0.30	0.00	0.30	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.40	0.10	0.10	0.20	0.00	0.15	0.00	
S2	0.75	0.30	0.10	0.30	0.05	0.20	0.10	0.30	0.10	0.00	0.05	0.10	0.20	0.05	0.05	0.15	0.00	0.05	0.05	
S3	1.75	0.20	0.00	0.30	0.15	0.20	0.00	0.35	0.15	0.10	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.00	0.10	
S4	2.75	0.15	0.00	0.10	0.05	0.30	0.10	0.35	0.00	0.05	0.05	0.10	0.25	0.00	0.00	0.15	0.00	0.10	0.05	
S5	3.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.20	0.40	0.05	0.10	0.20	0.00	0.15	0.00	
<i>Vigas de 4.5 [m] de encurvadura</i>																				
PONTOS	Z coord. [m]	20 [°C]			200 [°C]			300 [°C]			400 [°C]			500 [°C]			600 [°C]			
		P20	P17	P20	P23	P21	P30	P28	P24	P25	P15	P25	P26	P16	P14	P18	P13	P12	P19	
S1	0.25	0.70	0.40	0.00	0.20	0.30	0.25	0.30	0.35	0.30	0.00	0.25	0.00	0.15	0.25	0.00	0.40	0.30	0.00	
S2	1.25	0.70	0.50	0.20	0.10	0.20	0.15	0.05	0.15	0.20	0.15	0.10	0.10	0.05	0.10	0.30	0.15	0.20	0.15	
S3	2.25	0.55	0.30	0.40	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	0.20	0.00	0.00	0.35	0.00	0.00	0.20	
S4	3.25	0.40	0.30	0.50	0.10	0.10	0.05	0.05	0.10	0.15	0.10	0.05	0.15	0.05	0.05	0.20	0.10	0.15	0.20	
S5	4.25	0.00	0.00	0.30	0.25	0.30	0.25	0.25	0.35	0.30	0.00	0.25	0.00	0.15	0.25	0.00	0.40	0.30	0.00	
<i>Vigas de 5.5 [m] de encurvadura</i>																				
PONTOS	Z coord. [m]	20 [°C]			200 [°C]			300 [°C]			400 [°C]			500 [°C]			600 [°C]			
		P22	P23	P27							P25	P08	P09	P29	P27	P26	P28	P30	P22	
S1	0.75	0.05	0.00	0.30							0.00	0.00	0.10	0.30	0.15	0.05	0.30	0.00	0.00	
S2	1.75	0.00	0.10	0.20							0.20	0.20	0.20	0.15	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	
S3	2.75	0.10	0.30	0.20							0.25	0.30	0.25	0.00	0.00	0.20	0.00	0.10	0.20	
S4	3.75	0.30	0.20	0.15							0.15	0.15	0.20	0.05	0.10	0.10	0.10	0.15	0.10	
S5	4.75	0.10	0.15	0.00							0.00	0.00	0.00	0.15	0.20	0.00	0.40	0.05	0.00	
<i>Vigas de 6.5 [m] de encurvadura</i>																				
PONTOS	Z coord. [m]	20 [°C]			200 [°C]			300 [°C]			400 [°C]			500 [°C]			600 [°C]			
		P11	P17	P12	P19	P20	P14	P15	P16	P13	P18	P10	P02	P05	P07	P06	P01	P03	P04	
1	0.75	0.50	0.40	0.30	0.10	0.20	0.00	0.30	0.00	0.10	0.60	0.00	0.00	0.30	0.20	0.45	0.30	0.20	0.20	
2	1.75	0.70	0.30	0.10	0.30	0.10	0.10	0.10	0.20	0.50	0.30	0.40	0.25	0.15	0.40	0.30	0.60	0.00	0.10	
3	3.25	0.75	0.00	0.00	0.30	0.00	0.40	0.00	0.40	0.60	0.00	0.20	0.35	0.00	0.60	0.00	0.80	0.20	0.00	
4	4.75	0.30	0.40	0.20	0.25	0.30	0.20	0.20	0.35	0.40	0.30	0.10	0.30	0.10	0.30	0.15	0.40	0.95	0.10	
5	5.75	0.00	0.70	0.40	0.00	0.45	0.10	0.35	0.10	0.00	0.75	0.00	0.15	0.20	0.00	0.30	0.00	1.60	0.20	

Tabela 8.2.- Imperfeição lateral das vigas em [cm]. “NM” representa imperfeições não medidas.

Para as vigas de 0.5[m] de comprimento foi utilizado a fórmula sinusoidal, em que o valor da amplitude máxima corresponde ao valor do comprimento de encurvadura da viga dividido por mil, conforme expressão 8.1 [8.1].

$$u(z) = \frac{L}{1000} \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \quad (8.1)$$

Nos restantes casos e depois de se verificar que o comportamento seria semelhante a uma sinusóide, optou-se por recorrer à mesma expressão, utilizando para a amplitude o valor da deslocação máxima medido ($a_{\text{máx}}$ [mm]), para cada viga apresentada na tabela 8.2.

$$u(z) = a_{\text{máx}} \sin\left(\frac{\pi \cdot z}{L}\right) \quad (8.2)$$

Estes são os valores que serão utilizados no capítulo seguinte aquando da modelação numérica das imperfeições.

8.2.2. – Imperfeição da secção transversal

As secções rectas também foram controladas em 5 zonas, a saber, banzo superior e inferior, alma, altura e largura, de acordo com a figura 8.4.

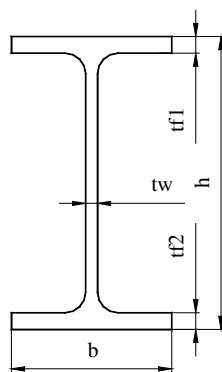


Fig. 8.4 – Controlo dimensional em cinco zonas da secção recta da viga.

Foi recolhida uma amostra de 31 perfis dos 46 originais de 12 [m] de comprimento. Os valores médios foram adoptados para caracterização da resistência da secção, nomeadamente o valor de cálculo do módulo plástico $W_{pl,y}$, que por definição é igual a duas vezes o valor do momento estático de primeira ordem de metade da secção recta do perfil, ver tabela 8.3. Os valores medidos ultrapassam os valores previstos do fornecedor. Na tabela 8.3 estão representados os valores médios considerados, bem como o valor do desvio padrão (D.P.), determinado para cada zona de medição.

Valor tabelado	h [mm]	b [mm]	tf1 [mm]	tf2 [mm]	tw [mm]
Arbed	100	55	5.7	5.7	4.1
Perfil amostra	h	B	tf1	tf2	tw
P03	100.0	55.4	6.4	6.5	4.1
P04	100.3	55.7	6.2	6.4	4.2
P05	100.3	55.7	6	6.3	4.1
P06	100.7	55.8	6.1	6.5	4.2
P07	100.7	55.8	6.3	6.2	4
P08	100.4	55.5	6	6.7	4
P09	100.8	57.5	6.4	6.1	4.2
P10	100.9	56.0	6.1	6.6	4.1
P13	100.5	55.5	6.5	6	4
P14	100.4	55.4	6.3	6.4	3.9
P15	100.0	55.5	6.7	6.4	4
P19	100.5	55.4	6.3	6.4	3.9
P21	100.5	56.3	6.9	6.3	4.1
P24	101.0	55.6	6	6.1	4.2
P25	100.7	55.4	6.2	6.3	3.8
P26	100.4	55.4	6.5	6.7	4
P28	100.9	57.2	6.3	6.3	3.9
P29	100.3	55.3	6.3	6.1	4.3
P31	100.5	55.3	6.5	6.3	4
P33	100.4	57.0	6.4	6.1	4.1
P34	100.3	56.4	6.1	6.1	3.8
P36	100.3	55.9	6	6.4	3.9
P37	100.4	56.0	6.4	6.1	4.1
P38	100.4	56.0	6.9	6.9	4.2
P39	100.4	55.5	6.2	6.3	4.1
P40	100.6	56.1	6.4	6.1	4
P41	100.6	55.8	6.5	6.6	3.9
P42	100.5	55.9	6.2	6.5	3.9
P43	100.3	56.9	6	6.3	3.8
P44	100.6	56.8	6.7	6.5	4.2
P46	100.6	55.5	6.4	6.5	4
MÉDIA	100.5	55.9	6.3	6.4	4.0
D.P.	0.23	0.60	0.25	0.22	0.14

Tabela 8.3 – Controlo geométrico da secção recta, de uma amostra de perfis.

Dos valores medidos considerados, resulta um novo valor para o módulo plástico da secção, $W_{pl,y} = 4.0857E - 05$ [m³], diferente do proposto nas tabelas do produtor Arbed, $W_{pl,y} = 3.941E - 05$ [m³]. Esta diferença resulta num aumento da capacidade resistente da secção. O valor determinado será utilizado em todos os cálculos efectuados.

8.3. – Propriedades e características do material

Para verificar a característica mecânica do aço dos perfis, foram efectuados 20 ensaios de amostras retiradas aleatoriamente da alma e dos banzos, depois de uma operação de maquinagem, procedendo em conformidade com o documento [8.4]. Esta operação foi efectuada no Laboratório de Oficinas de Mecânica, utilizando uma fresadora para o efeito, ver figura 8.5.

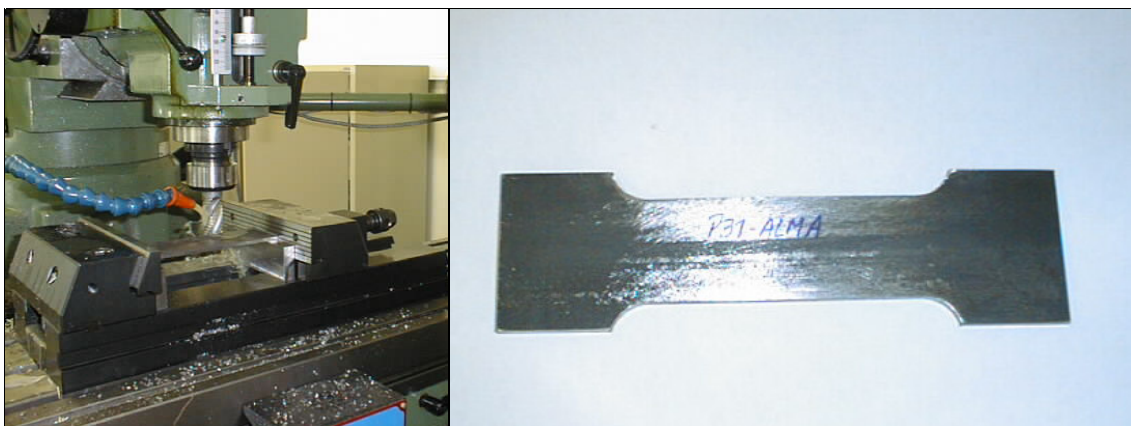


Fig. 8.5 – Maquinagem das amostras extraídas das duas zonas principais dos perfis.

De acordo com a norma de ensaios, foram maquinados os provetes com a geometria apresentada na figura 8.6.

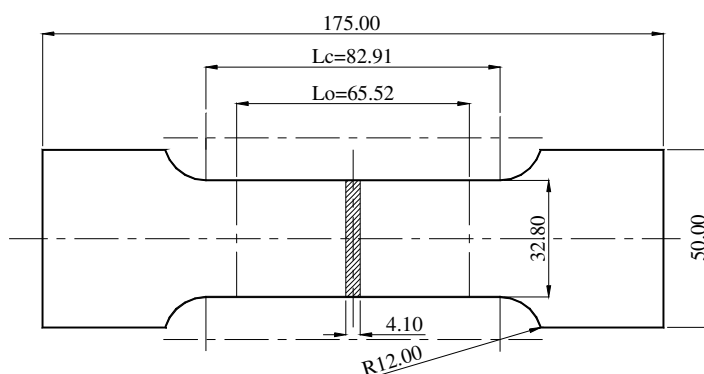


Fig. 8.6 - Provetes maquinados de um perfil IPE100.

Segundo este documento, a ligação entre a zona útil do provete e as suas cabeças de amarração deverá ser efectuada através de troços de concordância. As cabeças de amarração podem possuir qualquer forma que seja adaptável aos dispositivos de fixação da máquina de ensaio. O raio dos troços de concordância deverá ser superior ou igual a 12 [mm] no caso de amostras de secção rectangular. Para esta secção recomenda-se ainda que a relação 8:1 entre a largura e a espessura do provete não seja ultrapassada.

O comprimento da zona útil deverá ser superior ou igual a:

$$L_c = L_0 + 1.5\sqrt{S_0} \quad (8.3)$$

em que S_0 representa a área da secção recta e L_0 o comprimento inicial entre referências para medição das deformações, conforme expressão 8.4.

$$L_0 = 5.65\sqrt{S_0} \quad (8.4)$$

O comprimento total do provete será determinado em função da fixação nas maxilas.

O equipamento disponível no Laboratório de Estruturas e Resistência dos Materiais permitiu efectuar ensaios de tracção na máquina de ensaios universais, conforme figura 8.7.

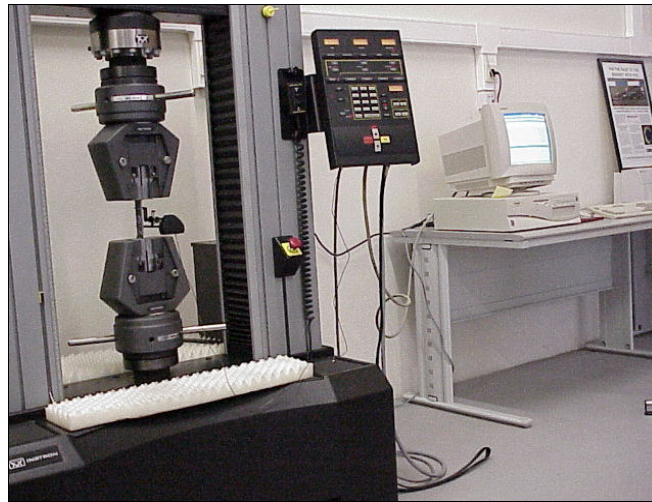


Fig.8.7 – Máquina de ensaios universais Instron 4885 (200 [kN] máximo).

O procedimento de ensaio seguiu a norma NP EN 10 002-1 para determinar o valor de tensão de cedência e o módulo de elasticidade do material. O ensaio decorreu em condições ambientais normais, tendo sido estabelecido uma área com secção recta inicial útil de $134.48 \text{ [mm}^2\text{]}$. O comprimento inicial entre referências teve de ser ajustado ao tamanho do extensómetro disponível, ver figura 8.8.



Fig. 8.8 – Colocação do provete e do extensómetro.

Durante o ensaio foram cumpridas as velocidades de 2.5 [mm/s] . Registaram-se os valores da tensão - deformação ou força - deslocamento e os demais parâmetros necessários para a análise do comportamento material. A figura 8.9 apresenta a curva força - deslocamento para os ensaios efectuados.

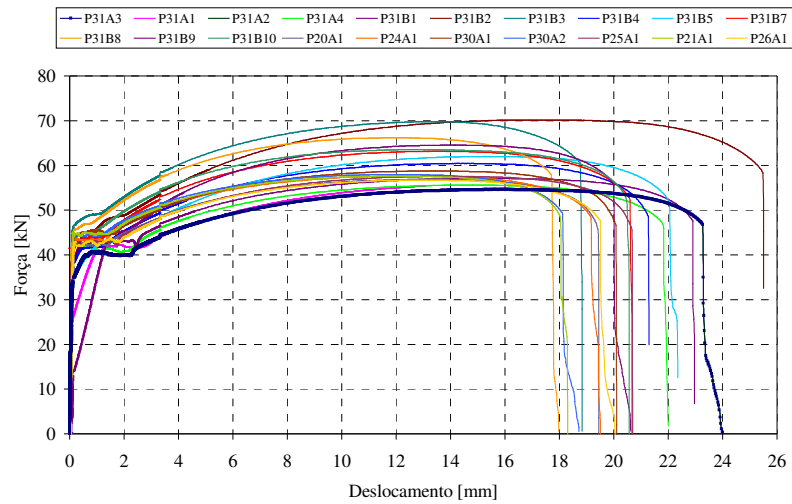


Fig. 8.9 - Curva força versus deslocamento para todas as amostras ensaiadas.

Em termos de tensão deformação, também é possível representar o comportamento do material, apresentando-se na figura 8.10 o resultado apenas de quatro amostras.

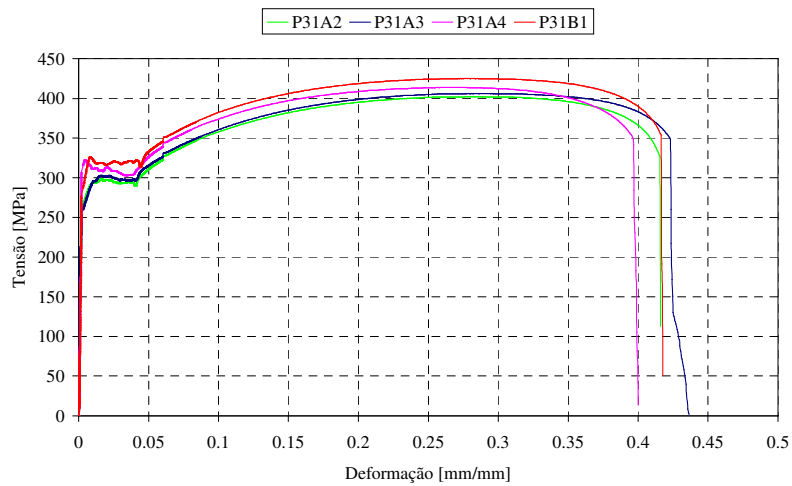


Fig. 8.10 - Curva tensão versus deformação para quatro amostras ensaiadas.

Os provetes apresentaram uma estricção e uma rotura semelhante às da figura seguinte. Outros resultados puderam ser extraídos do ensaio, apresentando-se na tabela seguinte o resumo destas propriedades.

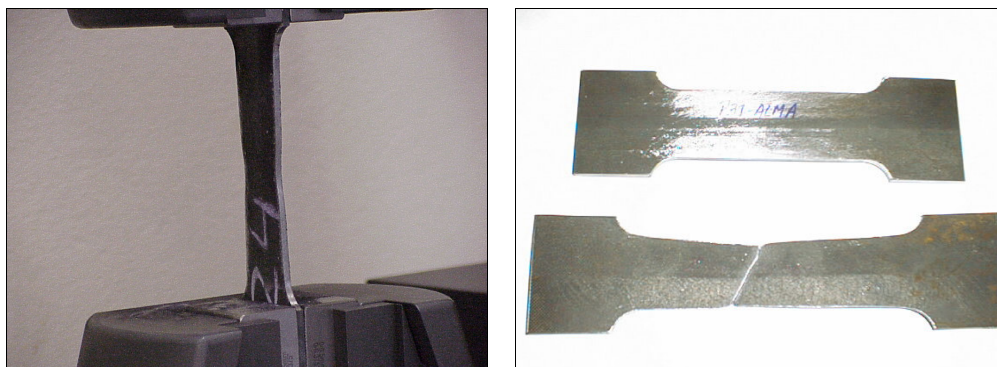


Fig. 8.11 – Estricção e rotura dos provetes durante o ensaio.

Amostra	Carga Máxima	Tensão na Carga Máxima	Módulo de Elasticidade [MPa]	Tensão de Cedência
	[kN]	[MPa]		[MPa]
P31 – Alma - 1	55.410	412.031	209447	305.024
P31 – Alma - 2	54.090	402.216	202930	297.837
P31 – Alma - 3	54.630	406.231	324456	302.828
P31 – Alma - 4	55.650	413.816	156675	322.790
P20 – Alma - 1	56.910	432.447	257548	321.287
P24 – Alma - 1	57.720	435.952	220890	334.552
P30 – Alma - 1	58.820	445.606	232605	345.125
P30 – Alma - 2	58.010	440.805	182795	338.218
P25 – Alma - 1	57.610	440.443	294006	330.025
P21 – Alma - 1	57.660	443.538	166271	345.065
P26 – Alma - 1	56.750	419.438	262188	316.866
<i>Média</i>	<i>56.660</i>	<i>426.593</i>	<i>228164.636</i>	<i>323.602</i>
<i>DP</i>	<i>1.513</i>	<i>16.123</i>	<i>52619.247</i>	<i>16.705</i>

Tabela 8.4 - Resultados dos ensaios nos provetes da alma.

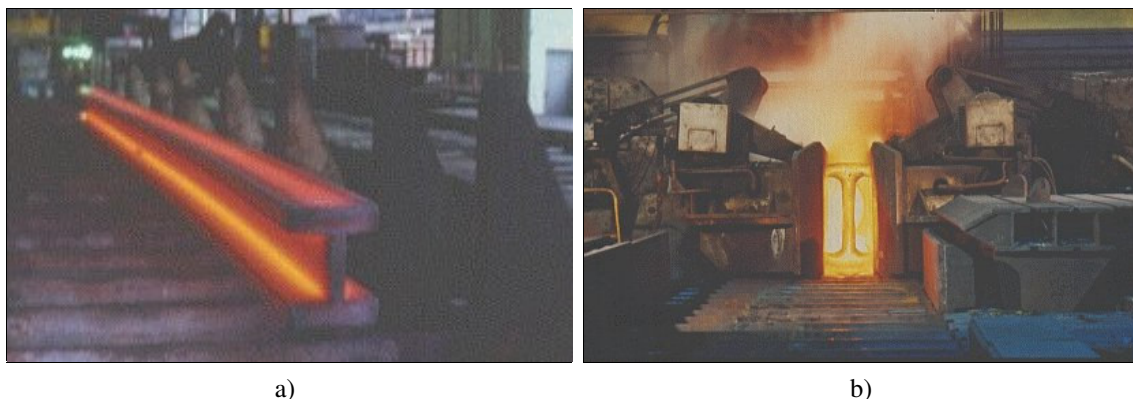
Amostra	Carga Máxima	Tensão na Carga Máxima	Módulo de Elasticidade [MPa]	Tensão de Cedência
	[kN]	[MPa]		[MPa]
P31 – Banzo - 1	57.150	424.970	146026	325.984
P31 – Banzo - 2	54.090	402.216	202930	297.837
P31 – Banzo - 3	69.800	452.772	186776	315.000
P31 – Banzo - 4	60.480	449.732	229050	311.811
P31 – Banzo - 5	62.070	450.566	262.974	312.377
P31 – Banzo - 7	63.170	453.026	217057	316.210
P31 – Banzo - 8	NM	NM	249754	315.000
P31 – Banzo - 9	NM	NM	146223	325.000
P31 – Banzo - 10	63.543	453.294	265968	320.000
<i>Média</i>	<i>61.472</i>	<i>440.939</i>	<i>211862</i>	<i>315.469</i>
<i>DP</i>	<i>5.017</i>	<i>19.846</i>	<i>45621</i>	<i>8.342</i>

Tabela 8.5 - Resultados dos ensaios nos provetes dos banzos.

Os valores registados nas tabelas 8.4 e 8.5, apresentam um valor de tensão de cedência um pouco superior ao esperado. Nos cálculos que se apresentam neste trabalho, foram considerados os respectivos valores médios.

8.4. - Tensões residuais

As tensões residuais verificadas num elemento estrutural ou num componente aparecem, mesmo sem a aplicação de nenhuma carga exterior ou de serviço. Processos de fabrico como fundição, soldadura, maquinagem, moldação, tratamentos térmicos e outros, são as causas mais comuns nestes estados de tensão, ver figura 8.12.



a)

b)

Fig.8.12 – Processo de fabricação de perfis.

a) Arrefecimento não uniforme, b) Constrangimento termo-mecânico no processo.

Como resultado do processo de fabrico e durante o arrefecimento, as regiões mais expostas da secção à envolvente (extremidades das banzos e centro da alma) arrefecerão mais rapidamente. Estas zonas contraem mais rapidamente, induzindo escoamentos plásticos nas regiões de elevadas temperaturas e de arrefecimento lento, como são o caso das uniões das banzos com as almas. Subsequentemente, a contracção destas zonas referidas por último, são impedidas por aquelas primeiras zonas já arrefecidas, induzindo tensões residuais. O equilíbrio das tensões residuais nas últimas zonas a arrefecer ou qualquer trabalho mecânico introduzido para alinhamento dos perfis, pode causar a cedência local, modificando a distribuição de tensões.

Os efeitos das tensões residuais podem ser benéficas ou prejudiciais, dependendo da grandeza, sinal, e da distribuição destas relativamente às induzidas por carregamentos exteriores. Normalmente estas tensões são prejudiciais, existindo muitos casos documentados para os quais se apresentam como o factor predominantemente contribuinte para fadiga e outros casos de colapso de estruturas, quando as tensões de serviço foram sobrepostas no estado residual. A particularidade destas tensões é o facto da sua presença passar despercebida até se verificar a ocorrência de uma falha ou mau funcionamento.

A presença de tensões residuais, como as causadas por arrefecimento pós conformação a quente ou soldadura, pode determinar a antecipação da cedência do material afectando a distribuição de tensões na região não elástica. A distribuição de tensões residuais deve estar equilibrada, para se obter um estado de força axial e de flexão nulos, para o elemento estrutural simplesmente apoiado e sem carregamento.

As amplitudes e distribuições das tensões residuais podem variar consideravelmente com a geometria da secção recta e com os processos de arrefecimento e alinhamento. As distribuições idealizadas e medidas das tensões residuais em perfis laminados a quente são mostradas na figura seguinte.

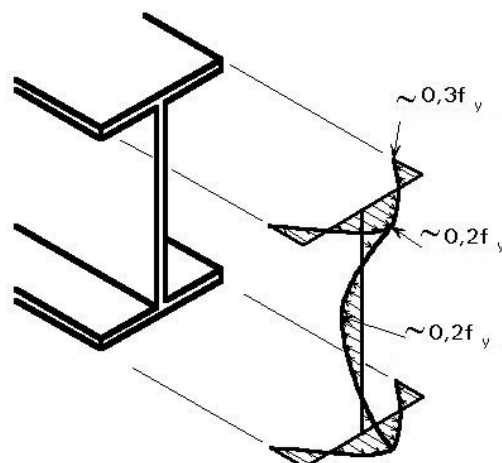


Fig. 8.13 – Distribuição teórica de tensões residuais [8.5].

Alguns autores consideram mesmo que a distribuição das tensões residuais apresentam uma distribuição parabólica, tendo em consideração os fenómenos de transferência de calor presentes durante o arrefecimento. Foi também sugerido na referência [8.6] que o valor máximo das tensões residuais em perfis laminados a quente podem ser aproximados por:

$$\begin{aligned} \sigma_{rfi} &= -137.5(+2.2 - A/2BT) \\ \sigma_{rfw} &= +100.0(-0.3 - A/2BT) \\ \sigma_{rwc} &= -83.3(+0.8 - A/2BT) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Nestas expressões o parâmetro A representa a área da secção recta em [mm], enquanto que B representa a largura da banzo também na mesma unidade, originando o resultado das tensões residuais na extremidade da banzo σ_{rfi} , a meio da banzo σ_{rfw} e no centro da alma σ_{rwc} , respectivamente em [MPa].

Outros autores [8.7] sugerem uma variação das tensões residuais com um polinómio de quarta ordem, para que se possa verificar o equilíbrio das forças e dos momentos produzidos pelas tensões residuais em toda a secção recta.

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{rf}}{\sigma_y} &= a_1 + a_2 \left(\frac{2x}{b} \right)^2 + a_3 \left(\frac{2x}{b} \right)^4 \\ \frac{\sigma_{rw}}{\sigma_y} &= a_4 + a_5 \left(\frac{2y}{d} \right)^2 + a_6 \left(\frac{2y}{d} \right)^4 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Neste caso d representa a altura da alma do perfil, enquanto que y e x representam as coordenadas locais da alma e dos banzos, respectivamente.

Na realidade, algumas distribuições de tensões residuais podem variar significativamente em relação às expressões idealizadas, como poderá ser verificado nos valores determinados experimentalmente.

Foi também sugerido por Trahair [8.8] que as análises numéricas comparativas poderiam ser efectuadas utilizando $a_3 = 0$ e considerando as seguintes expressões para os banzos:

$$\begin{aligned}\sigma_{rft} &= -0.35\sigma_y \\ \sigma_{rfw} &= +0.50\sigma_y\end{aligned}\quad (8.7)$$

de forma que os parâmetros a_i possam ser determinados a partir da expressão 8.8.

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -13.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 45 & -105 \\ -30 & -150 & 630 \\ -35 & 105 & -525 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{-13A_f}{60A_w} \\ \frac{A_f}{A_w} \left(\frac{b^2 - 65h^2}{300d^2} \right) \end{Bmatrix} \quad (8.8)$$

Nesta equação b representa a largura do perfil, h a respectiva altura e a relação entre as áreas dos banzos e da alma apresentada por:

$$\frac{A_f}{A_w} = \frac{1}{(A/2bt_f - 1)} \quad (8.9)$$

8.4.1.- Determinação das tensões residuais – método do furo

A medição das tensões residuais em elementos opacos não pode ser acompanhada por métodos convencionais da análise experimental de tensões, uma vez que o sensor das deformações (extensómetro, materiais fotoelásticos, etc.) é totalmente insensível à história da peça, medindo apenas alterações em deformações depois da instalação do sensor. Para medir as tensões residuais com estes sensores, será necessário libertar as tensões armazenadas com o sensor presente, para que este possa registar a alteração na deformação, causada pela remoção das tensões. Este procedimento apresentava características destrutivas no passado, por corte do componente, através da remoção de camadas sucessivas da sua superfície. Com extensómetros próprios, colocados antes de seccionar o componente, estes respondem à deformação produzida por relaxação das tensões com o material removido. As tensões residuais iniciais podem ser inferidas a partir das deformações medidas, através de considerações da teoria da elasticidade.

As tensões residuais foram medidas em 4 locais diferentes para cada um dos 10 perfis retirados aleatoriamente, identificados pelas letras Pi.

O método do furo será utilizado para determinação das tensões, utilizando extensómetros em roseta, como se mostra na figura 8.14. As tensões internas residuais nos componentes serão libertadas pelo furo efectuado. Este sistema causa deformações

na vizinhança que poderão ser monitoradas pelos próprios extensómetros. O posicionamento do furo deverá ser efectuado por um utensílio de furar apropriado.

Para libertar as tensões residuais, o material deverá ser furado, exactamente no centro da roseta. Esta operação deverá ser cuidada, uma vez que torna possível a modificação do estado de tensão residual, devendo portanto exercer a menor pressão possível nas paredes do furo.

A roseta a utilizar apresenta três extensómetros, colocados da forma que se apresenta na figura seguinte, possuindo uma bucha de aço no centro da roseta para centrar o furo.

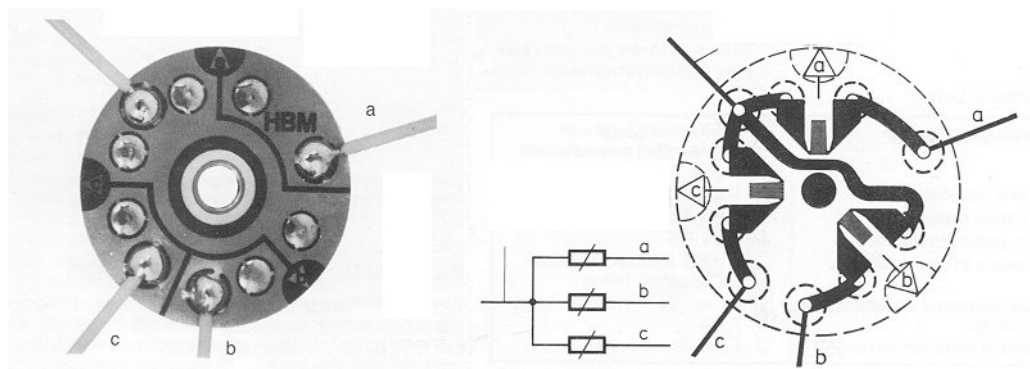


Fig. 8.14 - Extensómetro para medição de tensões residuais.

A roseta é aplicada no local pretendido por um adesivo próprio, depois de tratar previamente o estado da superfície.

8.4.2. - Equipamento de ensaio

O equipamento utilizado para furar o elemento estrutural recorre a um suporte D magnético com ímãs M, sendo colocado por cima da zona de medição (ver figura 8.15), com a ajuda de um pino centrador Z. O furo é aberto manualmente com o furador H, através de uma junta universal K. A profundidade do furo é normalmente igual ao valor do diâmetro ($\phi = 1.5$ [mm]), e ajustado até ao valor pretendido através do nivelador A.

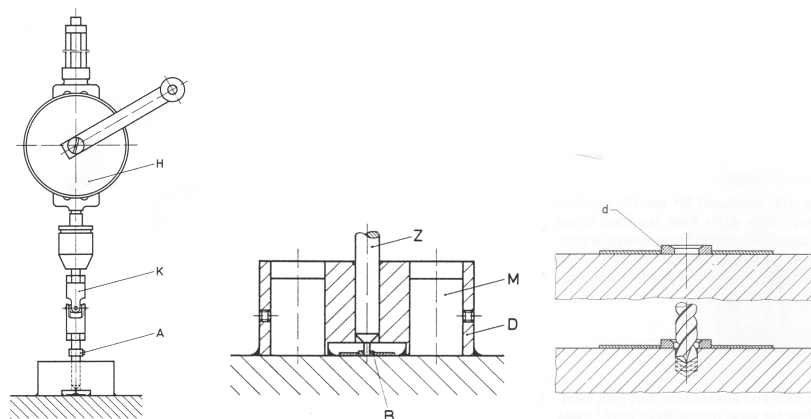


Fig. 8.15 – Engenho de furar e acessório de fixação.

Serão aplicadas 40 rosetas de extensómetros em 10 perfis, escolhidos aleatoriamente, de entre as várias vigas em teste obtidas por corte. As medições foram efectuadas a uma distância de segurança dos cortes efectuados, para que este processo não influencie a obtenção do estado residual no local em que se pretende fazer a medição.

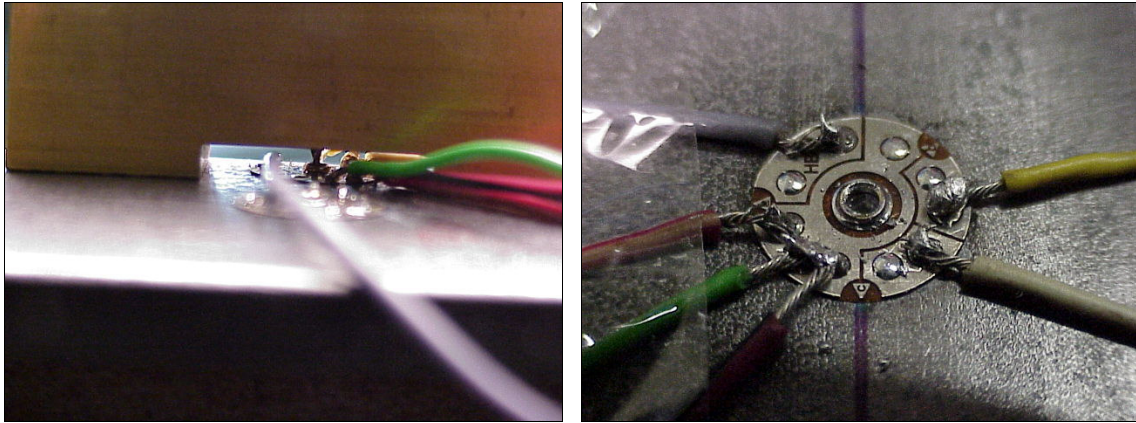


Fig. 8.16 – Equipamento de medição de tensões residuais.

Foram seleccionados 10 amostras aleatoriamente de entre 46 perfis iniciais, (P01, P08, P11, P21, P31, P33, P35, P39, P42 e P44), e efectuadas 4 medições em cada uma delas, conforme posição referenciada pela figura 8.17.

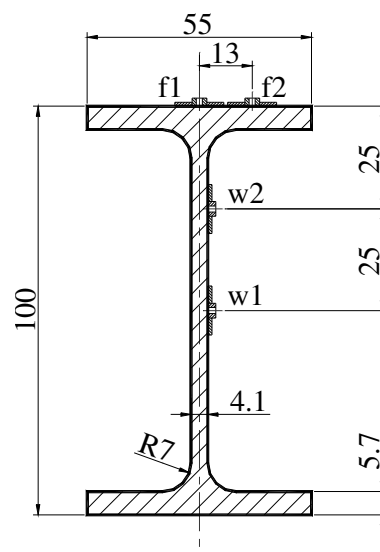


Fig.8.17 - Localização das medições das tensões residuais.

8.4.3. – Tratamento analítico dos valores medidos

Em cada zona de medição estão disponíveis três valores representativos da variação da deformação segundo as direcções a, b e c (ver figura 8.14), possibilitando a obtenção dos valores $\Delta\varepsilon_a$, $\Delta\varepsilon_b$ e $\Delta\varepsilon_c$. O estado de tensão é perfeitamente determinado aquando da determinação das tensões principais σ_1 , σ_2 e das suas respectivas direcções. A direcção principal 1 é determinada por aplicação do ângulo de orientação

φ na direcção positiva à direcção em referência da roseta. A direcção 2 estará rodada a 90° relativamente à primeira.

$$tg(2\varphi) = \frac{\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_c - 2\Delta\varepsilon_b}{\Delta\varepsilon_c - \Delta\varepsilon_a} \quad (8.10)$$

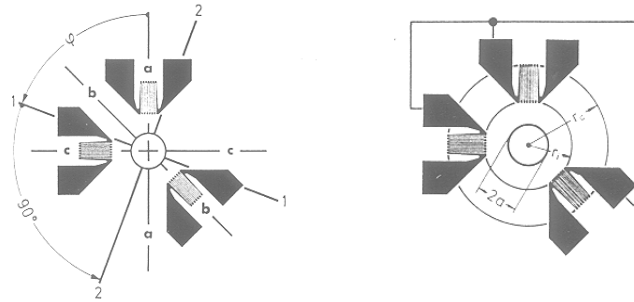


Fig. 8.18 – Direcções principais de tensão.

Explicitando o valor do ângulo para a direcção principal 1, obtém-se:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_c - 2\Delta\varepsilon_b}{\Delta\varepsilon_c - \Delta\varepsilon_a} \right) \quad (8.11)$$

Devido às características da função tangente, o valor algébrico do numerador e denominador deverá ser determinado e enquadrado numa das quatro possibilidades da tabela seguinte.

$$tg(2\varphi) = \frac{z}{n} \quad (8.12)$$

Variáveis		Valor algébrico			
z	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0	
n	> 0	≤ 0	< 0	≥ 0	
φ	$\frac{1}{2} \arctg \left \frac{z}{n} \right $	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctg \left \frac{z}{n} \right $	$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctg \left \frac{z}{n} \right $	$\pi - \frac{1}{2} \arctg \left \frac{z}{n} \right $	
φ	$0 \leq \varphi < 45^\circ$	$45^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	$90^\circ \leq \varphi < 135^\circ$	$135^\circ \leq \varphi < 180^\circ$	

Tabela 8.6 – Ângulo de orientação em função do valor algébrico do numerador z e denominador n.

As tensões normais principais determinam-se em função das deformações medidas, utilizando as expressões seguintes.

$$\sigma_{1,2} = -\frac{E}{4A} (\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_c) \pm \frac{E}{4B} \sqrt{(\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_c - 2\Delta\varepsilon_b)^2 + (\Delta\varepsilon_c - \Delta\varepsilon_a)^2} \quad (8.13)$$

Nesta equação E representa o módulo de elasticidade do material em teste, enquanto que A e B são constantes que se determinam em conformidade com a equação 8.14.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{a^2(1+\nu)}{2r_a r_i} \\
 B &= \frac{2a^2}{r_a r_i} \left[1 - \frac{a^2(1+\nu)(r_a^2 + r_a r_i + r_i^2)}{4r_a^2 r_i^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{8.14}$$

Onde, o parâmetro ν representa o coeficiente de Poisson do material, r_a o raio exterior de medição, r_i o raio interior de medição e a o raio do furo. No caso das rosetas utilizadas, os valores destes parâmetros são os seguintes:

Roseta de extensômetros	a [mm]	r_i [mm]	r_a [mm]
RY61 (HBM)	0.75	1.8	3.3

Tabela 8.7 – Características geométricas dos extensômetros.

Desenvolvendo as equações 8.14 em função dos parâmetros apresentados, obtêm-se os valores de A e de B em função do coeficiente de Poisson.

$$\begin{aligned}
 A &= 0.04735(1+\nu) \\
 B &= 0.1894 - 0.01515(1+\nu)
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

A determinação das tensões principais é facilitada no caso de se explicitar a equação 8.13 da seguinte forma:

$$\sigma_{1,2} = -A^*(\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_c) \pm B^* \sqrt{(\Delta\varepsilon_a + \Delta\varepsilon_c - 2\Delta\varepsilon_b)^2 + (\Delta\varepsilon_c - \Delta\varepsilon_a)^2}
 \tag{8.16}$$

em que:

$$\begin{aligned}
 A^* &= \frac{E}{4A} = \frac{E}{0.1894(1+\nu)} \\
 B^* &= \frac{E}{4B} = \frac{E}{0.7576 - 0.0606(1+\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{8.17}$$

8.4.4. – Preparação das medições

Após apresentação teórica do método, apresenta-se agora o tratamento necessário para preparar as medições nas vigas. Primeiro deve ser identificada uma zona não influenciada por cortes ou eventuais operações mecânicas. Depois, deve-se proceder ao tratamento superficial, eliminando qualquer resíduo que dificulte a ligação adesiva do extensômetro, podendo ser utilizado um solvente orgânico (acetona), conforme a figura seguinte.

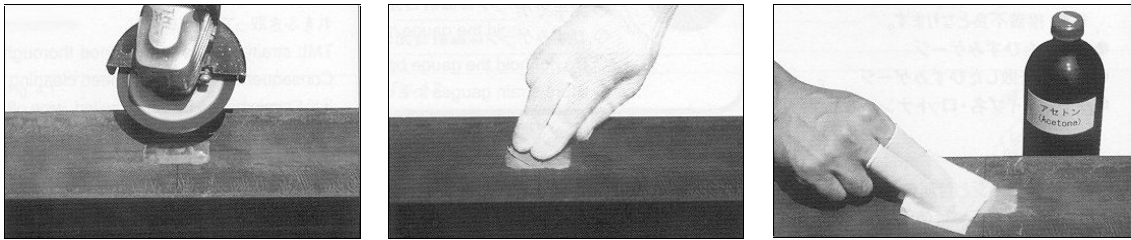


Fig.8.19 - Operação de polimento, e limpeza da zona de colagem.

Na fase posterior à colagem deverá ser efectuada a soldadura dos fios ao circuito de instrumentação. Deverá ser comparada a área de soldadura disponível no extensómetro com a área útil do aparelho utilizado, evitando pontos de soldadura desproporcionais.

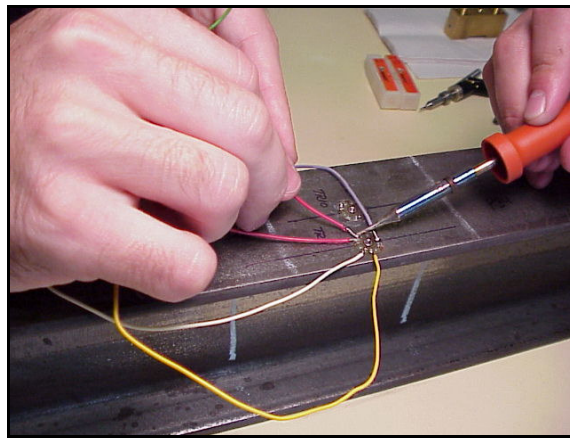


Fig.8.20 - Operação de soldadura dos componentes de ligação.

A ligação do extensómetro é feita ao sistema de aquisição de dados. Este instrumento é um sistema de medida electrónico utilizado em paralelo com um computador pessoal, que quantifica as variáveis eléctricas transformando-as em variações mecânicas como são exemplo as deformações. Todo o condicionamento de sinal, excitação, amplificação e canais de aquisição, estão englobados numa só caixa que se apresenta a seguir.

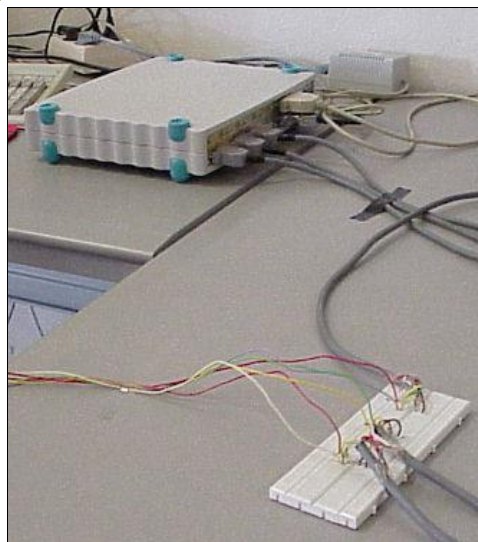


Fig. 8.21 - Sistema de aquisição de dados utilizado.

O equipamento Spider8 encontra-se a funcionar com 4 amplificadores, filtros digitais de quarta ordem, numa frequência de 4.8 [kHz]. Cada canal funciona com um conversor A/D independente, o que possibilita a obtenção de dados numa frequência de 1 a 9600 [s⁻¹]. Estes conversores estão preparados para assegurar uma leitura simultânea em todos os canais. Este sistema é totalmente controlado através de um computador, com um programa de interface, possibilitando a decisão sobre o instante de tempo que se deverá efectuar a leitura dos valores em medição.

Os extensómetros utilizados possuem as seguintes características técnicas, referidas na tabela 8.8.

<i>Extensómetros HBM RY61</i>	
Resistência	120 ± 1% [Ω]
Factor k	1.92 ± 1.5%
Sensibilidade transversal	0%

Tabela 8.8 - Características técnicas dos extensómetros.

Os ensaios foram efectuados em condições normais de temperatura e humidade.

8.4.5. - Instrumentação para medição

Qualquer condutor eléctrico altera a sua resistência quando é solicitado mecanicamente. Essa alteração acontece quando o condutor se deforma, alterando a sua resistividade “Q”.

$$\frac{dR}{R} = \varepsilon(1 + 2\nu) + \frac{dQ}{Q} \quad (8.18)$$

Nesta expressão, R representa a resistência eléctrica, ε a deformação e ν o coeficiente de Poisson. Para cada tipo de extensómetro existe um factor de calibração que depende do fabricante e que é matematicamente descrito pela expressão seguinte.

$$S = \frac{\Delta R}{R} \bigg/ \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta R}{R} \bigg/ \varepsilon \quad (8.19)$$

As medições que se pretendem efectuar correspondem a deformações muito pequenas, pelo que, correspondem a alterações de resistência muito pequenas, não podendo ser medidas sem um sistema que amplifique o sinal eléctrico. Assim, o extensómetro deverá ser incluído num sistema de medida conforme o que se representa no esquema da figura seguinte.

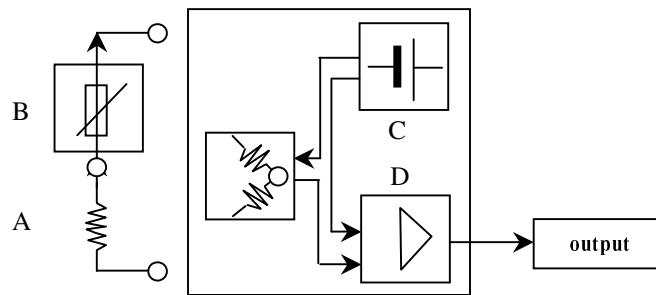


Fig. 8.22 - Diagrama de sistema de medida com extensómetros.

Neste diagrama a primeira parte é formada pelo extensómetro “B”, que converte a deformação mecânica numa alteração da resistência eléctrica. A segunda parte representa um circuito electro-electrónico de medida, apresentado com uma ponte Wheatstone, onde o extensómetro deverá ser considerado parte integrante, como se poderá verificar na figura 8.23. Estas duas partes são consideradas elementos passivos, pelo que, a energia passará através deles por forma a que seja possível produzir um sinal eléctrico útil. É introduzido um amplificador “D” no sistema de medida, ampliando o sinal de saída da ponte para um nível desejável do instrumento. Utilizando um amplificador linear, a tensão de saída é proporcional à tensão de entrada, a qual é por sua vez proporcional à deformação medida. A última parte do diagrama deverá permitir a leitura dos resultados.

O sistema auxiliar de energia é retirado de uma fonte de tensão ou de corrente. Quando o sistema entra em funcionamento, o circuito da ponte perde a sua simetria, tornando-se desequilibrado. A tensão de saída é pois proporcional ao desequilíbrio da referida ponte.

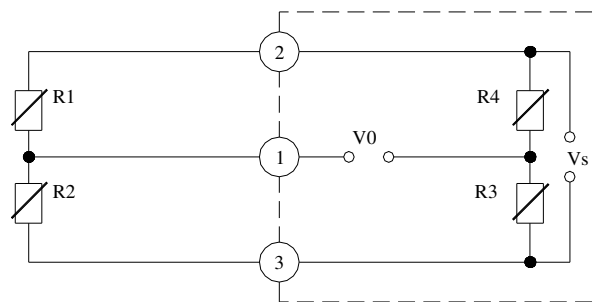


Fig.8.23 - Representação da ponte de Wheatstone.

Os braços da ponte da figura 8.23 são constituídos por resistências e extensómetros. Os nós alinhados na vertical são os pontos para a excitação da tensão V_S (estabilizada ou alternada), enquanto que os nós alinhados na horizontal medem a tensão de saída. De acordo com o princípio de funcionamento, sempre que for aplicada a tensão, será dividida em duas meias pontes, como um quociente das resistências correspondentes, isto é, cada meia ponte formará um divisor de tensão. Assim a tensão parcial V_1 no nó do circuito 1 poderá ser determinada e calculada através de:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot V_S \quad (8.20)$$

A tensão parcial V_4 , será homologamente determinada através da equação 8.21.

$$V_4 = \frac{R_4}{R_4 + R_3} \cdot V_S \quad (8.21)$$

A diferença entre os nós 1 e 4 será correspondente a V_0 , conforme expressão seguinte.

$$V_0 = V_S \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = V_1 - V_4 \quad (8.22)$$

O desequilíbrio da ponte é definido como uma tensão relativa à saída V_0/V_S , pelo que a equação anterior deverá ser apresentada na forma seguinte.

$$\frac{V_0}{V_S} = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = \frac{R_1 R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (8.23)$$

Existem pois duas condições para as quais V_0 se anula, ou seja, para o circuito estar balanceado. A primeira ocorre quando as resistências da ponte são todas iguais, enquanto que a segunda acontece quando o quociente R_1/R_2 iguala o valor de R_4/R_3 .

No caso de uma resistência variar (extensómetro) de um valor ΔR o circuito torna-se desequilibrado, aparecendo uma tensão V_0 entre os nós alinhados na horizontal, que implicam uma alteração na equação anterior para a nova expressão 8.24.

$$\frac{V_0}{V_S} = \left(\frac{(R_1 + \Delta R_1)}{(R_1 + \Delta R_1) + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \quad (8.24)$$

Na parte considerada da medição de extensometria, todos os ramos ou braços da ponte deverão apresentar a mesma resistência, ou pelo menos, as duas meias pontes $R_1 R_2$ e $R_3 R_4$ devem possuir os mesmos valores. As variações promovidas pela tolerância da resistência do extensómetro não afectam a precisão de medida.

Neste tipo de medições as variações de resistência promovidas pela deformação de metais é muito pequena e da ordem de 10^{-3} , sendo normalmente utilizada a equação 8.25 em vez da equação 8.24.

$$\frac{V_0}{V_S} = \frac{1}{4} \frac{\Delta R_1}{R_1} \quad (8.25)$$

Esta equação demonstra que a alteração relativa de resistência de cada parte da ponte é o factor preponderante no equilíbrio da mesma e não a alteração absoluta.

Utilizando agora a expressão 8.19 combinada com a equação anterior, pode ser apresentada uma relação entre a variação de tensão e a deformação.

$$\frac{V_0}{V_s} = \frac{S}{4}(\varepsilon_1) \quad (8.26)$$

Na montagem dos extensómetros são utilizados adesivos que devem apresentar um elevado módulo de elasticidade, devendo a montagem ser efectuada na mínima espessura, minimizando desta forma o efeito de transferência da deformação para o extensómetro.

8.4.6. - Resultados experimentais

Durante a execução dos ensaios foram detectados alguns problemas, nomeadamente com a resistência da ferramenta de corte, uma vez que esta acabaria por partir durante a ocorrência de algumas medições, impossibilitando a leitura respectiva, representada na tabela 8.2 por(NM).

Os valores registados foram lidos em sistema de “Data Logger”, possibilitando a leitura dos valores instantâneos durante um período de tempo, de uma forma contínua. Neste módulo existe um sistema que permite a obtenção de uma listagem de resultados e a obtenção de gráficos de [mV/V] em função do tempo. Depois de tratada esta quantidade, é possível determinar as tensões residuais na direcção do eixo da viga.

Os resultados traduzem o estado de tensão depois da ferramenta ter efectuado o alívio das tensões residuais instaladas. Na figura 8.1.2 do anexo 8.1 estão representados os valores obtidos por medição da tensão residual a meio do topo da banzo, apresentando-se para cada medição o valor instantâneo “TRxx-vi” bem como o respectivo valor médio “TRxx-vm”. Feita a média dos valores das medições apresentadas, o estado de tensão é caracterizado na zona “f1” por um valor de 50 [MPa] à tracção, com um desvio padrão de 15 [MPa].

A outra zona de medição “f2” encontra-se a 13 [mm] para a direita da primeira zona de medição, tendo sido obtido um valor médio 13 [MPa] à tracção, com um desvio padrão de 10 [MPa]. Os valores registados encontram-se na figura 8.1.3, do anexo 8.1.

No caso da alma, foram efectuados os mesmos tipos de registos, apresentando-se os valores na posição “w1”, a meio da alma, tendo sido obtido um valor de 21 [MPa] à compressão, ver figura 8.24, com um desvio padrão de 9 [MPa].

No caso da posição “w2” a 25 [mm] do centróide e na face da alma, os valores registados apresentam um estado de tracção, com um valor médio de 21 [MPa] à compressão e um desvio padrão de 13 [MPa], ver figuras 8.1.5.

Deve referir-se que as tensões residuais deverão ser auto equilibradas, motivo pelo qual se optou pela distribuição apresentada na figura 8.24. Esta distribuição serviu de base aos cálculos numéricos apresentados no capítulo 9.

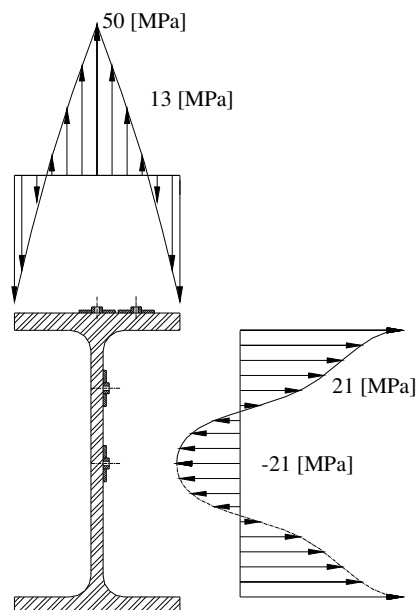


Fig. 8.24 – Distribuição de tensões residuais resultante.

Este tipo de distribuição está de acordo com algumas referências bibliográficas. Estes valores são influenciados grandemente pelo processo de fabrico, e dependem do estado do perfil, facto que pode justificar o ligeiro afastamento dos valores apresentados. De qualquer forma, verifica-se que o estado de tensão é semelhante ao apresentado na figura 8.13.

8.5. - Equipamento de ensaio

O equipamento de ensaio encontra-se dividido em duas grandes áreas de investigação, uma de características térmicas e outra estrutural. Nestes domínios interessa determinar a carga de colapso da viga quando instabiliza lateralmente a uma determinada temperatura. Foram determinadas as cargas de colapso para as temperaturas impostas de cada ensaio.

A encurvadura lateral verifica-se segundo o eixo mais fraco, sendo portanto necessário controlar o deslocamento lateral da viga. O carregamento foi aplicado de uma forma incremental, variando entre 1000 e 2000 [N], até a um ponto considerado suficientemente afastado e para o qual a viga não apresentava qualquer função de resistência.

Relativamente ao aumento de temperatura, e tendo em consideração outros ensaios realizados em outros componentes, optou-se por uma taxa de aquecimento de 800 [°C/h], obrigando a um equipamento de potência térmica bastante elevada, 70 [kVA].

8.5.1. - Equipamento de ensaio estrutural

O equipamento que se apresenta na figura 8.25 foi dimensionado para suportar uma carga de 60 [ton] em cada um dos quatro pontos de apoio. Trata-se de um pórtico

simplesmente apoiado, mas que absorve os esforços em quadro, não sendo necessário qualquer fixação a fundações.



Fig. 8.25 – Pórtico de reacção para ensaios estruturais.

As dimensões de atravancamento máximo deste pórtico encontram-se resumidas no desenho de conjunto que se apresenta na figura 8.26, sendo possível ensaiar vigas de diferentes comprimentos até um valor máximo de 8 [m] e de secções diferentes daquelas que serviram para os ensaios que se apresentam. Com dois pontos de carga e dois apoios ajustáveis foi possível ensaiar vigas com 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5 e 6.5 [m] de comprimentos entre apoios.

A estrutura foi projectada e construída com perfis UNP 380 e UNP 350, aparafusada com M20 x 65 – 8.8 [DIN931], apresentando-se dividida em dois módulos de 4 [m] de comprimento cada.

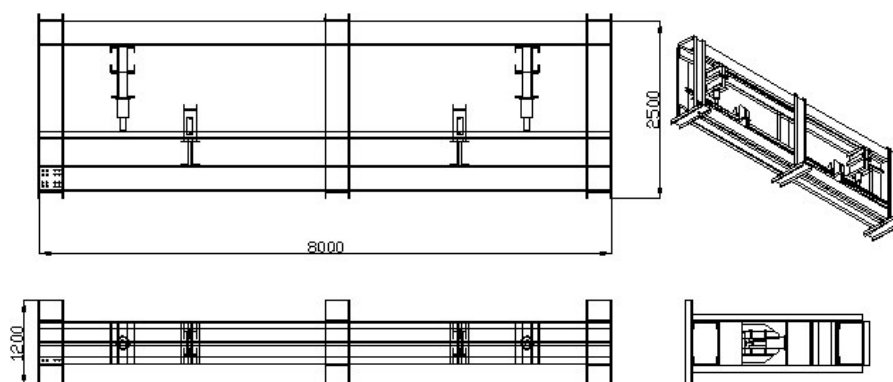


Fig. 8.26 – Estrutura, vista global e perspectiva.

Os apoios da estrutura de reacção são constituídos por perfis HEA 200 com apoios simples de forquilha e ajustáveis a vários tamanhos e tipos de secções recatas, através de pernos roscados com extremidade em rótula esférica, conforme se poderá verificar na figura 8.27.



Fig.8.27 - Implementação de apoios simples de forquilha na estrutura.

A verificação do dimensionamento foi feita por intermédio de um programa de elementos finitos com elementos tipo casca, tendo-se verificado um deslocamento máximo de 3.2 [mm], para uma solicitação máxima em quatro pontos de 600 [kN], incluindo o peso próprio da estrutura. Os resultados da deformada encontram-se representados na figura 8.28.

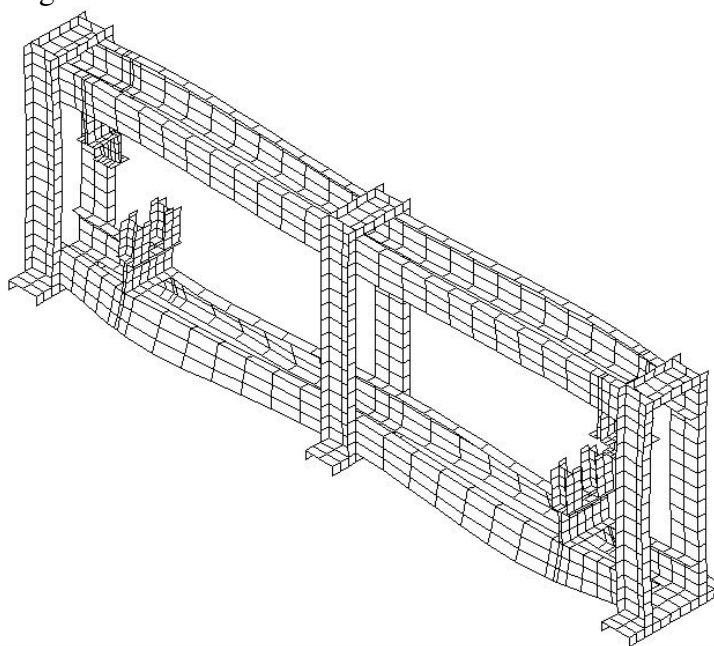


Fig.8.28 – Resultados da deformada; factor de ampliação igual a 50.

A estrutura porticada apresenta rigidez suficiente para os ensaios que se pretendem fazer, quando comparada com o nível de deslocamentos e forças envolvidas nos ensaios dos perfis comerciais IPE100, escolhidos para analisar o comportamento de vigas à encurvadura lateral. Estão previstos valores de força compreendidos entre 15000 [N] e 80000 [N] nos ensaios, valores que se apresentam dez vezes inferiores à carga máxima imposta na simulação.

Os deslocamentos previstos no caso de uma solicitação de quatro forças concentradas de 60 [ton] estão representados na figura 8.29, verificando-se que os deslocamentos da estrutura serão cem vezes inferiores aos deslocamentos da viga em

teste. Admite-se então que a estrutura projectada pode ser considerada como não influenciando os resultados.

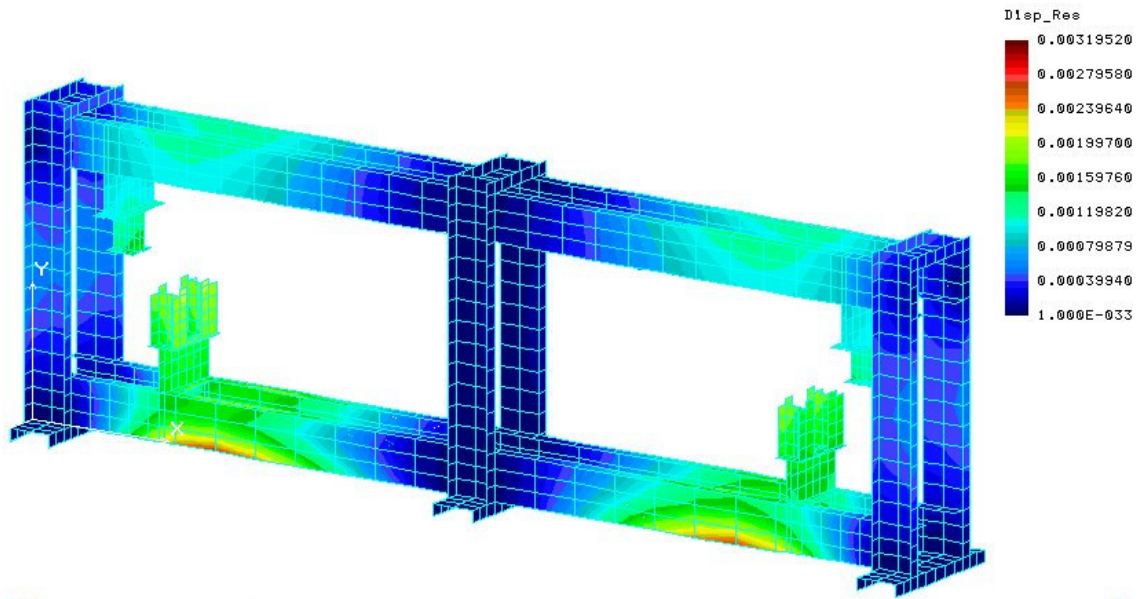


Fig.8.29 - Resultados dos deslocamentos na estrutura.

Pode-se verificar ainda que o nível de cedência não é ultrapassado. Na figura 8.30 é apresentado o campo de tensões equivalente de Von Mises instalada após carregamento, observando-se que os maiores níveis se encontram na zona dos apoios inferiores.

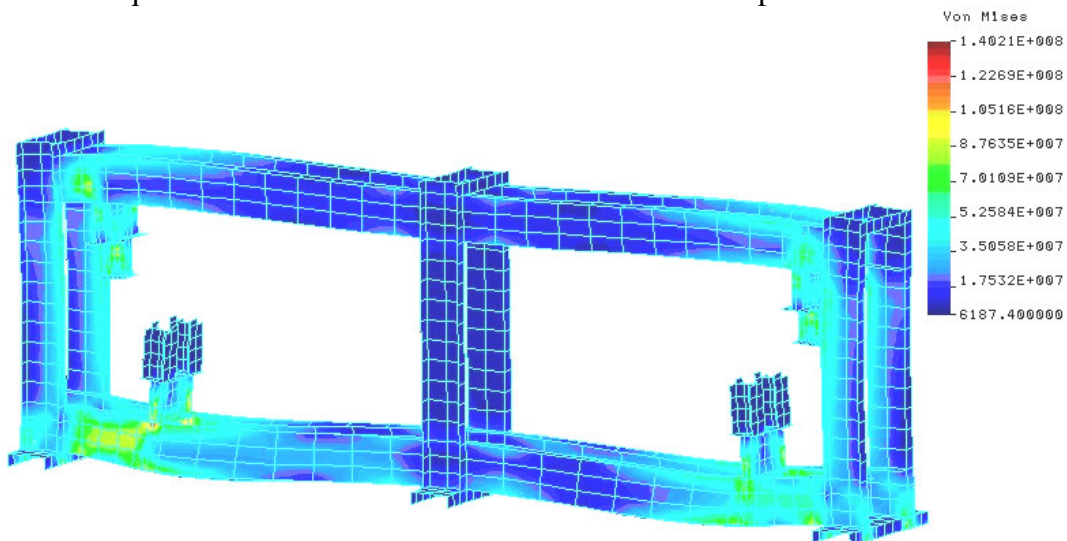


Fig.8.30 - Resultados das tensões equivalentes instaladas. Deformada ampliada 50 vezes.

8.5.2. - Equipamento hidráulico

Para accionar mecanicamente as vigas em teste, utiliza-se um sistema electro-hidráulico constituído por um motor, uma bomba, sistemas de distribuição hidráulica e de controlo de potência e dois actuadores de duplo efeito. Na figura 8.31 apresenta-se o esquema hidráulico simplificado, bem como o posicionamento relativo às vigas a ensaiar.

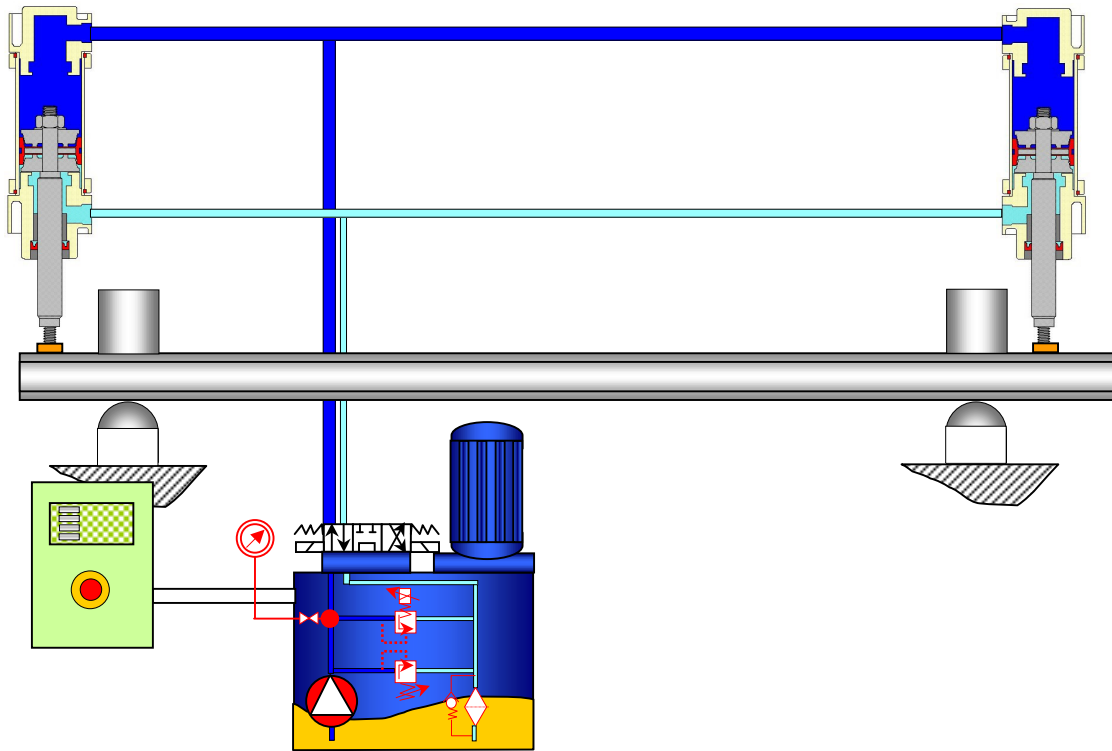


Fig. 8.31 - Esquema do circuito hidráulico.

Este sistema recorre a uma fonte de energia eléctrica com uma potência de 4 [cv], e a uma bomba capaz de debitar 16 [l/min] de um reservatório de 40 [l]. Os actuadores de duplo efeito poderão exercer cargas até 60 [ton] cada e possuem um curso máximo de 200 [mm], ver figura 8.32.



Fig.8.32 - Actuador de duplo efeito até 60 [ton].

Na extremidade de cada actuador estão instaladas duas células de carga (ver figura 8.33) com uma capacidade máxima de 10 [ton] cada, capazes de detectarem incrementos de carga suficientemente pequenos, para que seja possível identificar a carga de colapso do efeito em estudo, com uma precisão de 10 [N].



Fig. 8.33 - Célula de carga de 10 [ton].

Estas células encontram-se ligadas a um controlador do sistema, o qual apresenta os valores instantâneos e os valores de pico instalados no perfil ao longo do ensaio.

A pressão máxima de funcionamento de todo o sistema não deverá ser superior a 400 [bar].

Na interface entre o elemento estrutural e a caixa da célula de carga foi colocada uma componente auto ajustável que possibilita a aplicação da carga numa linha distribuída ao longo da largura do banzo superior, em vez de ser distribuída por uma área, minimizando assim o efeito das condições na aplicação do momento e facilitando a determinação do momento resistente, ver figura 8.34.

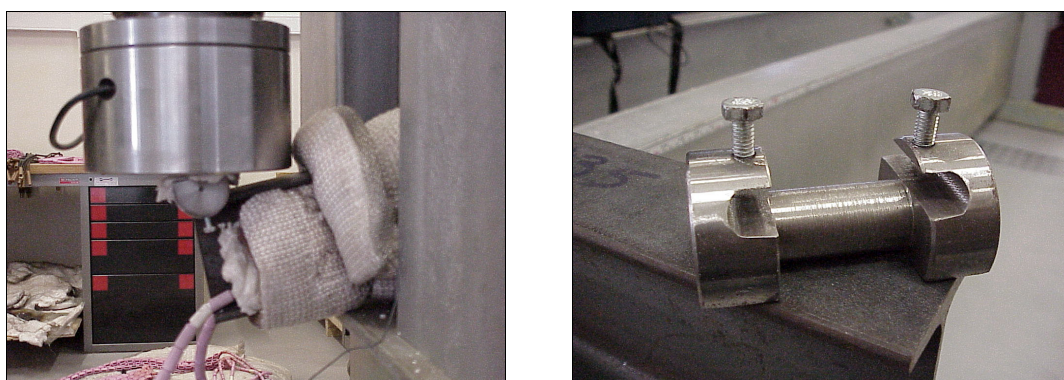


Fig. 8.34 – Componente de interface para aplicação de carga.

A distância entre a linha do banzo inferior da viga no apoio e a linha de aplicação da carga foi mantida constante durante todos os ensaios e igual a 0.23 [m].

8.5.3. - Equipamento resistivo de efeito térmico

O sistema de aquecimento a empregar na experiência deverá conter os aparelhos necessários para gerar a energia a ceder à fonte de calor. Outros componentes tais como: o controlador da variação de temperatura, as resistências eléctricas, o isolamento, e um conjunto de acessórios de montagem e de funcionamento, possibilitam simular o aquecimento das vigas em todo o perímetro da secção recta, bem como na dimensão longitudinal correspondente ao comprimento de encurvadura, conforme se representa na figura 8.35.



Fig. 8.35 – Sistema gerador de potência eléctrica – térmica.

O esquema de montagem destes componentes deverá ser efectuado conforme a figura 8.36. A unidade necessária é capaz de responder a cerca de 6 canais de saída com 10,8 [kW] de potência cada, ou seja, cerca de 70 [kVA].

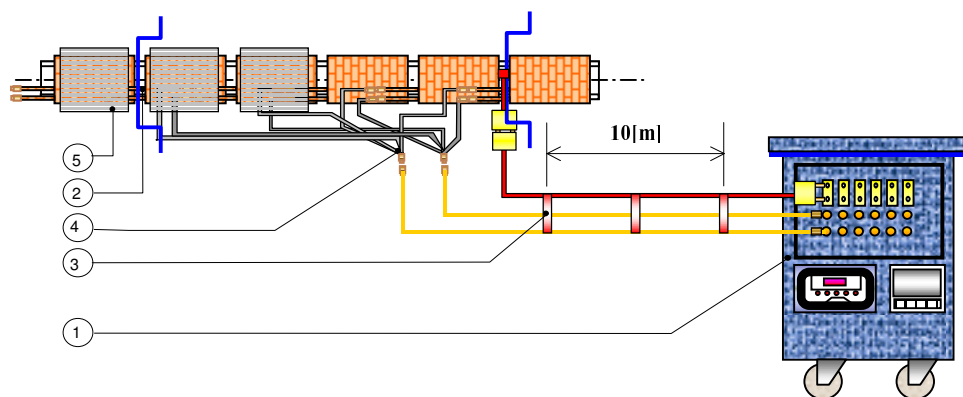


Fig. 8.36 – Sistema completo de transmissão de potência térmica. (1) – unidade de potência, (2) – resistências, (3) – cabos de distribuição, (4) - cabos divisores, (5) – isolamento térmico.

Esta unidade de aquecimento é provida de um sistema de potência que funciona a 380 [V] para aquecer resistências cerâmicas de baixo potencial eléctrico. Através de um sistema de transformação trifásico com interrupção do tipo estado sólido, é operado manualmente ou automaticamente. A unidade está protegida contra picos de corrente ou para condições de elevação térmica contínua.

Este centro de aquecimento deverá ser capaz de ligar 20 resistências de aquecimento em paralelo tipo (2), cada uma delas com cerca de 2,7 [kW] de potência, associadas em dois grupos de geometria diferente. No primeiro grupo podem ser utilizadas 10 resistências com tamanhos de 1200 [mm] por 45 [mm] para colocar sobre os banzos inferiores e superiores, e no segundo grupo as resistências com dimensões de 600 [mm] por 85[mm] serão colocadas nas almas dos perfis. Por questões construtivas, apenas será admissível colocar quatro resistências térmicas ligadas a cada canal. Com 6 canais disponíveis o centro de aquecimento disponibiliza 10.8 [kW] por canal, ou seja, o equivalente a 4 resistências por canal. As resistências eléctricas utilizadas correspondem aos modelos da figura 8.37. Estas resistências funcionam a uma tensão de 240 [V] e a uma corrente de 45 [A], sendo capazes de atingir os 1050 [°C].

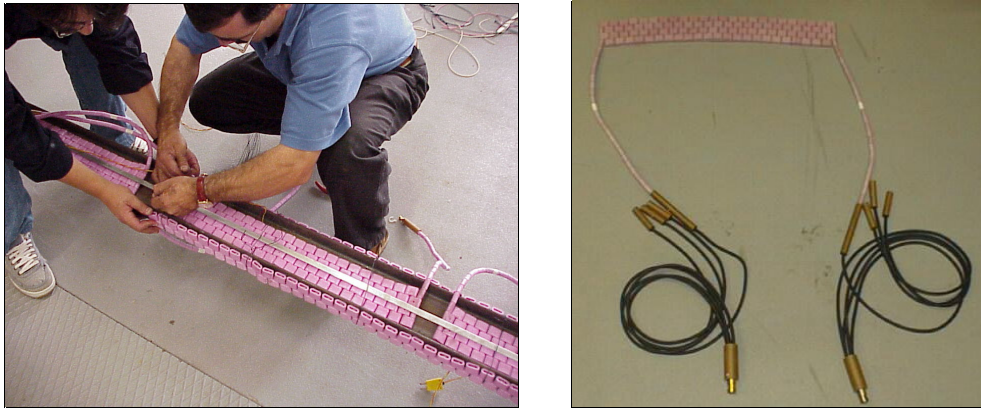


Fig.8.37 – Colocação das resistências eléctricas.

Para controlar a temperatura, o centro de aquecimento dispõe de um controlador programável, capaz de regular a variação de temperatura, tempo e temperatura de permanência. Este controlador gera uma curva de aquecimento e de arrefecimento, conforme a figura 8.38.

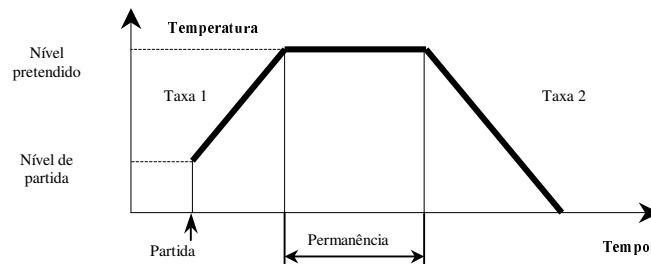


Fig. 8.38 - Curva programável no controlador.

A taxa de aumento de temperatura (Taxa 1) pode ser regulada em [°C/Hora] no mostrador analógico (ver figura 8.39).

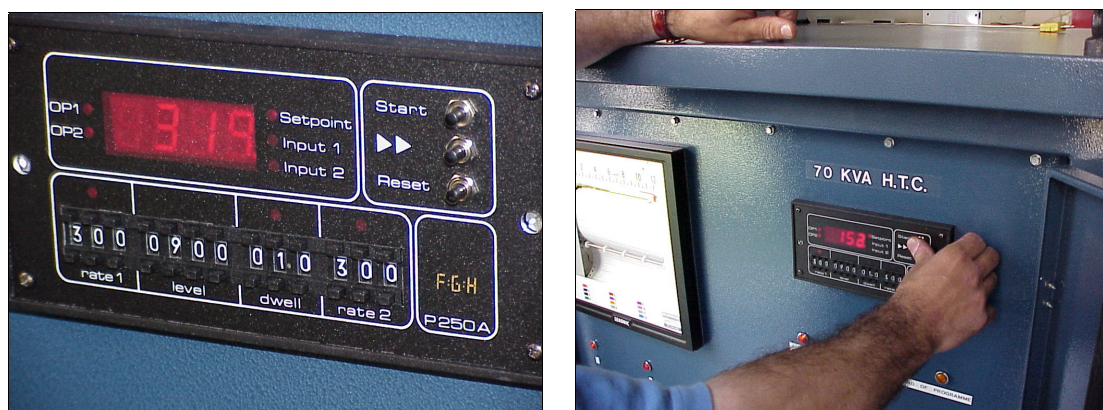


Fig. 8.39 – Controlador programável.

Será necessário especificar a temperatura de estabilização no final do aumento de temperatura que a “Taxa 1” determina. Depois de se atingir a temperatura desejada, será necessário especificar o tempo de permanência. Para terminar, no programa deverá ser indicada a taxa de arrefecimento (Taxa 2).

Para registar todo o processo, o centro de aquecimento também dispõe de um registor para termopares do tipo “K”, com 12 pontos.

A ligação do centro de aquecimento às resistências é feito através de cabos de distribuição que variam conforme a montagem. Para ligar as resistências aos cabos de distribuição, será necessário utilizar cabos divisores, que consoante a opção anterior, deverão capacitar a ligação, no máximo, de 4 resistências por canal.

Com o objectivo de controlar a evolução da temperatura será necessário efectuar a ligação dos termopares, da viga em teste ao centro de aquecimento. Para tal, foram utilizados cabos de ligação, conforme se mostra na figura 8.40.

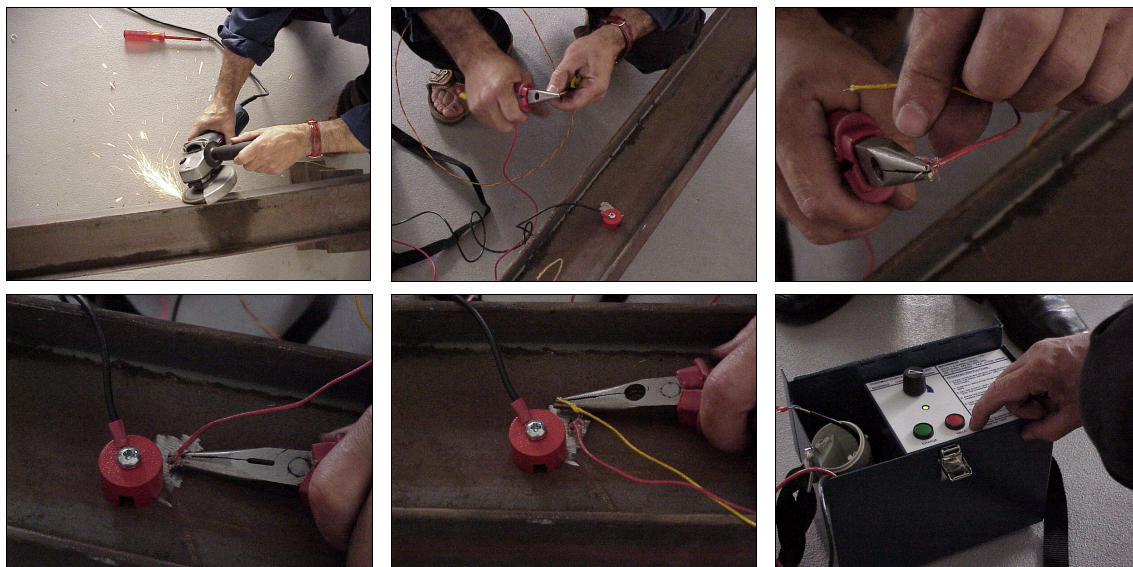


Fig. 8.40 – Colocação dos termopares e preparação da ligação à viga em teste.

Com o objectivo de minimizar possíveis erros de registo na leitura das temperaturas, foi utilizado uma unidade portátil de soldadura de termopares do tipo representado na figura 8.40.

Depois de efectuada a instrumentação procedeu-se à colocação das resistências, devidamente isoladas para garantir maior rendimento térmico no processo, conforme se verifica na figura 8.41.

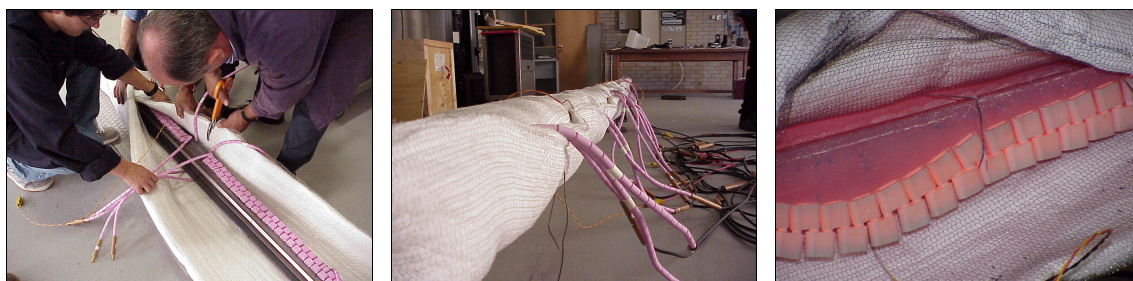


Fig. 8.41 – Montagem das resistências e do isolamento.

O posicionamento relativo das resistências encontra-se esquematizado na figura 8.42.

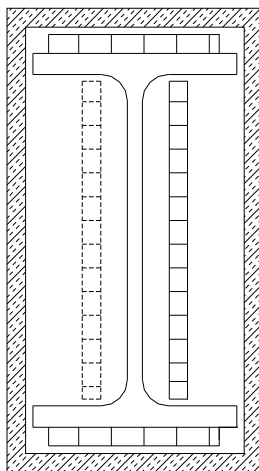


Fig. 8.42 - Simulação de colocação das resistências e do isolamento.

Foram utilizadas mantas isolantes em malha de aço inoxidável, com cerca de 25 [mm] de espessura e de dimensões 7200 por 600 [mm] e 900 por 300 [mm], respectivamente, com uma densidade 64 [kg/m³].

Fica assim concluída a preparação do ensaio térmico, a efectuar sobre os elementos estruturais em estudo.

8.6. - Procedimento de ensaio

Efectuaram-se ensaios à temperatura ambiente e a temperaturas elevadas, nas condições descritas anteriormente. Neste último caso, as temperaturas foram incrementadas desde os 200 [°C] até aos 600 [°C], tendo sido necessário esperar pela estabilização da temperatura para aplicar a carga mecânica. Este procedimento teve em consideração a variação de comprimento da viga relativamente ao comprimento inicial entre apoios provocado pelo efeito térmico, que de outra forma seria difícil de controlar.

Na extremidade dos apoios foram colocadas mantas isolantes para evitar fluxos de calor ao longo da direcção paralela ao eixo da viga. A forma dos apoios em meia lua para além de simular um apoio simples, reduz as perdas de calor para os suportes.

O carregamento das vigas foi efectuada de acordo com a figura 7.17 do capítulo 7. As forças localizadas nas extremidades da viga foram incrementadas progressivamente até se atingirem valores, para os quais, um acréscimo de deslocamento não corresponde a um acréscimo de forças. Este valor corresponde à carga de colapso das vigas.

8.7. - Medições a efectuar durante os ensaios

As medições efectuadas representam as variáveis do sistema em análise. Por um lado foi necessário acompanhar a evolução da solicitação térmica e controlar as temperaturas ao longo do perfil e por outro foi necessário controlar o valor da força aplicada. Os deslocamentos a meio vão da viga, resultantes do processo de carregamento termo-mecânico, foram registados durante todos os ensaios.

8.7.1. – Temperaturas

As temperaturas foram registadas em dois, quatro ou seis pontos, conforme comprimento de viga a ensaiar. Na figura 8.43 são apresentados exemplos de aquecimento de onze ensaios, sendo possível verificar que a taxa de aquecimento foi igual para todos eles.

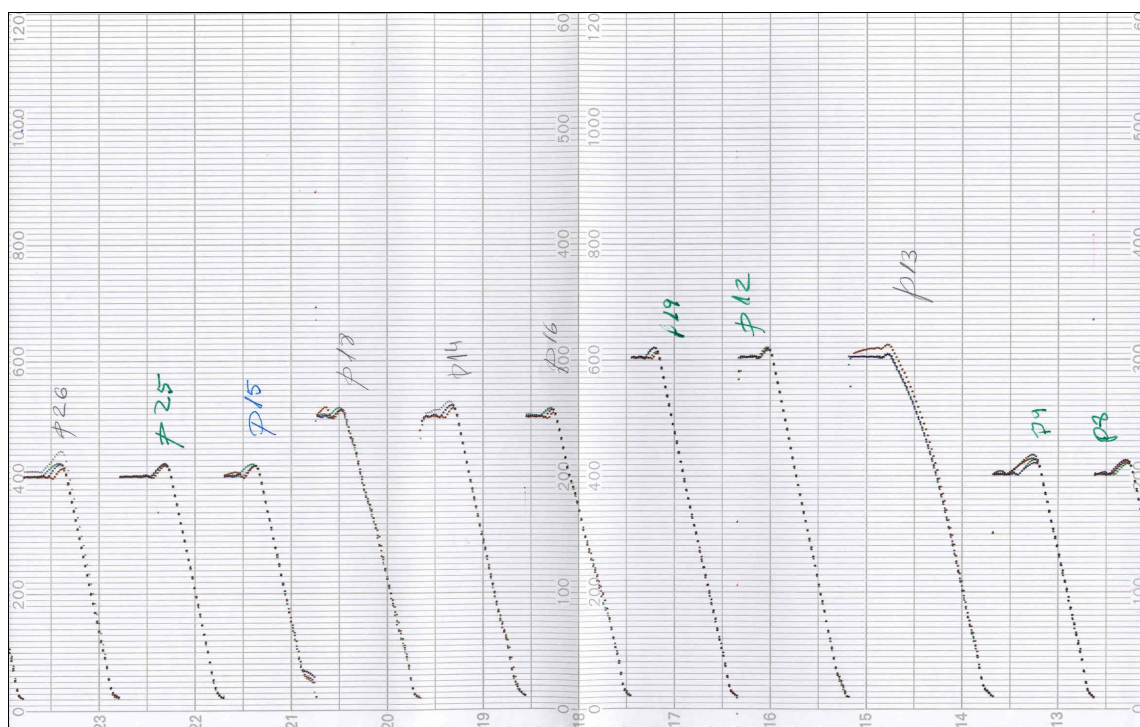


Fig. 8.43 – Exemplo de aquecimentos efectuados em onze, das cento e vinte vigas ensaiadas.

O tempo de permanência à temperatura desejada variou entre meia hora a uma hora e meia. Este facto pode influenciar os resultados tendo em consideração o fenómeno de fluência verificado a temperaturas elevadas, contudo, diversos autores já demonstraram que para um tempo de exposição ao incêndio a variar entre a meia hora e as duas horas, os efeitos da fluência dependem pouco da velocidade de aquecimento [8.10].

8.7.2. – Deslocamentos a meio vão

Foram medidos três tipos de deslocamentos na secção recta a meio vão das vigas, através de transdutores ligados aos banzos, conforme se mostra na figura 8.44, para o caso do deslocamento lateral no banzo inferior, DLB.

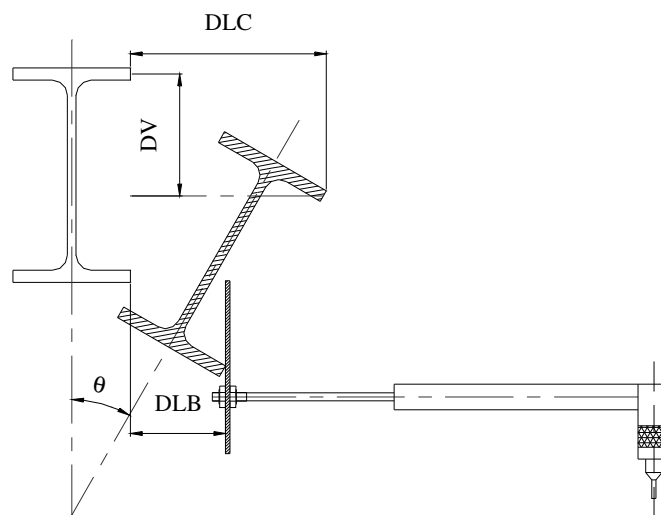


Fig. 8.44 - Esquema de montagem dos transdutores de deslocamentos.

Os resultados obtidos estão resumidos nos gráficos do anexo 8.2, sendo apresentados para diferentes níveis de temperatura: temperatura ambiente, 200 [°C], 300 [°C], 400 [°C], 500 [°C] e 600 [°C]. As forças foram aplicadas com incrementos de 2000 [N].

Para cada binómio comprimento-temperatura foram efectuados três ensaios, do qual resultam os gráficos que se apresentam no anexo 8.2. Em cada gráfico representa-se a variação da força aplicada nas extremidades da viga em função dos deslocamentos laterais do banzo superior e do banzo inferior e ainda do deslocamento vertical, todos registados a meio vão. Nestes gráficos o último ponto registado representa o valor da força correspondente ao valor do momento resistente à encurvadura.

8.7.3. – Momento resistente à encurvadura

Para cada temperatura de ensaio, apresenta-se a curva de cálculo à encurvadura lateral do Eurocódigo 3, a qual é comparada com os resultados obtidos experimentalmente.

A figura 8.45 apresenta os resultado correspondentes à temperatura ambiente.

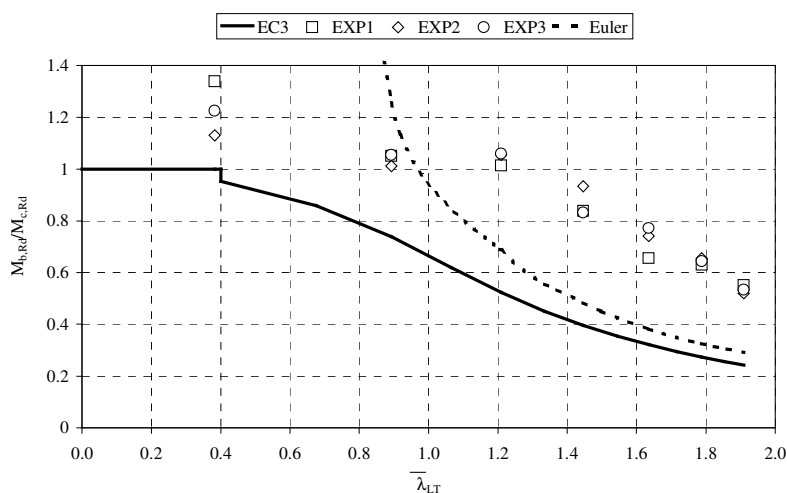


Fig. 8.45 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura ambiente.

Os valores experimentais foram calculados no pressuposto de que o comprimento de encurvadura das vigas correspondia ao seu comprimento teórico, ou seja, à distância entre apoios. No entanto, devido ao sistema de aplicação das cargas utilizado, a viga não é livre de se deslocar lateralmente ao nível do ponto de aplicação das cargas. Este facto provoca uma diminuição do comprimento de encurvadura, como teremos oportunidade de mostrar no sub-capítulo 8.8, onde se verificará que a adopção de um comprimento de encurvadura igual a metade do comprimento teórico das vigas, como sugere o Eurocódigo 3, evita a existência de resultados superiores à curva elástica de Euler, como se representa nas figuras 8.45 a 8.52, relativamente às curvas de cálculo à encurvadura de vigas.

Na figura 8.46 apresenta-se a deformada de duas vigas, em condições de temperatura normal, sendo visível a rotação da secção, bem como o deslocamento lateral da viga.



Fig. 8.46 – Encurvadura de duas vigas com 4.5 e 5.5 [m] à esquerda e direita, respectivamente.

Na figura 8.47 apresentam-se os resultados correspondentes aos ensaios a 200 [°C].

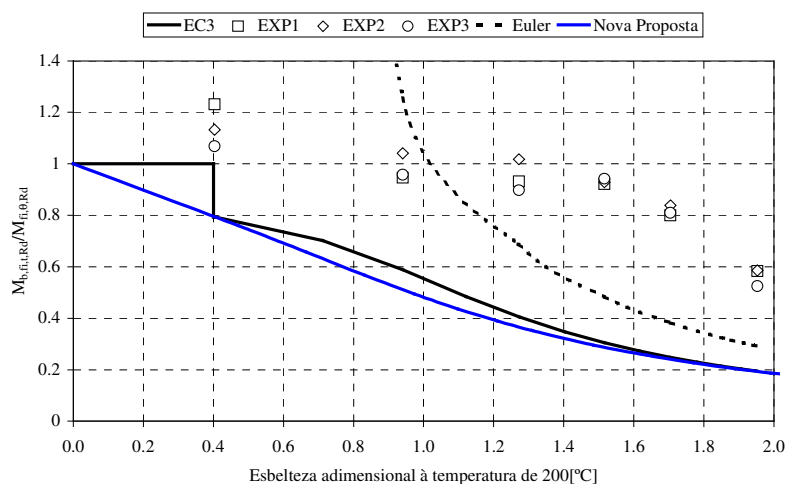


Fig. 8.47 – Resistência à encurvadura lateral, para 200 [°C].

A variação das propriedades mecânicas com a temperatura será determinante para se observar uma diminuição da resistência global, relativamente à situação anterior. Assim, verifica-se uma diminuição do momento resistente à encurvadura lateral, tendo em consideração que a esbelteza adimensional é agora apresentada à temperatura do ensaio.

Na figura 8.48 apresentam-se duas vigas diferentes em condições de ensaio, sendo de referir que na imagem da esquerda se apresenta o momento final do ensaio enquanto que na direita se verifica pontualmente o valor da temperatura, para além dos registos efectuados por tempopares soldados ao longo do comprimento.

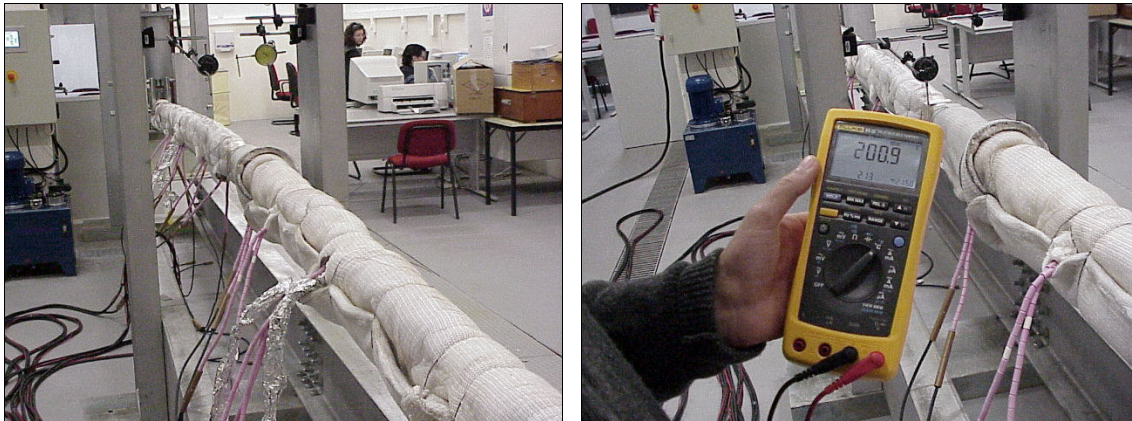


Fig. 8.48 – Ensaio de vigas com 6.5 [m] de encurvadura a 200 [°C].

A medição dos deslocamentos a meio vão foi conseguida através de um escudo térmico colocado sobre o isolamento e que permitiu o contacto directo com os sensores de deslocamento, como se mostra na figura 8.49.

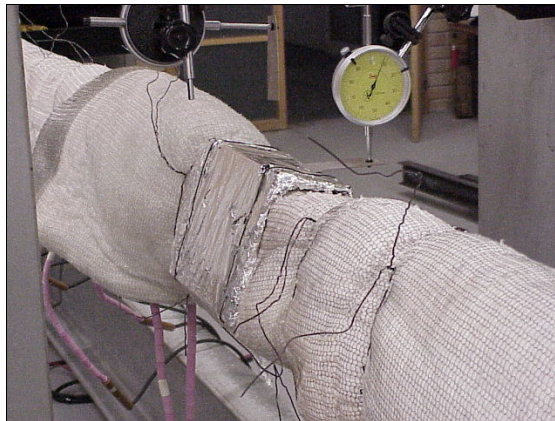


Fig. 8.49 – Escudo térmico para medição dos deslocamentos.

Na figura 8.50 estão apresentados os resultados dos ensaios efectuados à temperatura de 300 [°C], continuando-se a notar a tendência de diminuição do valor do momento resistente.

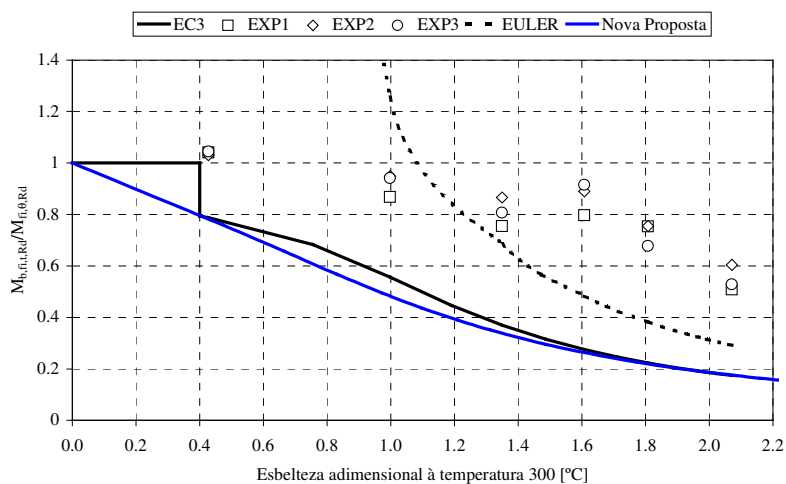


Fig. 8.50 – Resistência à encurvadura lateral, para 300 [°C].

Na figura 8.51 é possível observar a localização dos pontos de registo de temperaturas ao longo dos 6.5 [m] de comprimento da viga.

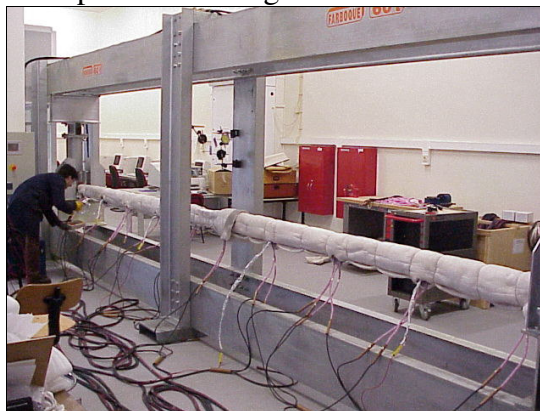


Fig. 8.51 – Localização dos pontos de registo da temperatura.

Ao incrementar o valor da temperatura de ensaio para 400 [°C] observa-se uma contínua diminuição do valor do momento resistente à encurvadura lateral. A figura 8.52 apresenta os resultados correspondentes a esta temperatura.

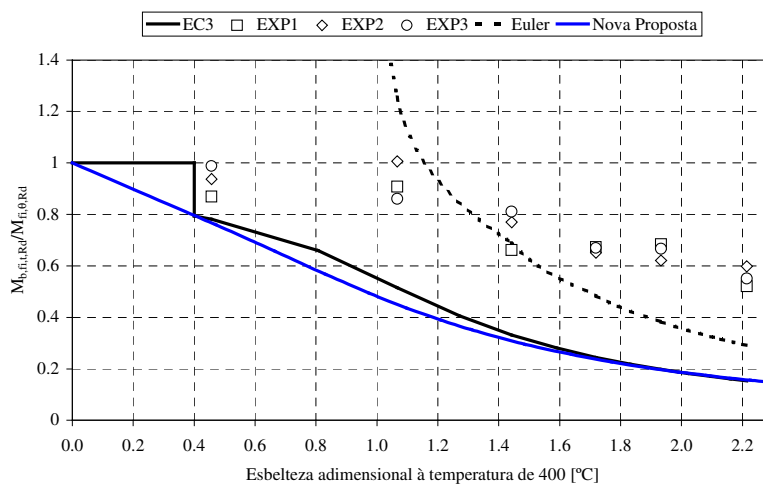


Fig. 8.52 – Resistência à encurvadura lateral, para 400 [°C].

Na figura seguinte são apresentadas duas imagens dos ensaios efectuados a 400 [°C], sendo de realçar que a partir deste valor de temperatura o aço começa a apresentar uma coloração diferente, resultante da solicitação térmica efectuada.

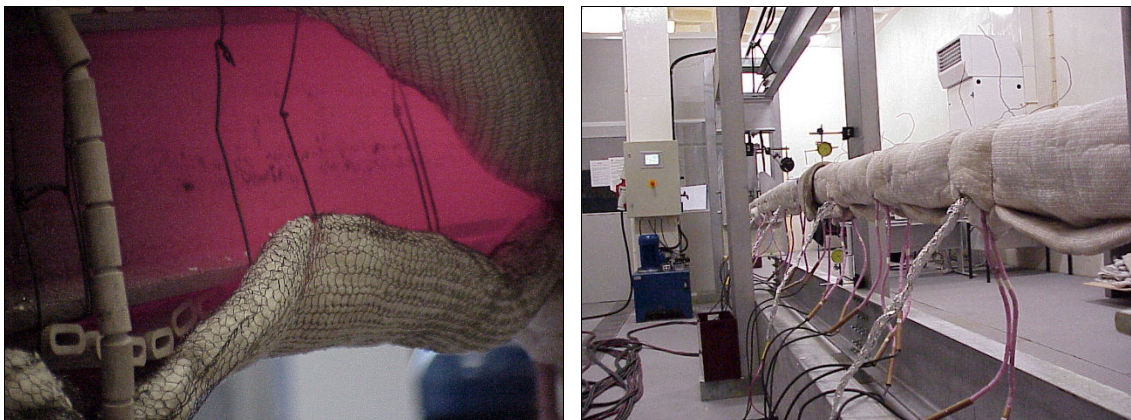


Fig. 8.53 – Ensaio de vigas a 400 [°C].

Aumentando para 500 [°C] o valor da temperatura, observa-se na figura 8.54 uma diminuição do valor do momento resistente à encurvadura, ultrapassando mesmo o limite admissível apresentado pelo Eurocódigo 3. Assim para certos valores de esbelteza, a curva de cálculo referida deixa de ser segura. Este facto será posteriormente confirmado após simulações numéricas efectuadas.

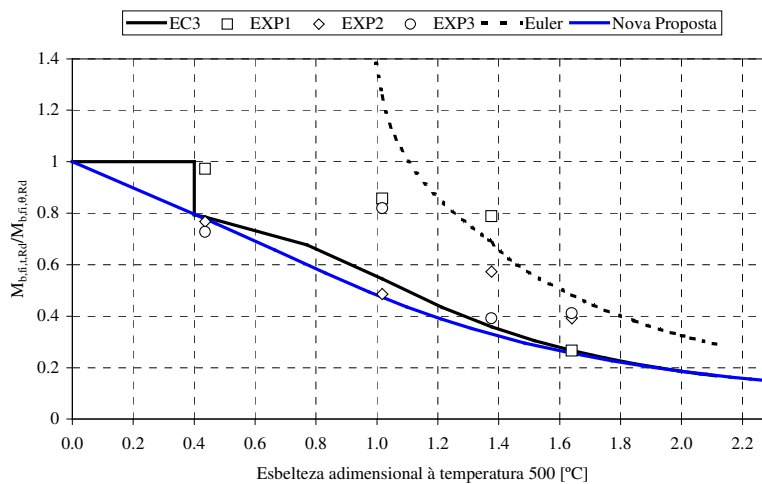


Fig. 8.54 – Resistência à encurvadura lateral, para 500 [°C].

Na figura seguinte apresentam-se dois ensaios efectuados a 500 [°C], sendo possível verificar o estado de deformação residual de rotação e deslocamento lateral da secção recta da viga.

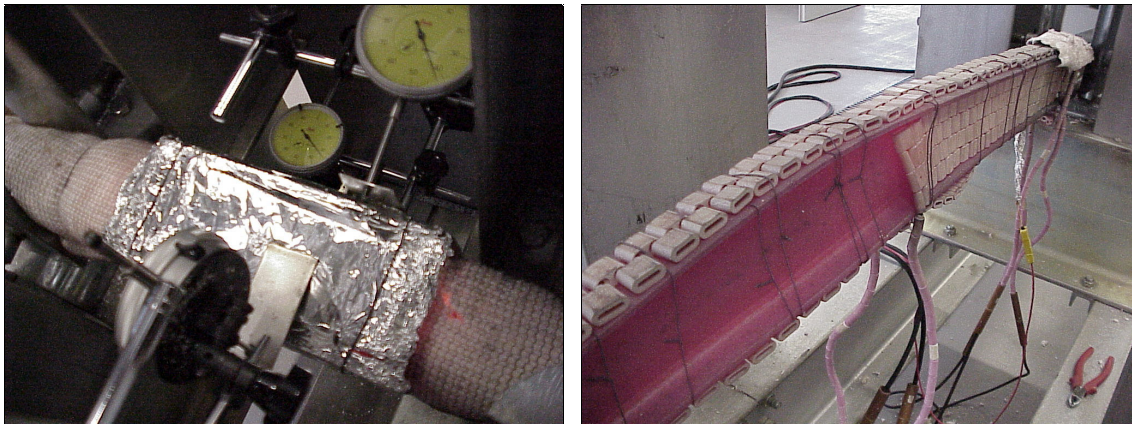


Fig. 8.55 – Ensaio de viga com 0.5 e 1.5 [m] de comprimento, a 500 [°C].

Por último, foi elevada a temperatura de ensaio até aos 600 [°C]. A tendência de falta de segurança da curva de cálculo à encurvadura lateral, proposta no Eurocódigo 3 é mais uma vez evidenciada.

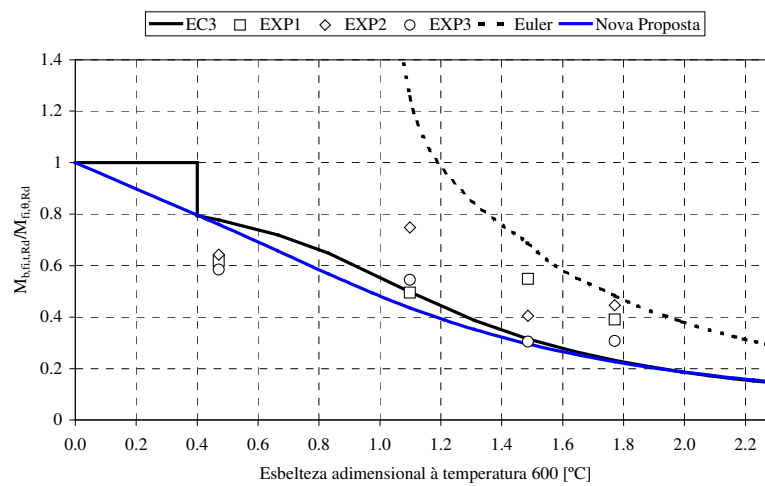


Fig. 8.56 – Resistência à encurvadura lateral, para 600 [°C].

Apresentam-se na figura 8.57 duas imagens do final de ensaios realizados com vigas de 3.5 [m] de comprimento entre apoios, a temperaturas de 600 [°C].

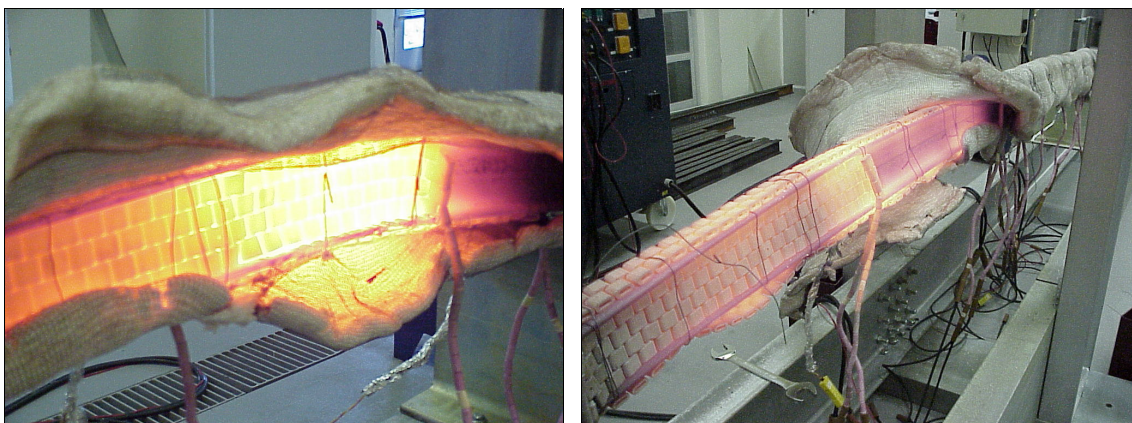


Fig. 8.57 – Ensaio de vigas a 600 [°C].

Tendo em consideração os resultados evidenciados nos gráficos anteriores, é possível extrair algumas conclusões. A primeira diz respeito aos valores do momento resistente à encurvadura e que se apresentam abaixo dos valores propostos pelo Eurocódigo 3, para certos valores de esbelteza adimensional, sugerindo outro tipo de curva como a correspondente à nova proposta apresentada no sub-capítulo 7.6.2. Outra conclusão possível de extrair, diz respeito aos ensaios efectuados até 400 [°C], apresentando valores de resistência à encurvadura mais elevados relativamente aos valores esperados, facto que poderá estar relacionado com a eventual introdução de rigidez no sistema de apoio e no sistema de aplicação da carga. A partir de temperaturas superiores a 400 [°C] o comportamento do aço é completamente diferente, como se poderá verificar nos resultados do anexo 8.2.

Vários factores poderiam ter influenciado os resultados, dos quais se destacam, o facto da temperatura não ser uniforme em toda a extensão da viga, apresentando com frequência valores junto aos apoios da ordem de 10 a 20% inferiores relativamente ao valor medido na zona central da viga, introduzindo assim uma maior rigidez nos apoios, contribuindo também para a diminuição do comprimento de encurvadura das vigas. Outro factor que poderá ter influenciado os resultados prende-se com o facto de nem todos os ensaios terem demorado o mesmo tempo, conforme se poderá verificar pela figura 8.43, o que influenciará o comportamento à fluência do material.

Dada a dificuldade inerente a ensaios do tipo apresentado, será conveniente efectuar mais ensaios, agora com controlo instantâneo dos deslocamentos em função da carga, eliminando o carácter discreto dos valores medidos. Estes factos são motivo para a continuação do estudo deste fenómeno, uma vez que não existem registos de outros trabalhos efectuados neste âmbito.

8.8. – Discussão dos resultados

Os ensaios experimentais decorreram nas condições descritas nos parágrafos anteriores, sendo de realçar o facto de terem sido introduzidos no processo de ensaio restrições aos deslocamentos laterais. O modelo experimental escolhido para simular os momentos na extremidade obrigaram ao afastamento dos actuadores hidráulicos dos apoios, criando um braço de 230 [mm]. O posicionamento relativo entre estes manteve-se durante todos os ensaios, obrigando a um constrangimento lateral, diminuindo assim o comprimento de encurvadura, conforme se pretende representar na figura 8.58.

De uma forma análoga à definida para os elementos à compressão, define-se um factor de comprimento efectivo k , através da expressão 8.27, que estará relacionado com a rotação na extremidade da viga no plano lateral.

$$k = \frac{l}{L} \quad (8.27)$$

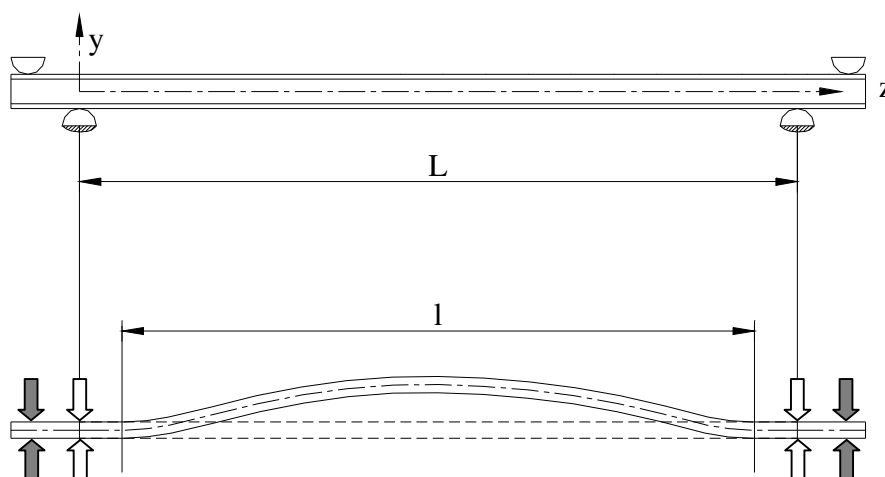


Fig. 8.58. – Constrangimento lateral no processo de aplicação da carga.

De uma forma análoga ao sugerido no anexo F do Eurocódigo 3, para o caso de vigas com secção recta duplamente simétricas, define-se k_w como o factor de comprimento efectivo que tem em consideração o empenamento nas extremidades.

O valor do momento crítico elástico nas condições de constrangimento apresentadas não deverá ser calculado através da expressão 7.33, mas sim pela expressão corrigida 8.28.

$$(M_0)_{cr}^* = \alpha_M \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \times \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} \quad (8.28)$$

Tendo em consideração os resultados analíticos de Euler bem como os resultados propostos pelas expressões do Eurocódigo 3, foram efectuadas várias simulações onde foram se consideram valores distintos para k , nomeadamente 0.5, 0.7 e 0.8. Os resultados sofrem um ajustamento que tem em consideração a influência do movimento lateral induzido pelo processo de carregamento. O valor efectivamente imposto só poderia ser experimentalmente determinado, caso se tivesse acompanhado a evolução dos deslocamentos ao longo do comprimento da viga ensaiada. Relativamente ao valor de k_w , caso esteja presente um processo de constrangimento ao empenamento na extremidade, deverá variar entre os 0.5 para uma situação de fixação total e o valor unitário para situações em que não se fixa este movimento, como foi o caso dos ensaios realizados.

Assim, os resultados obtidos do estudo da encurvadura lateral de vigas, à temperatura ambiente, para os diferentes valores de comprimento de encurvadura $l = kL$, são os representados na figura 8.59.

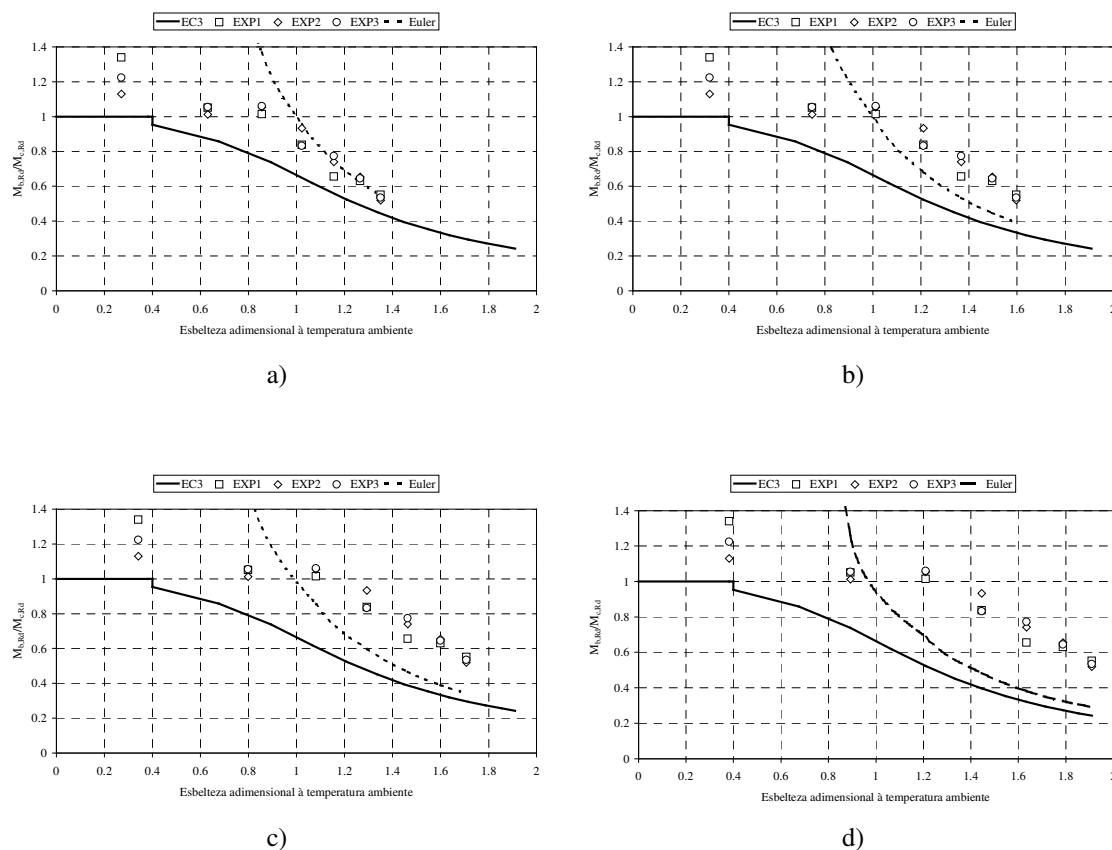


Fig. 8.59 – Curvas de cálculo à encurvadura lateral, à temperatura ambiente.
a) $k=0.5$; b) $k=0.7$; c) $k=0.8$ e d) $k=1.0$.

Como se pode constatar, os valores de k correspondentes a resultados posicionados abaixo da curva de Euler são obtidos apenas para $k = 0.5$, o qual está de acordo com o valor proposto no Eurocódigo 3 para a situação de encastramento total na direcção lateral dos apoios, como acontece nos ensaios realizados, pois os actuadores hidráulicos impedem movimentos laterais.

Para o caso de encurvadura à temperatura de 200 [°C], a tendência dos resultados é a mesma. Adoptando $k=0.5$ verifica-se um melhor ajustamento dos valores experimentais à curva elástica de Euler, como se poderá verificar na figura 8.60, onde para além da curva de cálculo do Eurocódigo 3 se apresenta também a curva correspondente à nova proposta.

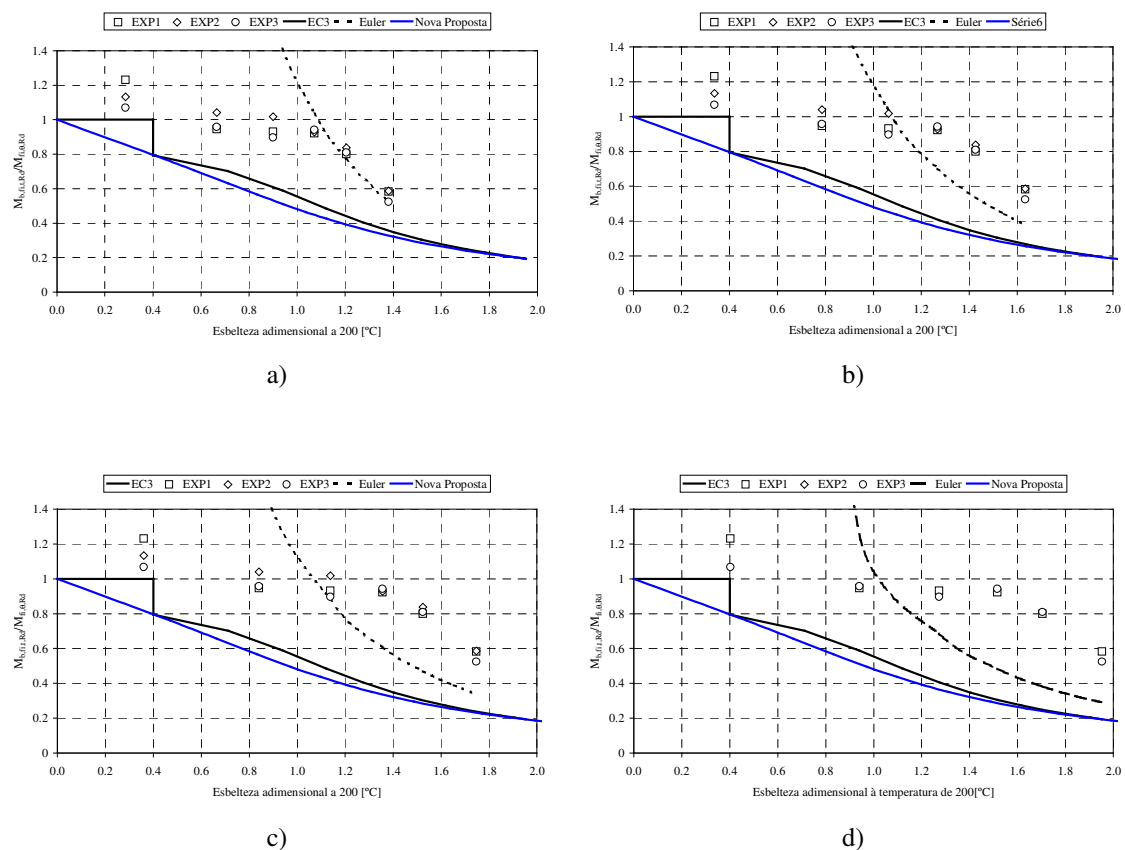


Fig. 8.60 – Curvas de cálculo à encurvadura lateral, à temperatura de 200 [°C]
 a) $k=0.5$; b) $k=0.7$; c) $k=0.8$ e d) $k=1.0$.

O comportamento das vigas a temperaturas de 300 [°C] continua a evidenciar um melhor ajustamento dos resultados experimentais, para um valor do factor de comprimento igual a 0.5.

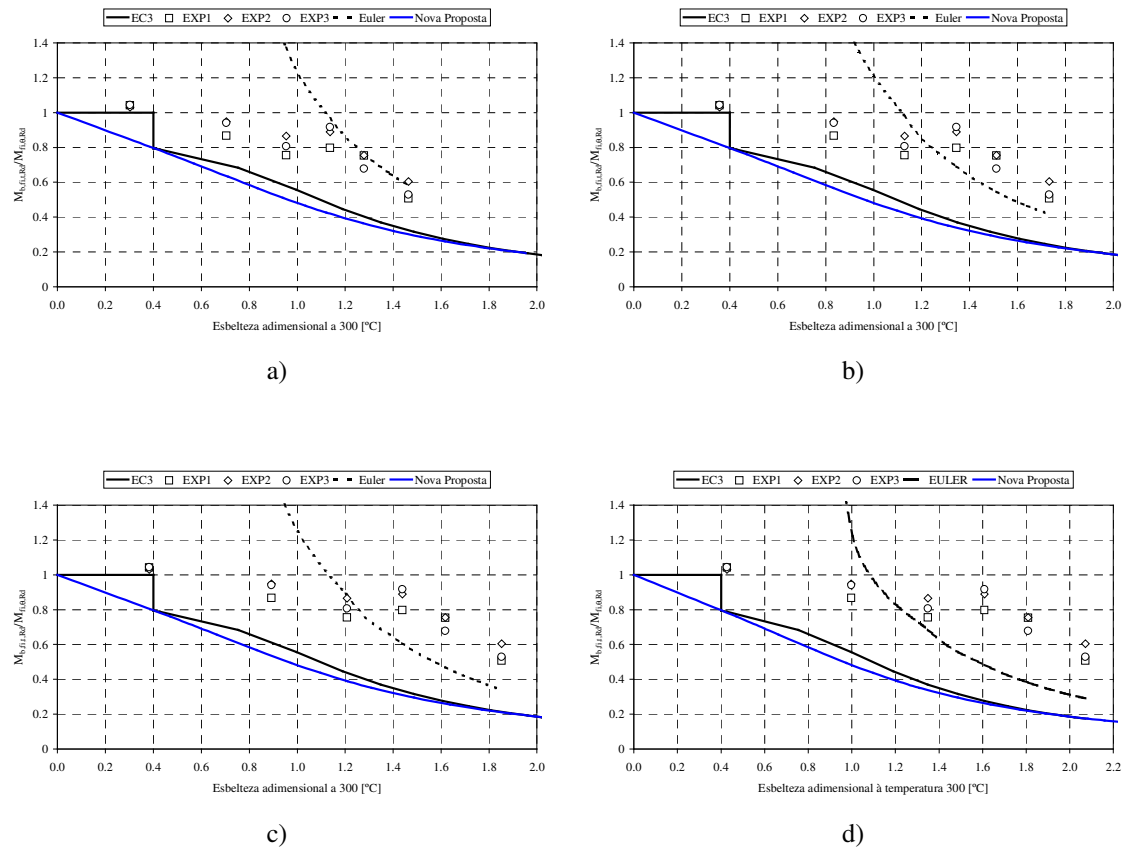


Fig. 8.61 – Curvas de cálculo à encurvadura lateral, à temperatura de 300 [°C]

a) $k=0.5$; b) $k=0.7$; c) $k=0.8$ e d) $k=1.0$.

A figura 8.62 apresenta os resultados experimentais correspondentes a uma temperatura de 400 [°C]. Mais uma vez se verifica que o valor de k a que correspondem resultados credíveis é de 0.5.

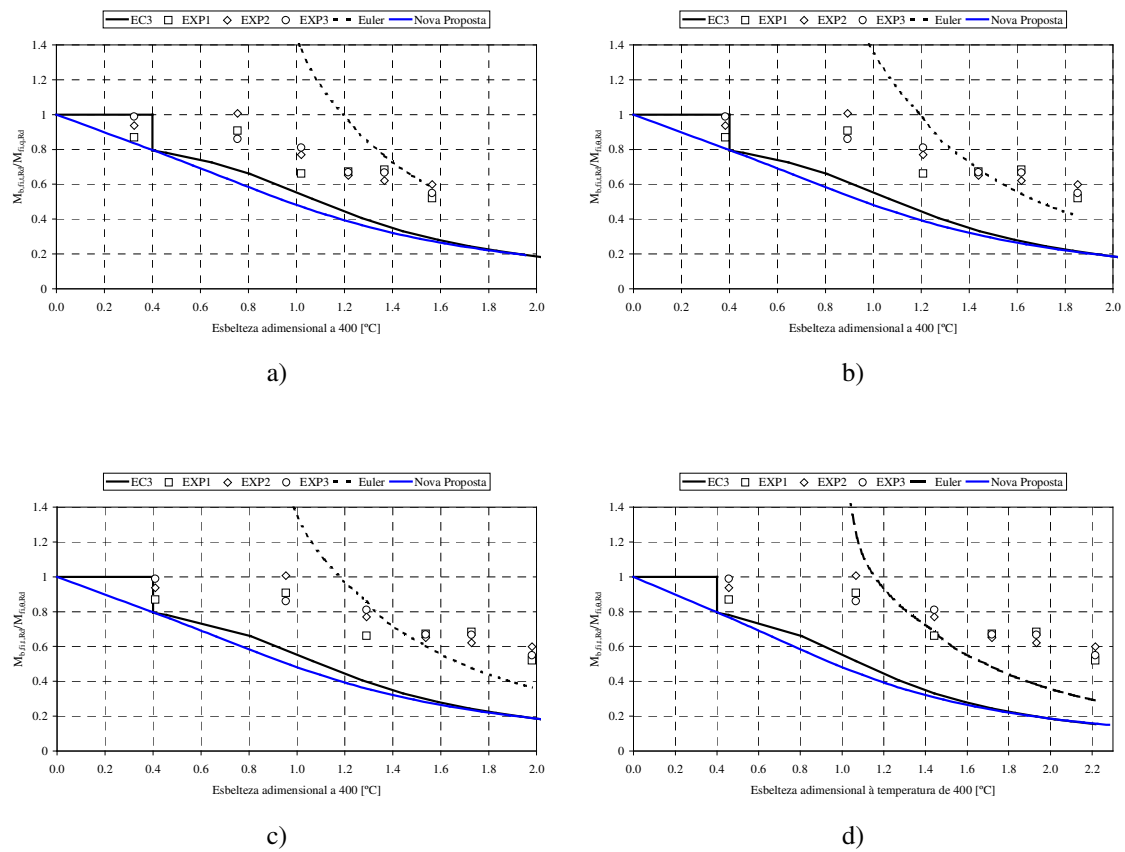


Fig. 8.62 – Curvas de cálculo à encurvadura lateral, à temperatura de 400 [°C]

a) $k=0.5$; b) $k=0.7$; c) $k=0.8$ e d) $k=1.0$.

Na figura 8.63 apresentam-se os resultados correspondentes a uma temperatura de 500 [°C]. Para esta temperatura verificam-se alguns resultados abaixo das curvas de cálculo à encurvadura lateral do Eurcódigo 3 e da nova proposta, sendo de salientar que esta última se ajusta melhor aos resultados experimentais.

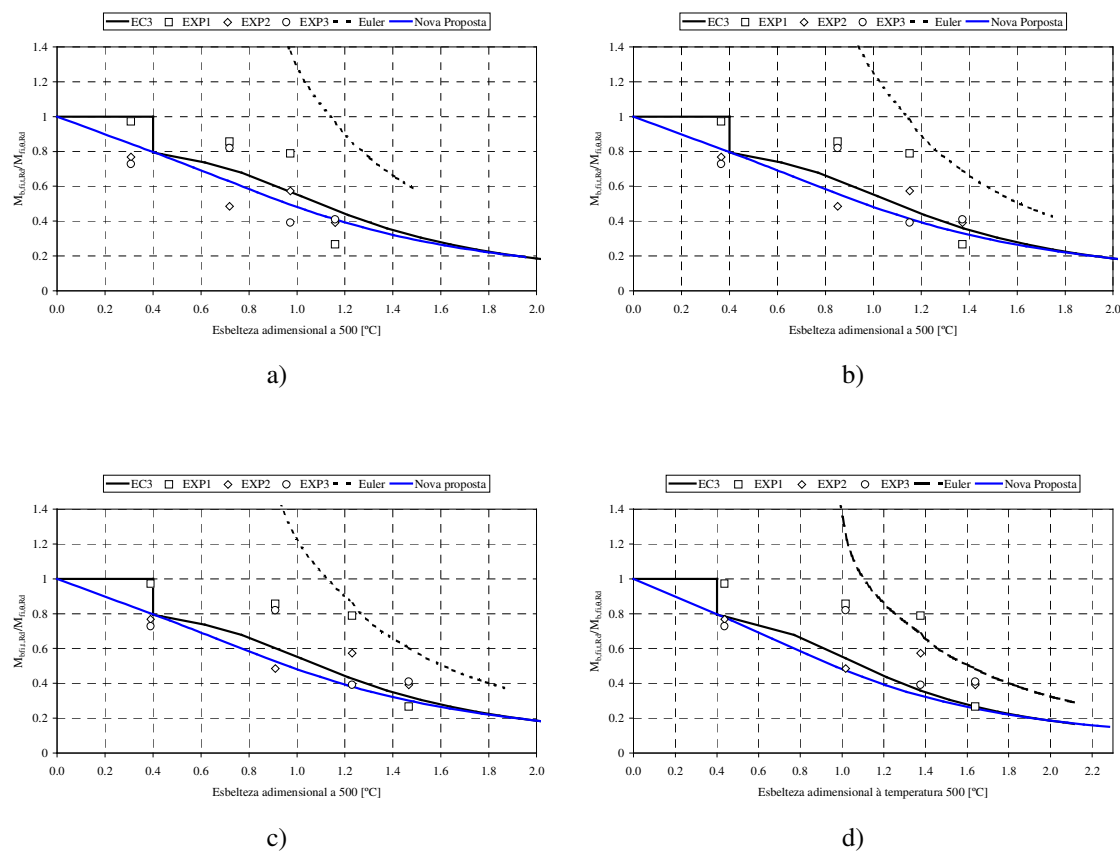


Fig. 8.63 – Curvas de cálculo à encurvadura lateral, à temperatura de 500 [°C]
 a) $k=0.5$; b) $k=0.7$; c) $k=0.8$ e d) $k=1.0$.

Os resultados correspondentes à temperatura de 600 [°C] são apresentados na figura 8.64. De novo se verifica um melhor ajustamento da curva de cálculo da nova proposta relativamente à curva do Eurocódigo 3.

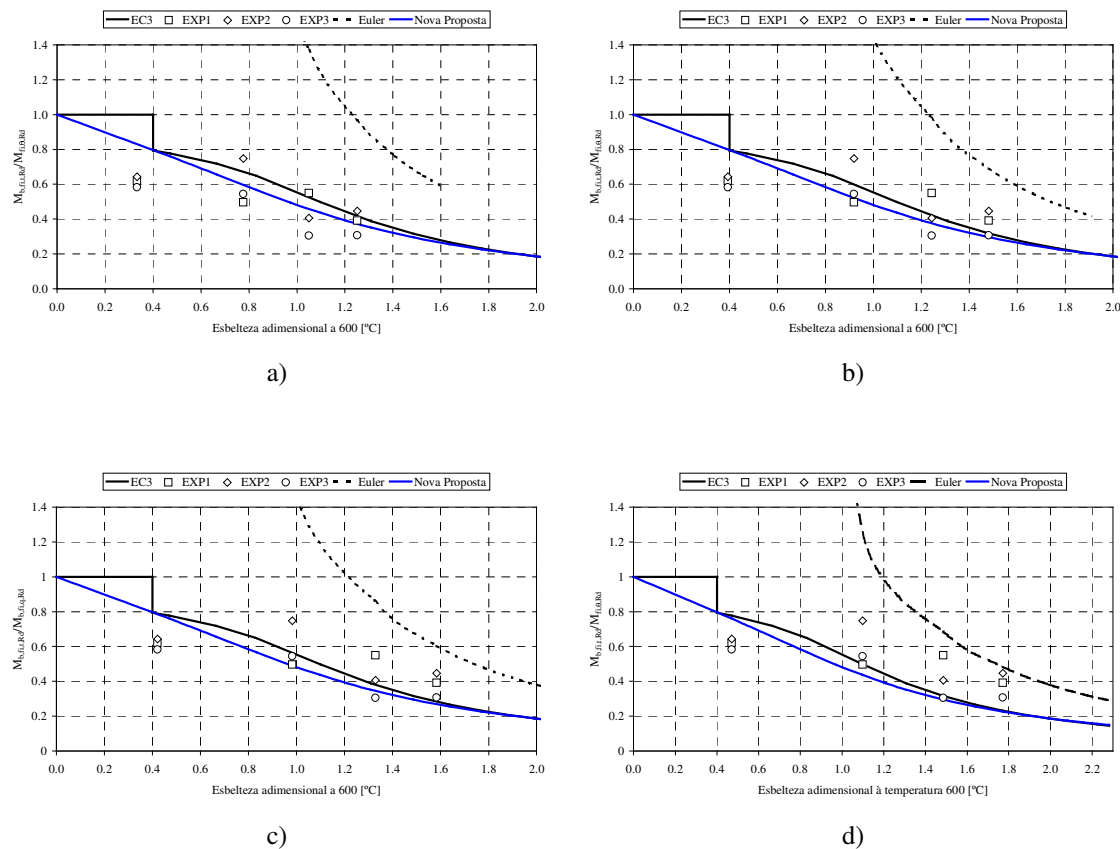


Fig. 8.64 – Curvas de cálculo à encurvadura lateral, à temperatura de 600 [°C]

a) $k=0.5$; b) $k=0.7$; c) $k=0.8$ e d) $k=1.0$.

Por último, na figura 8.65 comparam-se os resultados experimentais com a nova proposta e com a proposta do Eurocódigo 3. De novo fica claro que o comprimento de encurvadura ao qual correspondem os melhores resultados, vale $k=0.5$. De facto, é para este valor de comprimento de encurvadura que a recta de regressão melhor se ajusta à recta de 45° correspondente há identidade de resultados. Pode verificar-se também que os resultados do Eurocódigo 3, comparativamente aos resultados da nova proposta, apresentam um maior número de pontos acima da recta de 45°. Isto significa que a nova proposta apresenta resultados mais seguros do que a actual proposta do Eurocódigo 3.

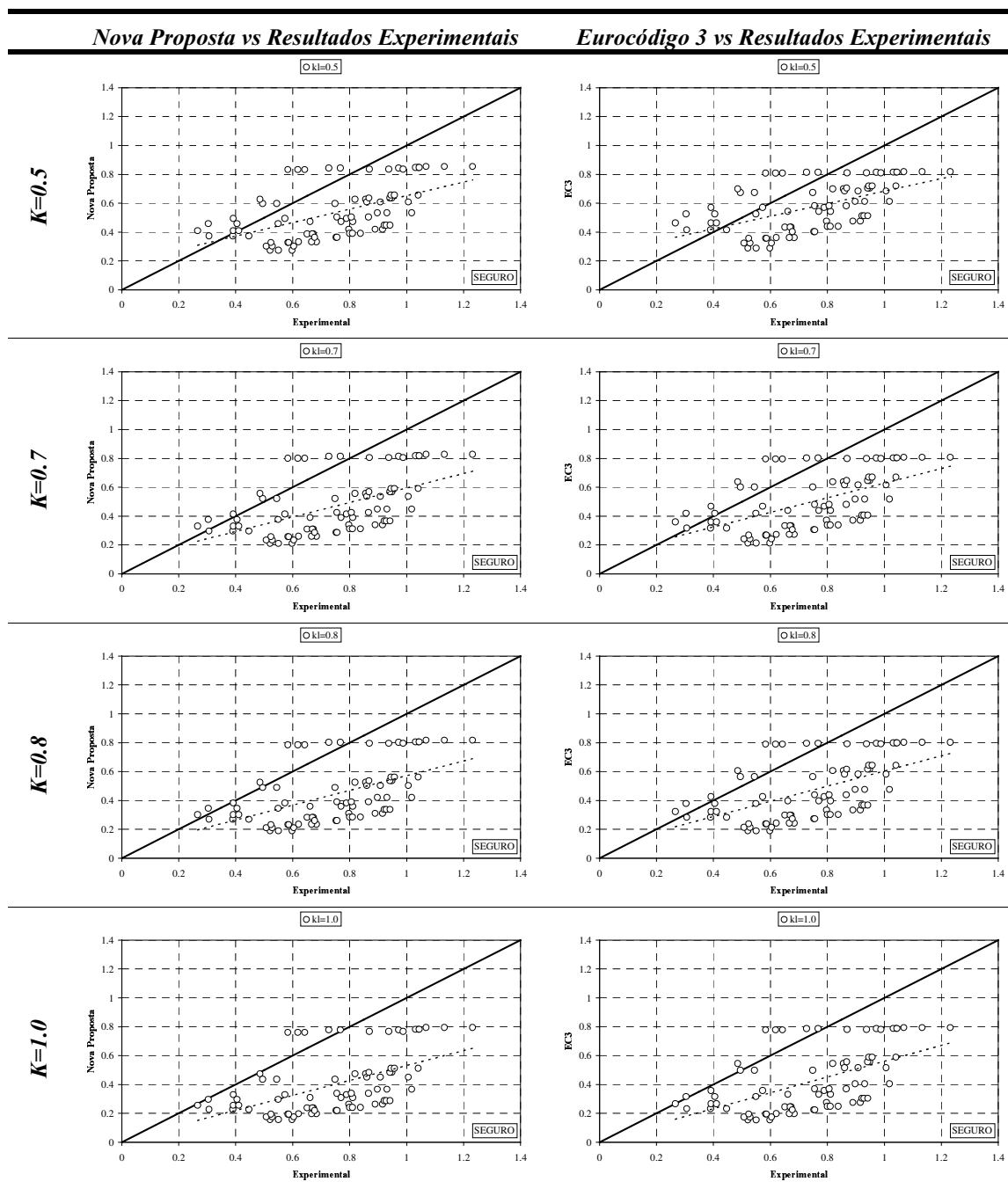


Fig. 8.65 – Ajustamento dos resultados experimentais à nova proposta e à proposta do Eurocódigo3.

8.9. – Conclusões

Apresentaram-se as metodologias adoptadas nos ensaios experimentais destinadas a validar uma nova proposta de cálculo simples do momento resistente à encurvadura lateral.

Os ensaios experimentais foram pensados no sentido de estudar uma viga simplesmente apoiada em apoios do tipo forquilha, sujeita a uma solicitação de flexão

pura. Após análise dos resultados, verificou-se que estes apresentavam valores superiores à curva de Euler, a qual como se sabe corresponde à encurvadura de um elemento ideal sem imperfeições geométricas, nem tensões residuais, sendo de esperar por isso que os resultados experimentais se situassem abaixo daquela curva. Suspeitou-se então que, dada a restrição aos deslocamentos laterais impostos pelos actuadores hidráulicos, o comprimento de encurvadura deveria ser inferior ao comprimento teórico das vigas, ou seja, a distância entre apoios.

Feito um estudo comparativo para vários comprimentos de encurvadura, verificou-se que aquele a que correspondiam resultados abaixo da curva de Euler, tinha um valor igual a metade do comprimento teórico, $l = 0.5L$, o que, deve dizer-se, está de acordo com o valor sugerido no anexo F do Eurocódigo 3, para as condições de apoio dos ensaios.

Após a escolha do comprimento de encurvadura adequado às condições dos ensaios, pode-se também concluir que a curva de cálculo à encurvadura lateral, a temperaturas elevadas que melhor se ajusta aos resultados experimentais, é a correspondente à nova proposta que se pretendia validar. Concluiu-se pois, que esta nova proposta apresenta resultados mais seguros que a proposta actual do Eurocódigo 3. Deve salientar-se ainda que esta nova proposta de cálculo simples à encurvadura lateral, resultou, como se verificou no capítulo 7, de uma proposta relativa à encurvadura de pilares [8.16], a qual foi adoptada pelos documentos de aplicação nacionais do Eurocódigo 3 Belga e Francês, com um factor de severidade $\beta = 0.65$. Foi este factor que se utilizou neste trabalho, pelo que se realça a coincidência de procedimentos relativamente à proposta actual do Eurocódigo 3, ou seja, a utilização das mesmas fórmulas para a encurvadura de pilares e a encurvadura lateral de vigas a elevadas temperaturas.

8.10. - Referências

- [8.1]- Vila Real, Paulo M. M.; Franssen Jean - Marc – “Lateral buckling of steel I beams at room temperature - Comparison between the EUROCODE 3 and the SAFIR code considering or not the residual stresses”, internal report No. 99/01 , Institute of Civil Engineering – Service Ponts et Charpents – of the University of Liege; 1999.
- [8.2]- Vila Real, Paulo M. M.; Franssen, Jean - Marc – “Lateral buckling of steel I beams under fire conditions – Comparison between Eurocode 3 and Safir code”; internal report No. 99/02 , Institute of Civil Engineering – Service Ponts et Charpents – of the University of Liege; 1999.
- [8.3]- Fédération Européen de la Manutention – section X; “Recommandation pour la conception des rayonnages statiques en acier a palettes et a tablettes; Mars de 1998.
- [8.4]- NP EN 10 002-1; CT12, Materiais metálicos; “Ensaio de tracção. Parte 1: Método de ensaio”; Instituto Português da Qualidade; 1990.
- [8.5]- ESDEP Society; “European Steel Design Education Programme”; UK; CD-Rom version; 1999.
- [8.6]- Young, B.W.; “Residual stresses in hot rolled sections”; proceedings of international colloquium on column strength”; IABSE; Vol 23; pp 25-38; 1975.

- [8.7]- Lee, G.C.; Fine, E.S.; Hastreiter, W.R.; “Inelastic torsional buckling of H – columns”; Journal of the Structural Division; ASCE 93 (ST5), 295-307; 1973.
- [8.8]- Trahair, N.S.; “Flexural torsional buckling of structures”; E&FN SPON; London, 1993.
- [8.9]- Bradford, M.A; Trahair, N.S.; “Inelastic buckling of beam columns with unequal moments”; Journal of construction Steel Research; 5(3), 195-212; 1985.
- [8.10]- Franssen, Jean-Marc; “Contribution à la modelisation des incendes dans les batiments et leur effets sur les structures”; thèse présentée en vue de l’obtention du grade d’agrégé de l’enseignement Supérieurs; Université de Liège; Année academique 1997/98.
- [8.11]- Talamona, Didier; “Flambement de poteaux metalliques sous charge excentrée, a haute temperatures”; thèse présentée pour obtenir le grade de docteur d’Université Blaise Pascal – École Doctorale de Sciences pour L’ingenieur de Clermont ferrand; 1995.
- [8.12]- Piloto, P.A.G; Vila Real, P.M.M.; Franssen, Jean - Marc; “ A simple model for lateral torsional buckling resistance of steel I beams under fire conditions – Comparison with experimental results”; proc. “3rd International conference in Mechanical and Materials in Design”; Orlando – Florida USA; 29 a 31 de Maio de 2000.
- [8.13]- Piloto, P.A.G.; Vila Real, P.M.M.; “Lateral Torsional buckling of steel I beams in case of fire: Experimental evaluation”; proceedings of the 1st international Workshop; Compenhagen Denmark; 19 a 20 de Junho de 2000.
- [8.14]- Bailey, C.G., Burges, I.W., Plank, R.J.; “The lateral-torsional buckling of unrestrained Steel Beams in Fire”; Journal Construct. Steel Res.; Vol 36; N°2; 101-119; 1996
- [8.15]- Franssen, Jean - Marc; Talamona, D.; Kruppa, J.; Cajot, L.G.; “Stability of steel columns in case of fire: Experimental Modeling”; Journal of structural Engineering; Vol 123; N°6; ASCE; 1997.
- [8.16]- Bode, B.; “The influence of Torsional restraint stiffness at supports on the buckling strength of beams”; The structural Engineer, Volume 60B, N°4; December 1982.
- [8.17]- Janss, J.; “Statistical Analysis of fire tests on steel beams and columns to Eurocode3, Part1.2”; J. Construct. Steel Research; 33, 39-50; 1995.

Anexo 8.1

Resultados experimentais – tensões residuais

8.1.1. - Introdução

Neste anexo estão representados os valores das tensões residuais medidos pelo método do furo apresentado no capítulo 8. Os gráficos dizem respeito aos valores obtidos por medição em quatro pontos, dois nos banzos (figuras 8.1.2 e 8.1.3) e os restantes na alma (figuras 8.1.4 e 8.1.5).

Todos os resultados foram obtidos utilizando o método do furo recorrendo a um sistema próprio de perfuração e de aquisição de dados da HBM, conforme se poderá verificar na figura 8.1.1.

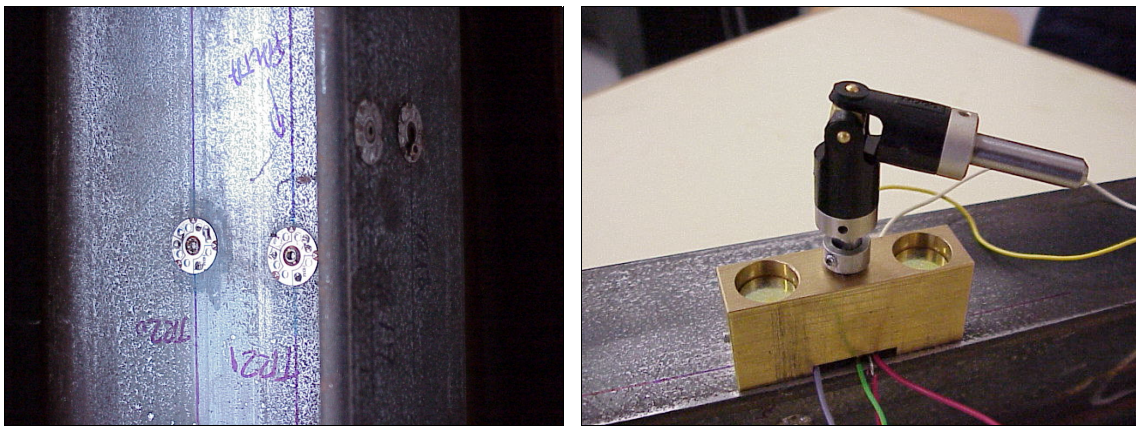


Fig. 8.1.1 – Sistema utilizado para medição das tensões residuais.

Nos gráficos que se apresentam, aparecem os valores das tensões medidas instantaneamente (TR xx – vi) e o respectivo valor médio, obtido durante o período de recolha de dados (TR xx – vm), em que “xx” identifica a amostra em estudo.

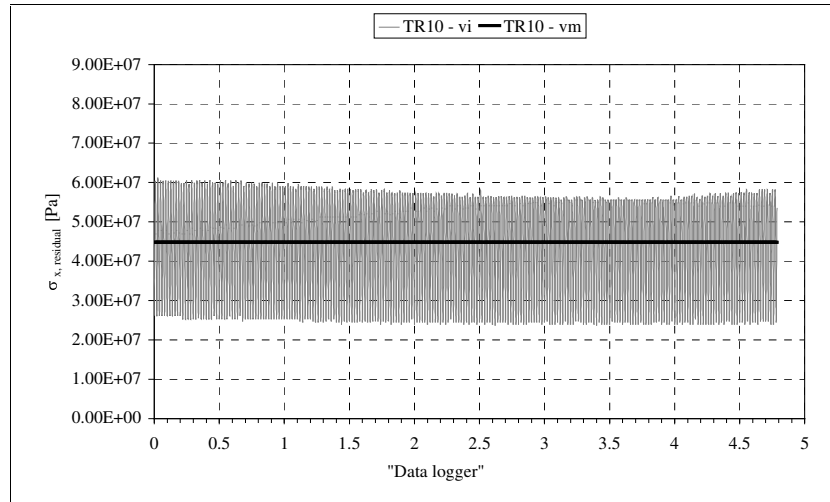


Fig. 8.1.2 a) – Valores experimentais da tensão residual na zona fl.
Tensão medida TR10.

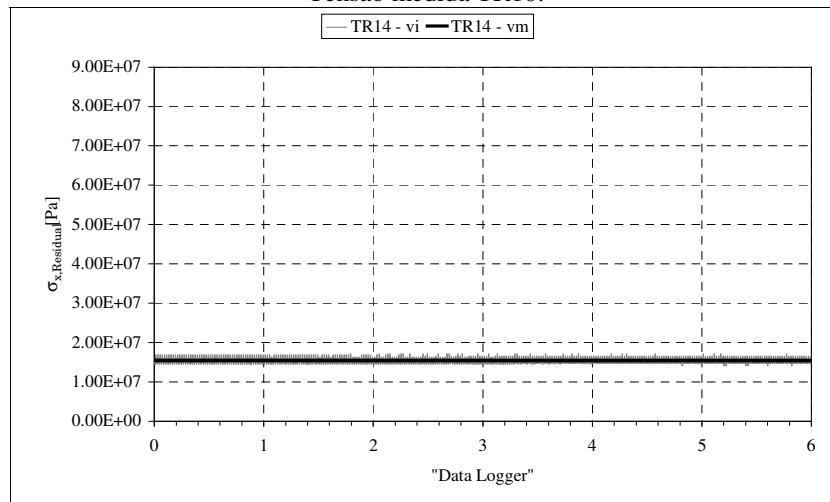


Fig. 8.1.2 b) – Valores experimentais da tensão residual na zona fl.
Tensão medida TR14.

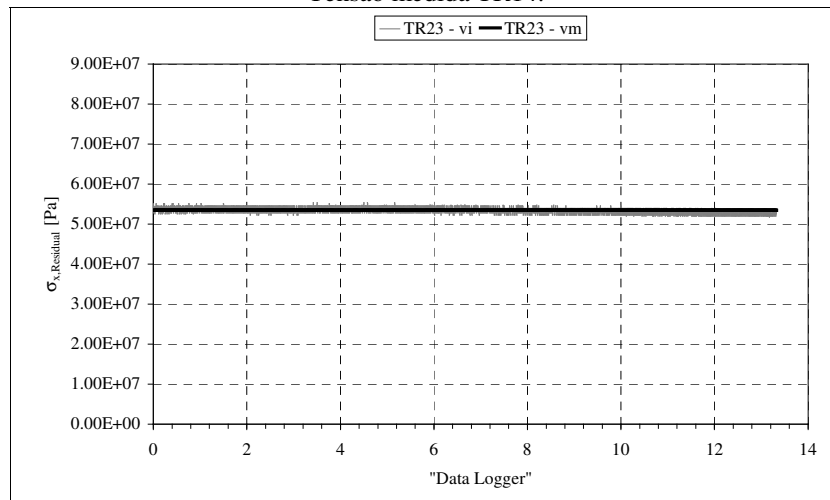


Fig. 8.1.2 c) – Valores experimentais da tensão residual na zona fl.
Tensão medida TR23.

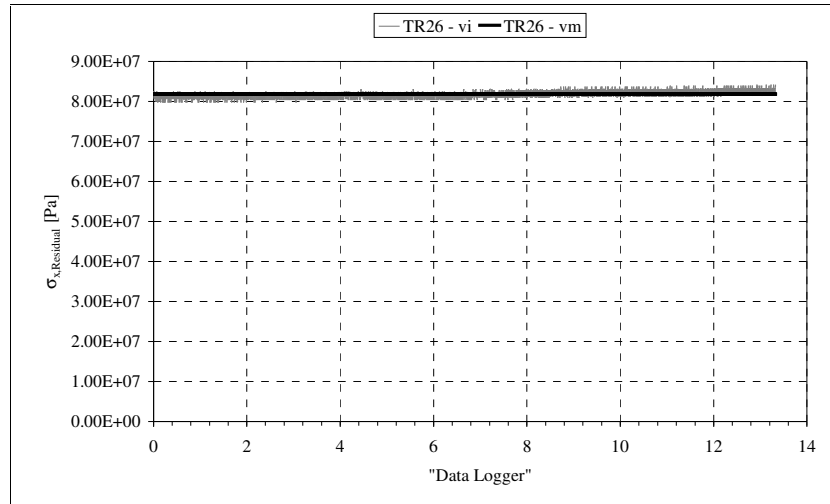


Fig. 8.1.2 d) – Valores experimentais da tensão residual na zona fl.
Tensão medida TR26.

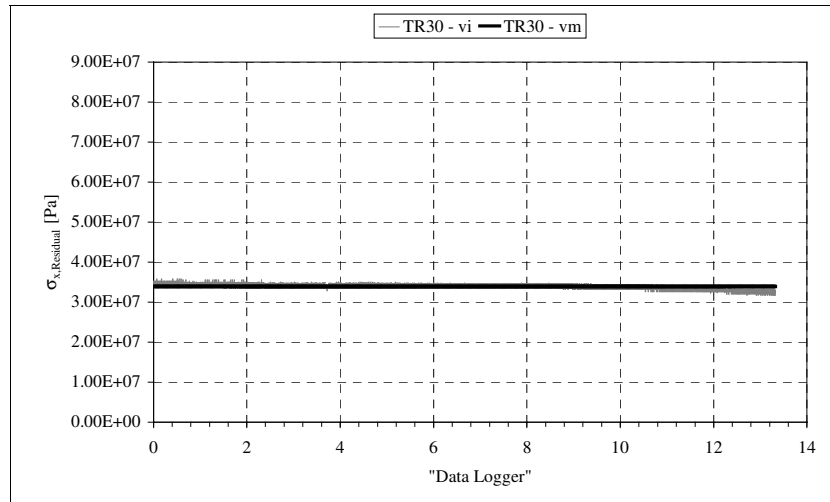


Fig. 8.1.2 e) – Valores experimentais da tensão residual na zona fl.
Tensão medida TR30.

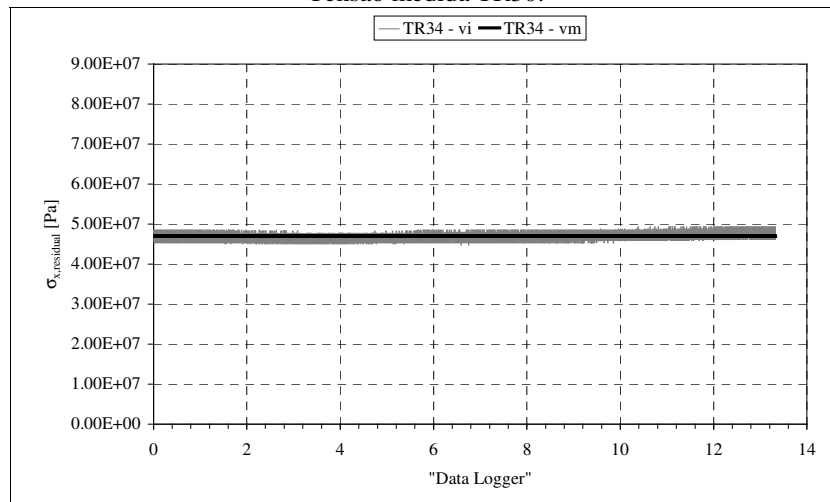


Fig. 8.1.2 f) – Valores experimentais da tensão residual na zona fl.
Tensão medida TR34.

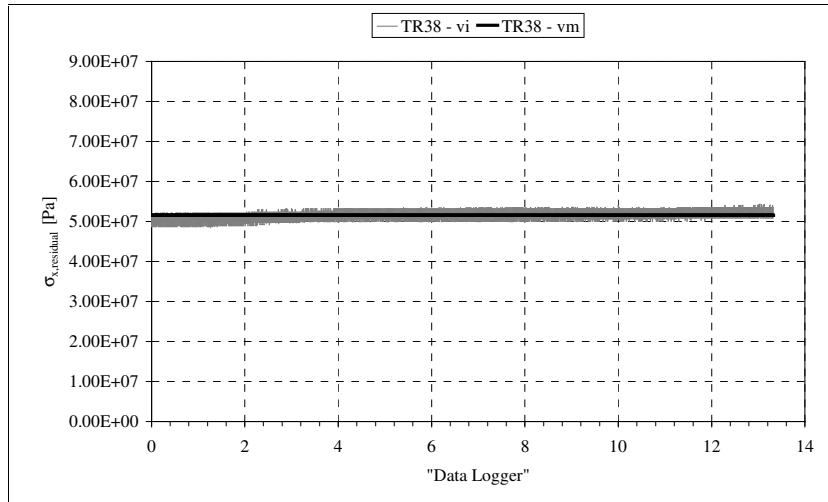


Fig. 8.1.2 g) – Valores experimentais da tensão residual na zona f1.
Tensão medida TR38.

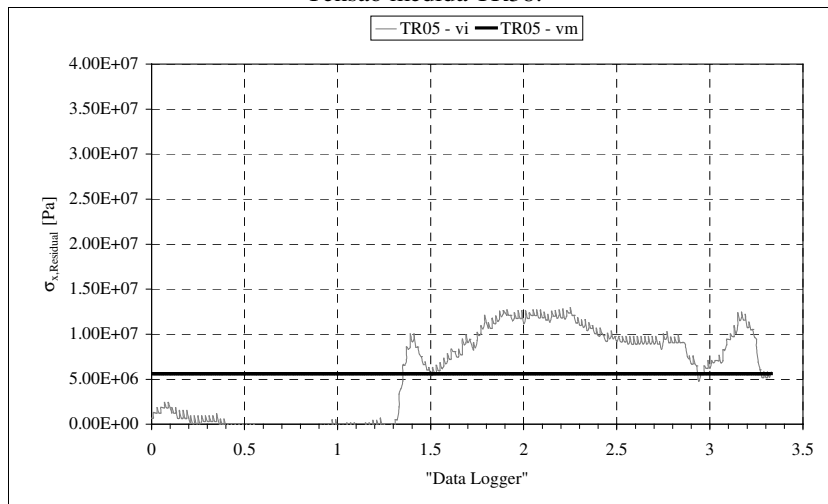


Fig. 8.1.3 a) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR05.

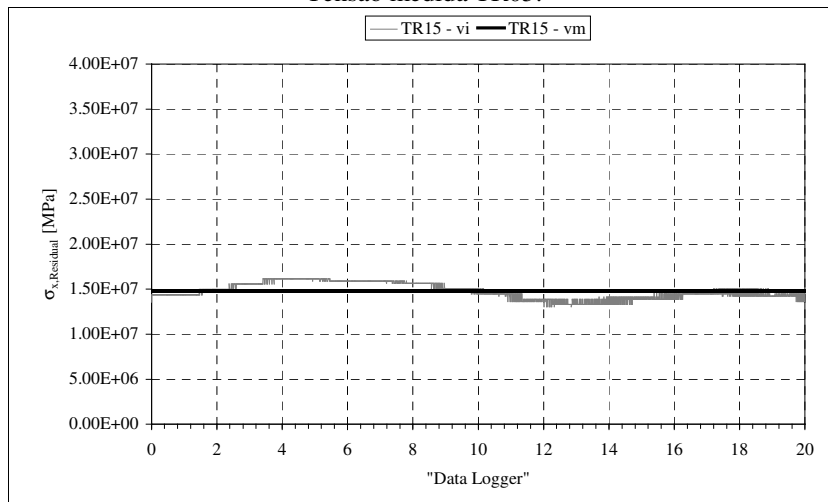


Fig. 8.1.3 b) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR15.

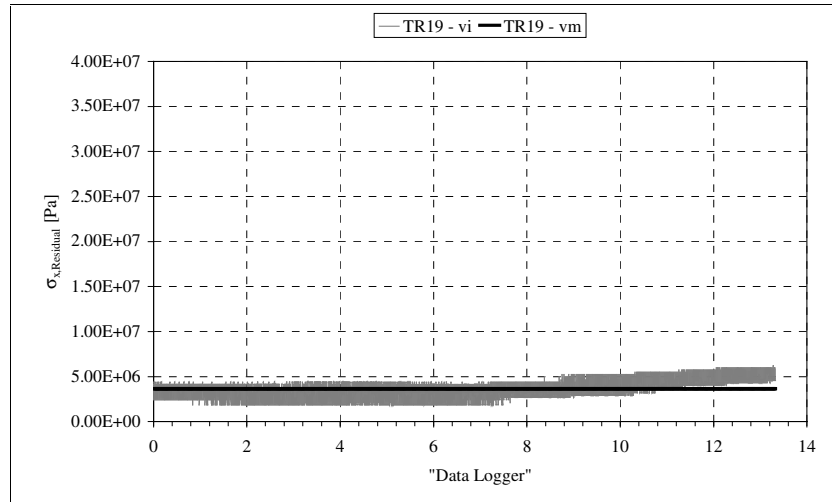


Fig. 8.1.3 c) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR19.

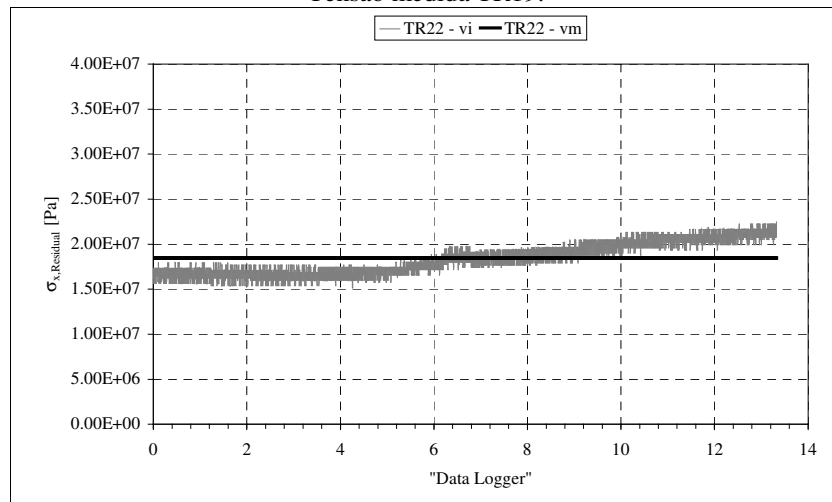


Fig. 8.1.3 d) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR22.

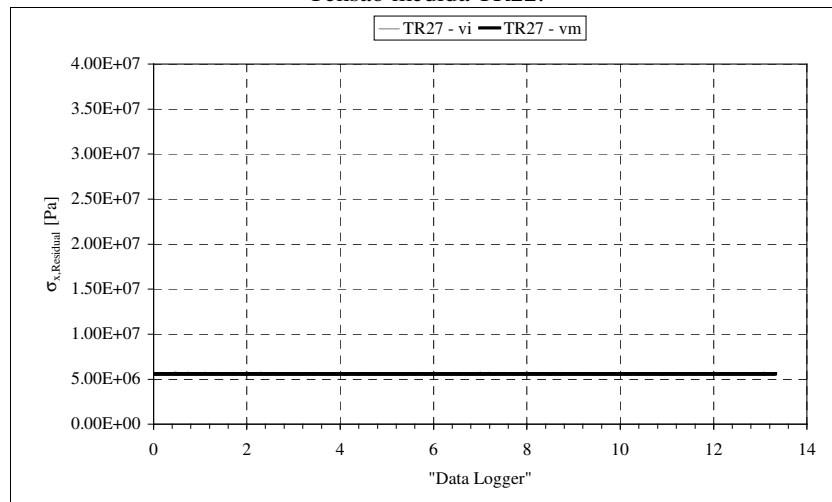


Fig. 8.1.3 e) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR27.

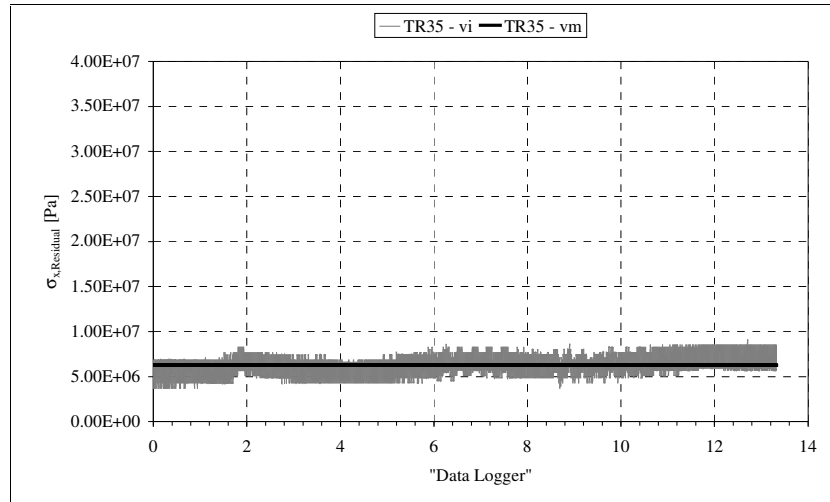


Fig. 8.1.3 f) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR35.

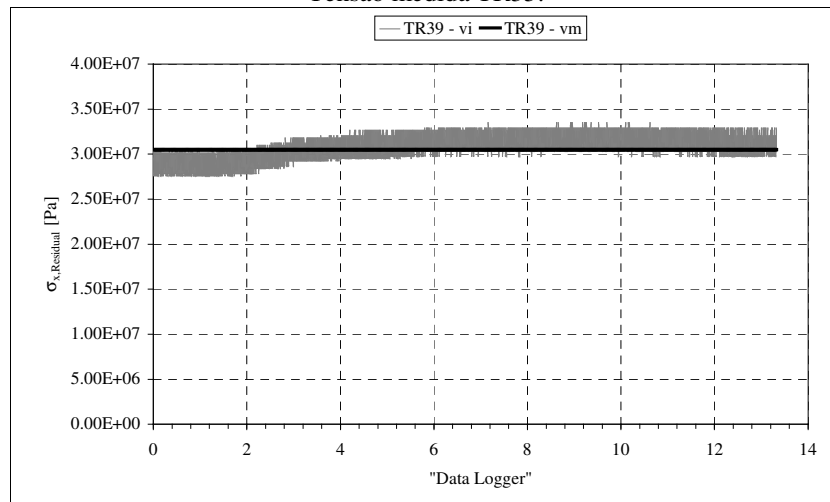


Fig. 8.1.3 g) – Valores experimentais da tensão residual na zona f2.
Tensão medida TR39.

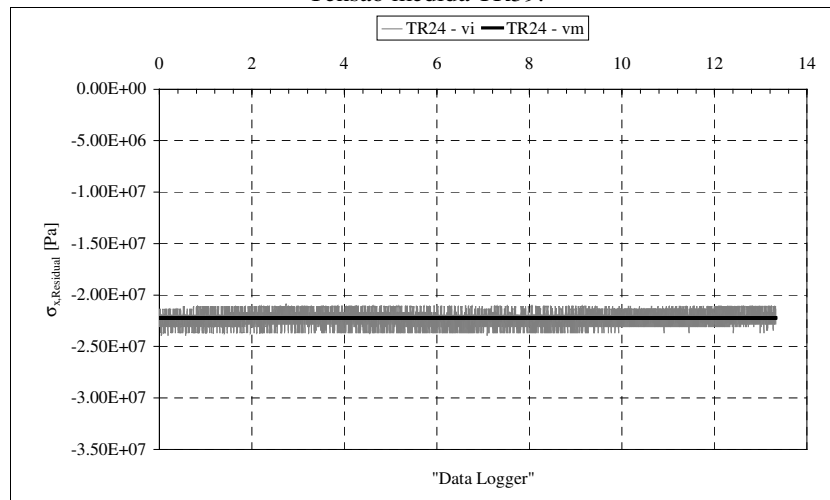


Fig. 8.1.4 a) – Valores experimentais da tensão residual na zona w1.
Tensão medida TR24.

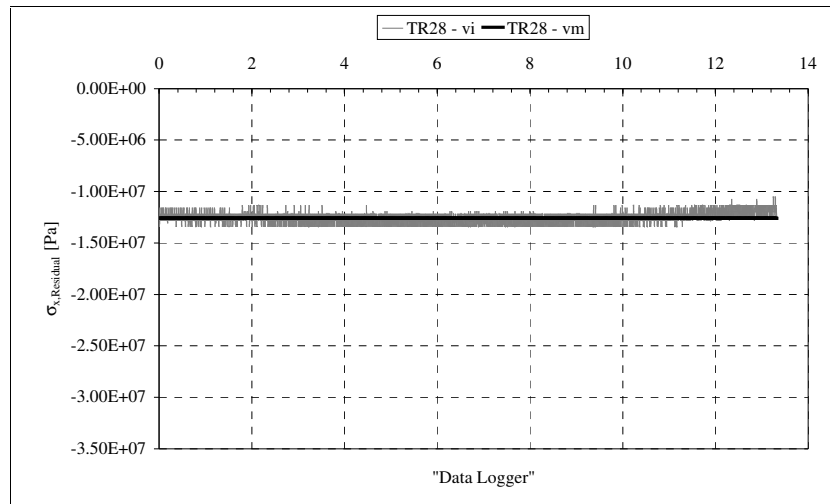


Fig. 8.1.4 b) – Valores experimentais da tensão residual na zona w1.
Tensão medida TR28.

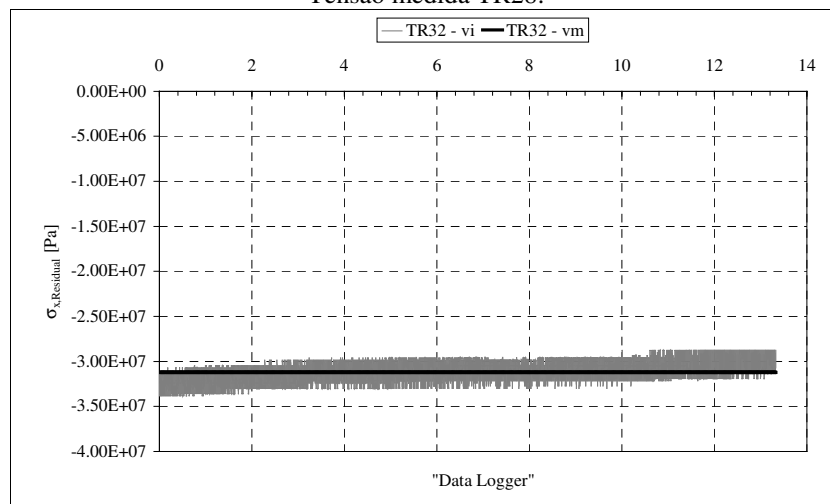


Fig. 8.1.4 c) – Valores experimentais da tensão residual na zona w1.
Tensão medida TR32.

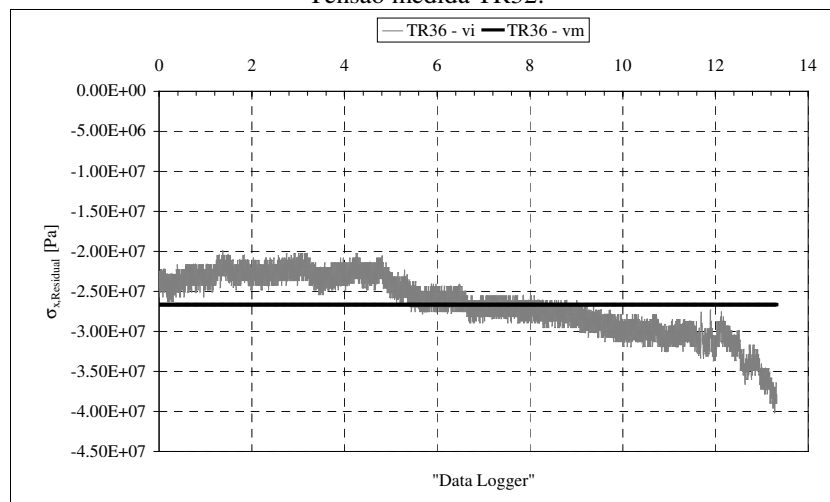


Fig. 8.1.4 d) – Valores experimentais da tensão residual na zona w1.
Tensão medida TR36.

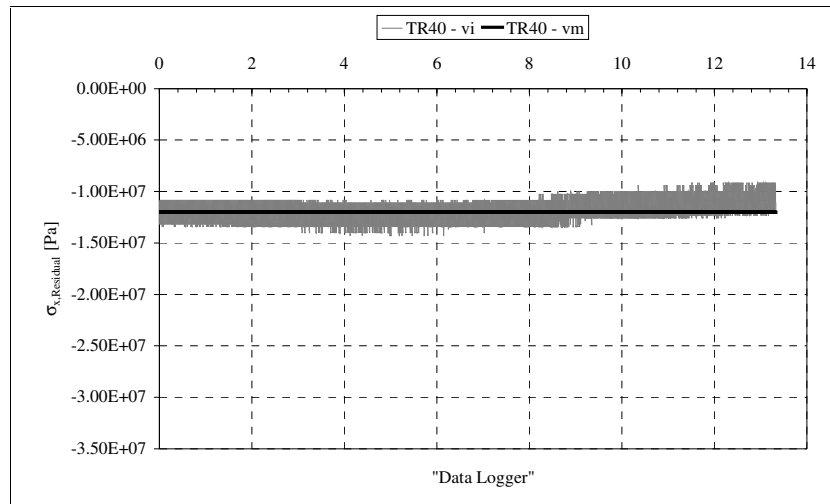


Fig. 8.1.4 e) – Valores experimentais da tensão residual na zona w1.
Tensão medida TR40.

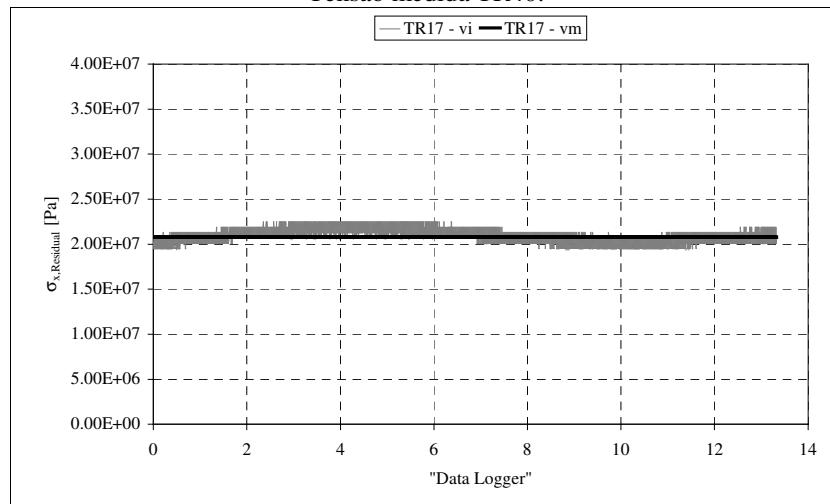


Fig. 8.1.5 a) – Valores experimentais da tensão residual na zona w2.
Tensão medida TR17.

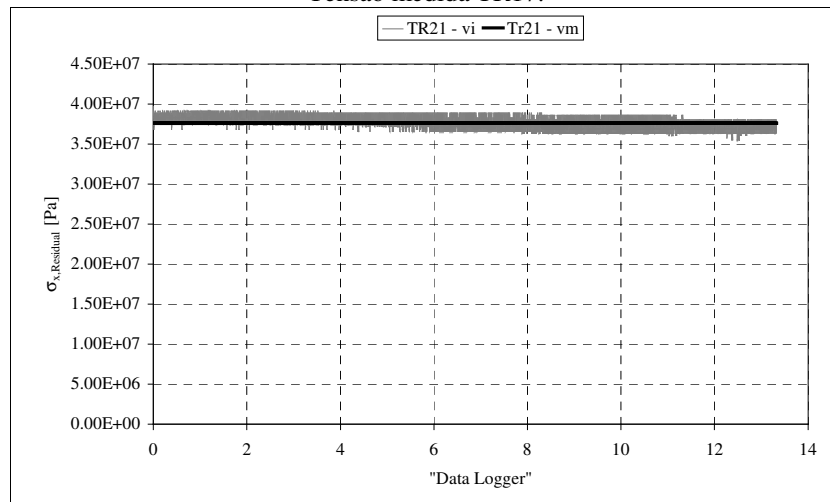


Fig. 8.1.5 b) – Valores experimentais da tensão residual na zona w2.
Tensão medida TR21.

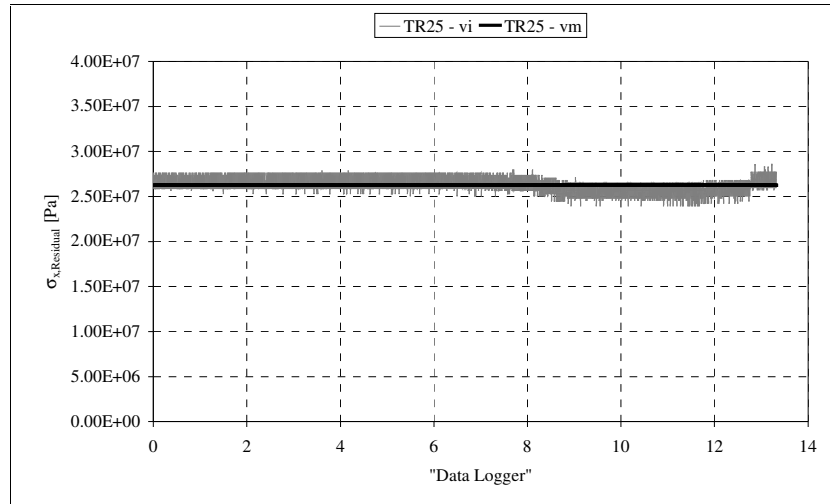


Fig. 8.1.5 c) – Valores experimentais da tensão residual na zona w2.
Tensão medida TR25.

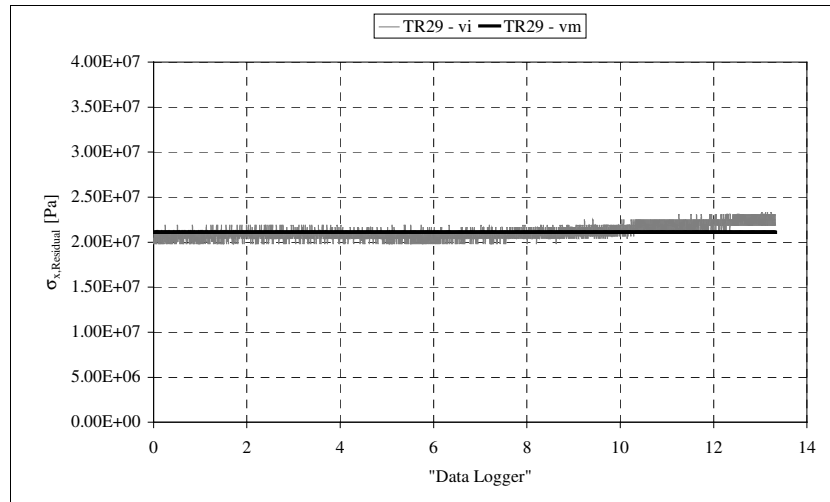


Fig. 8.1.5 d) – Valores experimentais da tensão residual na zona w2.
Tensão medida TR29.

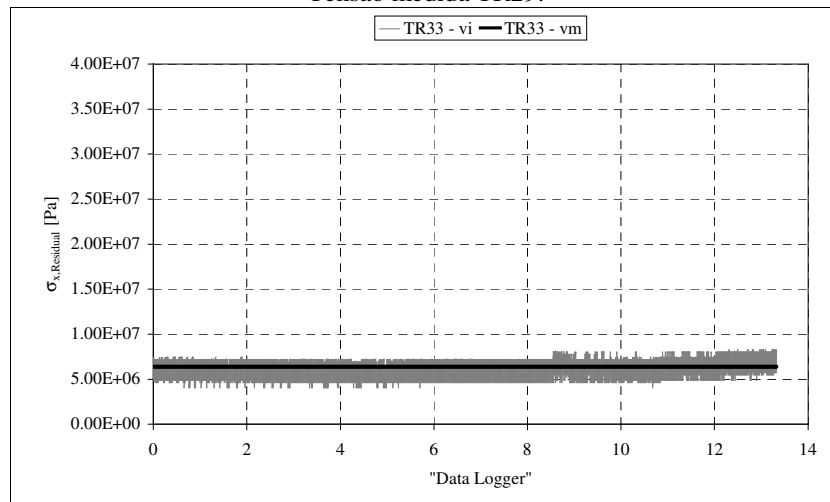


Fig. 8.1.5 e) – Valores experimentais da tensão residual na zona w2.
Tensão medida TR33.

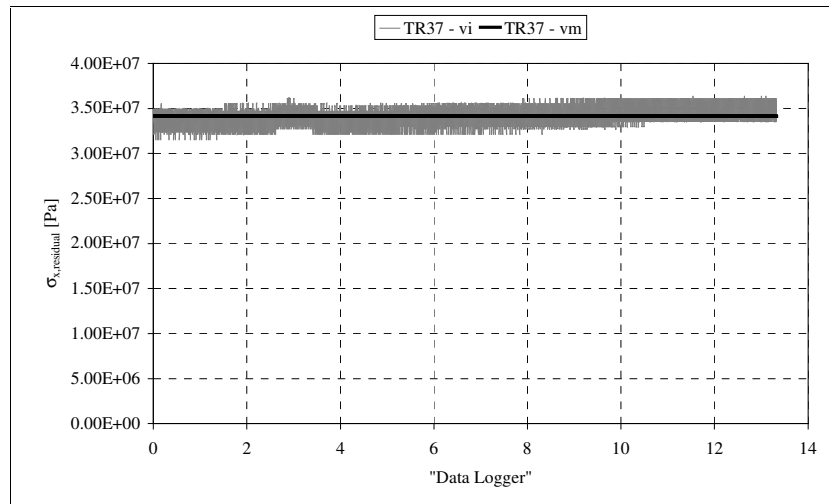


Fig. 8.1.5 f) – Valores experimentais da tensão residual na zona w2.
Tensão medida TR37.

Anexo 8.2

Resultados experimentais – deslocamentos a meio vão

8.2.1. - Introdução

Em anexo apresentam-se os resultados dos 120 ensaios realizados para verificar o comportamento de vigas à encurvadura lateral quer em condições normais de temperatura, quer em situação de temperaturas elevadas, facto que pode ocorrer em caso de incêndio.

Foram efectuados ensaios em vigas de comprimento 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5 e 6.5 [m] entre apoios. Para cada binómio comprimento - temperatura foram feitos três ensaios, do qual resultam os gráficos que se apresentam de seguida. Em cada gráfico apresenta-se a variação da força aplicada nas extremidades da viga em função de dois deslocamentos laterais do banzo superior e do banzo inferior e ainda de um deslocamento vertical, todos registados a meio vão, conforme se pode observar pela figura 8.2.1.

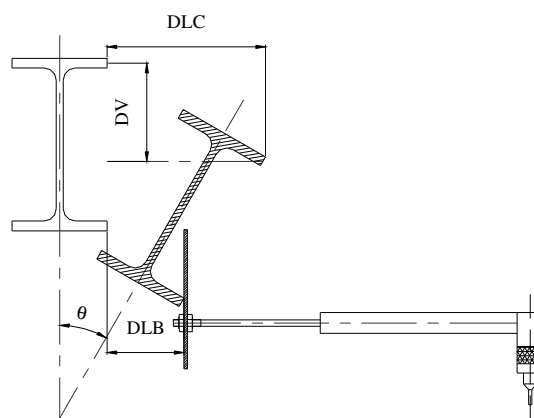


Fig. 8.2.1 – Deslocamentos registados durante os ensaios.

Os resultados para as vigas com os comprimentos referidos estão representados nas figuras 8.2.2 e seguintes. Na primeira coluna encontram-se representados os deslocamentos verticais em função da carga aplicada e nas duas restantes os deslocamentos laterais no banzo inferior e superior. O último ponto registado representa o valor do momento resistente à encurvadura e será adoptado para determinação da resistência das vigas à encurvadura lateral.

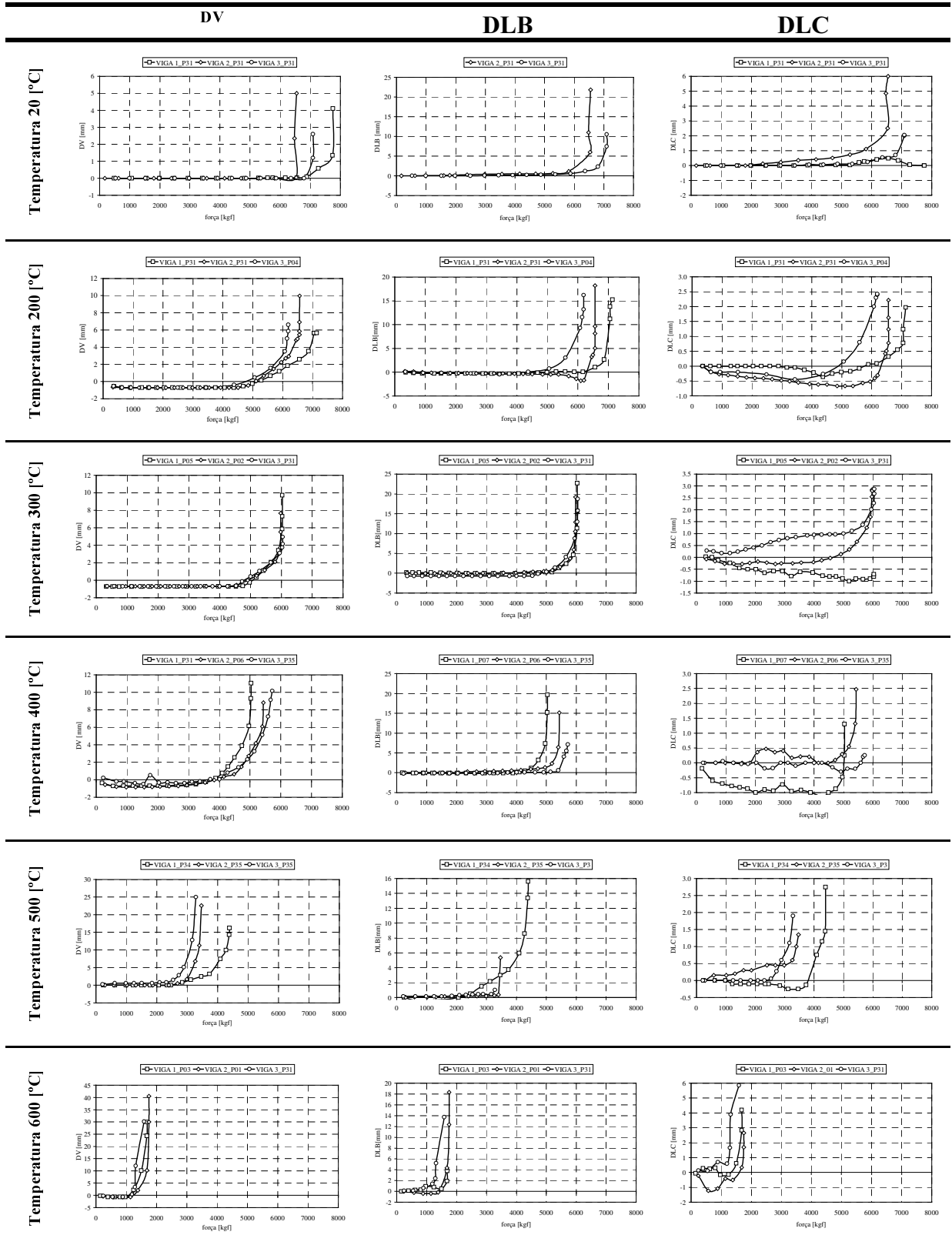


Fig. 8.2.2 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 0.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

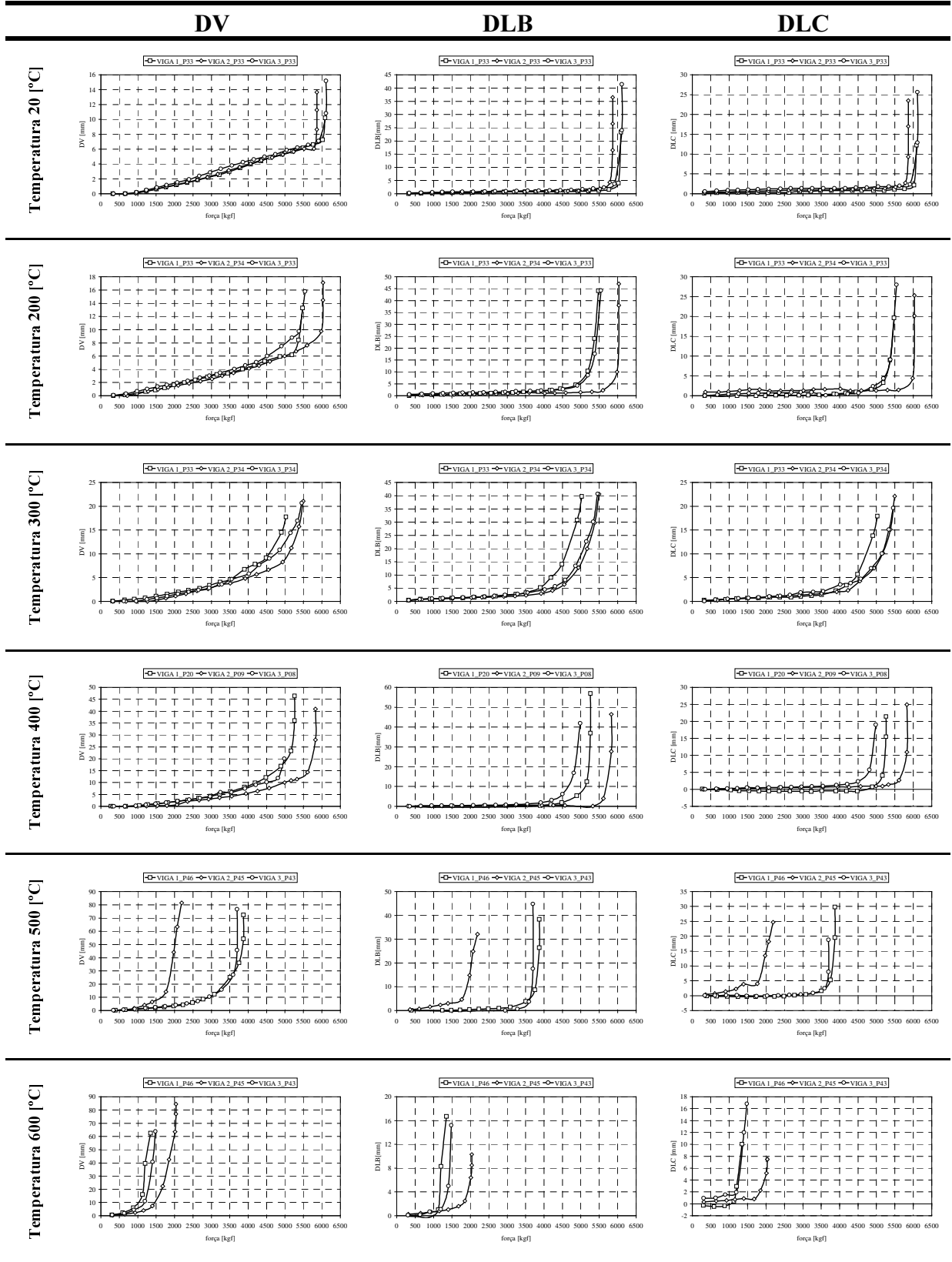


Fig. 8.2.3 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 1.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

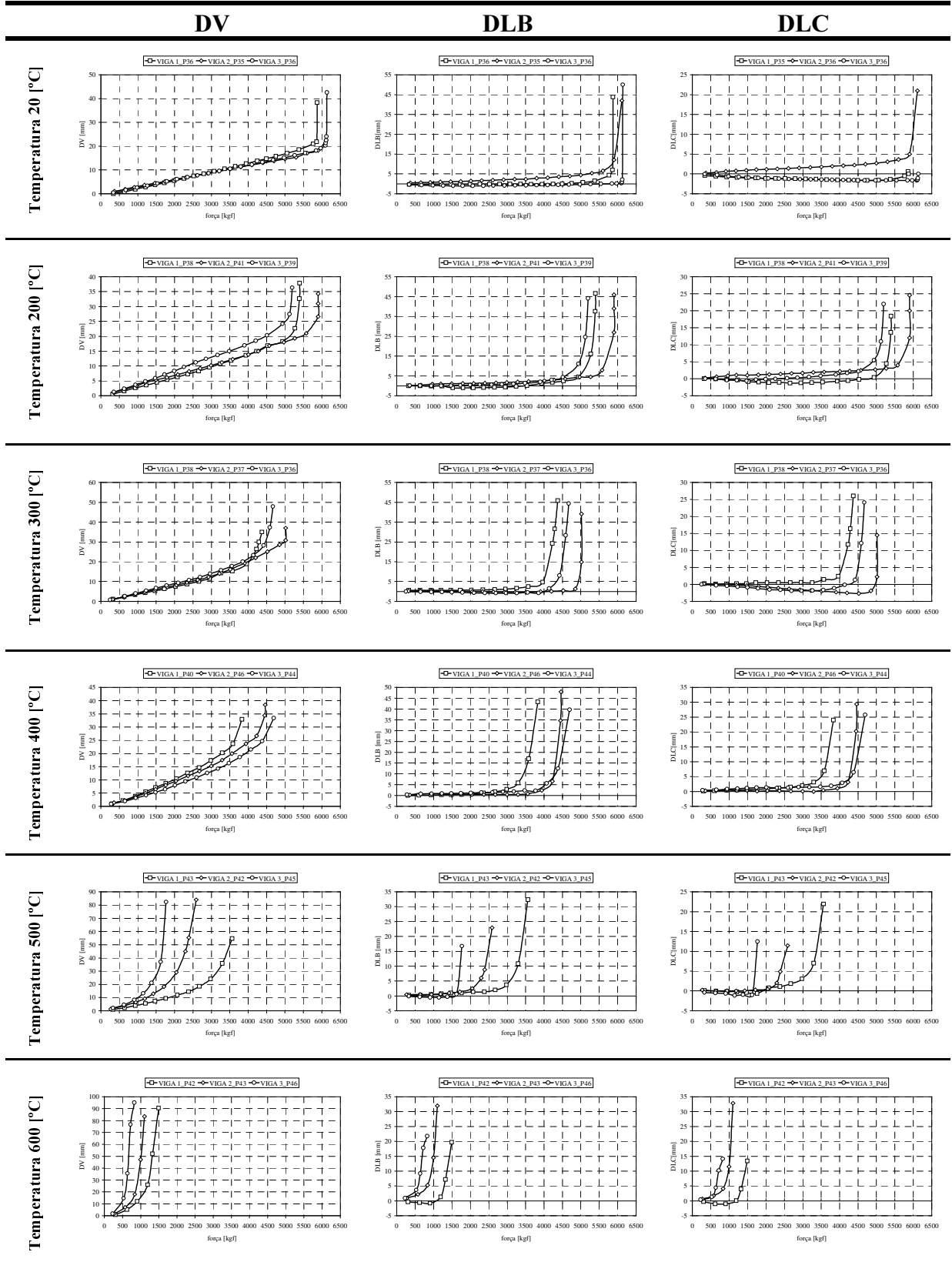


Fig. 8.2.4 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 2.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

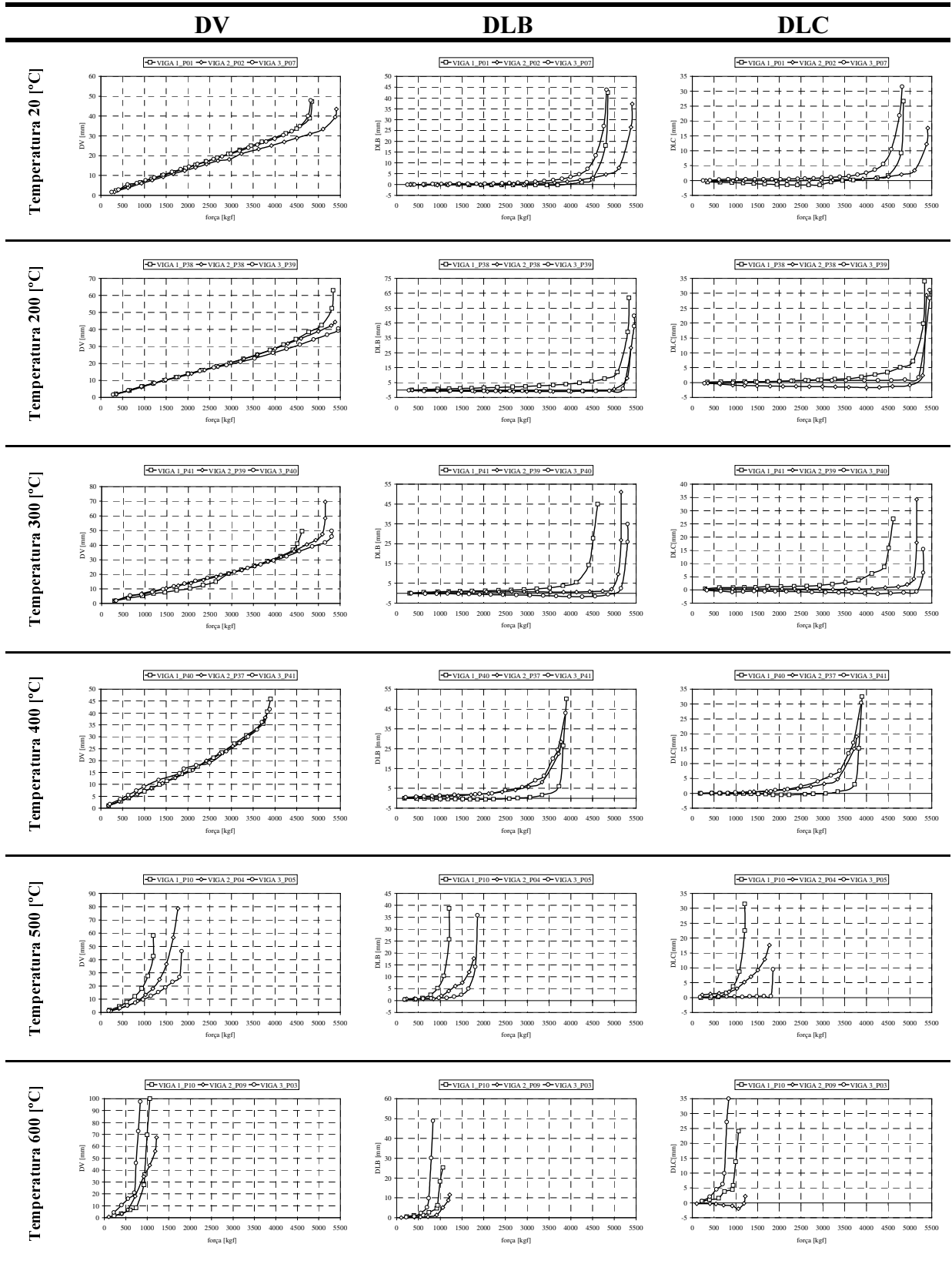


Fig. 8.2.5 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 3.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

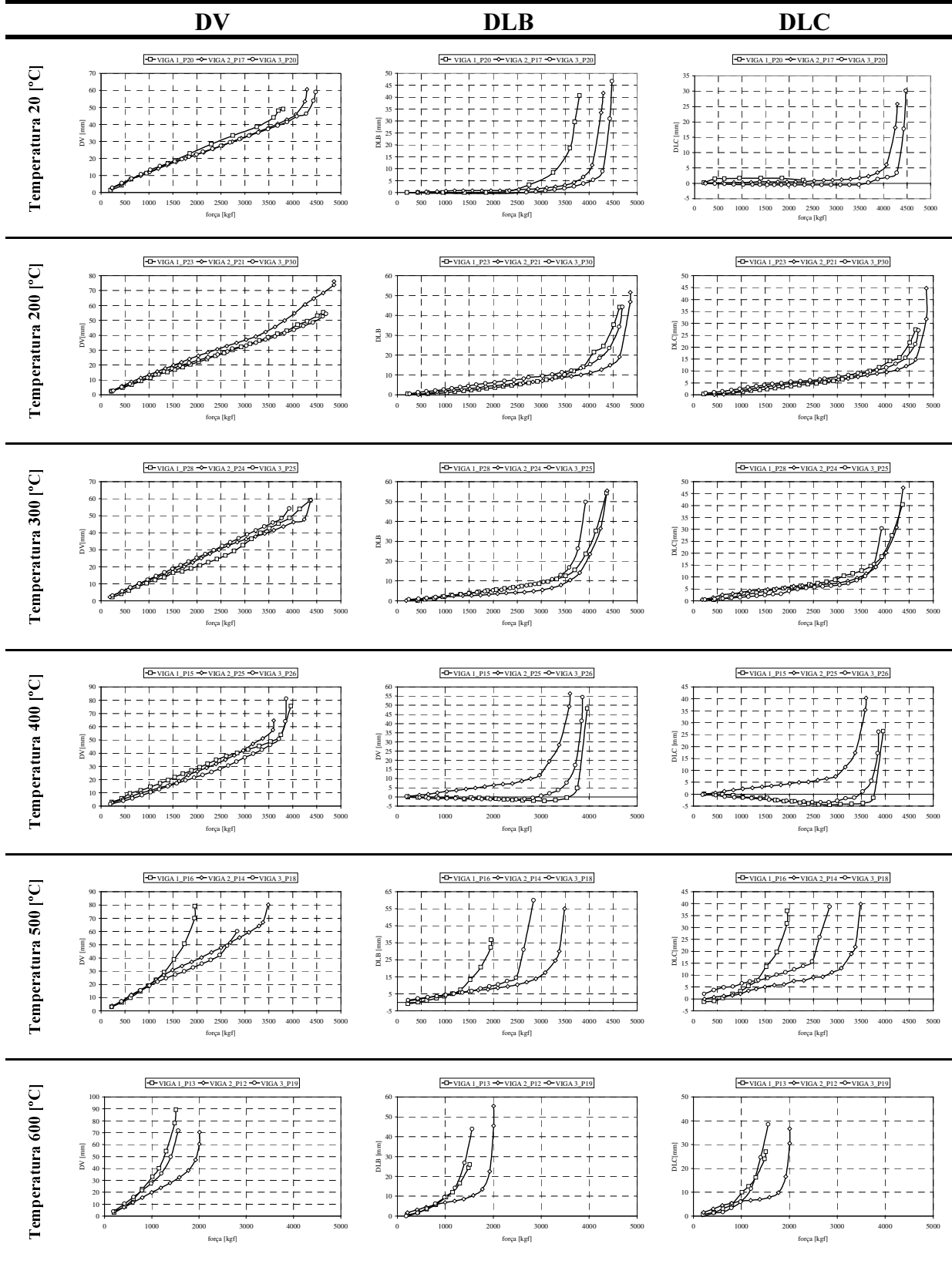


Fig. 8.2.6- Deslocamentos a meio vão das vigas com 4.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

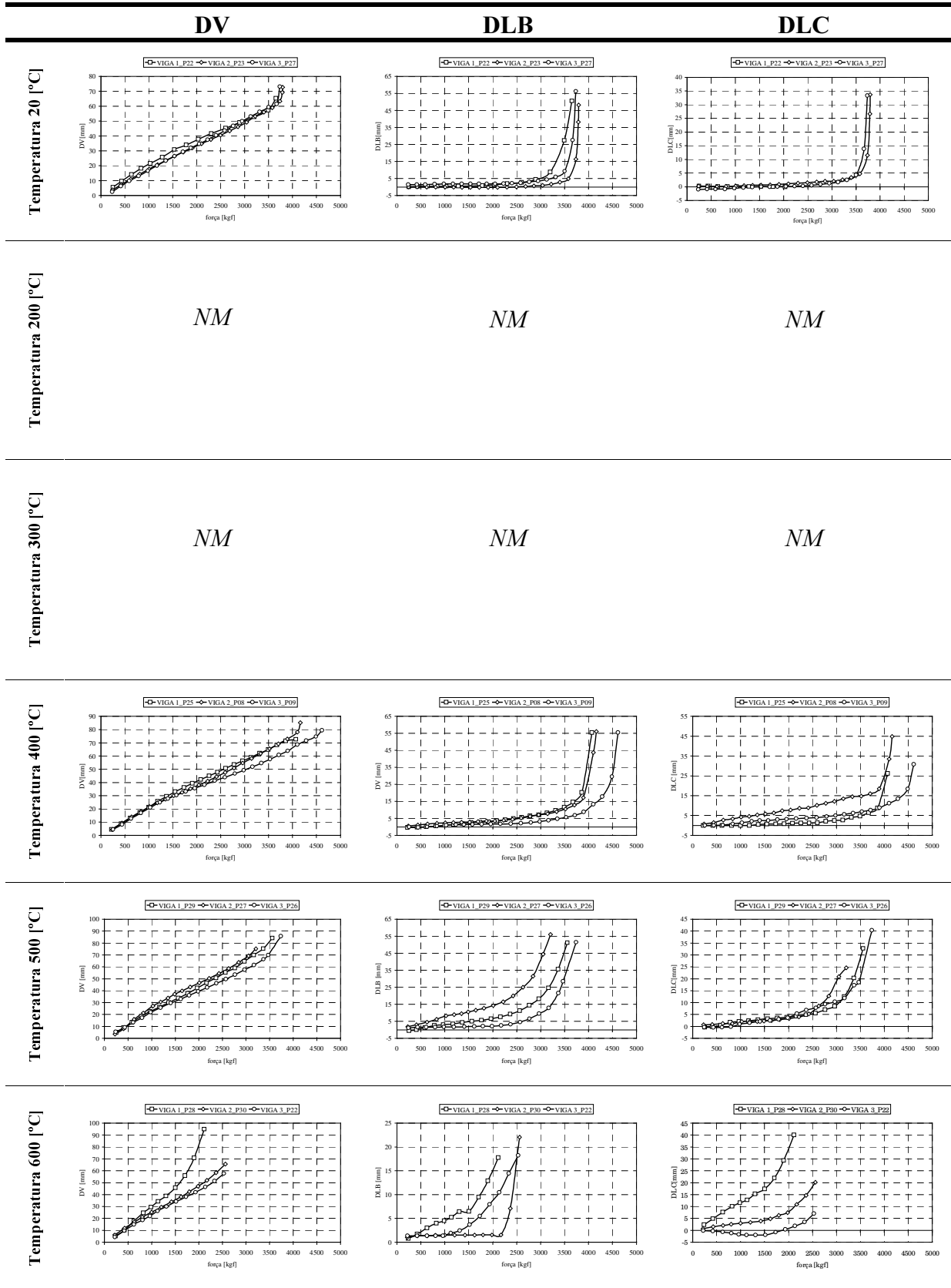


Fig. 8.2.7- Deslocamentos a meio vão das vigas com 5.5 [m], para diferentes temperaturas de solitação.
 NM – Deslocamentos não medidos.

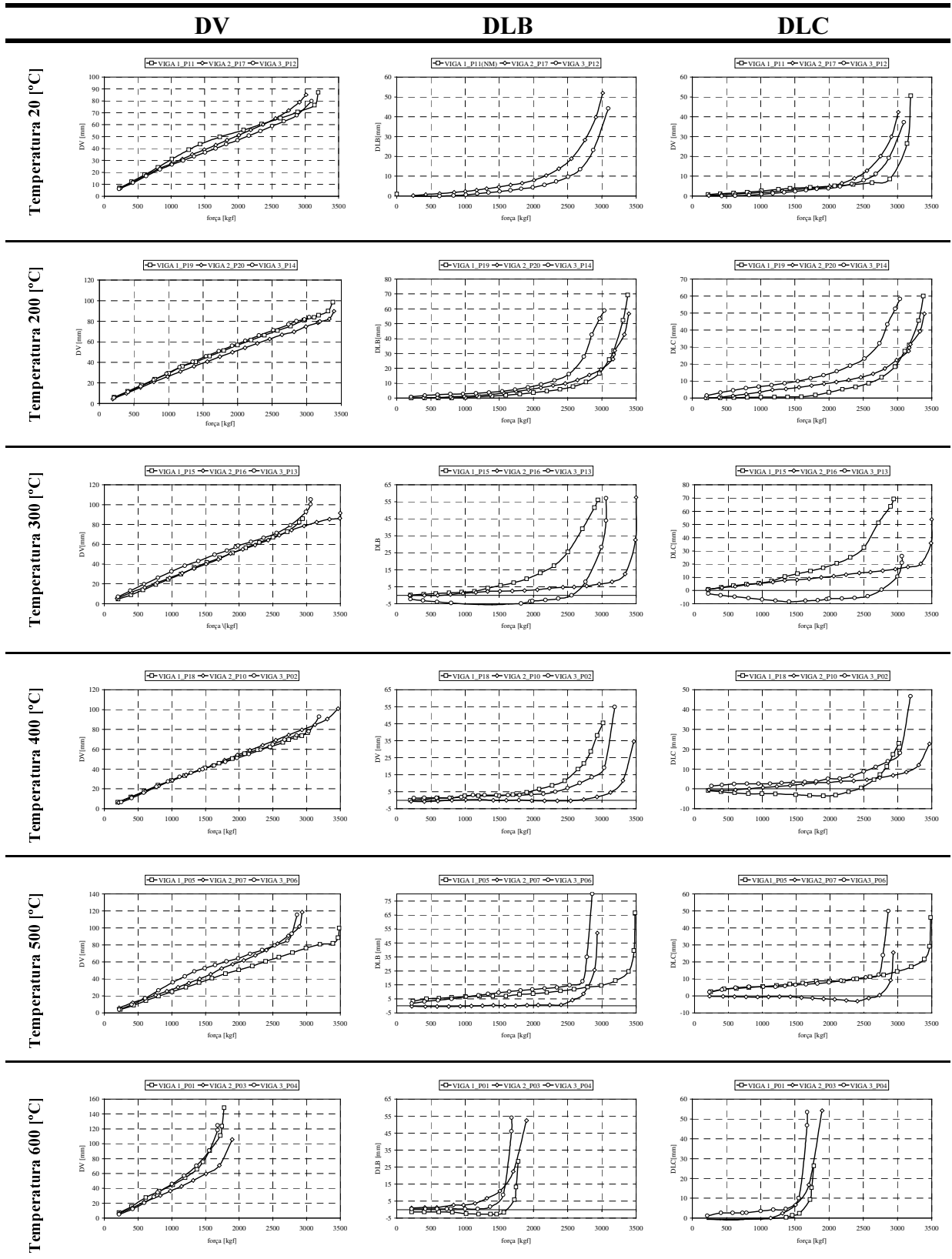


Fig. 8.2.8- Deslocamentos a meio vão das vigas com 6.5 [m], para diferentes temperaturas de solitação.

Capítulo 9

Análise numérica da encurvadura lateral de vigas I em situação de incêndio

9.1. - Introdução

Neste capítulo será apresentado o modelo numérico a utilizar para validação e comparação dos resultados experimentais e dos modelos de cálculo simples do momento resistente à encurvadura lateral de vigas I, sujeitas a elevadas temperaturas. Serão utilizados dois tipos de elementos finitos já apresentados nos capítulos precedentes. Elementos bidimensionais para determinação da distribuição de temperatura na secção recta dos perfis e elementos de viga tridimensionais para análise do comportamento de vigas à encurvadura lateral.

Para a secção recta do perfil IPE100 foi determinada a função de empenamento, o valor da resistência à torção para cada nível de temperatura e foi introduzida a distribuição de tensões residuais determinada experimentalmente, conforme discriminado no capítulo 8.

Numa tentativa de reproduzir as mesmas condições dos ensaios experimentais, far-se-á a análise numérica da encurvadura lateral, considerando as vigas com as mesmas imperfeições geométricas, as mesmas tensões residuais e a mesma tensão de cedência, medidas experimentalmente e apresentadas no capítulo anterior.

Para o caso em estudo apresentado no capítulo 7 e 8, após solicitação térmica será imposto um carregamento mecânico incremental das forças na extremidade da viga. Esta solicitação decorrerá até ao momento em que não é possível estabelecer o equilíbrio, ou seja, até atingir a capacidade máxima resistente à encurvadura.

Serão apresentados resultados numéricos para comprimentos de encurvadura compreendidos entre 0.5[m] e 6.5[m], conforme os diferentes casos experimentais efectuados. As curvas de resistência à encurvadura serão compiladas em função do último ponto de cada simulação apresentada no anexo 9.

Neste capítulo será ainda efectuada uma comparação de diferentes programas de elementos finitos com capacidades semelhantes, para três casos específicos de comprimentos de viga, mas que apresentam formulações de elementos ligeiramente diferentes. Foram utilizados os elementos de viga BEAM3D do programa Cosmos/M V2.5 e o elemento BEAM24 do código ANSYS 5.5.

9.2. - O modelo de elementos finitos utilizado

Nas simulações numéricas efectuadas considerou-se que as vigas estavam sujeitas ao carregamento indicado na figura 9.1. Assim, como se poderá verificar, a viga está sujeita a um carregamento uniformemente distribuído q_b e q , correspondente, o primeiro ao respectivo peso próprio, enquanto que o segundo acresce ao primeiro, o peso das resistências eléctricas de aquecimento e da manta isolante.

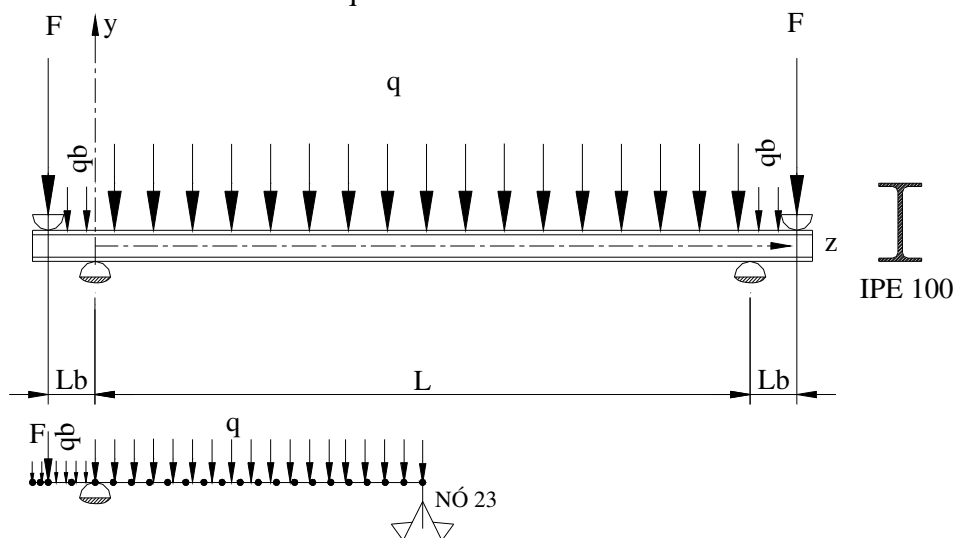


Fig. 9.1 – Discretização por elementos finitos do caso em estudo.

O esforço exercido pelos actuadores hidráulicos nos ensaios experimentais é aqui representado pelas forças concentradas F , aplicadas na extremidade das vigas. A análise numérica foi feita recorrendo ao programa de elementos finitos SAFIR, que como já se referiu, é um programa para análise não linear geométrico e material, especialmente desenvolvido para o estudo de estruturas sujeitas à acção do fogo.

Dada a simetria da viga e da solicitação apenas se estudou metade da mesma, tendo sido utilizados 11 elementos finitos, como se mostra na figura 9.1.

O procedimento de cálculo consistiu em aumentar, para cada temperatura analisada, o valor da força F , com incrementos de carga de 10 a 1000 [N], até não ser possível manter o equilíbrio das forças envolvidas. Nesta altura obtém-se a força máxima atingida, correspondente à força de colapso.

9.3. – Modelo numérico das tensões residuais

Para cada secção recta analisada será considerado o estado de tensão residual instalado. Com base nos resultados experimentais apresentados no capítulo precedente, foi definida a variação das tensões residuais pelos vários elementos finitos que compõem a secção recta, como se mostra na figura 9.2.

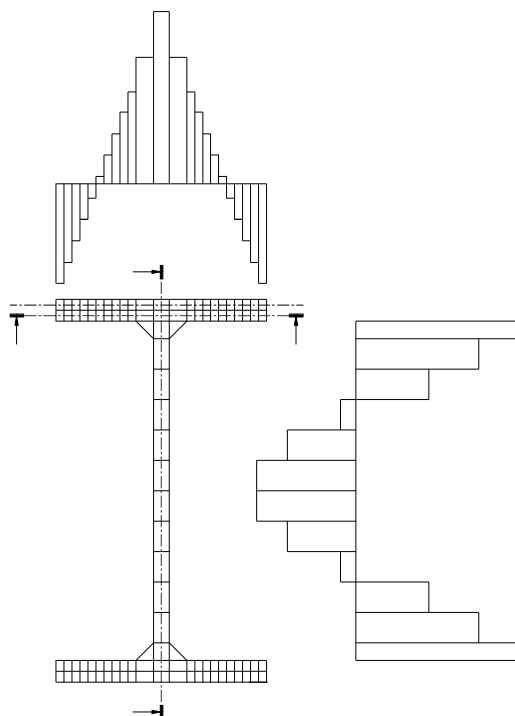


Fig. 9.2 – Distribuição das tensões residuais.

Para cada elemento será feita a afectação do valor residual da tensão. A variação ao longo da secção é mais ou menos precisa, em função da discretização efectuada pelos elementos finitos adoptada. Esta discretização foi considerada adequada, uma vez que a evolução térmica prevista nas simulações resulta num campo de temperatura uniforme, tendo sido feitas simulações para as temperaturas de 200, 300, 400, 500 e 600 [°C].

No que diz respeito à evolução das tensões residuais com a temperatura, o programa de cálculo considera este efeito como deformações iniciais.

9.4. – Modelo numérico das imperfeições geométricas

Foram adoptadas as imperfeições geométricas medidas experimentalmente e que já foram apresentadas no capítulo 8.

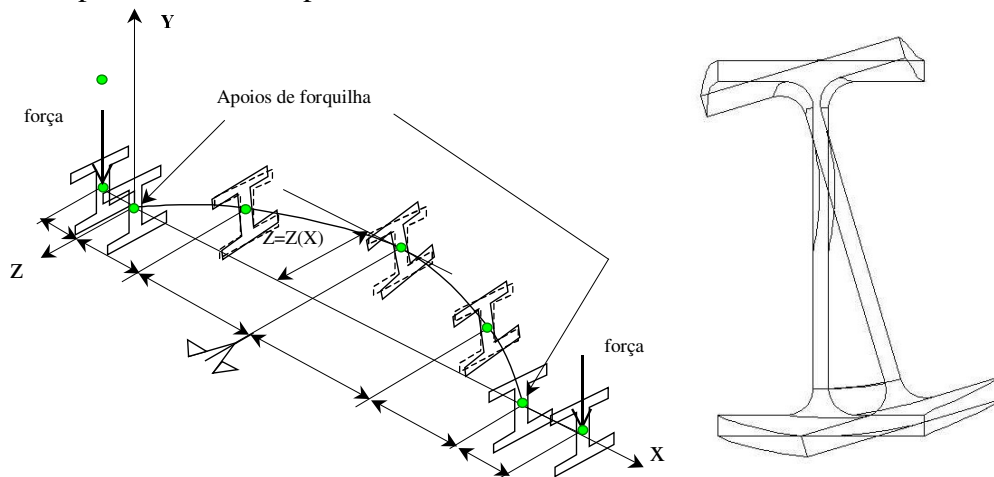


Fig. 9.3 – Modelo de imperfeição geométrica utilizado.

Admitiu-se que as vigas apresentavam uma deformada inicial tipo sinusoidal, como se mostra na figura 9.3, traduzidas analiticamente pela expressão 9.1, em que $a_{\text{máx}}$ corresponde à amplitude máxima apresentada pela viga a meio vão.

$$Z(x) = a_{\text{máx}} \text{Sin}\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \quad (9.1)$$

Na figura 9.3 está também representada a rotação inicial da secção recta, dada pelo quarto nó de cada elemento finito.

9.5. - Comportamento mecânico do material

O comportamento mecânico do material é tipicamente descrito pelas curvas de tensão deformação que se apresentam na figura 9.4, tendo em consideração os valores propostos pelo Eurocódigo 3. Para cada temperatura, o programa recorre ao modelo elíptico de encruamento conforme se pode observar na mesma figura.

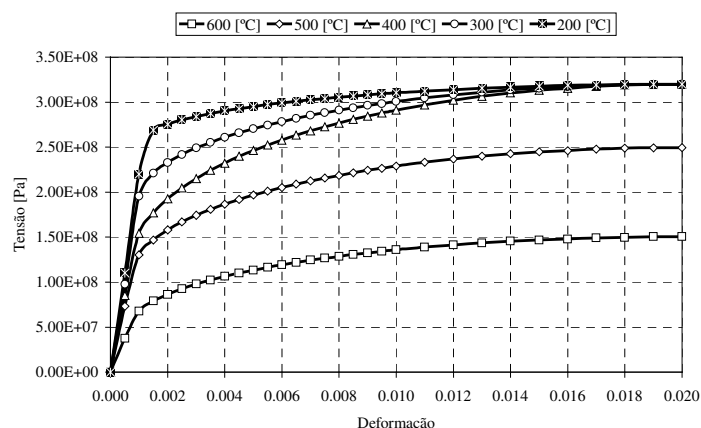


Fig. 9.4 - Comportamento do material às temperaturas consideradas.

Neste gráfico é facilmente verificado que a resistência do material diminui com o aumento da temperatura, como consequência da diminuição das suas propriedades. O módulo de elasticidade e a tensão de cedência evoluem com a temperatura conforme descrição no capítulo 2.

9.6. – Modelação numérica da resistência à encurvadura lateral

Das simulações numéricas efectuadas resultam os valores dos momentos resistentes à encurvadura, tendo em consideração as diferentes temperaturas de exposição. Utilizando as fórmulas apresentadas no capítulo 7, para o caso do dimensionamento à temperatura ambiente e para o caso acidental de fogo, é possível determinar a curva de cálculo à encurvadura lateral, através do seguinte quociente para análises à temperatura ambiente:

$$\frac{M_{b,SAFIR}}{M_{c,Rd}} \tag{9.2}$$

em que ($M_{b,SAFIR}$) representa o momento resistente à encurvadura lateral obtido pelo programa SAFIR e $M_{c,Rd}$ o momento resistente de cálculo da secção à temperatura ambiente.

Para as análises efectuadas a temperaturas elevadas deve utilizar-se a seguinte relação:

$$\frac{M_{b,SAFIR}}{M_{fi,\theta,Rd}} \tag{9.3}$$

em que agora $M_{fi,\theta,Rd}$ representa agora, o momento resistente de cálculo da secção à temperatura θ considerada.

Os valores limites de resistência à encurvadura determinados para os mesmos comprimentos de encurvadura utilizados no capítulo precedente, encontram-se apresentados, sobre a forma gráfica, no anexo 9.

As diferentes simulações que se apresentam dizem respeito aos comprimentos referidos e às diferentes imperfeições geométricas medidas durante os ensaios experimentais.

Na figura 9.5 comparam-se os resultados numéricos obtidos à temperatura ambiente, com a correspondente curva de cálculo do Eurocódigo 3.

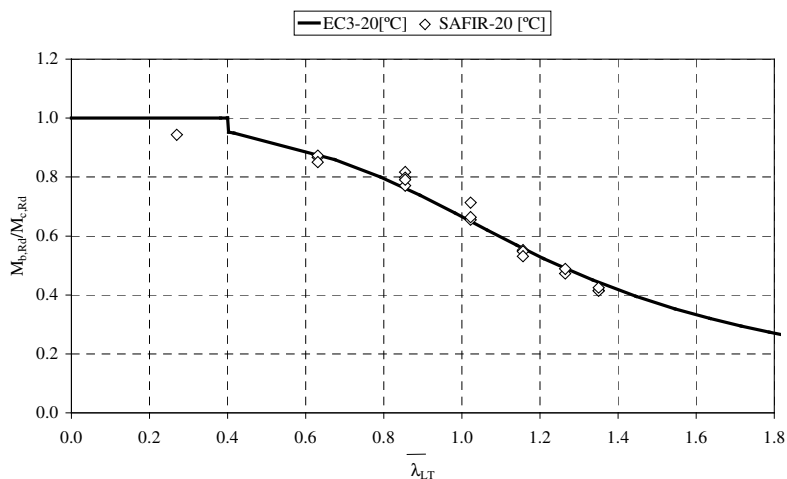


Fig. 9.5 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura ambiente.

Como se pode verificar nessa figura, os resultados numéricos são concordantes com a curva de cálculo do Eurocódigo 3.

Para uma solicitação a 200 [°C], ver figura 9.6, a resistência da viga à encurvadura diminui, conforme valores obtidos para os diferentes comprimentos. A esbelteza adimensional é agora calculada com o efeito da temperatura de acordo com a expressão 7.76.

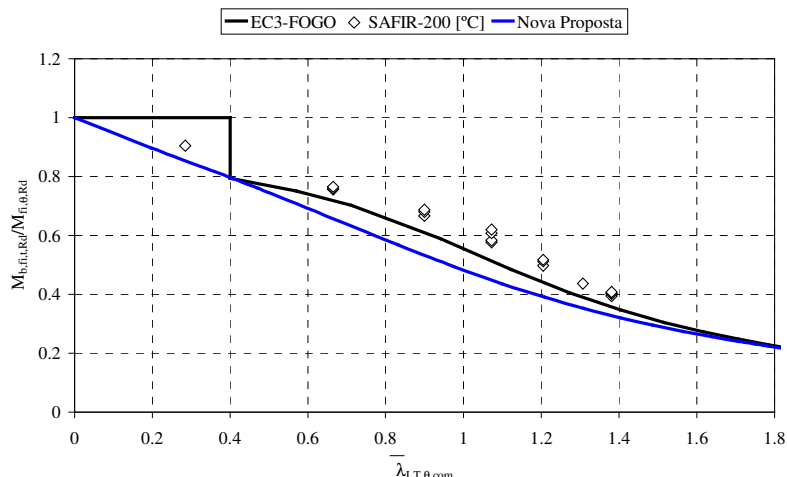


Fig. 9.6 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura de $\theta = 200$ [°C].

O ajustamento dos resultados numéricos à curva do Eurocódigo 3 para a situação apresentada é adequada, acompanhando a tendência da curva.

Na figura 9.7 pode verificar-se que a curva de cálculo do Eurocódigo 3, para a temperatura de 300 [°C] deixa de ser segura para certos valores de esbelteza adimensional, estando a curva da nova proposta sempre do lado da segurança.

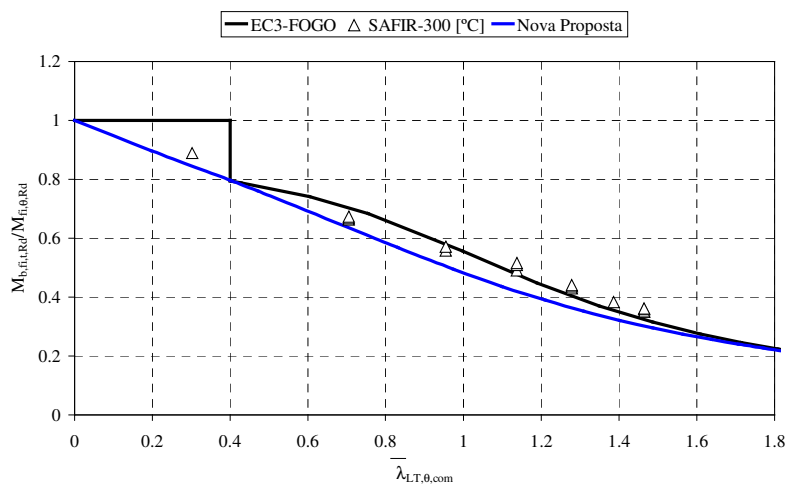


Fig. 9.7 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura de $\theta = 300$ [°C].

Aumentando a temperatura para 400 [°C], a tendência mantém-se conforme se poderá ver na figura 9.8, encontrando-se de novo a nova proposta do lado da segurança, contrariamente à curva de cálculo do Eurocódigo 3.

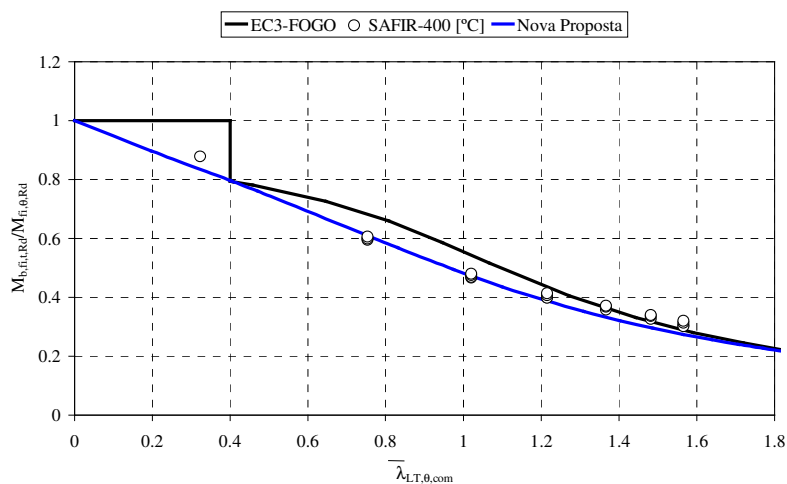


Fig. 9.8 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura de $\theta = 400$ [°C].

Para a temperatura de 500 [°C] verifica-se um comportamento análogo, como se poderá verificar na figura 9.9

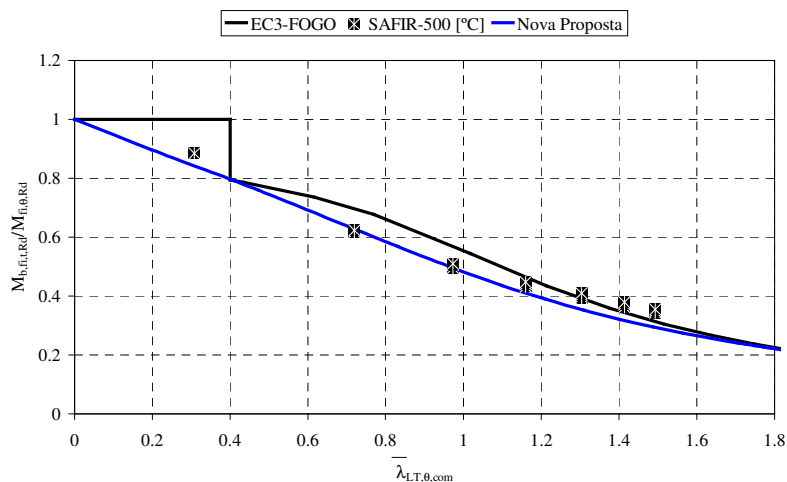


Fig. 9.9 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura de $\theta = 500$ [°C].

Finalmente, para a temperatura das vigas a 600 [°C], figura 9.10, verifica-se o mesmo comportamento dos resultados numéricos, confirmando a maior segurança da nova proposta relativamente à proposta do Eurocódigo. Deve referir-se que a nova proposta apresentada nos gráficos das figuras 9.6 a 9.10 foi definida com um factor de severidade $\beta = 0.65$, o mesmo que foi adoptado no capítulo anterior.

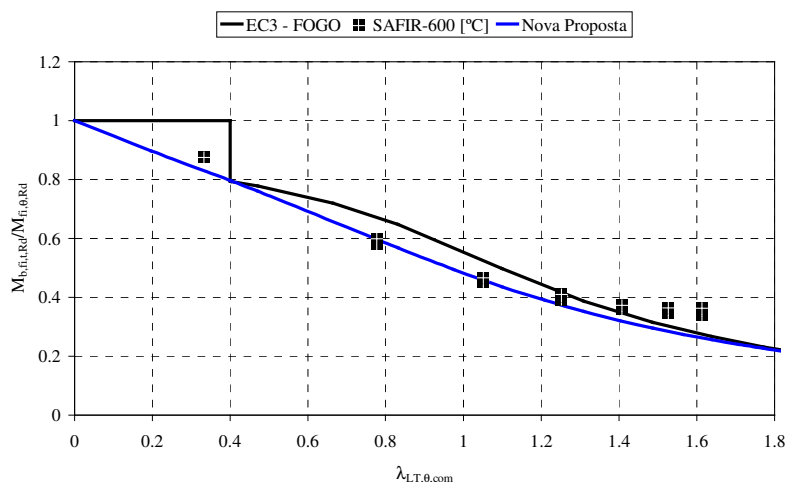


Fig. 9.10 – Resistência à encurvadura lateral, à temperatura de $\theta = 600$ [°C].

Na figura 9.11 estão compilados os resultados numéricos correspondentes a toda a gama de temperaturas analisadas, sendo possível novamente observar que a curva de cálculo do Eurocódigo 3 não está do lado da segurança, para certos valores da esbelteza adimensional das vigas.

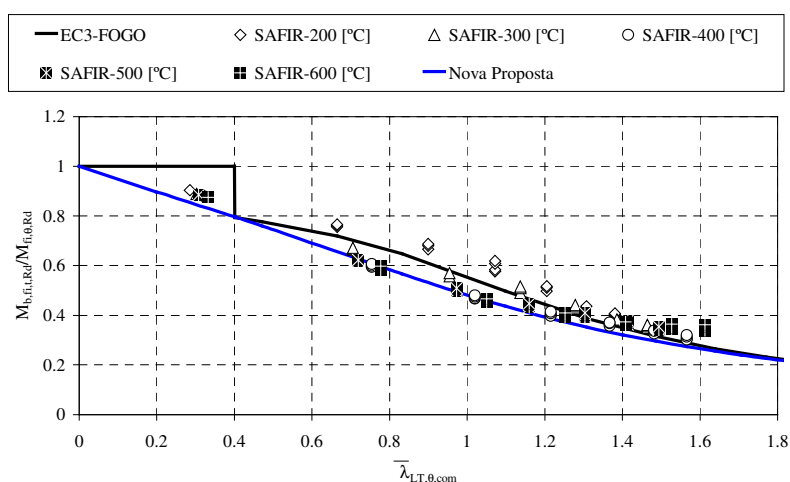


Fig. 9.11 – Resistência à encurvadura lateral, para temperaturas elevadas.

Por outro lado, o excesso de segurança verificado no patamar até à esbelteza de 0.4 apresentado pela curva de cálculo do Eurocódigo, parece justificar a respectiva abolição, como de resto a nova proposta sugere.

9.7. - Comparação numérica com outros programas de elementos finitos

Como termo de comparação e validação numérica das simulações efectuadas, utilizaram-se dois outros programas de elementos finitos, Ansys e Cosmos/M para analisar um caso concreto de três vigas solicitadas à temperatura de 600 [°C]. O perfil utilizado para esta validação foi o mesmo dos ensaios anteriores, IPE100, com comprimentos de viga de 1.5, 2.5 e 4.5[m].

Os elementos finitos utilizados apresentam características ligeiramente diferentes, quer em número de graus de liberdade, quer no tipo de discretização da secção recta.

O caso em estudo difere ligeiramente do caso estudado nos sub-capítulos anteriores, uma vez que apenas possui carregamento concentrado e o mesmo tipo de apoios, conforme representado na figura 9.12.

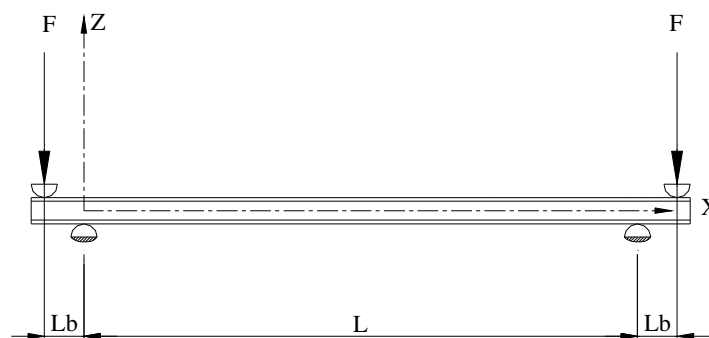


Fig. 9.12 – Caso de estudo para validação numérica.

O material deverá seguir o comportamento da curva correspondente do gráfico da figura 9.5, uma vez que este é rigorosamente igual ao descrito e ensaiado nos testes experimentais. Considera-se que a partir do valor de 67.84 [MPa] o material entra no domínio plástico, para uma temperatura de 600 [°C].

Em qualquer dos modelos estudados procedeu-se à discretização do elemento estrutural em 11 elementos do tipo viga, tendo sido apenas modelada meia viga, graças às características de simetria de carregamento e material.

Foram consideradas imperfeições geométricas em todas as simulações recorrendo a uma imperfeição lateral adicionada do tipo sinusoidal, conforme é representado na expressão 9.4.

$$Z = Z(x) = \frac{L}{1000} \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi \times x}{L}\right) \quad (9.4)$$

Neste caso, $L/1000$ representa o valor da máxima amplitude da imperfeição a meio vão da viga.

Não foram consideradas tensões residuais devido ao facto de nem todos os elementos estarem preparados para descrever este estado inicial da viga.

O elemento de viga utilizado no programa SAFIR já foi apresentado nos capítulos anteriores, pelo que apenas será necessário descrever sucintamente os elementos utilizados pelos restantes programas.

O elemento de viga disponível no programa Cosmos/M possibilita o estudo elasto-plástico de uma estrutura ou elemento, apresentando dois nós para definir o eixo do elemento, mais um terceiro para definir a orientação da secção recta. Em cada um dos primeiros nós, existem seis graus de liberdade (três translações e três rotações). O elemento pode apresentar secções simétricas e não simétricas, possibilitando a introdução da posição do centro de corte relativamente ao centroíde. O programa apresenta a possibilidade de formulação de grandes deslocamentos, para além de

modelos de comportamento não linear do material. O elemento possui ainda a possibilidade da definição de secções rectas em I, calculando internamente as constantes à torção. Este elemento não possui capacidades de cálculo de empenamento por torção, contrariamente ao elemento do SAFIR.

O elemento uniaxial de secção recta arbitrária utilizado pelo programa ANSYS apresenta capacidades de tracção, compressão, flexão e de torção. Possui igualmente seis graus de liberdade por cada nó e permite estudar o comportamento de plasticidade e fluência na direcção axial da viga. O empenamento por torção é assumido como desprezável.

Tendo em consideração as diferenças de formulação e o número de graus de liberdade que cada elemento apresenta, segue-se um estudo comparativo para a encurvadura lateral destes elementos de vigas.

Os valores dos momentos resistentes à encurvadura lateral determinados numericamente estão apresentados na figura 9.13. Demonstram a existência de pequenas diferenças entre os resultados numéricos obtidos e o valor determinado pela referência [9.23].

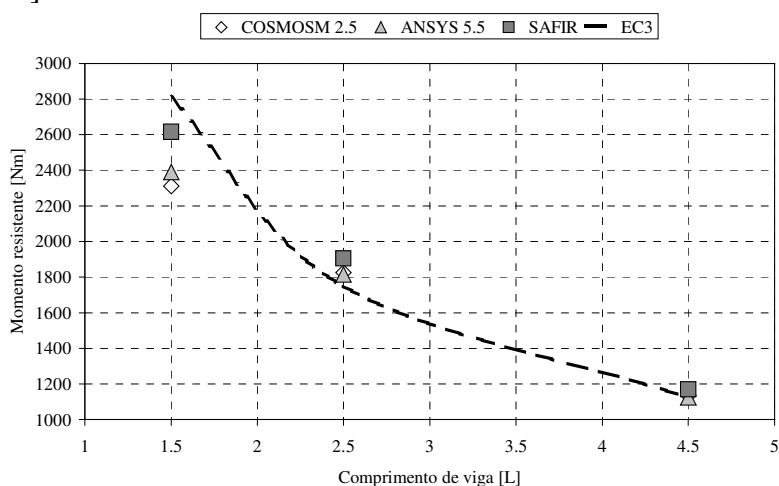


Fig. 9.13 – Valores do momento resistente à encurvadura para os três comprimentos estudados.

Estes resultados vêm confirmar o que já foi referido relativamente à falta de segurança apresentada pelo Eurocódigo.

Os deslocamentos verticais, laterais e a rotação, a meio da viga, foram registados e comparados em função da carga aplicada. Na figura 9.14 encontram-se representados os deslocamentos no plano do carregamento, para cada comprimento de viga, sendo evidenciada a curvatura na zona ascendente, momentos antes de se atingir o colapso.

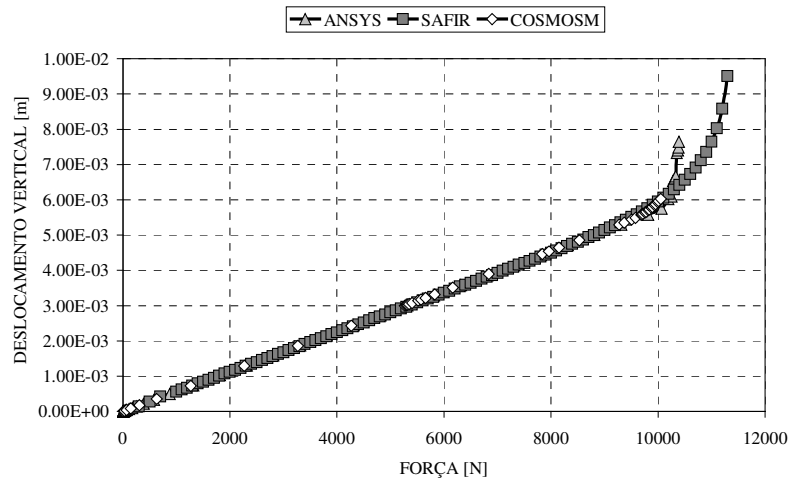


Fig. 9.14 a) – Valores do deslocamento a meio vão no plano de carregamento, para L=1.5[m].

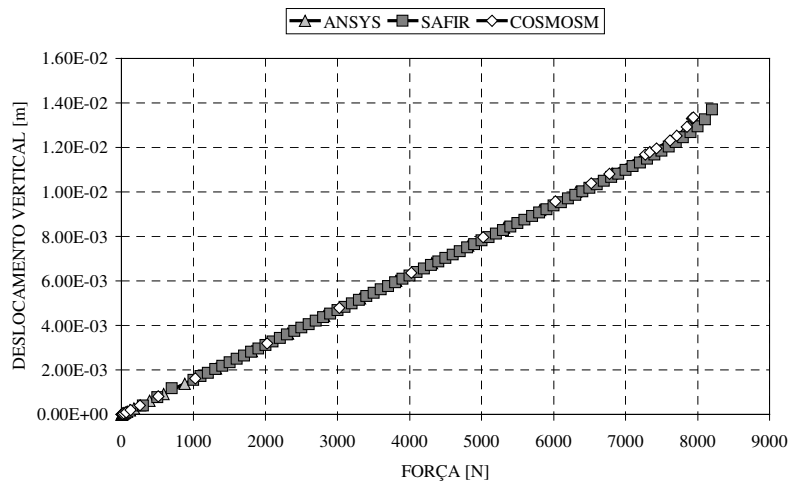


Fig. 9.14 b) – Valores do deslocamento a meio vão no plano de carregamento, para L=2.5[m].

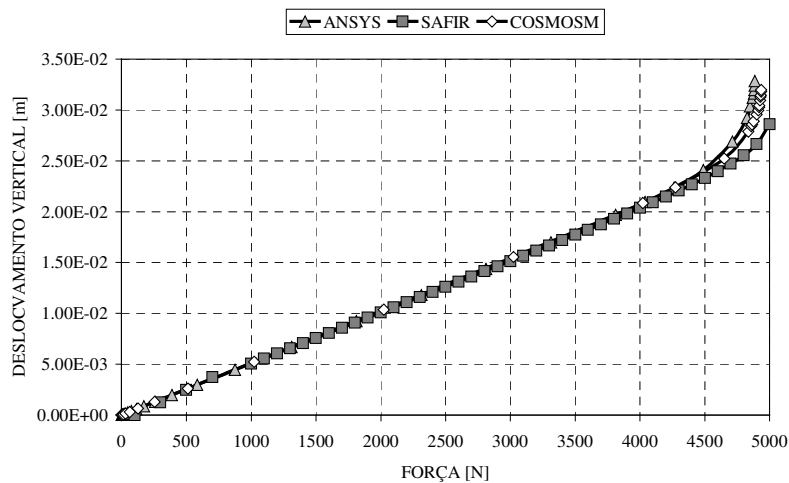


Fig. 9.14 c) – Valores do deslocamento a meio vão no plano de carregamento, para L=4.5[m].

Os deslocamentos laterais também foram determinados a meio vão, apresentando-se na figura 9.15 o comportamento obtido, para os diferentes comprimentos de viga.

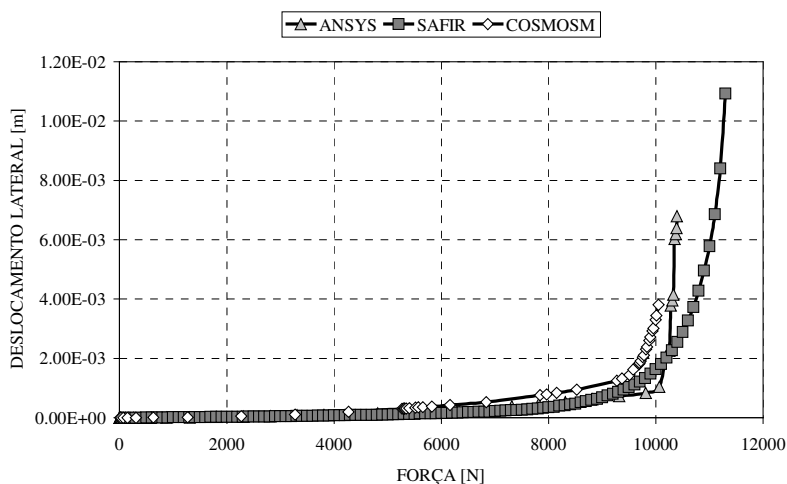


Fig. 9.15 a) – Valores do deslocamento lateral a meio vão, para comprimento de viga $L=1.5[m]$.

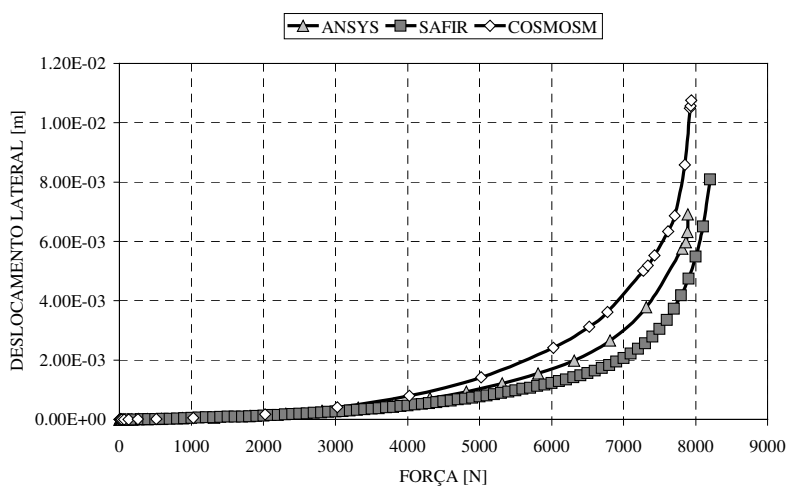


Fig. 9.15 b) – Valores do deslocamento lateral a meio vão, para comprimento de viga $L=2.5[m]$.

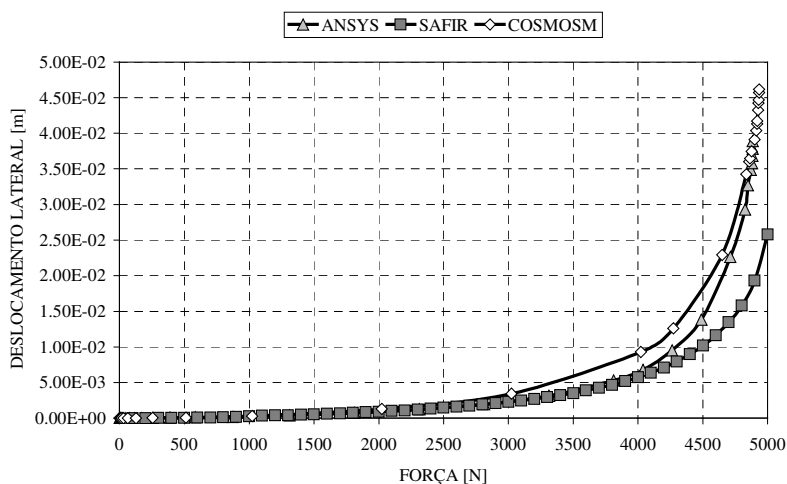


Fig. 9.15 c) – Valores do deslocamento lateral a meio vão, para comprimento de viga $L=4.5[m]$.

Os resultados da rotação da secção recta a meio vão, apresentam-se na figura 9.16.

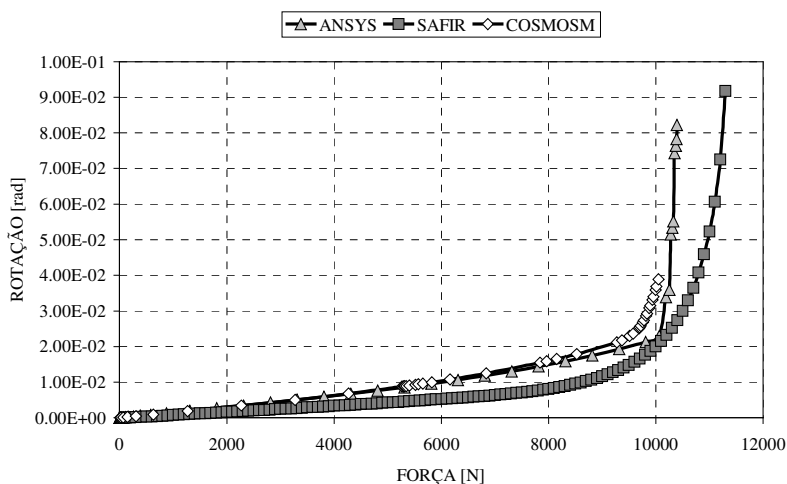


Fig. 9.16 a) – Valores da rotação da seção a meio vão para comprimento de viga L=1.5 [m].

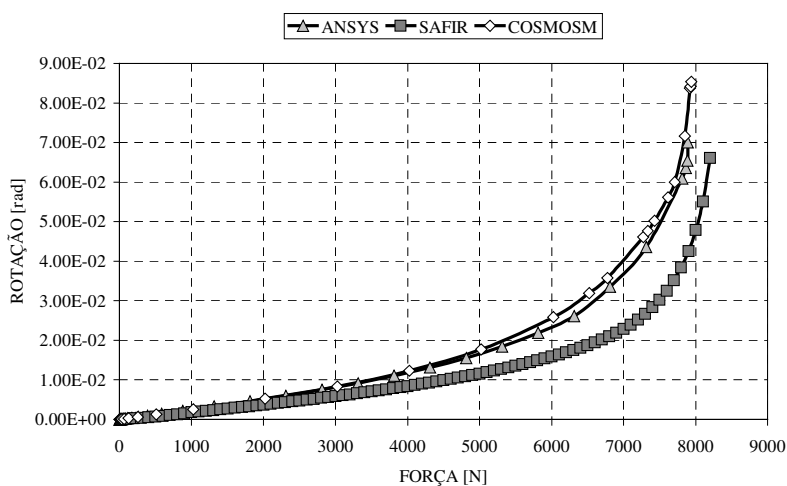


Fig. 9.16 b) – Valores da rotação da seção a meio vão para comprimento de viga L=2.5 [m].

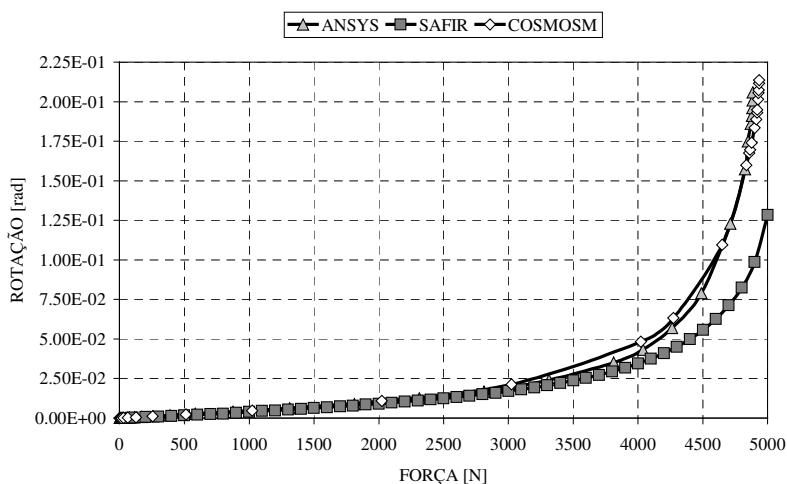


Fig. 9.16 c) – Valores da rotação da seção a meio vão para comprimento de viga L=4.5 [m].

Relativamente à rotação da seção, representada na figura anterior, é notório uma maior resistência à torção na simulação do programa SAFIR, comparativamente

aos restantes programas, o que deve estar associado à discretização da secção e às respectivas propriedades de resistência à torção e ao empenamento introduzidas.

Em qualquer dos casos analisados, alguns dos elementos localizados próximo do meio vão da viga plastificam, devendo apresentar uma deformação residual permanente.

Estes resultados permitem validar os resultados numéricos obtidos para as simulações efectuadas com o programa SAFIR e apresentadas no anexo 9.

9.8. – Conclusões

Com o objectivo de validar a nova proposta de cálculo simples do momento resistente à encurvadura lateral de vigas I em situação de incêndio, recorre-se neste capítulo à simulação numérica. No sentido de reproduzir a situação real das vigas, utilizaram-se as imperfeições geométricas, as tensões residuais, e a tensão de cedência, medidas experimentalmente.

Ficou provado que a curva de cálculo à encurvadura lateral do Eurocódigo 3 não é segura a temperaturas elevadas, para alguns valores de esbelteza adimensional, contrariamente à curva correspondente à nova proposta. Estes resultados vieram confirmar os resultados experimentais apresentados no capítulo 8, que apontavam já para uma maior segurança da nova proposta.

Comparou-se também o programa SAFIR desenvolvido na Universidade de Liège, Bélgica, para cálculo de estruturas sujeitas à acção do fogo, com dois programas comerciais, tendo sido obtido resultados muito semelhantes com os três programas, permitindo-nos assim, encarar com mais segurança os resultados numéricos apresentados neste capítulo.

9.9. - Referências

- [9.1]- Timoshenko P.S., Gere J.M.; “Theory of elastic stability”; McGraw Hill International editions – Mechanical Engineering series; 2nd edition; 1963.
- [9.2]- Timoshenko P.S.; “International Association Bridge Structural Eng.”; vol3; pp401, 1935.
- [9.3]- Galambos T.V.; “Guide to stability design criteria for metal structures”; 5th edition; John Wiley & Sons; USA; 1998.
- [9.4]- Trahair N.S.; “Flexural – Torsional Buckling of structures”; E&FN SPON – Chapman & Hall; London; 1993.
- [9.5]- Lajos kollár; “Structural Stability inEngineering Practice”; E&FN SPON; New York; 1999.
- [9.6]- Zdenek P. Bazant, Luigi Dedolin; “Stability of structures –Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage theories”
- [9.7]- CEN ENV 1993-1-1, Eurocode 3, “Design of Steel Structures – Part 1-1, General rules and rules for buildings”; 1992
- [9.8]- CEN ENV 1991-2-2:1995, Eurocode 1, “Basis of design and actions on structures – Part 2-2: Actions on structures – Actions on structures exposed to fire”; 1995.
- [9.10]- CEN ENV 1993-1-2:1995, Eurocode 3; “Design of steel structures – Part 1.2: General rules – Structural fire design”; Belgium; 1995.

- [9.11]– Piloto, P.A.G.; Vila Real, P.M.M.; “Encurvadura lateral de vigas submetidas a elevadas temperaturas – Comparação numérica”; artigo publicado nas actas da III conferência Internacional de Usuarios Cosmos para España e Portugal; 29 de Setembro de 2000.
- [9.12]– Franssen, Jean-Marc; “Program SAFIR – User’s Manual; Universidade de Liège; Dec 96.
- [9.13]– SRAC; “Cosmos/M 2.5 - Electronic Manual”; Setembro de 1999.
- [9.14]– Ansys; “Electronic Manual V5.5”; Outubro de 1999.
- [9.15]– Talamona, D.; Franssen, Jean-Marc; Schleich, J.B.; Kruppa, J.; “Stability of steel columns in case of fire: Numerical Modeling”; Journal of structural Engineering; vol 123; N°6; ASCE; 1997.
- [9.16]– Papangelis, J.P.; Trahair, N.S.; Hancock, G.J.; “Elastic flexural torsional buckling of structures by computer”; Computers and structures 68; 125-137; Pergamon.
- [9.17]– Bailey, C. G.; “development of computer software to simulate the structural behaviour of steel framed buildings in fire”; Computers and structures; 67, 421-438; 1998.
- [9.18]– Schleich J.B.; “Numerical simulations, the forthcoming approach in fire engineering design of steel structures; Arbed research center; Fachberichte Huttenpraxis Metallweiterverarbeitung”; vol 25; N°4; 1987.
- [9.19]– Franssen, Jean-Marc; “A simple model for the fire resistance of axially – loaded members according to Eurocode 3”; Journal Construct. Steel Research; 35; 49-69; 1995.
- [9.20]– Franssen, Jean-Marc; Schleich, J.B.; Cajot, Louis Guy; Azpiazu, Wenceslau; “A simple model for the fire resistance of axially loaded Members – Comparison with experimental results”; ”; Journal Construct. Steel Research; 37 N°3, 175-204; 1996.
- [9.21]– Franssen, Jean-Marc; Crooke, G.M.E.; Latham, D.J.; “Numerical simulation of a full scale fire test on a loaded steel framework”; Journal Construct. Steel Research; 35; 377-408; 1995
- [9.22]– Kruger, T.S.; Tensberg, B.W. Van; Plesis, G.M. du; “Non linear Analysis of structural steel frames”; Journal Construct. Steel Research; 34; 285-306; 1995.
- [9.23]– CEN ENV 1993-1-2, Eurocode 3 – Design of steel Structures – Part 1.2: general rules Structural Fire Design.

Anexo 9

Resultados numéricos – deslocamentos a meio vão

9.1. - Introdução

Em anexo apresentam-se os resultados de várias simulações numéricas efectuadas para tratamento do fenómeno de encurvadura lateral de vigas. Foram efectuadas simulações numéricas para comprimentos de 0.5, 1.5, 2.4, 3.5, 4.5, 5.5 e 6.5[m]. Para cada comprimento foram utilizadas as tensões residuais instaladas e determinadas experimentalmente, bem como o valor das várias imperfeições geométricas detectadas ao longo de cada ensaio.

As simulações numéricas termo-mecânicas, resultam da aplicação de temperatura uniforme em toda a secção recta e ao longo de todo comprimento de viga e de posterior carregamento mecânico incrementado a partir do momento em que a secção atinge a temperatura da simulação. Este momento varia de simulação para simulação, em função das temperaturas de ensaio.

Na primeira coluna das figuras seguintes é apresentado o deslocamento vertical a meio vão da viga (DVi), enquanto que a segunda coluna diz respeito ao deslocamento lateral do mesmo nó (DLi). O sub-índice “i” presente em cada tipo de deslocamento diz respeito a diferentes simulações, considerando os valores das imperfeições geométricas, medidas experimentalmente.

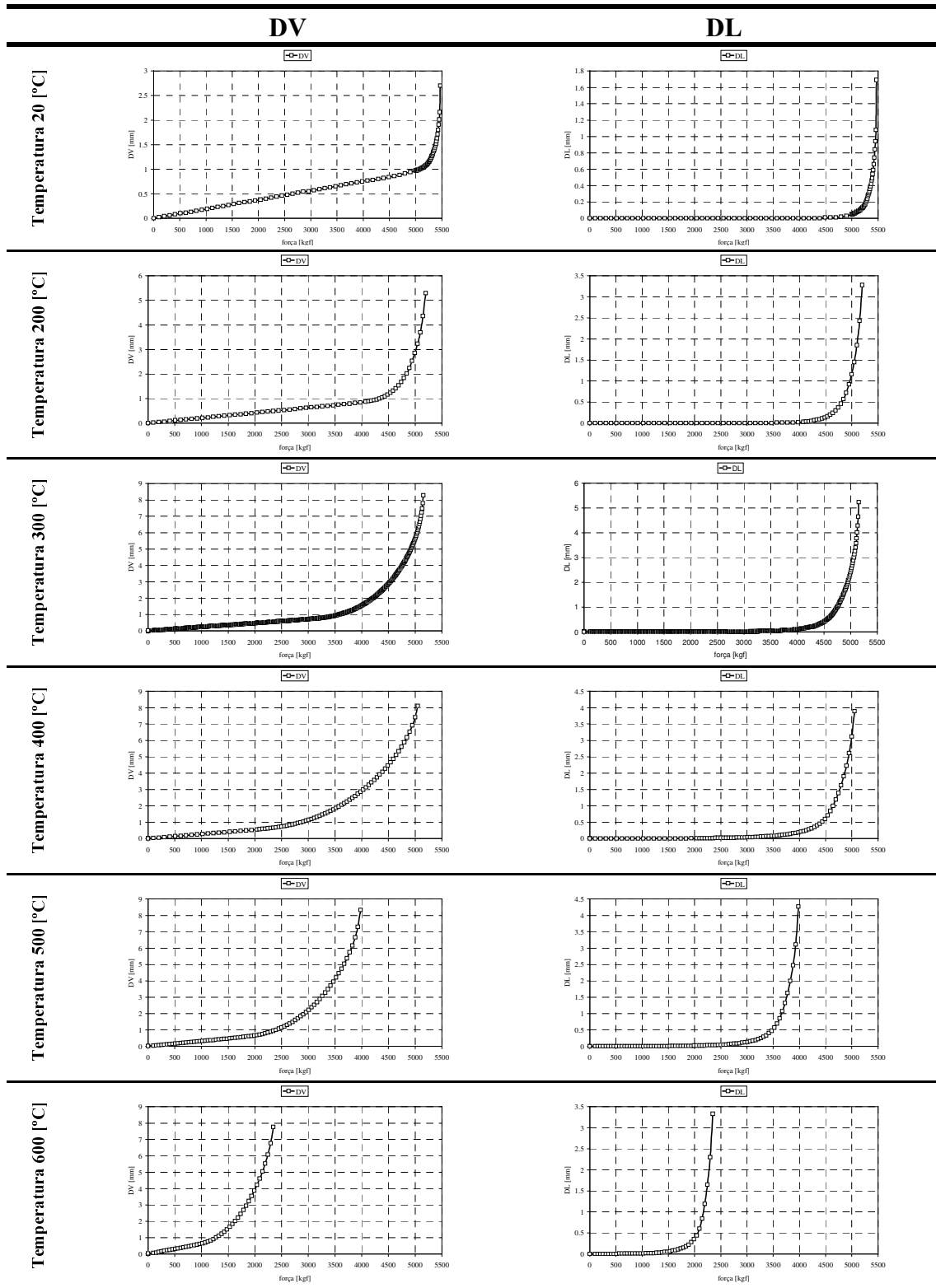


Fig. 9.1.1 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 0.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

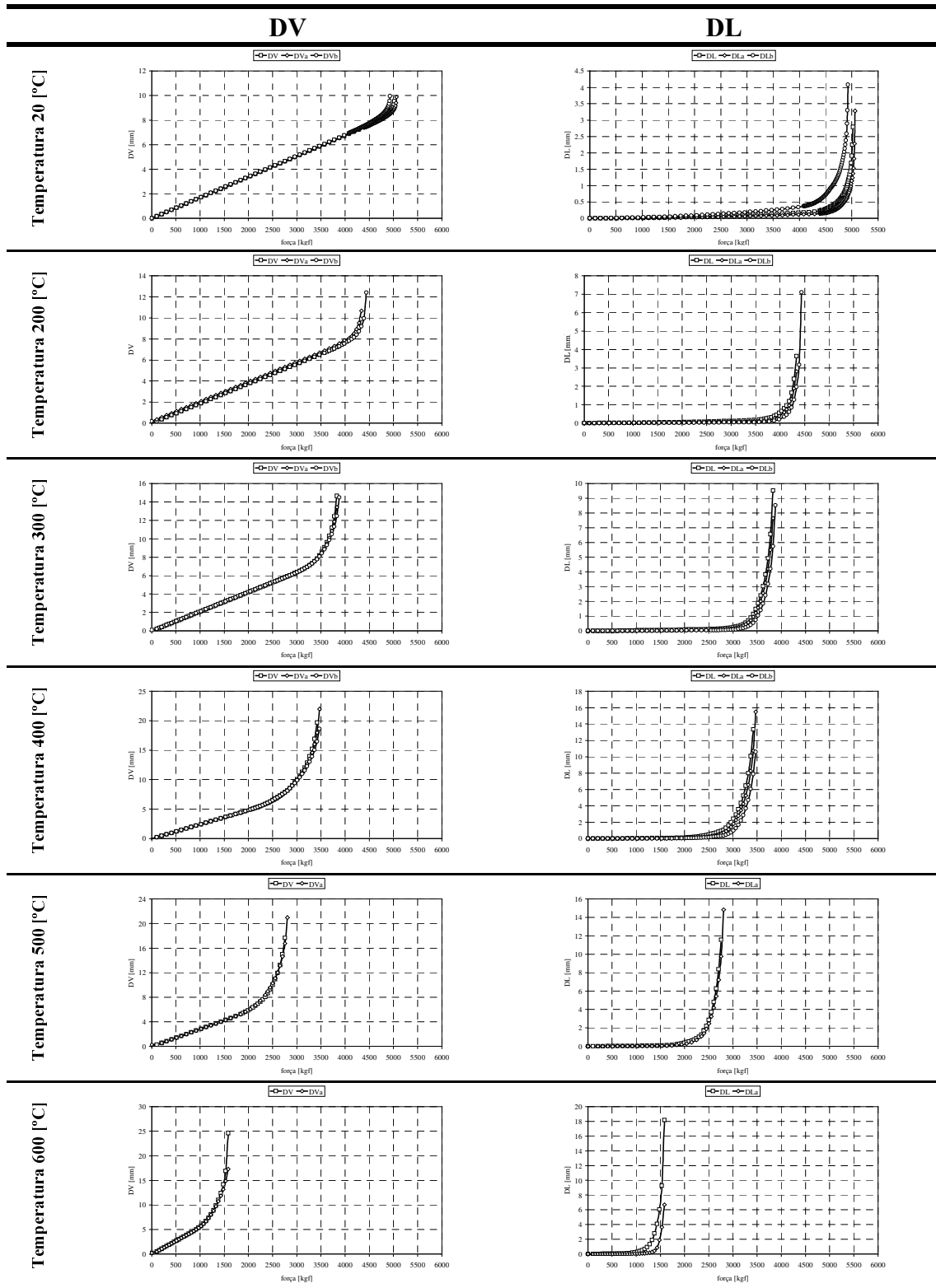


Fig. 9.1.2 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 1.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

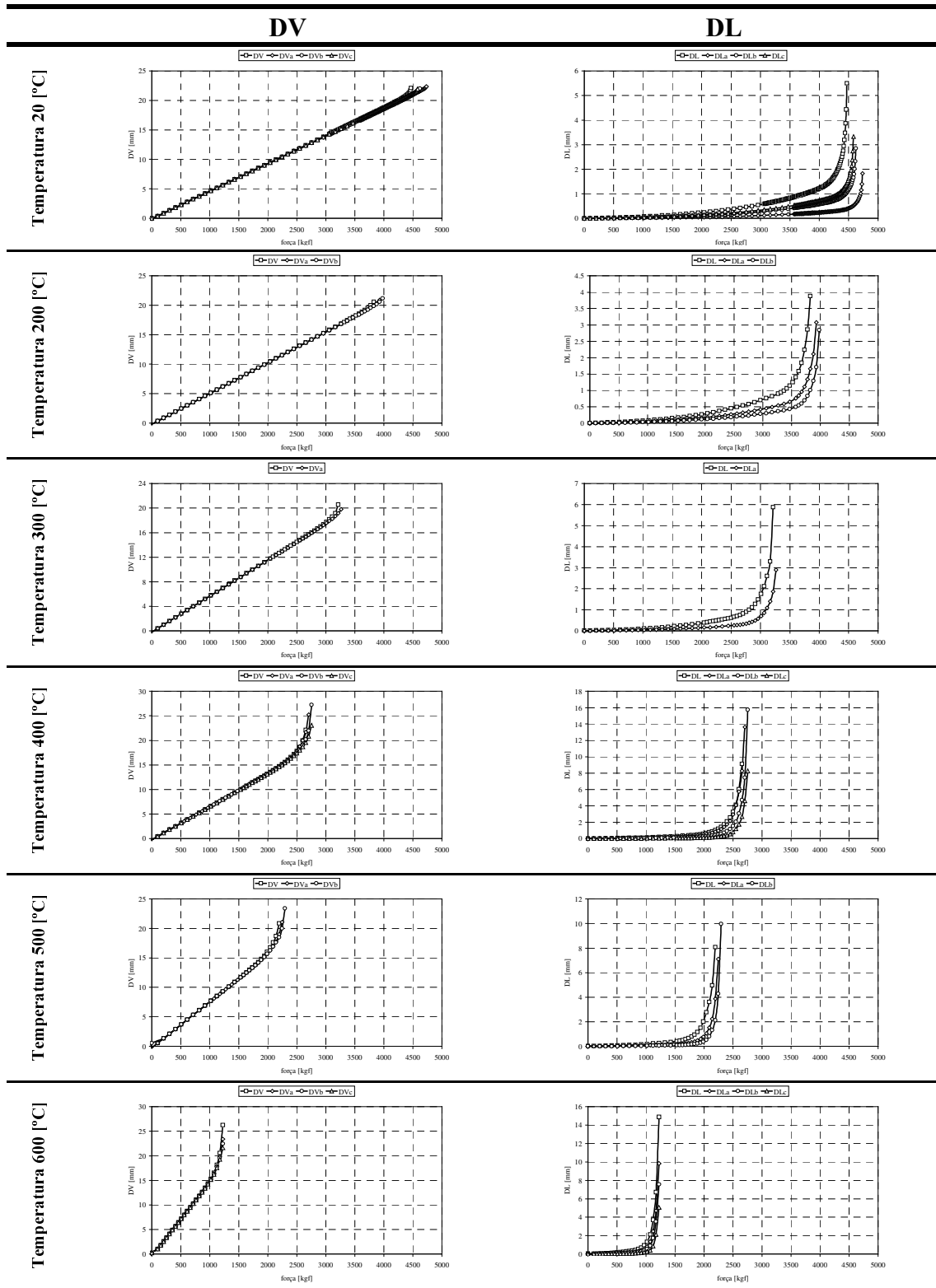


Fig. 9.1.3 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 2.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

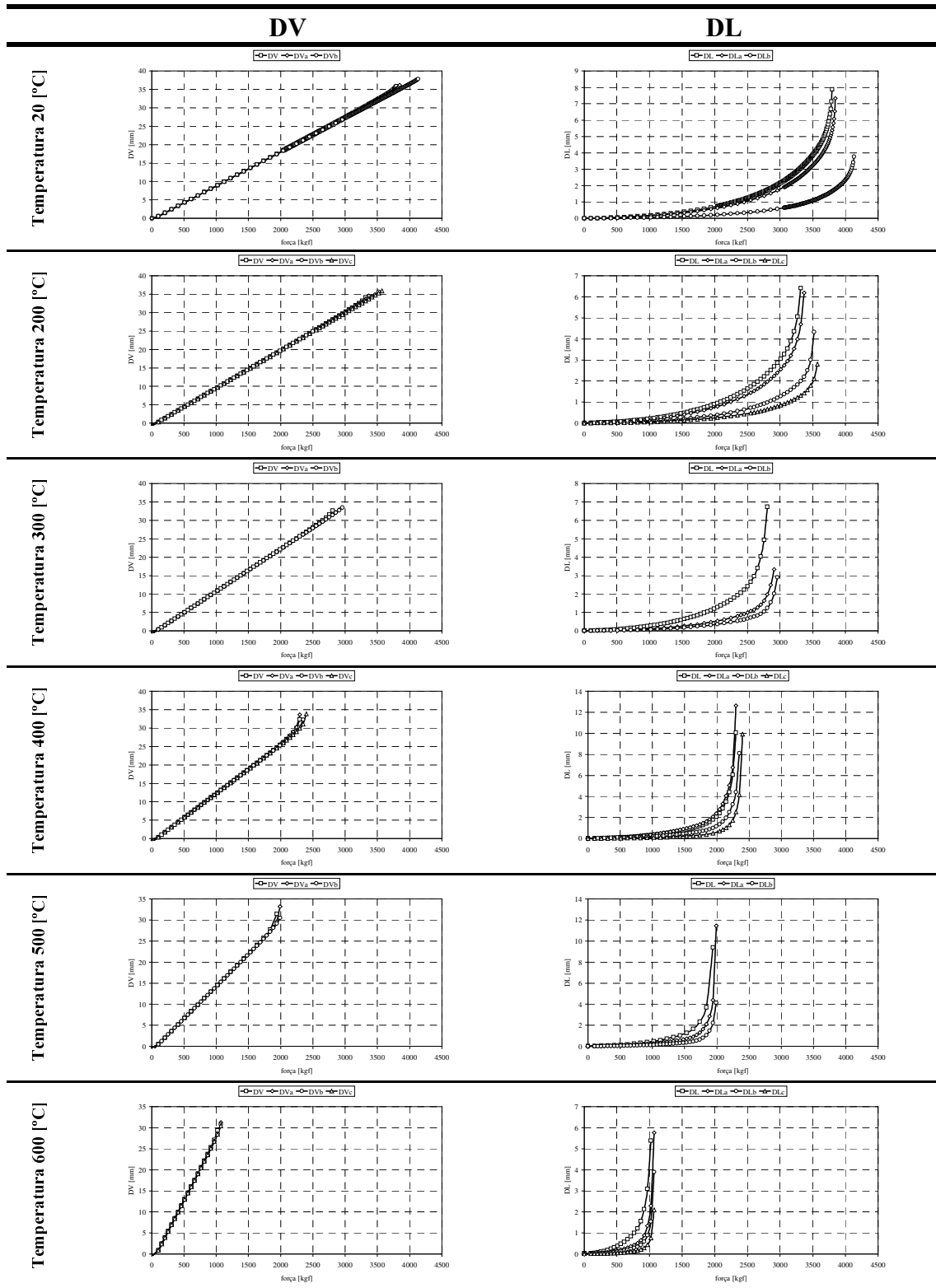


Fig. 9.1.4 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 3.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

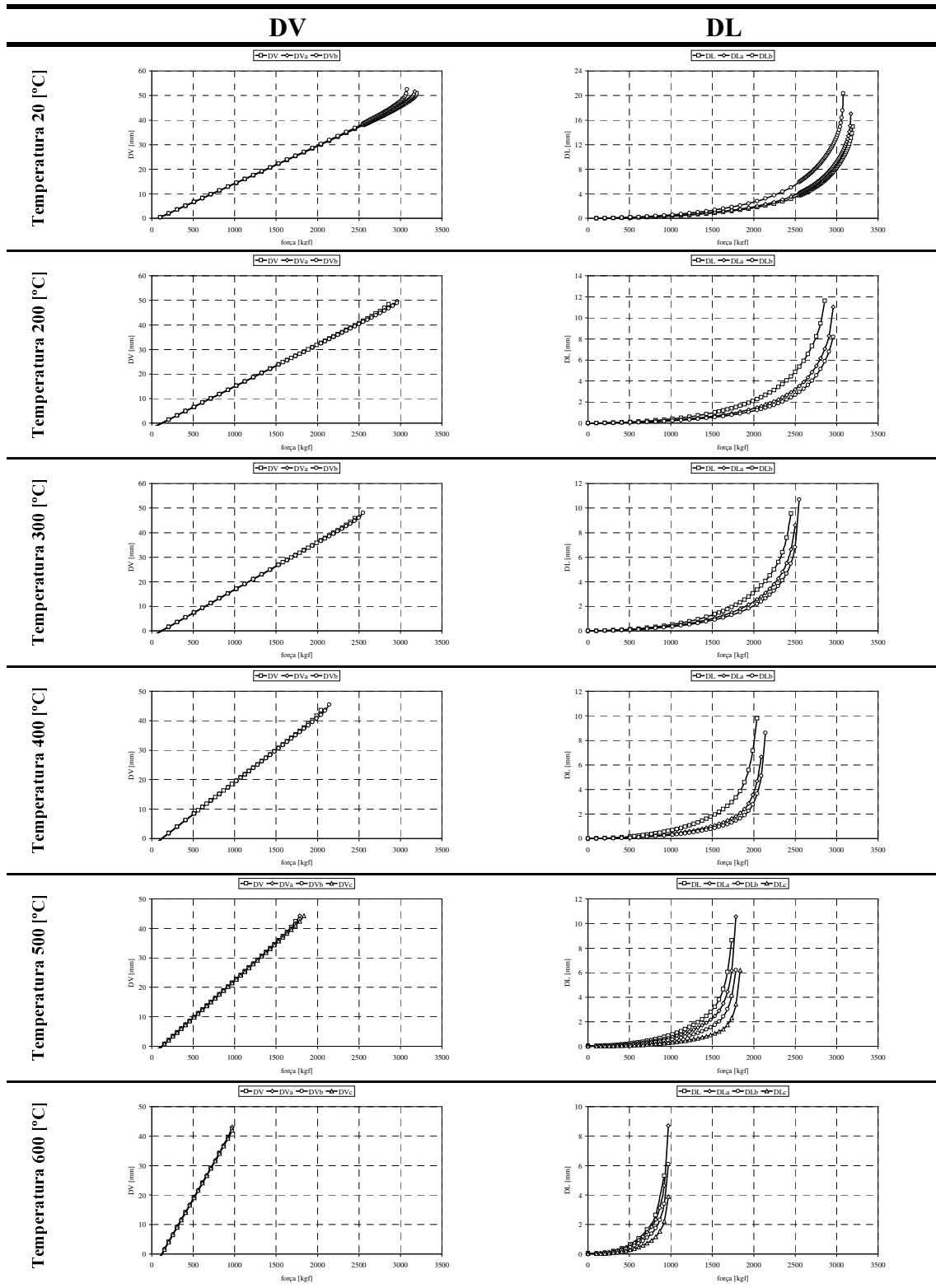


Fig. 9.1.5 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 4.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

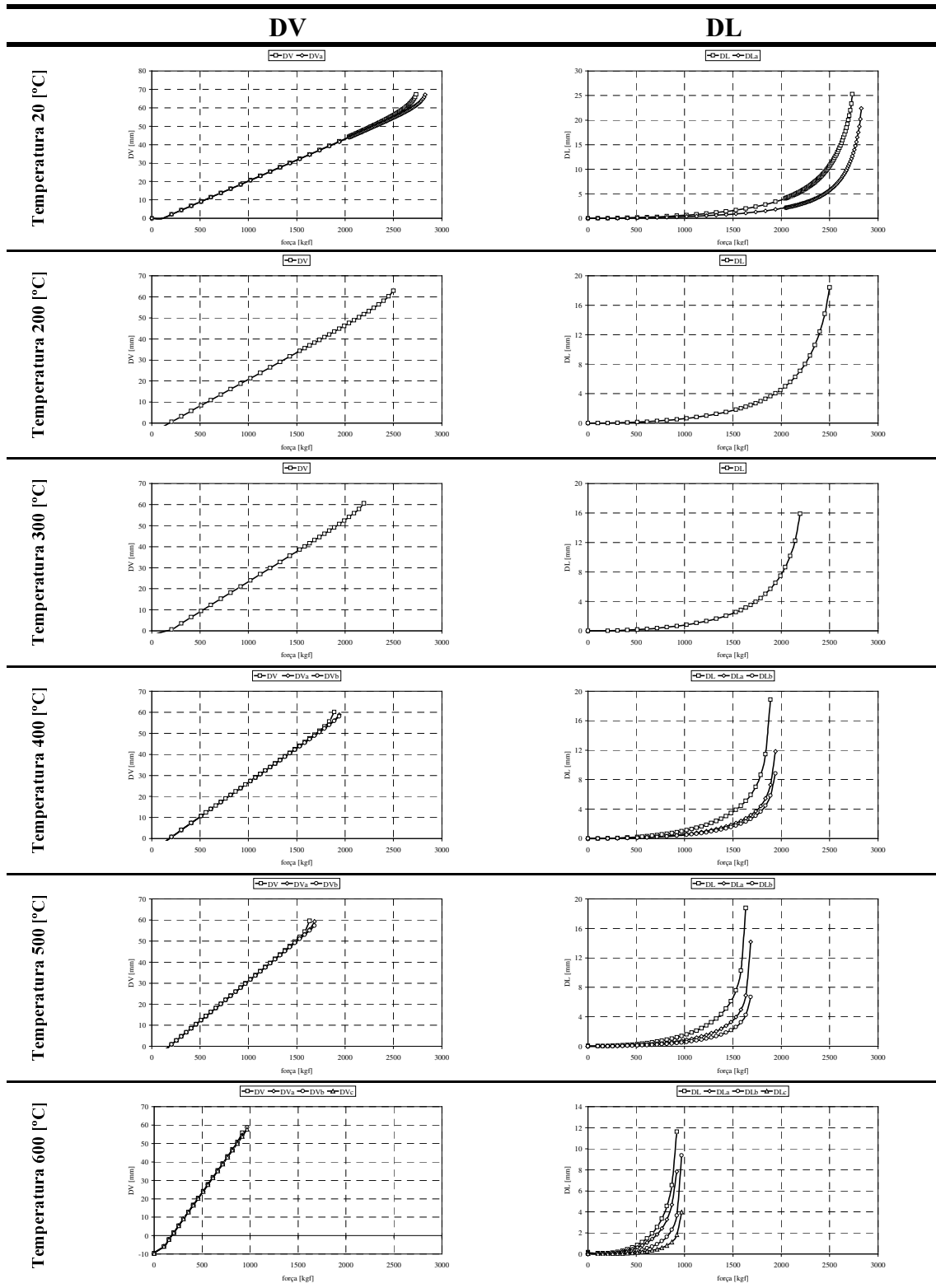


Fig. 9.1.6 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 5.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

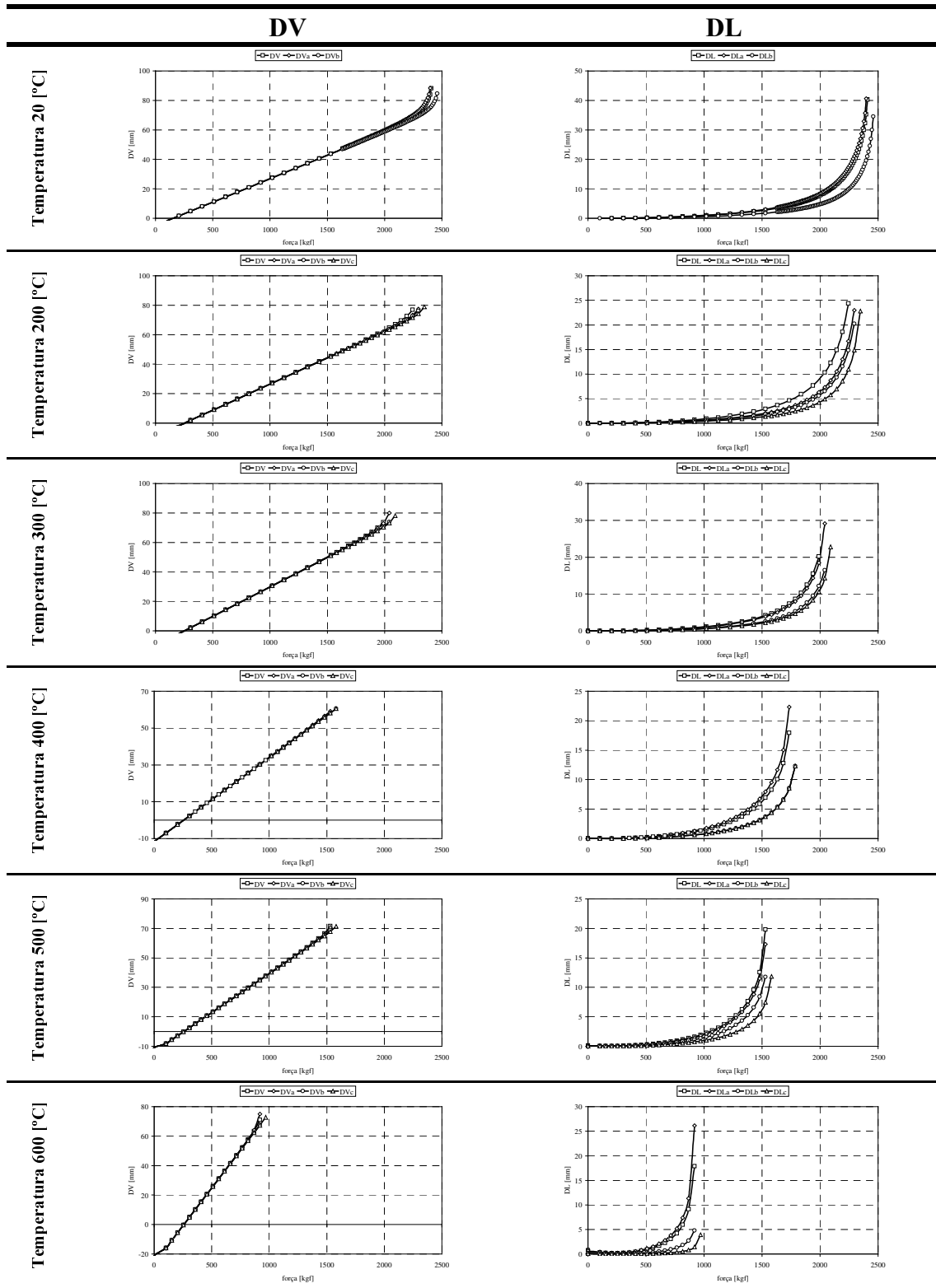


Fig. 9.1.7 - Deslocamentos a meio vão das vigas com 6.5 [m], para diferentes temperaturas de solicitação.

Capítulo 10

Conclusões e perspectivas de desenvolvimentos futuros

10.1. – Conclusões

O objectivo deste trabalho consistia na análise de estruturas metálicas quando submetidas à acção do fogo. Este estudo compreendeu a análise experimental e numérica de estruturas metálicas e de elementos submetidos a um estado de instabilidade estrutural designado por encurvadura lateral torsional, em situação de temperaturas elevadas.

As estruturas metálicas quando submetidas à acção do fogo apresentam uma redução significativa da capacidade resistente, principalmente provocada pela alteração das respectivas propriedades mecânicas. Estas propriedades apresentam grandes alterações de valor com o aumento da temperatura, tornando o processo não linear. Este efeito reduz substancialmente a resistência ao fogo das estruturas, devendo os projectistas ser capazes de prever a capacidade resistente de uma estrutura aquando da ocorrência de um incêndio.

A combinação de acções de acidente foi utilizada na análise de uma estrutura porticada, sujeita à curva de incêndio padrão ISO834.

Relativamente à instabilidade estrutural, foi estudado o fenómeno da encurvadura lateral de vigas em situação de temperaturas elevadas. A utilização de modelos numéricos e experimentais possibilitaram determinar o comportamento de vigas naquelas condições. Foi ainda possível validar a curva de cálculo de vigas à encurvadura lateral, a partir do momento resistente último do elemento.

O modelo numérico recorreu ao método dos elementos finitos permitindo a análise de comportamentos não lineares geométricos e materiais de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos. Relativamente ao comportamento material, foram utilizadas relações não lineares de tensão - deformação, bem como outras variações de propriedades com a temperatura, de acordo com as indicações apresentadas pelo Eurocódigo 3. Neste modelo a fluência é introduzida de maneira implícita, através do amaciamento das relações de tensão deformação.

O modelo experimental foi construído totalmente para este fim, recorrendo a dois conjuntos de equipamento diferentes, um para a acção térmica e outro para a acção mecânica. No primeiro caso a simulação do processo de aquecimento recorreu a um

centro de aquecimento potente, capaz de produzir um fluxo de calor para o elemento através de um processo electro-resistivo, enquanto que no segundo caso, foram utilizados dois actuadores hidráulicos para proporcionar o aumento incremental da carga nas extremidades das vigas em estudo, até atingir a carga de colapso. Esta carga foi considerada a partir do momento em que o deslocamento controlado a meio vão da viga continuaria a aumentar sem que se verificasse um acréscimo da carga.

Todos os ensaios foram realizados em perfis comerciais IPE100, tendo sido utilizado um total de 500 [m], originários de 46 perfis. Estes foram posteriormente cortados nos comprimentos de ensaio em estudo, que variaram entre os 0.5 [m] e os 6.5 [m]. A caracterização do estado inicial dos perfis em função das imperfeições geométricas, qualidade do aço e estado de tensão residual, possibilitou o desenvolvimento de metodologias de ensaio experimental, ao nível das medições, aquisições de dados e de procedimentos de ensaios que enriqueceram técnica e cientificamente este estudo. Os ensaios foram efectuados recorrendo ao equipamento referido no capítulo 8, sendo de salientar alguns factores que poderão ter tido influência nos resultados obtidos. Assim e em primeiro lugar, a distribuição de temperatura não foi exactamente uniforme ao longo do comprimento da viga, uma vez que o controle de temperatura apenas poderia ser efectuado em seis pontos distribuídos ao longo desta, o que obrigava a uma discretização grosseira dos pontos de controlo. Verificou-se, após medições, que a temperatura nos perfis perto dos apoios seria inferior em cerca de 10 a 20 % relativamente à parte central da viga. Outro factor que poderá ter influenciado os resultados experimentais, prende-se com o fenómeno associado de fluência. Este comportamento viscoso foi visível em alguns ensaios, especialmente nas temperaturas mais elevadas.

O processo de aplicação de momentos na extremidade das vigas ensaiadas obrigou a um afastamento dos actuadores hidráulicos, relativamente aos apoios. Esta distância foi mantida constante durante os ensaios. Este sistema mecânico introduz um constrangimento lateral, induzido pelo apoio e pelo ponto de aplicação da carga, justificando uma diminuição do comprimento efectivo de encurvadura.

Com base nos dois estudos (numérico e experimental), foi possível validar a nova proposta de cálculo simples de vigas à encurvadura lateral em situação de temperaturas elevadas. Os resultados numéricos e experimentais demonstram a falta de segurança da curva de cálculo apresentada pelo Eurocódigo 3.

10.2. – Perspectivas de desenvolvimentos futuros

No seguimento do trabalho realizado seria importante a realização de mais ensaios experimentais, eventualmente com outros comprimentos de encurvadura, outras secções rectas, outras qualidades de aço, outras condições de apoio e outros tipos de carregamento, para que se pudesse verificar a influência de cada um destes factores na determinação da curva de cálculo de vigas à encurvadura lateral.

Os ensaios experimentais foram efectuados a temperaturas constantes, pelo que seria conveniente a realização de ensaios que seguissem a evolução da temperatura de acordo com uma das curvas de incêndio normalizado, como por exemplo a curva ISO834.

O tipo de apoio utilizado nos ensaios podem de alguma forma ser responsáveis pela introdução de um excesso de rigidez no sistema, devido ao aperto lateral efectuado. Por outro lado, os actuadores hidráulicos impuseram também restrições ao deslocamento lateral da viga. A influência destas condições deverá, por isso, ser investigada.

A utilização de curvas normalizadas paramétricas com elevação da temperatura a valores superiores aos ensaiados, com processo de arrefecimento, alteram significativamente a micro estrutura do aço, pelo que seria conveniente efectuar estudos precisos da viabilidade de reabilitação estrutural dos componentes, depois de terem sido submetidos a este tipo de aquecimento.

A metodologia dos ensaios efectuados, considerou que o efeito térmico de aumento e estabilização da temperatura ao longo de toda a viga, deveria preceder o início do carregamento mecânico dos actuadores hidráulicos. Deveria pois ser estudada a possibilidade de efectuar o processo de elevação de temperatura após carregamento mecânico, e determinar desta forma a temperatura de colapso da viga. Esta nova metodologia apresenta a dificuldade de controlo dimensional do comprimento de encurvadura, no entanto será capaz de traduzir o efeito de um elemento estrutural numa situação de incêndio real e possibilitar a determinação da resistência do elemento na situação descrita, em função da temperatura.

Pensamos também que seria conveniente estudar o efeito da temperatura no valor das tensões residuais, efectuando medições experimentais, antes e depois do aquecimento.

Relativamente às simulações numéricas seria interessante considerar a hipótese da formulação do efeito de corte na parte da flexão do elemento de viga, através da formulação de um elemento finito com efeito de corte, especialmente para os casos de vigas de menor comprimento. Seria também conveniente desenvolver outros tipos de elementos finitos, mais próximos do comportamento tridimensional, como é o caso do elemento de casca.

ERRATA

Página	Linha	Onde se lê:	Deve ler-se:
5	9	- transverso	- transverso; espessura do banzo
1.4	11	aspecto	aspectos
2.4	3	poucos	pouco
3.2	18	deverão ser considerados	deverá ser considerado
4.2	25	a um diferente	a um referencial espacial fixo
4.6	24	$\int_V \sigma_{ij}^* \delta \varepsilon_{ij}^* dV^* = \int_V b_i^* \delta u_i dV^* + \int_A t_i^* \delta u_i dA^*$	$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V b_i \delta u_i dV + \int_A t_i \delta u_i dA$
4.9	13	desta	deste
4.21	17	e deverão	e C deverão
4.25	15	equação 4.69	equação 4.87
4.26	12	equação 4.73	equação 4.91
4.39	12	x	X
4.40	13	de	se
4.45	24	subestimada	sobrestimada
4.46	3	subestima	sobrestima
4.46	29	Considerando	Considere-se
4.47	5	$u(x, y, z) = \alpha_x \times \omega(y, z)$ $v(x, y, z) = z \times \alpha_x$ $w(x, y, z) = -y \times \alpha_x$	$u(x, y, z) = \alpha \times \omega(y, z)$ $v(x, y, z) = z \times \alpha_x$ $w(x, y, z) = -y \times \alpha_x$
4.51	17	tomar	tornar
5.19	21	equações 5.63 e 5.64	equações 5.64 e 5.65
5.23	5	intumescentes	intumescentes
5.23	9	intumescentes	intumescentes
6.1	26	desempenham	desempenhar
6.12	6	a) perfil sem efeito térmico da laje e sem isolamento; b) perfil com efeito térmico da laje e sem isolamento, perfil com isolamento e sem efeito térmico da laje.	a) deslocamento axial; b) deslocamento transversal; c) deslocamento resultante.
7.24	13	EI_η , que por sua vez será proporcional ao módulo de elasticidade E .	EI_η e que por sua vez será proporcional ao módulo de elasticidade E .
7.26	21	$M_{b,fi,rd} = \frac{\chi_{LT,fi}}{1.2} W_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y \frac{1}{\gamma_{M,fi}}$	$M_{b,fi,rd} = \frac{\chi_{LT,fi}}{1.2} W_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y \frac{1}{\gamma_{M,fi}}$
7.28	17	$M_{b,fi,rd} = \chi_{LT,fi} W_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y \frac{1}{\gamma_{M,fi}}$	$M_{b,fi,rd} = \chi_{LT,fi} W_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y \frac{1}{\gamma_{M,fi}}$
7.29	11	$\bar{\lambda}_{LT} = 0.4$	$\bar{\lambda}_{LT,\theta,com} = 0.4$
7.29	14	Vila real	Vila Real
8.24	15	rectas	rectas
8.41	8	$(M_0)_{cr}^* = \alpha_M \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \times \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}}$	$(M_0)_{cr}^* = \alpha_M \frac{\pi^2 EI_x}{(kL)^2} \times \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \frac{I_w}{I_x} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_x}}$
9.1	16	experimentais	experimentais
9.5	Legenda	SAFIR - 200[°C]	SAFIR - temperatura ambiente

Note: O número de “Linha” é contado desde o topo da página, sempre que exista texto, excluindo cabeçalhos.