



FEUP Universidade do Porto
Faculdade de Engenharia

**ESTUDOS PARAMÉTRICOS SOBRE A INSTABILIDADE
DE PÓRTICOS METÁLICOS
BIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS**

MANUEL TEIXEIRA BRAZ CÉSAR

*Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
da Universidade do Porto, para obtenção do grau de
Mestre em Estruturas de Engenharia Civil*

*Dissertação realizada sob a supervisão do Professor
Rui M. M. Carneiro de Barros
Departamento de Engenharia Civil da
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*

Porto, Dezembro de 2004

ÍNDICE GERAL

RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
RÉSUMÉ.....	vii
RESUMEN.....	viii
AGRADECIMENTOS.....	ix
ÍNDICE DE TEXTO.....	xiii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xvii
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	xxiii
ÍNDICE DE QUADROS.....	xxv
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D E 3D.....	13
CAPÍTULO 3 – MÉTODOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA.....	81
CAPÍTULO 4 – CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE.....	125
CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS.....	161
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	235
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	241
ANEXO A.....	249

RESUMO

O estudo de estruturas deve ser realista para que se tenha um perfeito conhecimento do seu comportamento, pelo que é necessário analisar não só a capacidade resistente em regime linear, mas também a estabilidade do modelo estrutural, sobretudo em estruturas tridimensionais onde esta análise é mais complexa.

Neste contexto, o objectivo desta tese consiste na elaboração de uma análise não linear geométrica de estruturas metálicas reticuladas 2D e 3D, com o recurso a formulações exactas e aproximadas da matriz de rigidez, variando parâmetros geométricos previamente definidos e representando graficamente a sua influência no comportamento da estrutura em estudo.

Para concretizar este objectivo foi desenvolvida, conjuntamente pelo autor da dissertação e pelo orientador científico, uma ferramenta computacional (INST3D) baseada num método simplificado de análise de estruturas 3D (3 graus de liberdade por piso), com a formulação exacta da matriz de rigidez total. Como a maioria dos pacotes comerciais se fundamentam numa abordagem aproximada com formulações simplificadas da matriz de rigidez total, torna-se necessário aferir o seu rigor, e conseqüentemente, a possibilidade deste software realizar análises de 2ª ordem. Também são apresentadas as bases teóricas usadas para este tipo de análise, nas quais se fundamentam os seus algoritmos de resolução.

Assim, foi comparado o INST3D com pacotes comerciais, universalmente utilizados na investigação e projecto de estruturas de engenharia civil, nomeadamente o SAP2000, LUSAS e ANSYS. Em primeiro lugar, utilizaram-se estruturas com solução analítica conhecida para calibrar este software e posteriormente, em função do resultado obtido, seleccionaram-se os parâmetros que devem ser utilizados em cada programa para obter um resultado rigoroso.

Após a calibração do software, realizou-se o estudo paramétrico de várias estruturas 2D e 3D constituídas por pórticos metálicos rectangulares. Nesta abordagem, torna-se importante a garantia de que a estrutura mantenha a sua geometria e tipologia após carregamento, pelo que se introduziram elementos de contraventamento como sistemas estabilizadores da geometria da estrutura, permitindo desta forma aumentar a sua capacidade resistente.

Finalmente, são apresentadas as conclusões sobre o estudo elaborado neste trabalho, apontando caminhos para o desenvolvimento de futuras investigações que permitam aprofundar a análise de instabilidade em estruturas tridimensionais.

ABSTRACT

The study of structures must be realistic in order to have a perfect knowledge of its behavior, by which it is necessary not only to analyze its resistant capacity under linear behavior but also the stability of the structural model, namely in three-dimensional structures where this analysis is more complex.

The purpose of this thesis consists in the accomplishment of parametric studies on the bi-dimensional and three-dimensional frame global instability. In this way it is intended to proceed to geometric nonlinear analyses of framed structures, through exact formulations of the stiffness matrix, varying geometric parameters previously defined to graphically represent the influence of each parameter in the behavior of the studied structures.

To proceed the study was developed jointly, by the author of the thesis and the scientific advisor, a computational tool named INST3D that appeals to a simplified method of analyses of 3D structures with the exact formulation of the global structure stiffness matrix. As the majority of commercial software packages are based on the Finite Element Method (FEM) with approximate formulations of the stiffness matrix, it becomes necessary to survey the accuracy, and consequently the possibility, to carry out 2nd order analyses. Still in this context the theoretical bases for these type of analyses are presented, to clarify the algorithms of the mentioned computational tools.

Thus, INST3D was compared with commercial packages universally used in the design of civil engineering structures, namely SAP2000, LUSAS and ANSYS. Firstly, known structures with analytical solution have been used to calibrate the afore-mentioned software and later, attending on the obtained results, some conclusions were drawn on characteristics that must be used in each software to get a rigorous result.

After carrying out the software calibration, a parametric study of 3D rectangular framed structures was made. Since it must be guaranteed that a variety of structure geometry and tipology is not significantly affected after loading, the introduction of bracing elements to stabilize the structural geometry becomes important, to allowing the resistant capacity to increase.

Finally the conclusions on the study elaborated in this work are presented and future development are pointed-out in order to deepen the instability analysis in three-dimensional structures.

RESUMÉ

L'étude de structures doit être réaliste pour laquelle il faut une parfaite connaissance de son comportement. Dans ce contexte, il est nécessaire d'analyser non seulement sa capacité résistante en régime linéaire, mais aussi la stabilité du modèle structurel, notamment dans des structures tridimensionnelles où cette analyse est plus complexe.

Ainsi, l'objectif de cette thèse consiste à la réalisation d'études paramétriques sur l'instabilité des ossatures bidimensionnelles et tridimensionnelles. De cette façon on prétend procéder à une analyse non linéaire géométrique de ossatures tridimensionnelles, avec un recours à des formulations exactes et approximatives de la matrice de rigidité, en variant des paramètres géométriques préalablement définis de manière à représenter graphiquement l'influence de chaque paramètre dans le comportement des structures en étude.

Pour procéder à l'étude il fut développé, communément par l'auteur de cette dissertation et par l'orienteur scientifique, un outil informatique désigné par INST3D dont on a fait appel à une méthode simplifiée d'analyse des structures 3D avec la formulation exacte de la matrice de rigidité totale. Comme la majorité des logiciels commerciaux se basent dans un abordage approché, avec des formulations approximatives de la matrice de rigidité, il est nécessaire d'examiner la netteté et en conséquence la possibilité de réaliser des analyses de 2^{ème} ordre. Egalement dans ce contexte, sont présentées les bases théoriques utilisées, dans lesquelles se basent les algorithmes de résolution. Ainsi, ont été comparé l'INST3D avec des logiciels commerciaux utilisés dans la recherche et le projet de structures d'ingénierie civil, notamment SAP2000, LUSAS et ANSYS. D'abord on a utilisé des structures avec la solution analytique connue pour calibrer le logiciel utilisé et ensuite en fonction du résultat obtenu on a sélectionné les paramètres qui doivent être utilisés dans chaque programmes pour obtenir un résultat rigoureux.

Après avoir réalisé le calibrage du logiciel, on a procédé à la réalisation d'une étude paramétrique de structures 3D constituées par des ossatures rectangulaires. Dans cet abordage, l'important c'est la garantie que la structure maintient de sa géométrie après expédition, par laquelle on a introduit des éléments de contreventements des bâtiments pour stabiliser la géométrie des structures, ce qui a donc permis d'augmenter sa capacité résistante.

Finalement, sont présentées les conclusions sur l'étude élaborée dans ce travail et sont indiquées quelques données pour le développement de futures recherches, qui permettent d'approfondir l'étude de l'instabilité des structures tridimensionnelles.

RESUMEN

El estudio de estructuras tiene que ser realista para posibilitar un conocimiento profundo de su comportamiento, siendo necesario analizar, no solo su capacidad resistente en régimen lineal, pero también la estabilidad del modelo estructural, sobretodo en estructuras tridimensionales donde este análisis es mas complejo.

El objetivo de esta tesis consiste en la realización de un análisis no lineal geométrico (inestabilidad) de pórticos metálicos, recurriendo a formulaciones exactas y aproximadas de la matriz de rigidez, variando parámetros geométricos previamente definidos estudiando su influencia en el comportamiento estructural.

Se desarrollo, conjuntamente por el autor de esta disertación y el orientador científico, una herramienta computacional, designada por INST3D, que utiliza un método simplificado de análisis de inestabilidad de estructuras 3D, con la matriz de rigidez total exacta. Como la mayoría del software comercial se fundamenta en un abordaje aproximado de la matriz, es necesario verificar su rigor y la posibilidad de realizar este tipo de análisis. También se presentan las bases teóricas, en las cuales se fundamentan sus algoritmos de resolución.

El software INST3D fue comparado con programas comerciales utilizados en la investigación y proyecto de estructuras de ingeniería civil, como SAP2000, LUSAS y ANSYS. En primer lugar y para calibrar el software, se utilizaron estructuras con solución analítica conocida, seleccionando, en función del resultado obtenido, los parámetros que deben ser utilizados en cada programa para obtener un resultado riguroso.

Después de haber realizado la calibración del software, se procedió a la realización de un estudio paramétrico de estructuras 2D y 3D constituidas por pórticos metálicos rectangulares. En este abordaje es importante garantizar que la estructura mantiene su geometría pos-cargamento, por lo que se introduzco elementos de arriostramiento para estabilizar la geometría de las estructuras, aumentando su capacidad resistente.

Los resultados obtenidos son expuestos en tablas y gráficos para facilitar su interpretación.

Finalmente, son presentadas las conclusiones sobre el estudio elaborado en este trabajo y son apuntados algunos caminos para el desenvolvimiento de futuras investigaciones, que permitan profundar el estudio de la inestabilidad de estructuras tridimensionales.

AGRADECIMENTOS

Embora a presente dissertação seja apresentada como o resultado de um trabalho individual é, na verdade, o corolário resultante de um conjunto de ensinamentos que o autor foi colecionando no decorrer do seu processo de aprendizagem. Neste sentido, todo o trabalho de formação, de construção dos conhecimentos, assim como a obtenção dos objectivos propostos, não seriam possíveis sem o apoio e incentivo de várias pessoas. Desta forma, pretendo agradecer a todos os que contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Em primeiro lugar, ao Prof. Dr. Rui Manuel Menezes Carneiro de Barros, orientador científico, pela disponibilidade, pelo apoio, pela amizade e pela partilha de conhecimentos sem os quais não seria possível a realização deste trabalho.

Ao Director do Curso de Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil, Prof. Dr. Raimundo Delgado, pela disponibilidade para resolver os problemas que surgiram no decorrer do curso.

Aos meus colegas do Curso de Mestrado, em especial ao Bruno Maia, Diogo Azevedo e Pedro Costa, pela amizade, pela partilha de conhecimentos e pelo agradável convívio que proporcionaram.

Ao Eng.º Ilídio Faria, pela amizade e apoio, mas sobretudo pelos ensinamentos transmitidos, que permitiram completar a minha formação, aumentando quantitativa e qualitativamente o nível de conhecimentos.

Aos colegas da Escola Superior de Tecnologia e de Gestão (ESTiG) do Instituto Politécnico de Bragança (IPB), pelo apoio prestado nos momentos de maior aperto e pelas sugestões sobre a realização da dissertação, que permitiram simplificar o processo de conclusão da mesma.

Aos elementos da Direcção da ESTiG, pelo incentivo e apoio prestado no decorrer do curso de Mestrado.

Às funcionárias da Secção de Estruturas, D. Clotilde Bento, D. Maria Vitória, D. Elvira Moreira, Marta Lima e Rita Araújo, o meu agradecimento pela colaboração prestada.

Às funcionárias da Secretaria de Pós-graduação, em particular à Carla Silva, pelo apoio prestado durante o curso de Mestrado.

Agradecimentos

Aos meus amigos, que directa ou indirectamente contribuíram para a finalização deste trabalho.

Aos meus pais e irmãos, pela forma insuperável como me acompanharam e ajudaram, e sem os quais este trabalho não teria sido possível.

À restante família, pelo encorajamento, entusiasmo, amizade e paciência com que me acompanharam ao longo deste tempo.

Finalmente, um agradecimento muito especial à minha esposa, Ana Ribeiro, pela compreensão, carinho, paciência, o apoio que sempre demonstrou e sobretudo, pela ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus Pais,
à Lia e a Lara,
à Catarina.

ÍNDICE DE TEXTO**CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

1.1 ASPECTOS GERAIS.....	1
1.2. OBJECTIVOS DO TRABALHO.....	9
1.3. ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO.....	11

CAPÍTULO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D E 3D

2.1 INTRODUÇÃO.....	13
2.2 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA.....	15
2.3 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D.....	19
2.3.1 Matriz de Rigidez Exacta 2D.....	20
2.3.1.1 Modelação sem translação das extremidades.....	20
2.3.1.2 Modelação com translação das extremidades.....	23
2.3.1.3 Modelação com ligações semi-rígidas.....	30
2.3.2 Matriz de Rigidez Aproximada 2D.....	36
2.3.2.1 Modelação com translação das extremidades.....	38
2.4 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 3D.....	44
2.4.1 Matriz de Rigidez Exacta 3D.....	44
2.4.1.1 Formulação de Chen e Lui.....	45
2.4.1.2 Formulação de Ekhande, Selvappalam e Madugula.....	48
2.4.1.3 Formulação de Eock, Yosuk e Hyu.....	60
2.4.1.4 Formulação de Marina Mijalković.....	66
2.4.2 Matriz de Rigidez Aproximada 3D.....	68
2.5 CARGAS NOS VÃOS.....	77
2.6 NOTA FINAL.....	79

CAPÍTULO 3 – MÉTODOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

3.1 INTRODUÇÃO.....	81
3.2 MODELAÇÃO ESTRUTURAL.....	82
3.2.1 Método dos Elementos Finitos.....	89
3.2.2 Método dos 3GL/piso – Software INST3D.....	99
3.2.2.1 Determinação da carga crítica em pórticos 2D.....	107
3.2.2.2 Instabilidade de pórticos de nós fixos.....	109
3.2.2.2.1 Determinação da carga crítica.....	110
3.2.2.3 Instabilidade de pórticos de nós móveis.....	112
3.2.2.3.1 Determinação da carga crítica.....	112
3.2.2.4 Instabilidade de pórticos com barras diagonais.....	113
3.2.2.5 Instabilidade de pórticos 3D.....	119
3.2.2.5.1 Matriz de transformação.....	120
3.2.2.5.2 Determinação da carga crítica.....	122
3.2.2.5.3 Determinação dos modos de instabilidade.....	123
3.3 NOTA FINAL.....	124

CAPÍTULO 4 – CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE

4.1 INTRODUÇÃO.....	125
4.2 CALIBRAÇÃO.....	126
4.2.1 Caso 1 – Pórtico 2D – nós fixos e nós móveis.....	136
4.2.2 Caso 2 – Modelação com elementos do tipo SHELL.....	145
4.2.3 Caso 3 – Pórticos com ligações semi-rígidas.....	151
4.2.4 Caso 4 – Pórtico 3D – Razzaq e Naim (1980).....	156
4.2.5 Caso 5 – Pórtico 3D – nós fixos.....	158
4.3 NOTA FINAL.....	160

CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS

5.1 INTRODUÇÃO.....	161
5.2 SISTEMA DE CONTRAVENTAMENTO.....	163
5.3 PÓRTICO COM 3 PISOS (2D E 3D)	167
5.3.1 Descrição das estruturas.....	167
5.3.2 Modelação estrutural.....	168
5.3.3 Resultados.....	174
5.4 PÓRTICO 3D COM 5 PISOS.....	192
5.4.1 Descrição da estrutura.....	192
5.4.2 Resultados.....	197
5.4.2.1 Variação de L e H.....	199
5.4.2.2 N° de pisos da laje L3 (com variação de L e H)	203
5.4.2.3 N° de pisos das lajes L2 e L3 (com variação de L e H)..	216
5.5 PÓRTICO 3D COM 10 PISOS.....	224
5.5.1 Descrição da estrutura.....	224
5.5.2 Resultados.....	228
5.6 NOTA FINAL.....	232

CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES.....	235
6.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	239

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	241
---------------------------------	-----

ANEXO A

A.1 ALGORITMO – MÉTODO DE JACOBI.....	249
---------------------------------------	-----

ÍNDICE DE FIGURAS**CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

– Figura 1.1 – Modelos de cálculo (relações tensão - extensão).....	1
– Figura 1.2 – Comportamento de um elemento de barra.....	3
– Figura 1.3 – Efeitos P- Δ (a) e P- δ (b).....	4
– Figura 1.4 – Esquema estrutural, equilíbrio na configuração não deformada.....	7
– Figura 1.5 – Equilíbrio na configuração deformada.....	7
– Figura 1.6 – Esquema estrutural idealizado para as teias de aranha – Kwan (2004).....	8
– Figura 1.7 – Análise de 2ª ordem para as teias – Kwan (2004).....	8

CAPÍTULO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D E 3D

– Figura 2.1 – Pórtico 2D: a) configuração não deformada, b) configuração deformada.....	13
– Figura 2.2 – Elemento de barra 3D. Graus de liberdade.....	14
– Figura 2.3 – Modelação estrutural – Pórticos.....	15
– Figura 2.4 – Modos de instabilidade – com e sem deslocamentos laterais.....	17
– Figura 2.5 – Elemento de barra 2D. Graus de liberdade.....	19
– Figura 2.6 – Elemento 2D sujeito a momentos e esforço axial nas extremidades.....	21
– Figura 2.7 – Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal.....	21
– Figura 2.8 – Elemento 2D com translações nas extremidades.....	24
– Figura 2.9 – Elemento 2D com translações nas extremidades – graus de liberdade.....	25
– Figura 2.10 – Ligações. Relação momentos – rotação.....	30
– Figura 2.11 – Momentos e flechas para várias condições de fronteira.....	31
– Figura 2.12 – Elemento 2D com rotação parcial nas extremidades.....	32
– Figura 2.13 – Elemento 2D – graus de liberdade.....	33
– Figura 2.14 – Discretização de um elemento de barra 2D.....	37
– Figura 2.15 – Elemento 2D – configuração deformada.....	38
– Figura 2.16 – Elemento 3D – esforços nas extremidades.....	45

– Figura 2.17 – Elemento 3D – graus de liberdade.....	46
– Figura 2.18 – Elemento 3D – Decomposição nos planos X-Y e X-Z.....	48
– Figura 2.19 – Elemento 3D – Flexão nos planos nos planos a) X-Y e b) X-Z.....	49
– Figura 2.20 – Elemento 3D – Translação no plano X-Y.....	55
– Figura 2.21 – Elemento 3D – Viga-Coluna com rótulas plásticas.....	60
– Figura 2.22 – Elemento 3D – Deformação.....	66
– Figura 2.23 – Elemento 3D – Deformações nos planos.....	66
– Figura 2.24 – Elemento 3D com dois eixos de simetria.....	68
– Figura 2.25 – Elemento 3D: a) tensões, b) deformações.....	72
– Figura 2.26 – Rotação finita nodal.....	73
– Figura 2.27 – Elemento duplamente simétrico, com 14 graus de liberdade.....	75
– Figura 2.28 – Elemento de barra com cargas no vão. Forças de fixação.....	77

CAPÍTULO 3 – MÉTODOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

– Figura 3.1 – Método dos Elementos Finitos (MEF) 3D – Modelação.....	84
– Figura 3.2 – Método dos Elementos Finitos (MEF) 3D – Instabilidade local.....	85
– Figura 3.3 – Modelo de 6 graus de liberdade por nó – Modelação.....	85
– Figura 3.4 – Elemento de barra 3D. Graus de liberdade.....	86
– Figura 3.5 – Método de 3 graus de liberdade por piso – Modelação.....	86
– Figura 3.6 – Sistema equivalente para o método de 3 GL/ piso (dinâmica).....	87
– Figura 3.7 – Sistema equivalente para o método dos pórticos planos.....	88
– Figura 3.8 – Modelação MEF: a) malha, b) mapa de esforços.....	90
– Figura 3.9 – Elementos MEF: a) barra (1D), b) laminar (2D), c) volume (3D).....	91
– Figura 3.10 – Discretização: a) modelo exacto, b) modelo aproximado (MEF).....	91
– Figura 3.11 – Bifurcação de equilíbrio.....	94
– Figura 3.12 – Diafragma rígido no plano.....	99
– Figura 3.13 – Modelação INST3D: a) pórtico 2D, b) associação de pórticos 2D.....	100
– Figura 3.14 – Modelação INST3D – Pórtico 3D: a) planta, b) alçado.....	101
– Figura 3.15 – Elemento de barra 2D. Graus de liberdade.....	102

– Figura 3.16 – Elemento de barra 2D – numeração dos deslocamentos.....	103
– Figura 3.17 – Mobilidade de pórticos: a) pórtico de nós fixos, b) pórtico de nós móveis.....	107
– Figura 3.18 – Pórtico 2D de nós fixos com viga de rigidez infinita.....	108
– Figura 3.19 – Pórtico 2D de nós fixos.....	108
– Figura 3.20 – Pórtico 2D de nós móveis com viga de rigidez infinita.....	108
– Figura 3.21 – Pórtico 2D de nós móveis.....	109
– Figura 3.22 – Pórtico 2D de nós móveis com vários tipos de contraventamento.....	114
– Figura 3.23 – Pórtico 2D contraventados.....	114
– Figura 3.24 – Pórtico 2D contraventado, com comportamento rígido.....	116
– Figura 3.25 – Orientação no espaço de um pórtico 3D.....	120
– Figura 3.26 – Pórtico 2D de nós fixos com viga de rigidez infinita.....	122

CAPÍTULO 4 – CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE

– Figura 4.1 – Elemento de barra 2D. Graus de liberdade.....	128
– Figura 4.2 – BEAM3 – Elemento de barra 2D (ANSYS).....	129
– Figura 4.3 – BM3 – Elemento de barra 2D (LUSAS).....	132
– Figura 4.4 – BM3 – Elemento de barra 2D (LUSAS) – graus de liberdade.....	132
– Figura 4.5 – Pórtico de 1 piso (Azevedo, 1993).....	134
– Figura 4.6 – Pórtico de 1 piso com cargas equivalentes concentradas nos nós.....	135
– Figura 4.7 – Configuração do 1º modo de instabilidade.....	135
– Figura 4.8 – Pórticos 2D: a) nós fixos, b) nós móveis.....	136
– Figura 4.9 – Pórtico 2D de nós fixos – Elementos da matriz de rigidez.....	137
– Figura 4.10 – Pórtico 2D – Modo de instabilidade crítico.....	139
– Figura 4.11 – Pórtico de nós fixos – modos de instabilidade.....	141
– Figura 4.12 – Pórtico 2D de nós móveis – Elementos da matriz de rigidez.....	141
– Figura 4.13 – Pórtico 2D – Modo de instabilidade crítico.....	143
– Figura 4.14 – Pórtico de nós móveis – modos de instabilidade.....	145
– Figura 4.15 – Perfil HE 200B e elemento equivalente SHELL.....	146
– Figura 4.16 – Modelo utilizado (SHELL) – Geometria dos pórticos.....	147
– Figura 4.17 – Modelo utilizado (SHELL) – Modos de instabilidade – nós fixos.....	149

– Figura 4.18 – Modelo utilizado (SHELL) – Modos de instabilidade – nós móveis.....	151
– Figura 4.19 – Pórticos 2D com ligações semi-rígidas: a) nós fixos, b) nós móveis.....	152
– Figura 4.20 – Pórtico 3D, Razzaq e Naim (1980).....	156
– Figura 4.21 – Pórtico 3D, Razzaq e Naim (1980) – Deformada: a) perspectiva, b) alçado...	158
– Figura 4.22 – Pórtico 3D com ligações nodais rígidas – Nós fixos.....	158
– Figura 4.23 – Pórtico 3D de nós fixos – Modos de instabilidade.....	159

CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS

– Figura 5.1 – Modos de instabilidade: Flexão no sentido da menor inércia.....	164
– Figura 5.2 – Modos de instabilidade: Torção pura.....	165
– Figura 5.3 – Modos de instabilidade: Flexão-torção.....	165
– Figura 5.4 – Sistemas de contraventamento.....	165
– Figura 5.5 – Geometria da estrutura 3D (repetição do pórtico base), perspectiva e planta....	167
– Figura 5.6 – Características dos pórticos 2D, que definem a estrutura 3D.....	169
– Figura 5.7 – Geometria dos pórticos 2D, com e sem diagonais de contraventamento.....	170
– Figura 5.8 – Geometria dos pórticos 3D, com e sem contraventamento (simétrico).....	172
– Figura 5.9 – Geometria dos pórticos 3D, com e sem contraventamento (assimétrico).....	173
– Figura 5.10 – Modo de instabilidade para cada pórtico 2D.....	174
– Figura 5.11 – Decomposição de forças nas diagonais para várias relações L /H.....	177
– Figura 5.12 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D sem diagonais (L=3, H=3)	178
– Figura 5.13 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 1 diagonal (L=3, H=3).....	179
– Figura 5.14 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 2 diagonais (L=3, H=3).....	180
– Figura 5.15 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 3 diagonais.....	181
– Figura 5.16 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 2 diagonais (A=20cm ²).....	182
– Figura 5.17 – Modo de instabilidade com 1 diagonal assimétrica (L=3, H=3).....	185
– Figura 5.18 – Modo de instabilidade com 2 diagonais assimétricas (L=3, H=3).....	186
– Figura 5.19 – Modo de instabilidade com 3 diagonais assimétricas (L=3, H=3).....	187
– Figura 5.20 – Modos de instabilidade com 2 diagonais assimétricas (H=3.5).....	190
– Figura 5.21 – Planta do pórtico 3D.....	193

– Figura 5.22 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Esquema estrutural.....	194
– Figura 5.23 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Designação das lajes.....	195
– Figura 5.24 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Variação paramétrica (L3).....	196
– Figura 5.25 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Variação paramétrica (L2 e L3).....	196
– Figura 5.26 – Pórticos 2D associados ao pórtico 3D.....	198
– Figura 5.27 – Distribuição das cargas nos pilares.....	199
– Figura 5.28 – Variação paramétrica (3D) sem contraventamento.....	200
– Figura 5.29 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento (λ_P).....	201
– Figura 5.30 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento ($\lambda_P, \lambda_{2P}, \lambda_{3P}$).....	202
– Figura 5.31 – L3 - Variação paramétrica sem contraventamento.....	203
– Figura 5.32 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 5 pisos.....	206
– Figura 5.33 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 4 pisos.....	206
– Figura 5.34 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 3 pisos.....	207
– Figura 5.35 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 2 pisos.....	207
– Figura 5.36 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 1 piso.....	208
– Figura 5.37 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 0 pisos.....	208
– Figura 5.38 – Comportamento do pórtico com assimetria em alçado L3 (2 pisos).....	209
– Figura 5.39 – L3 – Variação paramétrica com contraventamento.....	210
– Figura 5.40 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 5 pisos.....	213
– Figura 5.41 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 4 pisos.....	213
– Figura 5.42 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 3 pisos.....	214
– Figura 5.43 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 2 pisos.....	214
– Figura 5.44 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 1 piso.....	215
– Figura 5.45 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 0 pisos.....	215
– Figura 5.46 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem contraventamento.....	216
– Figura 5.47 – Comportamento do pórtico com assimetria em alçado L2 e L3 (2 pisos).....	222
– Figura 5.48 – Modos de instabilidade.....	222
– Figura 5.49 – Perspectiva do pórtico com 10 pisos e assimetria em planta.....	224
– Figura 5.50 – Planta do pórtico com 10 pisos.....	225
– Figura 5.51 – Distribuição das cargas verticais.....	227
– Figura 5.52 – Pórticos contraventados.....	227

– Figura 5.53 – Deformadas associadas ao modo de instabilidade.....	228
– Figura 5.54 – 2ª disposição dos elementos de contraventamento.....	229
– Figura 5.55 – Modos de instabilidade.....	229
– Figura 5.56 – Modo de instabilidade (2ª disposição de contraventamento).....	230
– Figura 5.57 – Modos de instabilidade (eliminação de diagonais nos pisos superiores).....	231
– Figura 5.58 – Modos de instabilidade (eliminação de diagonais nos 5 pisos superiores).....	232

ÍNDICE DE GRÁFICOS**CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

- **Gráfico 1.1** – Níveis de análises (comportamento) para um pórtico plano..... **6**

CAPÍTULO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D E 3D

- **Gráfico 2.1** – Funções de estabilidade – compressão..... **29**
- **Gráfico 2.2** – Funções de estabilidade – tracção..... **30**
- **Gráfico 2.3** – Funções de estabilidade exactas e aproximadas..... **43**

CAPÍTULO 4 – CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE

- **Gráfico 4.1** – P. crítico em função da discretização para o pórtico 2D de nós fixos..... **140**
- **Gráfico 4.2** – P. crítico em função da discretização para o pórtico 2D de nós móveis..... **144**
- **Gráfico 4.3** – Variação de λ (k) para cada modo de instabilidade (nós fixos)..... **153**
- **Gráfico 4.4** – Variação de λ (k) para o 1º modo de instabilidade (nós fixos)..... **154**
- **Gráfico 4.5** – Variação de λ (k) para cada modo de instabilidade (nós móveis)..... **155**

CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS

- **Gráfico 5.1** – Variação paramétrica (2D) – sem diagonais..... **175**
- **Gráfico 5.2** – Variação paramétrica (2D) – 1 diagonal..... **175**
- **Gráfico 5.3** – Variação paramétrica (2D) – 2 diagonais..... **176**
- **Gráfico 5.4** – Variação paramétrica (2D) – 3 diagonais..... **176**
- **Gráfico 5.5** – Variação paramétrica (3D) – sem diagonais..... **183**
- **Gráfico 5.6** – Variação paramétrica (3D) – 1 diagonal..... **183**
- **Gráfico 5.7** – Variação paramétrica (3D) – 2 diagonais..... **184**

– Gráfico 5.8 – Variação paramétrica (3D) – 3 diagonais.....	184
– Gráfico 5.9 – Variação paramétrica (3D) – 1 diagonal assimétrica.....	188
– Gráfico 5.10 – Variação paramétrica (3D) – 2 diagonais assimétrica.....	188
– Gráfico 5.11 – Variação paramétrica (3D) – 3 diagonais assimétrica.....	189
– Gráfico 5.12 – Variação paramétrica (3D) sem contraventamento.....	200
– Gráfico 5.13 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento (λP).....	201
– Gráfico 5.14 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento ($\lambda P, \lambda 2P, \lambda 3P$).....	202
– Gráfico 5.15 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.0).....	204
– Gráfico 5.16 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.5).....	204
– Gráfico 5.17 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=4.0).....	204
– Gráfico 5.18 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.0).....	205
– Gráfico 5.19 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.5).....	205
– Gráfico 5.20 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=4.0).....	205
– Gráfico 5.21 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.0).....	211
– Gráfico 5.22 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.5).....	211
– Gráfico 5.23 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=4.0).....	211
– Gráfico 5.24 – L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.0).....	212
– Gráfico 5.25 – L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.5).....	212
– Gráfico 5.26 – L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=4.0).....	212
– Gráfico 5.27 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.0).....	217
– Gráfico 5.28 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.5).....	217
– Gráfico 5.29 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=4.0).....	218
– Gráfico 5.30 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.0).....	218
– Gráfico 5.31 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.5).....	218
– Gráfico 5.32 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=4.0).....	219
– Gráfico 5.33 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.0).....	219
– Gráfico 5.34 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.5).....	220
– Gráfico 5.35 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=4.0).....	220
– Gráfico 5.36 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.0).....	220
– Gráfico 5.37 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.5).....	221
– Gráfico 5.38 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=4.0).....	221

ÍNDICE DE QUADROS**CAPÍTULO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D E 3D**

- **Quadro 2.1** – Momentos nodais equivalentes para uma viga-coluna..... **6**

CAPÍTULO 4 – CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE

- **Quadro 4.1** – Características dos elementos (Azevedo, 1993)..... **134**
- **Quadro 4.2** – Parâmetros de carga associados ao 1º modo de encurvadura..... **135**
- **Quadro 4.3** – HE 200B – propriedades geométricas..... **136**
- **Quadro 4.4** – Erros associados à discretização de barras – Pórtico de nós fixos..... **139**
- **Quadro 4.5** – Erros associados à discretização de barras – Pórtico de nós móveis..... **144**
- **Quadro 4.6** – Características geométricas do perfil HE 200B..... **146**
- **Quadro 4.7** – Parâmetros de carga para o pórtico SHELL de nós fixos..... **148**
- **Quadro 4.8** – Parâmetros de carga para o pórtico SHELL de nós móveis..... **150**
- **Quadro 4.9** – Pórtico de nós fixos (sem molas) – Parâmetros de carga λ **152**
- **Quadro 4.10** – Pórtico de nós fixos (#4 por barra) - λ_{cr} em função da rigidez da mola..... **153**
- **Quadro 4.11** – Pórtico de nós móveis (sem mola) – Parâmetros de carga λ **154**
- **Quadro 4.12** – Pórtico de nós móveis (#4 por barra) - λ_{cr} em função da rigidez da mola.... **155**
- **Quadro 4.13** – Parâmetros de carga e carga crítica total, $(P_{cr})_{Total}$ **157**

CAPÍTULO 5 – ESTUDOS PARAMÉTRICOS

- **Quadro 5.1** – Sistemas de contraventamento – Parâmetro crítico..... **166**
- **Quadro 5.2** – HE 300B – propriedades geométricas..... **168**
- **Quadro 5.3** – Modo de instabilidade (INST3D) com 2 diagonais assimétricas (H=3.5)..... **190**
- **Quadro 5.4** – Cargas permanentes e paredes divisórias..... **192**
- **Quadro 5.5** – Sobrecarga em edifícios – RSA..... **192**
- **Quadro 5.6** – Secções dos pilares (perfis comerciais da série HEA)..... **193**

– Quadro 5.7 – Parâmetros críticos dos pórticos e erros relativos associados ao modelo 2D...	197
– Quadro 5.8 – Secções dos pilares – Perfis HEA.....	226

1 - INTRODUÇÃO

1.1 ASPECTOS GERAIS

No dimensionamento de estruturas com efeitos de 1ª ordem, é necessário proceder a dois tipos de verificações: a resistência, pela capacidade que a estrutura apresenta para suportar os esforços actuantes; e a deformabilidade, para que a estrutura mantenha a forma de projecto ou para que a deformação não prejudique o seu funcionamento durante a vida útil da mesma.

Para satisfazer estes dois requisitos, os projectistas normalmente recorrem a simplificações do comportamento das estruturas, quer do ponto de vista do comportamento dos materiais que a constituem, quer do comportamento estrutural global e da estabilidade da geometria.

Alguns exemplos destas simplificações, associadas ao comportamento das estruturas, podem ser observados nos gráficos da Figura 1.1, nos quais estão representadas várias aproximações do comportamento real de uma estrutura composta por peças de aço macio.

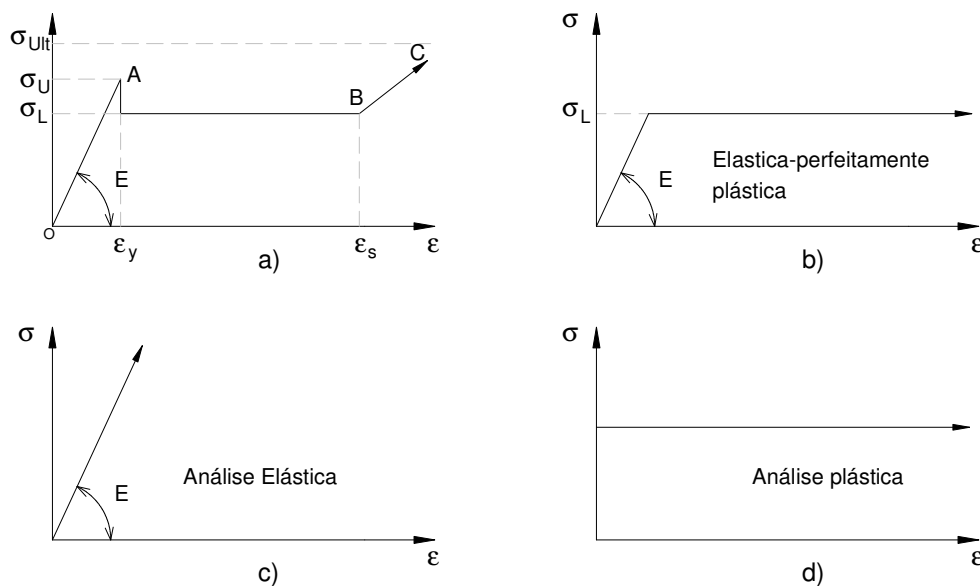


Figura 1.1 – Modelos de cálculo (relações tensão - extensão).

O comportamento real do material, representado na Figura 1.1a, pode ser simplificado em função do tipo de análise que se pretende, adoptando leis constitutivas de fácil utilização no projecto e análise de estruturas de engenharia, Figuras 1.1b, 1.1c e 1.1d. Embora os gráficos apresentados sejam constituídos por troços rectilíneos, na maioria dos casos o comportamento

dos materiais é não linear, e o seu estudo corresponderá a efectuar uma análise não linear material (Chen e Lui 1991, Chen e Sohal 1995).

Na análise de estruturas com efeitos de 1ª ordem, também se admite a hipótese dos pequenos deslocamentos em relação à configuração não deformada da estrutura. Por outras palavras, os deslocamentos elásticos são considerados tão pequenos que a deformada da estrutura coincide com a configuração inicial.

Se os elementos que constituem as estruturas (e as próprias estruturas) apresentarem características geométricas que validem esta hipótese, como em algumas estruturas de betão armado em que os elementos são geralmente pouco esbeltos, então é possível a sua análise sem a consideração das deformações geométricas. No entanto, para estruturas constituídas por elementos de grande esbelteza, como as estruturas metálicas, é necessário contabilizar essas deformações na estabilidade global da estrutura sob pena de não obter o resultado esperado, quer em termos de resistência, quer em termos de deformação (Almeida *et al.* 2003).

Esta simplificação foi utilizada como consequência do método manual de análise de estruturas. A complexidade dos sistemas em estudo requeria a simplificação através da adopção de esquemas estruturais conservativos ou através da subdivisão das estruturas em modelos mais fáceis de analisar. Esta abordagem ainda é preconizada nos regulamentos e códigos existentes como o Eurocódigo (CEN 1992), mas apenas para a realização de pré-dimensionamentos ou para estudar esquemas estruturais simplificados.

À medida que os computadores aumentaram a capacidade de processar informação, a possibilidade de realização de cálculos de grande complexidade com inúmeras variáveis permitiu aos engenheiros estudar o comportamento dos esquemas estruturais. Após introduzir as formulações baseadas no equilíbrio na configuração não deformada das estruturas, aperceberam-se que a deformação condicionava a resposta da estrutura assim como o seu dimensionamento.

Neste contexto, a maior parte das estruturas de engenharia civil apresentam um comportamento elástico linear quando sujeitas a cargas de serviço, pelo que o recurso a análises de 1ª ordem fornece bons resultados, permitindo o seu dimensionamento. Existem, no entanto, excepções a este tipo de funcionamento como o comportamento apresentado por estruturas esbeltas, arcos, edifícios altos e estruturas com zonas sensíveis onde a tensão de cedência ocorre para valores baixos de carregamento ou que possuam elementos com um elevado nível de esforço axial de compressão, pelo que as das referidas análises não podem ser utilizadas, pois, negligenciam a influência da instabilidade estrutural. Estas estruturas têm

de ser, obrigatoriamente, analisadas através de teorias mais precisas, nomeadamente, análises não lineares, que introduzam o comportamento real, quer dos materiais, quer do efeito da deformação da estrutura.

Quando se efectua um análise linear, ou de 1ª ordem, assume-se que a rigidez dos elementos e da própria estrutura permanecem constantes, situação válida, no caso de não existirem esforços axiais nos elementos ou que permanecem constantes durante o processo de análise da estrutura. Assim que os esforços axiais variarem, a rigidez altera-se, e consequentemente a rigidez global da estrutura.

No caso mais simples, para descrever o comportamento de uma estrutura, recorre-se a uma análise elástica, e após obter a resposta da estrutura, o projectista normalmente faz verificações pontuais para contabilizar os efeitos subjacentes à não linearidade da estrutura, situação permitida pelos regulamentos actuais. No entanto, quando se pretende conhecer com maior rigor o comportamento da estrutura, torna-se necessário recorrer as relações constitutivas dos materiais que compõem a estrutura e à resposta da estrutura após a actuação das cargas. Neste último caso, as estruturas que definem o seu comportamento em função da sua deformação, apresentam uma resposta não linear, antes de atingirem o seu limite de resistência (Figura 1.2).

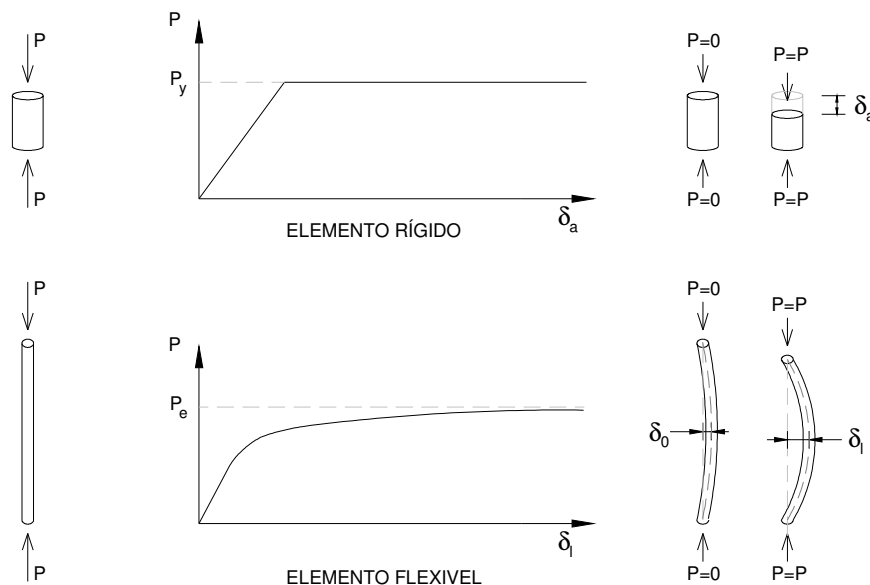


Figura 1.2 – Comportamento de um elemento de barra.

Compete então, ao engenheiro, definir o grau de precisão necessário para representar a resposta da estrutura, pelo que é normal aceitar análises que correspondam a erros insignificantes e que possam traduzir convenientemente o comportamento estrutural.

Quando se utilizam análises elásticas lineares, os materiais apresentam propriedades constantes no tempo, pelo que as tensões nos elementos estruturais não atingem a tensão de rotura e conseqüentemente as equações de equilíbrio podem ser formuladas para a geometria não deformada da estrutura.

Considerando que o material estrutural continua a ter comportamento elástico, pode ser apenas contabilizada a não linearidade geométrica, ao incluir os efeitos da deformação da estrutura e dos seus deslocamentos finitos na formulação das equações de equilíbrio. As conseqüências desta não linearidade são: as imperfeições iniciais nas peças estruturais, o efeito $P-\delta$, que corresponde à influencia do esforço axial na rigidez à flexão de uma barra individual e o efeito $P-\Delta$, que corresponde ao aparecimento de um momento destabilizador nas condições de equilíbrio da estrutura devido ao deslocamento lateral do ponto de aplicação das cargas (Chen e Lui 1988, 1991).

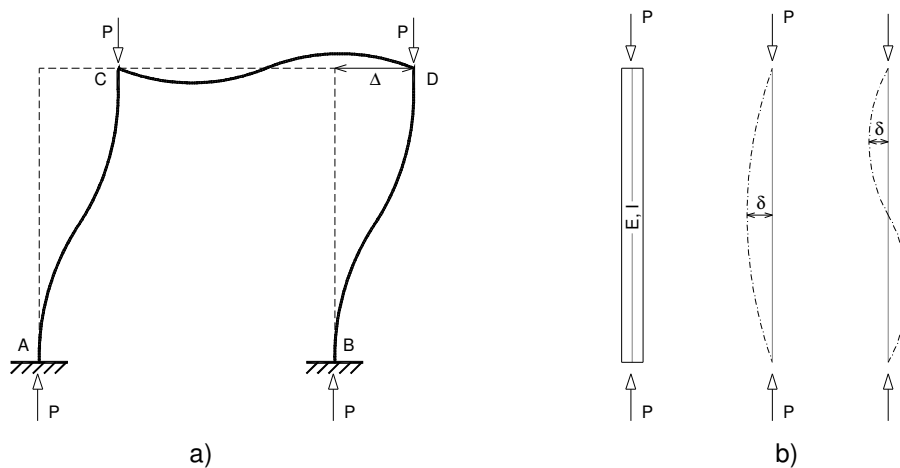


Figura 1.3 – Efeitos $P-\Delta$ (a) e $P-\delta$ (b).

Pode também ser introduzida a não linearidade material na análise estrutural, ou seja o comportamento real do material que define os elementos estruturais, ao serem atingidos determinados estados de tensão. As principais causas deste tipo de não linearidade, correspondem às deformações plásticas em estruturas de aço, à fendilhação ou fluência em estruturas de betão armado, a interação inelástica da força axial, momento flector, esforço transversal ou torção, em estruturas. Embora este tipo de não linearidade seja de grande importância no estudo do comportamento dos sistemas estruturais, não será abordado explicitamente no presente trabalho mas apenas pontualmente, quando se mencionar o efeito das ligações semi-rígidas no desempenho de pórticos metálicos.

Existe ainda a possibilidade de combinar estes dois tipos de não linearidade, a qual corresponde a uma análise mais realista da estrutura em estudo.

Para finalizar a enumeração dos tipos de não linearidade, menciona-se a alteração das condições de fronteira do sistema estrutural, conforme mencionado por Coates *et al.* (1988).

Quando se utiliza a análise não linear geométrica, é comum utilizar o termo “instabilidade” associado à perda global da geometria da estrutura (P- Δ), ou pode ainda ser associado a fenómenos locais ao nível do elemento (P- δ).

A instabilidade de colunas-viga tubulares em aço com desempenho tridimensional elasto-plástico foi estudada por Barros (1983) para colunas-viga imperfeitas (com deformações iniciais e com excentricidades), com ligações espaciais semi-rígidas de extremidade e com possibilidade de existência de tensões residuais de fabrico.

Tratou-se de uma análise bastante completa do tipo de instabilidade (P- δ) ao nível do elemento estrutural, que permitiu determinar a carga última ou de colapso de colunas-viga considerando as progressivas plastificações (e eventuais descargas elásticas). Esta análise elasto-plástica de 2ª ordem com espalhamento de plasticidade forneceu resultados praticamente exactos validados experimentalmente (Barros 1986, 1988).

No presente trabalho será utilizado o termo instabilidade como sendo a necessidade de manter a integridade estrutural de uma estrutura (2D e 3D) na sua globalidade, ou seja, considerando a perda de estabilidade por deformação instantânea aquando da aplicação de cargas consideradas críticas.

A análise de segunda ordem (ou não linear geométrica) é sempre necessária para a investigação da estabilidade estrutural. O estudo desta matéria pode ser dividido em dois tipos de análise (em função do comportamento dos materiais que constituem a estrutura), a instabilidade elástica e a instabilidade inelástica. A instabilidade elástica de equilíbrio normalmente ocorre em estruturas esbeltas sujeitas a esforços axiais de compressão (Gerard, 1962, Kirby 1979), como os pilares dos edifícios, as torres de alta tensão, etc., e corresponde ao tipo de instabilidade abordada neste trabalho.

Na análise não linear, o principal objectivo é melhorar qualitativamente o dimensionamento, permitindo ao engenheiro uma melhor avaliação do desempenho do sistema estrutural adoptado. Assim, torna-se mais difícil distinguir os conceitos de análise estrutural e de comportamento estrutural, conforme referido por Meek (1971), em que a análise corresponde à determinação de forças e deslocamentos em função das cargas aplicadas, e o dimensionamento à definição das dimensões das peças estruturais para resistir aos esforços de cálculo.

Para a análise linear elástica de estruturas porticadas, equaciona-se o equilíbrio da estrutura na configuração geométrica inicial da estrutura (não deformada) e resolve-se um conjunto de equações de equilíbrio, que correspondem aos elementos de barra com condições de apoio e propriedades mecânicas específicas, para determinar deslocamentos generalizados e obter os diagramas de esforços internos de cada elemento da estrutura.

$$\{f\} = [K]\{u\} \quad (1.1.1)$$

Nesta abordagem, a solução analítica do problema é única e as condições de equilíbrio e compatibilidade são satisfeitas em relação à geometria original da estrutura o que corresponde à designada solução exacta numa análise linear. No entanto, a solução analítica encontrada numa análise linear, pode não representar o comportamento da estrutura, ao ser omitido o comportamento real dos materiais e ainda a deformação estrutural (Yeong-bin *et al.* 1994).

Pela não introdução do comportamento real das estruturas, esta análise estrutural corresponde à utilização de modelos simplificados que se baseiam em formulações lineares da matriz de rigidez pelo que se designa por análise de 1ª ordem. Contudo, após aplicação das cargas as estruturas deformam-se, e o equilíbrio tem de ser equacionado na configuração deformada para contabilizar os efeitos da deformação na determinação dos esforços internos.

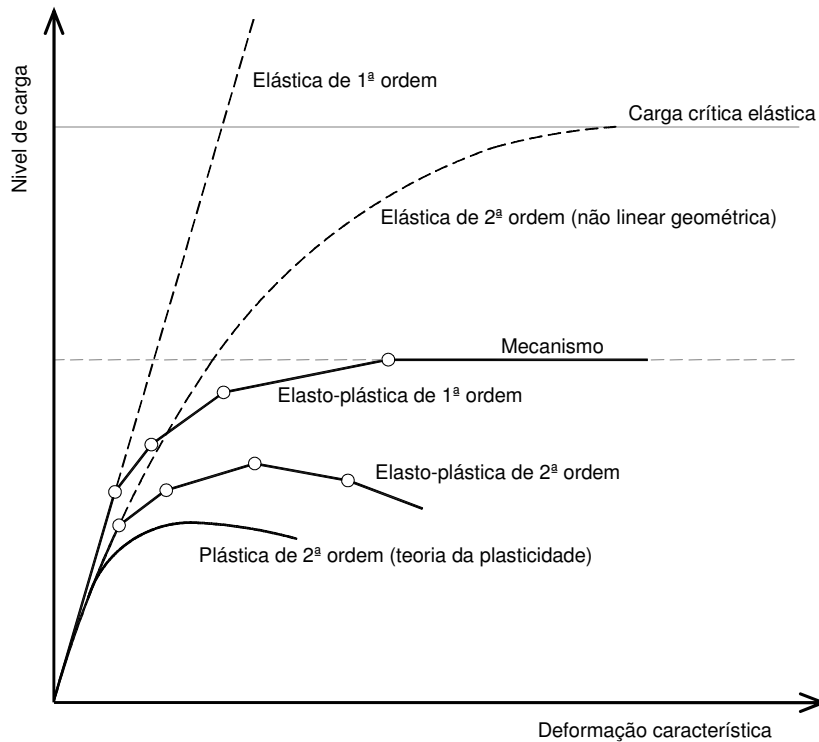


Gráfico 1.1 – Níveis de análise (comportamento) para um pórtico plano.

Se for considerada a deformação da estrutura (não linear geométrica), a análise torna-se mais complexa uma vez que as soluções não são obtidas de forma directa mas sim utilizando um processo iterativo. A deformada da estrutura não é conhecida aquando da formulação do equilíbrio pelo que é necessário proceder a uma análise utilizando uma equação incremental de equilíbrio (Majid 1972, Chen e Lui 1988).

Quando se utiliza uma análise não linear, geométrica ou material, a incerteza em relação ao comportamento actual da estrutura diminui, mas o trabalho de modelação da estrutura e o número de equações envolvidas na análise, aumentam significativamente. Compete ao engenheiro escolher o tipo (ou tipos) de não linearidade a considerar e avaliar a importância de cada uma no modelo estrutural escolhido.

Na realidade, o funcionamento estrutural é sempre não linear e as simplificações utilizadas só são válidas para níveis de tensão baixos e para configurações específicas onde o equilíbrio linear é possível. Existem todavia estruturas nas quais não é possível aplicar estas simplificações e o seu estudo só pode ser efectuado recorrendo a uma análise não linear, como a estrutura representada na Figura 1.4 que corresponde à configuração crítica de um arco de três rótulas.

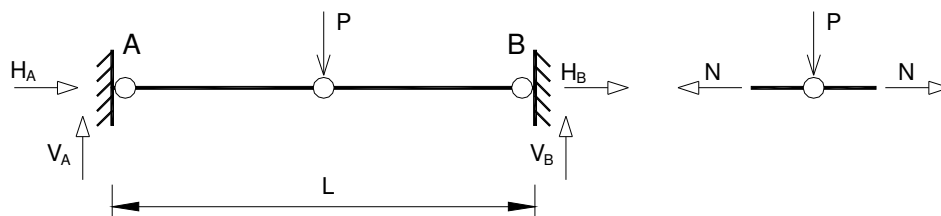


Figura 1.4 – Esquema estrutural, equilíbrio na configuração não deformada.

Como se pode verificar, recorrendo a uma análise linear, o equilíbrio não pode ser equacionado, uma vez que não é possível a passagem da carga vertical para os elementos horizontais.

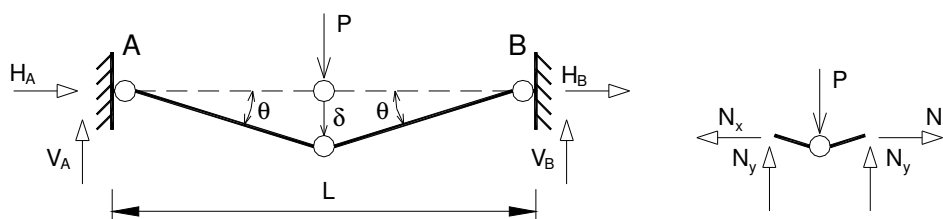


Figura 1.5 – Equilíbrio na configuração deformada.

Após deformar a estrutura, esse equilíbrio pode ser atingido em função do nível da carga aplicada que, obviamente, influencia a deformação e conseqüentemente os esforços resultantes (Figura 1.5).

Na natureza é comum encontrar esquemas estruturais que apresentam um funcionamento estritamente não linear, e que têm sido objecto de estudo por parte de investigadores e engenheiros. Para exemplificar este comportamento, pode-se referir as investigações de Kwan (2004) no estudo do esquema estrutural utilizado pelas aranhas na construção das suas teias, em que a resolução desse esquema só é possível recorrendo à configuração deformada da estrutura, neste caso a teia da aranha.

A aranha utiliza instintivamente esta análise na aplicação do pré-esforço aos diferentes filamentos que compõem a estrutura (teia).

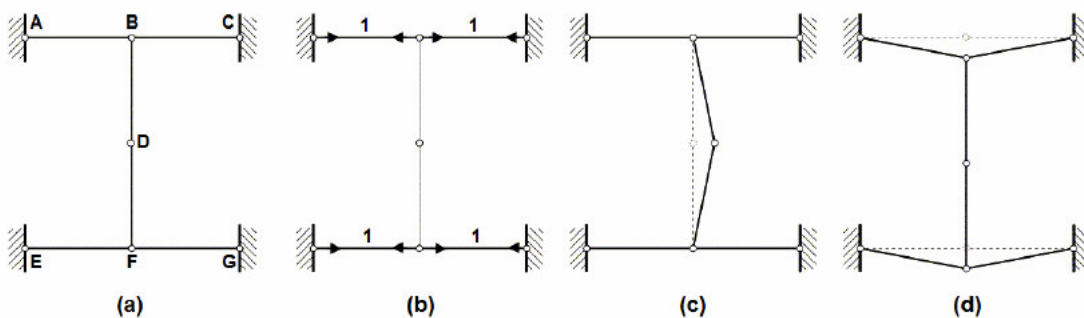


Figura 1.6 – Esquema estrutural idealizado para as teias de aranha – Kwan (2004).

O esquema estrutural idealizado por Kwan (2004) permite compreender o funcionamento desse pré-esforço, Figura 1.6. Este esquema é bastante parecido com a configuração crítica do arco de três rótulas (Figura 1.4), pelo que é necessário utilizar uma análise não linear geométrica para atingir o equilíbrio das forças aplicadas.

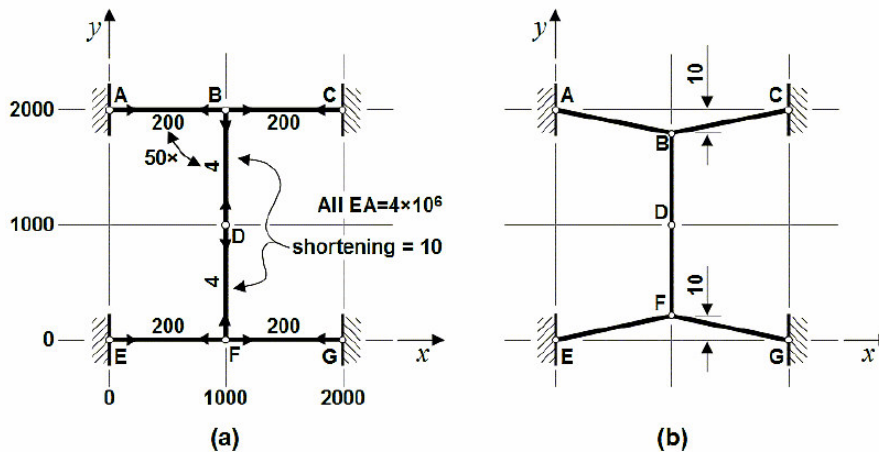


Figura 1.7 – Análise de 2ª ordem do esquema estrutural idealizado por Kwan (2004).

Na Figura 1.7, observa-se ainda o nível de pré-esforço aplicado a cada filamento da teia e ainda a deformação estrutural que permite formular o equilíbrio. Neste caso, a análise não linear, garante a sobrevivência de uma espécie.

Para finalizar, e abordando de uma forma geral o problema da não linearidade, pode-se afirmar que o principal obstáculo para a realização de análises não lineares está relacionado com o elevado número de equações resultantes que é necessário resolver e consequente escolha do melhor método de resolução. Se no passado este tipo de análise só era realizada em estruturas simples, com o aumento da capacidade dos meios computacionais, é possível estudar estruturas de geometria complexa e assim aumentar a qualidade final da estrutura e a quantidade de informação sobre o seu comportamento.

Neste contexto, a instabilidade (associada a não linearidade geométrica) é uma das áreas menos estudadas no domínio do comportamento estrutural, assim como uma das menos aplicadas no dimensionamento de estruturas, pelo que se torna necessário proceder a estudos pormenorizados para concluir qual a sua importância no desempenho estrutural e, no caso de se revelar crítica, propor soluções para minimizar o seu efeito.

1.2 OBJECTIVOS DO TRABALHO

Como se referiu, existe a necessidade de analisar as estruturas de forma a contabilizar os efeitos não lineares. A não linearidade material é importante quando se utilizam as capacidades efectivas dos materiais que, nos casos correntes de estruturas utilizadas na engenharia civil, não corresponde à verdade, pois, o nível de tensões a que as estruturas estão sujeitas, são muito reduzidas e o comportamento pode considerar-se linear. Este problema torna-se mais importante na análise de materiais compósitos, como as estruturas mistas aço-betão (e até o próprio betão armado), a utilização de fibras de reforço, etc., cuja utilização está cada vez mais banalizada, ou então quando se explora a ductilidade dos materiais para níveis de carga elevados.

O problema da não linearidade geométrica ou de 2ª ordem está, no entanto, presente na maioria das estruturas de engenharia civil, em particular nas estruturas metálicas que, pela esbelteza dos elementos que a constituem, são susceptíveis de apresentarem deformações globais significativas e consequentemente um comportamento estrutural diferente do inicialmente admitido. Dentro desta análise, na abordagem de problemas de instabilidade, os códigos permitem o recurso a simplificações conservativas, como os pórticos planos, para a análise de estruturas tridimensionais. Se por um lado, estas simplificações permitem prever

rapidamente o comportamento da estrutura, também introduzem erros que, no caso de serem significativos, representam um afastamento entre as hipóteses admitidas no projecto e o comportamento real, alterando o resultado estrutural pretendido.

Assim, para otimizar o desempenho estrutural, é necessário estudar com maior rigor o comportamento não linear geométrico das estruturas, em particular nas estruturas tridimensionais cujo modelo de cálculo deve corresponder à estrutura efectivamente idealizada, evitando o recurso a simplificações que podem comprometer o comportamento do esquema estrutural idealizado.

Devido ao elevado número de variáveis envolvidas na análise de instabilidade de estruturas, é necessário recorrer aos meios computacionais para obter os resultados em tempo útil. Embora exista software comercial capaz de elaborar estudos sobre a instabilidade de modelos tridimensionais, torna-se imperativo aferir o seu rigor e validar os seus resultados através da comparação com exemplos de solução analítica conhecida, para identificar os problemas – tipo para os quais é possível a sua utilização.

Neste contexto, foi elaborado o presente trabalho no qual se pretende atingir os seguintes objectivos principais:

- Estudar o comportamento de pórticos bidimensionais e tridimensionais, numa abordagem matricial, com o recurso a uma análise não linear geométrica, considerando a perda de estabilidade global da estrutura;
- Comparar metodologias e formulações de análise não linear geométrica para identificar possíveis deficiências na modelação estrutural.
- Analisar o desempenho de pórticos 2D e 3D, otimizando a geometria estrutural através da utilização de esquemas de contraventamento para impedir a deformação excessiva (ou limitando-a), e simultaneamente aumentar a capacidade resistente.

Para atingir estes objectivos foi necessário:

- Identificar os principais fundamentos teóricos nos quais se baseia a análise não linear geométrica em estruturas reticuladas;

- Desenvolver uma ferramenta computacional que permite realizar uma análise não linear geométrica exacta, uma vez que a maior parte do software disponível utiliza métodos aproximados para este tipo de análise;
- Utilizar software comercial, baseado em formulações aproximadas, comparando os resultados obtidos com os resultados da análise exacta;
- Calibrar os programas de cálculo automático recorrendo a exemplos com solução exacta conhecida;
- Elaborar um estudo paramétrico sobre a geometria de pórticos 2D e 3D;
- Introduzir elementos de travamento em cada um dos exemplos estudados.

1.3 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

A dissertação pretende apresentar um estudo paramétrico sobre a instabilidade de pórticos 2D e 3D, através de uma abordagem matricial da análise não linear geométrica. Este estudo, fundamenta-se na utilização de software, pelo que, em primeiro lugar, é necessário apresentar as bases teóricas utilizadas nos algoritmos de resolução, aferir o seu rigor e comparar os resultados obtidos relativamente à solução exacta. De seguida, e após validar o software, é necessário estudar algumas configurações estruturais, variando alguns parâmetros, para relativizar a sua importância neste tipo de análise. Finalmente, apresentar as conclusões relativas aos estudos efectuados e indicar linhas futuras de investigação que permitam continuar o trabalho desenvolvido nesta dissertação.

Para atingir os supra referidos objectivos, a dissertação foi organizada tematicamente em capítulos, incluindo a introdução, as conclusões e as referências bibliográficas. De seguida serão sucintamente descritos os assuntos abordados em cada um desses capítulos:

No capítulo 2, são apresentadas as bases teóricas nas quais se fundamenta a análise não linear geométrica de pórticos 2D e 3D, sendo utilizada uma abordagem matricial para equacionar o problema da instabilidade estrutural. São também apresentadas as formulações utilizadas para o estudo de pórticos com ligações rígidas e semi-rígidas.

No capítulo 3, descreve-se o software com o qual se elaborou esta dissertação, nomeadamente uma ferramenta computacional desenvolvida pelo autor e pelo orientador científico, à qual se designou de INST3D e o software comercial SAP 2000, LUSAS e ANSYS. São ainda esquematizados os processos de análise utilizados por cada software na formulação do problema não linear geométrico.

No capítulo 4 está sintetizada a calibração do software, utilizando a comparação entre os resultados obtidos com os programas de cálculo automático, relativamente a exemplos 2D e 3D com solução analítica conhecida.

No capítulo 5, são modeladas várias estruturas elaborando um estudo paramétrico, incidindo sobre a definição geométrica dos pórticos, apresentando os resultados obtidos para cada geometria. Posteriormente, para otimizar o desempenho estrutural, são introduzidos elementos estabilizadores que impedem a deformação lateral da estrutura (translações nodais ao nível dos pisos).

No capítulo 6, são apresentadas as conclusões sobre o estudo paramétrico elaborado neste trabalho relativamente a cada um dos objectivos propostos. Face às conclusões são apontadas linhas de desenvolvimento futuro desta dissertação.

2 - ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D E 3D

2.1 INTRODUÇÃO

A evolução dos sistemas computacionais permitiu desenvolver software capaz de resolver a maioria dos problemas da engenharia de estruturas. As dificuldades iniciais relacionadas com a grande quantidade de informação que era necessário processar para proceder à modelação de sistemas não lineares, assim como, a obtenção em tempo útil dos resultados, foram ultrapassadas através da facilidade de armazenamento de dados e da velocidade de processamento dos computadores actuais.

Neste contexto, o recurso ao computador potenciou o desenvolvimento de algoritmos para a resolução desses problemas. Inicialmente, as análises efectuadas eram do tipo linear geométrico sendo o equilíbrio obtido na configuração não deformada da estrutura, em que as acções se apresentam proporcionais às deformações. A necessidade de estudos mais realistas impôs a introdução de formulações não lineares geométricas na elaboração dos algoritmos. Neste caso, o equilíbrio é obtido na configuração deformada, constituindo um problema não linear, Figura 2.1 (Leipholz 1970, Majid 1972, Chen e lui 1988).

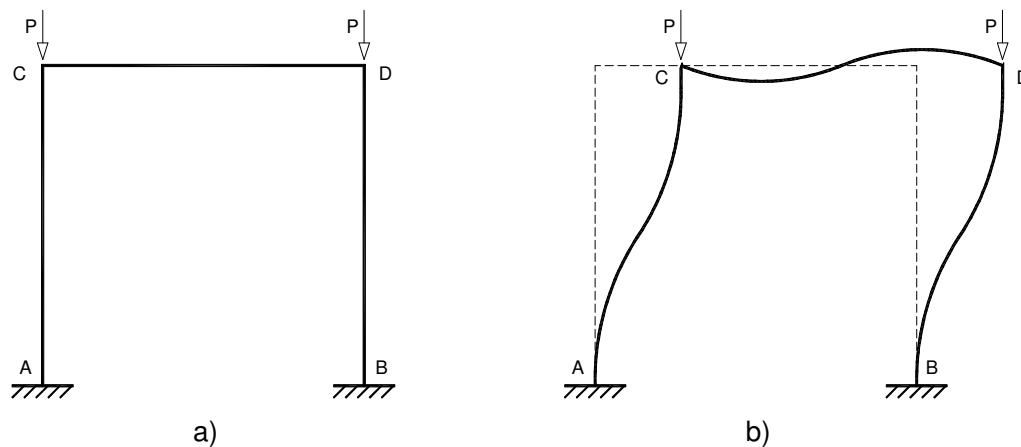


Figura 2.1 – Pórtico 2D: a) configuração não deformada, b) configuração deformada.

De entre os algoritmos computacionais existentes, a metodologia mais utilizada para abordar este tipo de análise, baseia-se no método dos elementos finito (MEF), que corresponde a uma simplificação numérica da análise analítica exacta. A utilização intensiva deste método provém da sua simplicidade de programação e da existência de algoritmos universais, pelo que se torna no processo numérico escolhido pelos programadores de software comercial.

Esta metodologia requer a discretização da estrutura em elementos finitos e a determinação das matrizes de rigidez elementares $[K^e]$ que após assamblagem constituem a matriz de rigidez global $[K]$. Para resolução do problema utiliza-se o sistema de equações

$$\{f\} = [K]\{u\} \quad (2.1.1)$$

em que $\{f\}$ representa o vector das forças nodais e $\{u\}$ o vector dos deslocamentos nodais.

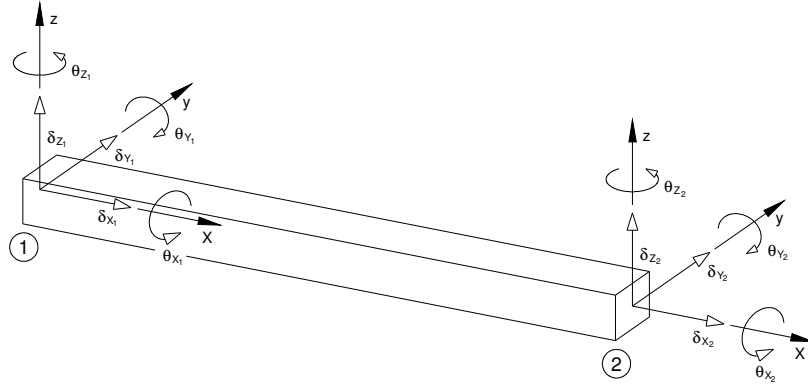


Figura 2.2 – Elemento de barra 3D. Graus de liberdade.

A diferença entre uma análise de 1ª ordem e a de 2ª ordem reside na definição da matriz de rigidez $[K]$. Na análise de 1ª ordem, a matriz $[K]$ depende das propriedades materiais e geométricas dos elementos que constituem a estrutura e o vector $\{f\}$ das características das cargas aplicadas. No caso da análise de 2ª ordem, a matriz de rigidez e o vector das cargas nodais estão interdependentes, ou seja, as cargas contidas em $\{f\}$ provocam uma deformação do elemento de barra, em que $[K]$ depende dessa deformação para poder ser determinada.

$$f_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ Mx_1 \\ My_1 \\ Mz_1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} \\ \dots & \dots \end{bmatrix}} u_1 = \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \\ \theta x_1 \\ \theta y_1 \\ \theta z_1 \end{bmatrix} \quad f_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ Mx_2 \\ My_2 \\ Mz_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ K_{2,1} & K_{2,2} \end{bmatrix}} u_2 = \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2 \\ \theta x_2 \\ \theta y_2 \\ \theta z_2 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

Para a obtenção de $[K]$, diversas abordagens podem ser feitas aquando da resolução de problemas não lineares geométricos (determinação de cargas críticas e respectivos modos de instabilidade). Neste capítulo, é apresentado o suporte analítico no qual se fundamenta a resolução deste tipo de problemas, recorrendo a formulações clássicas baseadas em modelos

exactos e aproximados. As metodologias para determinação dos parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade serão descritas no capítulo 3.

2.2 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

O principal inconveniente na avaliação do problema não linear geométrico, reside na definição da matriz de rigidez, que permite relacionar as acções com as deformações. Para a sua determinação, normalmente são usadas duas formulações distintas; uma fundamentada numa análise exacta, através da utilização da matriz de rigidez total exacta, na qual estão introduzidos os efeitos do esforço axial sob a forma de funções de estabilidade, e outra, com o recurso a uma formulação aproximada da matriz de rigidez total, em que as funções de estabilidade associadas à contribuição do esforço axial se encontram linearizadas, ou seja, são simplificações lineares das funções de estabilidade exactas. As funções de estabilidade introduzem o efeito do esforço axial na diminuição da rigidez à flexão do elemento, podendo as duas formulações ser utilizadas em problemas bidimensionais e tridimensionais.

A maior parte das estruturas utilizadas na engenharia civil apresentam configurações geométricas que correspondem a estruturas reticuladas, nomeadamente, pórticos constituídos por elementos de elevada resistência a esforços axiais (pilares), e elementos de elevada resistência a momentos flectores e esforços de corte (vigas).

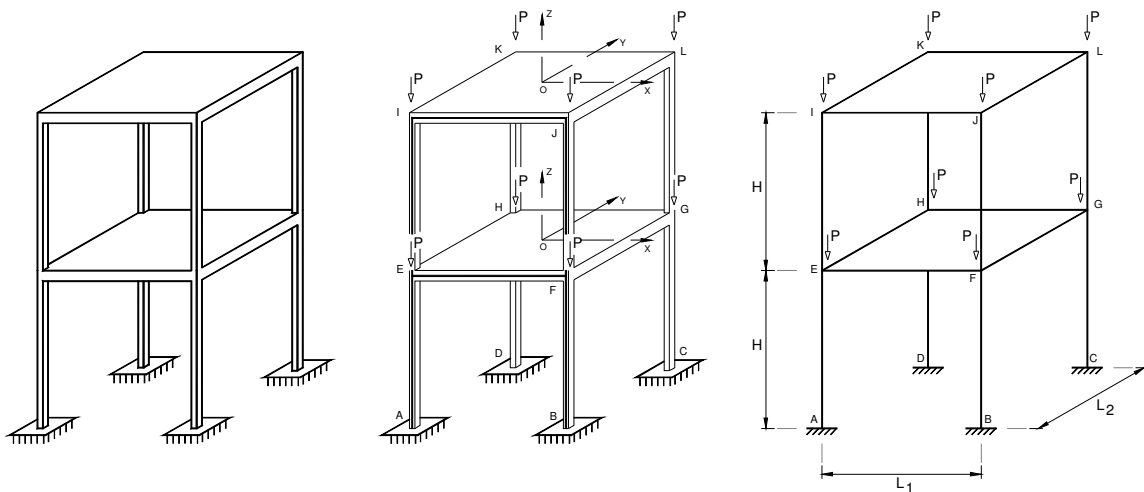


Figura 2.3 – Modelação estrutural – Pórticos.

Supondo que são estas estruturas que garantem a capacidade resistente, omitindo a contribuição dos elementos laminares como as lajes e considerando que as cargas aplicadas são na sua maioria suportadas por esses pórticos, pode fazer-se uma análise baseada no

Método dos Deslocamentos (MD), que corresponde a uma simplificação do MEF para estruturas constituídas por elementos lineares ou de barra.

Para estudar o comportamento dos pórticos, relativamente ao seu desempenho não linear, é necessário analisar os vários tipos de ligações entre os elementos de barra que constituem esses pórticos. Neste contexto, é comum classificar essas ligações da seguinte forma:

- (i) Ligações rígidas, onde existe transmissão de momentos (rotação relativa entre as extremidades das barras impedida).
- (ii) Ligações semi-rígidas, onde há transmissão de momentos (impedimento parcial da rotação).
- (iii) Ligações articuladas, onde não há transmissão de momentos e existe liberdade de rotação relativa entre as extremidades das barras.

Como já foi referido, os pórticos são constituídos por barras, que devem estar ligadas entre si, de forma a impedir a deformação da estrutura. Para determinar a equação de equilíbrio de um sistema de barras ou pórtico, contabilizando o efeito da deformação, torna-se necessário impor condições à modelação do elemento, assim:

- (i) Todos os elementos são, inicialmente, prismáticos e rectilíneos. As secções permanecem planas após deformação.
- (ii) Todas as secções do elemento são compactas de forma a não permitir a existência de fenómenos locais de encurvadura.
- (iii) Todos os elementos estão suficientemente contraventados de forma não permitir flexão ou flexão-torção no plano perpendicular ao plano que contém a estrutura.
- (iv) As deformações e extensões são consideradas muito pequenas, mas permitindo grandes deslocamentos transversais de corpo rígido.
- (v) As forças de corte são suficientemente pequenas para se poder desprezar a deformação por esforço transversal.
- (vi) O encurtamento axial por flexão é insignificante.

Estas condições são válidas para a maioria das estruturas metálicas, e permitem descrever as bases teóricas que definem a análise de instabilidade de um elemento do tipo Viga-Coluna, em que se contabiliza a influência do esforço axial na deformação da barra, ou seja, uma análise de 2ª ordem (Huseyin 1975, Narayanan 1983, Chen e Lui 1988).

As hipóteses foram equacionadas com base na capacidade das estruturas poderem apresentar grandes deformações de corpo rígido antes do colapso, em que as secções não apresentam distorções significativas e o comprimento da linha que define o eixo do elemento permanece praticamente inalterada mesmo na configuração deformada. A encurvadura perpendicular ao plano da estrutura está estudada para que não surjam fenómenos de instabilidade nessa direcção, nomeadamente flexão-torção. Como nos casos mais comuns são usados perfis de séries comerciais, não ocorrerem fenómenos locais de instabilidade (como o enfunamento da alma).

O estudo efectuado pelo autor, sintetizado neste trabalho, está fundamentado na utilização de software capaz de realizar análises não lineares, nomeadamente, instabilidade de estruturas. Neste tipo de análise pretende-se determinar a capacidade última de uma estrutura, e o modo de instabilidade que caracteriza essa mesma capacidade. Se for considerada uma análise de instabilidade elástica, então a capacidade resistente está relacionada linearmente com as cargas aplicadas através de

$$\{F_i\} = \lambda \cdot \{P_i\} \quad (2.2.1)$$

em que $\{F_i\}$ corresponde à carga de instabilidade da estrutura, $\{P_i\}$ representa as cargas aplicadas e λ o parâmetro de carga. É ainda considerada a actuação de cargas nodais de forma a não surgirem momentos primários nos nós que definem as ligações viga-pilar.

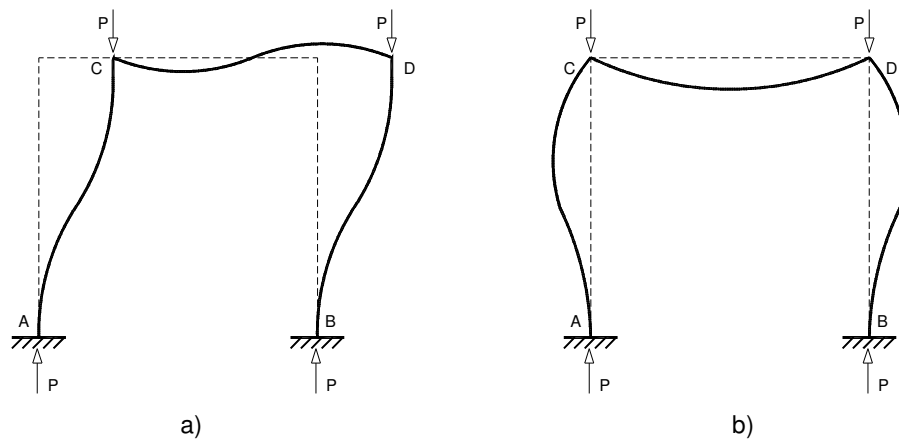


Figura 2.4 – Modos de instabilidade – com e sem deslocamentos laterais.

Os modos de instabilidade estão relacionados com o tipo de mobilidade da estrutura, podendo-se distinguir dois tipos: pórticos com deslocamentos laterais dos nós (Sway frames) e pórticos sem deslocamentos laterais dos nós (Un-Sway frames). O caso mais desfavorável corresponde ao pórtico com deslocamentos laterais dos nós, em que a estrutura perde a sua geometria inicial através de uma translação dos nós que não possuem restrições aos deslocamentos.

A generalidade do software comercial utiliza modelos numéricos simplificados, obtidos através da linearização das equações analíticas exactas, para abordar a análise não linear geométrica de estruturas, sendo a formulação exacta utilizada no desenvolvimento de programas de cálculo na área da investigação.

A utilização destas duas abordagens está dependente do tipo de problema em estudo, no caso de dimensionamento, o recurso à formulação aproximada é mais vantajoso, pois consome menos recursos computacionais e permite obter os resultados num período de tempo mais reduzido. No caso da investigação, em que o maior rigor deve prevalecer em relação ao tempo de cálculo, a formulação exacta revela-se a opção mais correcta.

Desta forma, cada formulação apresenta vantagens e inconvenientes. A formulação exacta permite, com o recurso a um único elemento, determinar a influência do esforço axial na flexão da barra, apresentando como principal inconveniente a alta não linearidade das funções de estabilidade, tornando mais complexo o problema da determinação dos parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade. Relativamente às formulações aproximadas, são mais fáceis de programar e modelar uma vez que o problema é de resolução linear, tendo como inconveniente o facto de ser necessário proceder à subdivisão das barras em 3 ou mais elementos, para obter erros inferiores a 3% relativamente ao resultado de uma formulação exacta.

De seguida, são apresentados os casos mais comuns de modelação de elementos, apresentando formulações correspondentes às modelações 2D e 3D de elementos de barra. Como se usou software, cujos algoritmos utilizam uma abordagem matricial para resolver este problema, a definição dos fundamentos teóricos que explicam o funcionamento não linear das estruturas será abordada recorrendo à notação matricial.

Estas formulações foram estudadas por diversos autores pelo que a sua demonstração será efectuada de acordo com a notação por estes utilizada. Em cada secção serão referidos os autores e a respectiva notação.

2.3 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 2D

A análise linear de instabilidade pode ser feita através de métodos baseados em formulações matriciais exactas e aproximadas, para determinar o parâmetro de carga λ_{cr} que provoca a perda de estabilidade da estrutura e caracterizar o respectivo modo de instabilidade. Recorrendo à equação de equilíbrio, equação 2.2.1, a formulação aproximada corresponde a uma simplificação da matriz de rigidez exacta $[K]$, que relaciona o vector das cargas $\{f\}$ com o vector dos deslocamentos $\{u\}$.

No caso de se utilizar a formulação exacta, o valor de λ_{cr} é obtido directamente através da resolução da equação analítica exacta que define o equilíbrio estrutural. Ao utilizar a formulação aproximada, com a matriz de rigidez aproximada, a equação analítica é simplificada recorrendo à linearização da matriz de rigidez exacta, o que implica um erro na avaliação de λ_{cr} que deve ser correctamente estudado para garantir um resultado rigoroso.

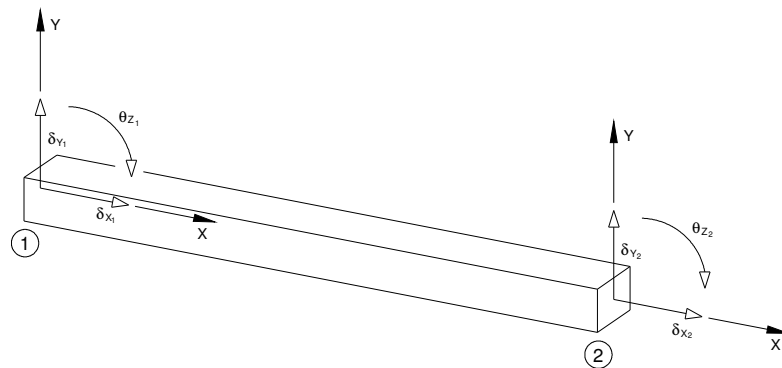


Figura 2.5 – Elemento de barra 2D. Graus de liberdade.

No caso de estruturas 2D, a matriz de rigidez elementar $[K^e]$ tem uma dimensão (6x6) que corresponde aos graus de liberdade nodais do elemento de barra 2D (Figura 2.5).

$$[K^e] = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & \frac{6}{L} & 4 & 0 & -\frac{6}{L} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

Se o equilíbrio do elemento for realizado na configuração inicial (não deformada) então $[K]$ corresponderá à matriz utilizada na análise linear; se o equilíbrio for efectuado considerando a deformação do elemento, $[K]$ terá que incorporar o efeito dessa deformação e consequentemente a influência do esforço axial, que associado à deformação altera a capacidade resistente do elemento.

De seguida, são apresentados os fundamentos teóricos que permitem definir as matrizes de rigidez. Inicialmente, procede-se à determinação da matriz de rigidez total exacta, para várias condições de fronteira, e posteriormente determina-se a formulação aproximada da matriz de rigidez para as mesmas condições de fronteira.

2.3.1 Matriz de Rigidez Total Exacta 2D

As primeiras investigações efectuadas para estudar a análise linear de estabilidade foram efectuadas recorrendo à formulação exacta da matriz de rigidez de um elemento de barra 2D.

Esta formulação permite determinar os valores exactos dos parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade. Será apresentada a formulação clássica da matriz de rigidez para três situações: quando não existe translação das extremidades da barra, quando existirem translações laterais das extremidades das barras e quando as ligações entre os elementos são flexíveis, ou seja, quando as estruturas apresentam ligações semi-rígidas. Este último caso revela-se de grande importância pois a maior parte das estruturas rectangulares metálicas apresentam este comportamento.

2.3.1.1 Modelação sem translação das extremidades

Em todos os casos que se apresentam, o fundamento matemático está apoiado no equilíbrio de um elemento na configuração deformada em função das suas condições de fronteira. A complexidade da matriz de rigidez aumenta à medida que aumentam as variáveis associadas às condições de fronteira e o caso mais simples consiste no equilíbrio de um elemento que não possui translações nas extremidades, que constitui o primeiro esquema estudado para a determinação da matriz de rigidez exacta de um elemento de barra 2D.

Neste caso, procede-se ao equilíbrio de um elemento de uma barra 2D na sua configuração deformada, impedido de sofrer translações nas suas extremidades, conforme ilustrado na Figura 2.6. O elemento está sujeito a um esforço axial P e aos momentos nas extremidades M_A e M_B . As deformações por rotação das extremidades correspondem a θ_A e θ_B .

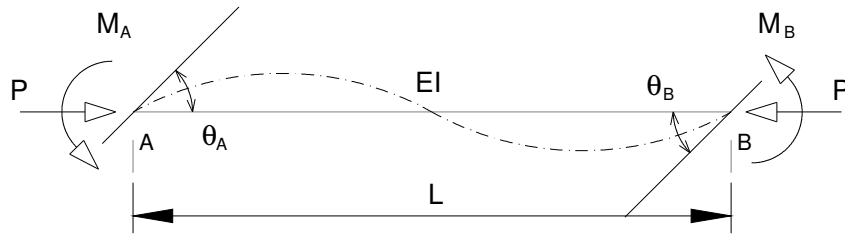


Figura 2.6 – Elemento 2D sujeito a momentos e esforço axial nas extremidades.

Como se pode observar, a barra não apresenta translações e a equação de equilíbrio será encontrada procedendo ao equilíbrio de esforços numa porção infinitesimal do elemento na configuração deformada, Figura 2.7 (Chen e Lui 1991).

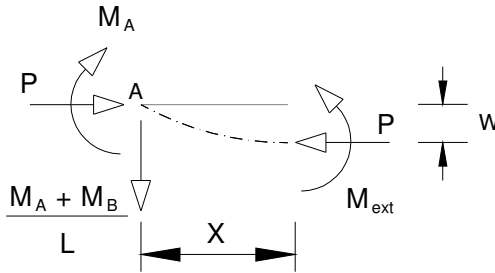


Figura 2.7 – Diagrama de corpo livre de um elemento infinitesimal.

Assim, a equação diferencial de equilíbrio fica definida por

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} + \rho w = \frac{M_A + M_B}{LEI} x - \frac{M_A}{EI} \quad (2.3.2)$$

em que $\rho = P/(\pi^2 EI/L^2)$ e cuja solução geral é

$$w = A \sin \rho x + B \cos \rho x + \frac{M_A + M_B}{LEI \rho^2} x - \frac{M_A}{EI \rho^2} \quad (2.3.3)$$

As constantes A e B podem ser determinadas através das condições de fronteira

$$w(0) = 0, \quad w(L) = 0 \quad (2.3.4)$$

assim, A e B serão

$$A = -\frac{1}{EI\rho^2 \sin \rho L} (M_A \cos \rho L + M_B) \quad (2.3.5)$$

$$B = \frac{M_A}{EI\rho^2} \quad (2.3.6)$$

procedendo à substituição de A e B na equação 2.3.3 obtém-se

$$w = -\frac{1}{EI\rho^2} \left[\frac{\cos \rho L}{\sin \rho L} \sin \rho x - \cos \rho x - \frac{x}{L} + 1 \right] M_A - \frac{1}{EI\rho^2} \left[\frac{1}{\sin \rho L} \sin \rho x - \frac{x}{L} \right] M_B \quad (2.3.7)$$

de onde

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{EI\rho} \left[\frac{\cos \rho L}{\sin \rho L} \cos \rho x + \sin \rho x - \frac{1}{\rho} \right] M_A - \frac{1}{EI\rho} \left[\frac{1}{\sin \rho L} \cos \rho x - \frac{1}{\rho L} \right] M_B \quad (2.3.8)$$

e as rotações θ_A e θ_B são obtidas tomando respectivamente $x=0$ e $x=L$,

$$\theta_A = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \frac{L}{EI} \left[\frac{\sin \rho L - \rho L \cos \rho L}{\rho^2 \sin \rho L} \right] M_A + \frac{L}{EI} \left[\frac{\sin \rho L - \rho L}{\rho^2 \sin \rho L} \right] M_B \quad (2.3.9)$$

$$\theta_B = \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=L} = \frac{L}{EI} \left[\frac{\sin \rho L - \rho L}{\rho^2 \sin \rho L} \right] M_A + \frac{L}{EI} \left[\frac{\sin \rho L - \rho L \cos \rho L}{\rho^2 \sin \rho L} \right] M_B \quad (2.3.10)$$

a relação força-deslocamento, desprezando o encurtamento devido à curvatura, é dada por

$$P = \frac{EI}{L} \delta \quad (2.3.11)$$

em que δ corresponde ao deslocamento axial.

Resolvendo 2.3.9 e 2.3.10 para M_A e M_B em relação a θ_A e θ_B obtém-se

$$M_A = \frac{EI}{L} (S_{ii} \cdot \theta_A + S_{ij} \cdot \theta_B) \quad (2.3.12)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} (S_{ji} \cdot \theta_A + S_{jj} \cdot \theta_B) \quad (2.3.13)$$

As equações 2.3.11, 2.3.12 e 2.3.13 podem ser escritas na forma matricial

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ P \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & A/I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \delta \end{pmatrix} \quad (2.3.14)$$

em que $S_1=S_{ii}=S_{jj}$ e $S_2=S_{ij}=S_{ji}$ são as funções de estabilidade, M_A , M_B , os momentos incrementais, P o esforço axial incremental, θ_A , θ_B , as rotações incrementais, δ o deslocamento transversal incremental, A a área, I a inércia, L o comprimento do elemento e E o módulo de elasticidade.

As funções de estabilidade associadas à matriz são definidas por:

$$S_1 = \begin{cases} \frac{\rho \sin(\rho) - \rho^2 \cos(\rho)}{2 - 2 \cos(\rho) - \rho \sin(\rho)} & \text{se } P < 0 \\ \frac{\rho^2 \cosh(\rho) - \rho \sinh(\rho)}{2 - 2 \cosh(\rho) - \rho \sinh(\rho)} & \text{se } P > 0 \end{cases} \quad (2.3.15)$$

$$S_2 = \begin{cases} \frac{\rho^2 - \rho \sin(\rho)}{2 - 2 \cos(\rho) - \rho \sin(\rho)} & \text{se } P < 0 \\ \frac{\rho \sinh(\rho) - \rho^2}{2 - 2 \cosh(\rho) - \rho \sinh(\rho)} & \text{se } P > 0 \end{cases} \quad (2.3.16)$$

em que $\rho = P/(\pi^2 EI/L^2)$ com P positivo nas tracções.

Como se pode verificar, a matriz de rigidez é uma função do esforço axial, pois as funções S_1 e S_2 dependem de ρ (P), e da deformação da estrutura, que não é conhecida no instante inicial. Desta forma, a solução só pode ser encontrada através de um processo iterativo.

2.3.1.2 Modelação com translação das extremidades

Se a estrutura admitir deslocamentos transversais, como no caso de pórticos de nós móveis, então as condições de fronteira são alteradas em relação ao problema anterior. A formulação da matriz de rigidez total exacta pode ser determinada introduzindo o deslocamento transversal na equação dos momentos M_A e M_B (Chen e Lui 1991).

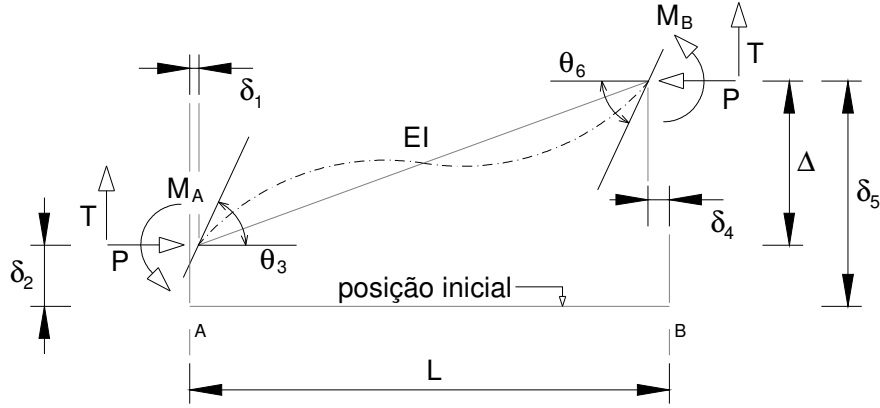


Figura 2.8 – Elemento 2D com translações nas extremidades.

Se Δ representar o deslocamento transversal então os momentos M_A e M_B são

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[s_{ii} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{L} \right) + s_{ij} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{L} \right) \right] = \frac{EI}{L} \left[s_{ii} \theta_A + s_{ij} \theta_B - (s_{ii} + s_{ij}) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (2.3.17)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[s_{ji} \left(\theta_A - \frac{\Delta}{L} \right) + s_{jj} \left(\theta_B - \frac{\Delta}{L} \right) \right] = \frac{EI}{L} \left[s_{ji} \theta_A + s_{jj} \theta_B - (s_{ji} + s_{jj}) \frac{\Delta}{L} \right] \quad (2.3.18)$$

em que $\theta_A = \theta_3$, e $\theta_B = \theta_6$, são as rotações medidas em relação à posição inicial do eixo do elemento e $S_{ii} = S_{jj}$, $S_{ij} = S_{ji}$ representam as funções de estabilidade S_1 e S_2 respectivamente.

O esforço transversal, T , é dado por

$$T = - \left(\frac{M_A + M_B + P\Delta}{L} \right) \quad (2.3.19)$$

na qual substituindo M_A e M_B resulta

$$T = - \frac{EI}{L} \left\{ (s_{ii} + s_{ij}) \theta_A + (s_{ii} + s_{ij}) \theta_B - 2 \left[(s_{ii} + s_{ij}) - (kL)^2 \right] \frac{\Delta}{L} \right\} \quad (2.3.20)$$

A relação força-deslocamento, desprezando o encurtamento devido à curvatura, é dada pela equação 2.3.21, em que u representa o deslocamento transversal.

$$P = \frac{EI}{L} u \quad (2.3.21)$$

As equações 2.3.17, 2.3.18, 2.3.20 e 2.3.21 podem tomar a forma matricial

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ T \\ P \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} s_{ii} & s_{ij} & -\frac{s_{ii} + s_{ij}}{L} & 0 \\ & s_{ii} & -\frac{s_{ii} + s_{ij}}{L} & 0 \\ & & \frac{2(s_{ii} + s_{ij}) - (kL)^2}{L^2} & 0 \\ \text{Sim.} & & & \frac{A}{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \\ u \end{pmatrix} \quad (2.3.22)$$

Introduzindo os graus de liberdade r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 e r_6 para o elemento deformado, como indicado na Figura 2.9

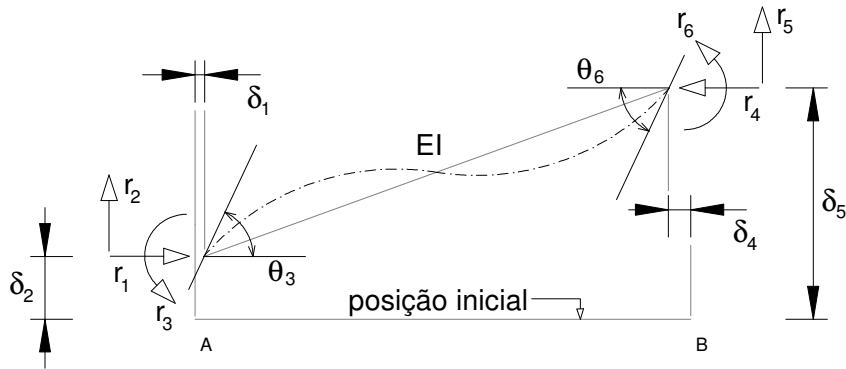


Figura 2.9 – Elemento 2D com translações nas extremidades – graus de liberdade.

e, associando esses graus de liberdade ao sistema de forças actuante, M_A, M_B, T, P , então a equação de equilíbrio será

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_A \\ M_B \\ T \\ P \end{pmatrix} \quad (2.3.23)$$

Considerando pequenos deslocamentos nas extremidades

$$\begin{pmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \Delta \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} \quad (2.3.24)$$

Combinando as equações 2.3.22, 2.3.23, 2.3.24, obtém-se um sistema de equações no qual a matriz de rigidez assume a forma

$$[k] = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & \frac{12}{L^2}\phi_1 & \frac{6}{L}\phi_2 & 0 & -\frac{12}{L^2}\phi_1 & \frac{6}{L}\phi_2 \\ & & 4\phi_3 & 0 & -\frac{6}{L}\phi_2 & 2\phi_4 \\ & & & \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ & Sim. & & & \frac{12}{L^2}\phi_1 & -\frac{6}{L}\phi_2 \\ & & & & & 4\phi_3 \end{pmatrix} \quad (2.3.25)$$

em que ϕ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) representam as funções de estabilidade conforme definidas por Reis e Camotim (2000), Barros (1999-2000) e relacionáveis com as funções de estabilidade originalmente desenvolvidas por Livesley e Chandler (1956).

Para o caso de se considerar P um esforço de compressão, então as funções de estabilidade são definidas por

$$\phi_1 = \frac{\rho^3 \sin \rho}{12\phi_c} \quad (2.3.26)$$

$$\phi_2 = \frac{\rho^2(1 - \cos \rho)}{6\phi_c} \quad (2.3.27)$$

$$\phi_3 = \frac{\rho(\sin \rho - \rho \cos \rho)}{4\phi_c} \quad (2.3.28)$$

$$\phi_4 = \frac{\rho(\rho - \sin \rho)}{2\phi_c} \quad (2.3.29)$$

com $\rho = kL$,

$$\phi_c = 2 - 2 \cos \rho - \rho \sin \rho \quad (2.3.30)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (2.3.31)$$

Para P de tracção

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\rho^3 \sinh \rho}{12\phi_t} \\ \phi_2 &= \frac{\rho^2 (\cosh \rho - 1)}{6\phi_t} \\ \phi_3 &= \frac{\rho(\rho \cosh \rho - \sinh \rho)}{4\phi_t} \\ \phi_4 &= \frac{\rho(\sinh \rho - \rho)}{2\phi_t} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.32)$$

com $\rho = kL$,

$$\phi_t = 2 - 2 \cosh \rho + \rho \sinh \rho \quad (2.3.33)$$

As funções de estabilidade ϕ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) podem apresentar uma notação equivalente como a referida por Barros (1999-2000). Para o caso de $P < 0$ (compressão):

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \beta \cot \beta \\ \phi_2 &= \frac{\beta^2}{3(1 - \beta \cot \beta)} \\ \phi_3 &= \frac{3}{4} \phi_2 + \frac{1}{4} \beta \cot \beta \\ \phi_4 &= \frac{3}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \beta \cot \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.3.34)$$

com

$$\beta = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_e}} \quad (2.3.35)$$

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (2.3.36)$$

Se o esforço axial for nulo, $P=0$, pode-se provar, aplicando a regra de L'Hospital, que ϕ_j ($j=1,2,3,4$)=1. Se o esforço axial for pequeno, as funções de estabilidade conduzem a uma indeterminação. Para evitar esta situação as funções podem ser desenvolvidas em séries de Taylor (Chen e Lui 1991):

$$s_2 = 1 + \frac{\rho^2}{10} - \frac{\rho^4}{8400} + \frac{\rho^6}{108000} - \frac{37\rho^8}{2328480000} \quad (2.3.37)$$

$$s_3 = 1 + \frac{\rho^2}{60} - \frac{\rho^4}{8400} + \frac{\rho^6}{756000} - \frac{37\rho^8}{2328480000} \quad (2.3.38)$$

$$s_4 = 1 + \frac{\rho^2}{30} - \frac{\rho^4}{25200} + \frac{\rho^6}{108000} - \frac{509\rho^8}{2328480000} \quad (2.3.39)$$

$$s_5 = 1 - \frac{\rho^2}{60} + \frac{13\rho^4}{25200} - \frac{11\rho^6}{756000} + \frac{907\rho^8}{2328480000} \quad (2.3.40)$$

onde

$$\rho^2 = (kL)^2 = \frac{PL^2}{EI} \quad (2.3.41)$$

é positivo no caso de esforços de tracção e negativo para esforços axiais de compressão.

Para evitar a utilização de diferentes equações para as forças de compressão e de tracção, os autores Goto e Chen (1987) apresentam outro desenvolvimento em série para simplificar as funções de estabilidade:

$$\phi_1 = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left[(kL)^2 \right]^n \right\} / 12\phi \quad (2.3.42)$$

$$\phi_2 = \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)!} [(kL)^2]^n \right\} / 6\phi \quad (2.3.43)$$

$$\phi_3 = \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+3)!} [(kL)^2]^n \right\} / 4\phi \quad (2.3.44)$$

$$\phi_4 = \left\{ \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)!} [(kL)^2]^n \right\} / 2\phi \quad (2.3.45)$$

com

$$\phi = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n+1)}{(2n+4)!} [(kL)^2]^n \quad (2.3.46)$$

Nestas equações $(kL)^2 = \rho^2 = PL^2/EI$ é positiva para tracções e negativa para compressões.

Nos gráficos 2.1 e 2.2 está representada a variação das funções de estabilidade em função de P/P_e , em que P_e representa a carga crítica de Euler, para os casos de tracção e compressão.

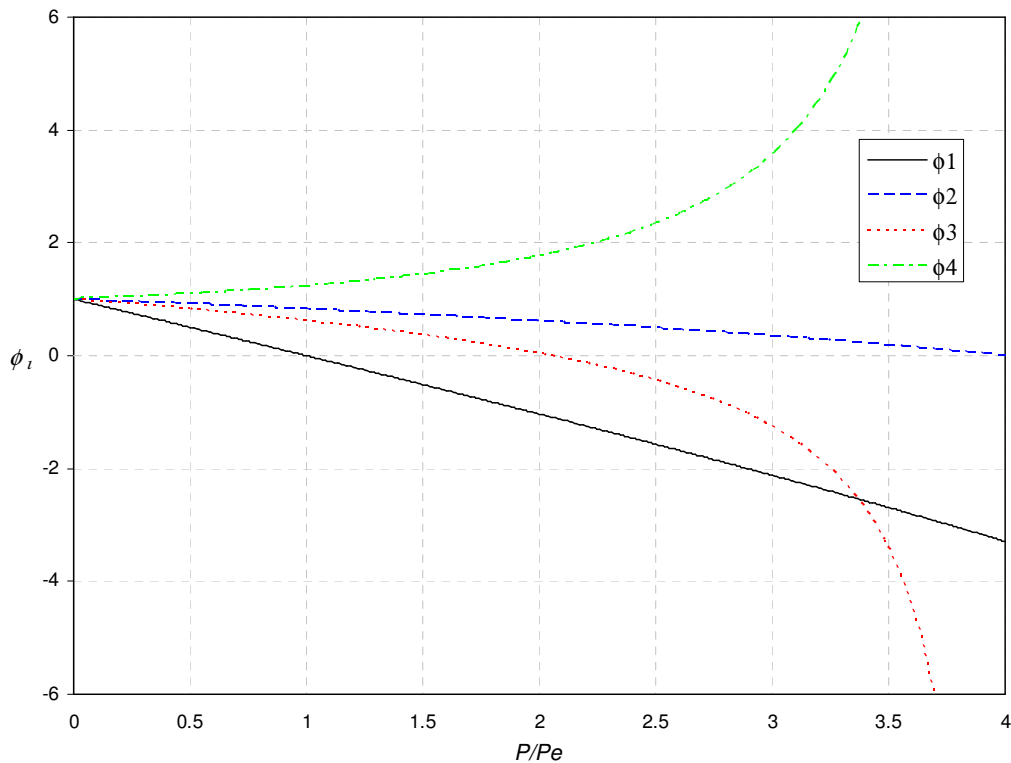


Gráfico 2.1 – Funções de estabilidade – compressão.

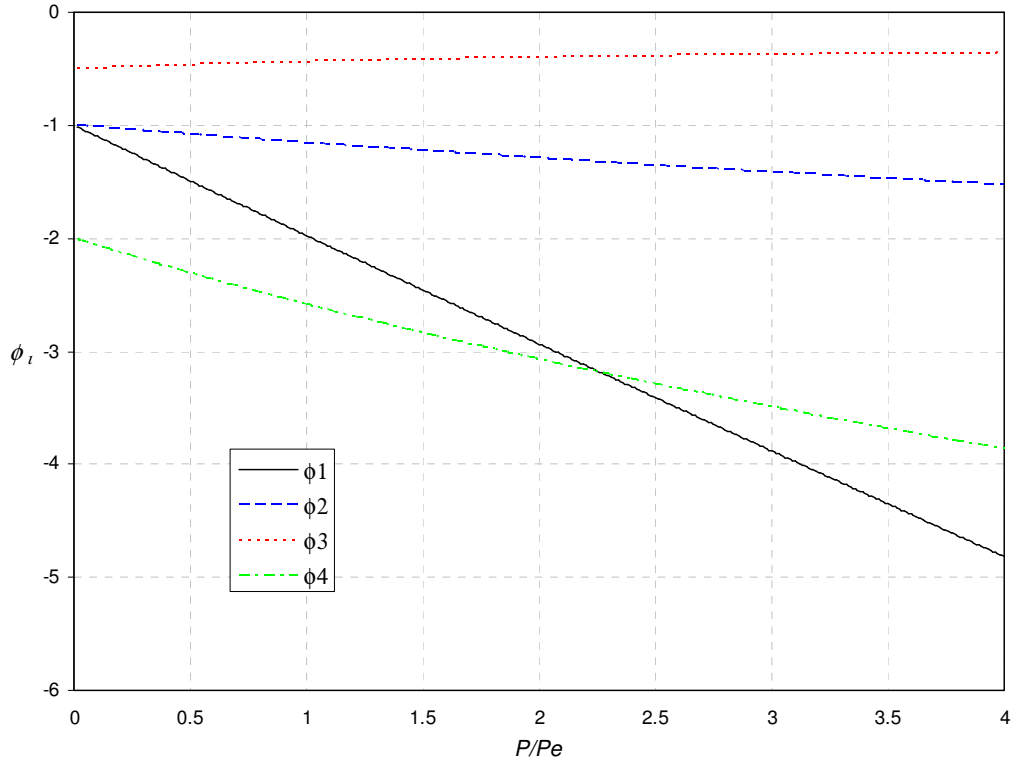


Gráfico 2.2 – Funções de estabilidade – tracção.

2.3.1.3 Modelação com ligações semi-rígidas

Nas secções anteriores foram estudadas barras com continuidade de transmissão de esforços nas extremidades. As ligações entre pilares e vigas (Figura 2.10) normalmente, não podem ser consideradas como uniões de continuidade, situando-se entre uma configuração de barra biarticulada (1) e encastrada (3) nas extremidades o que confere às ligações um comportamento semi-rígido (2) (Narayanan 1989, Xu 2000).

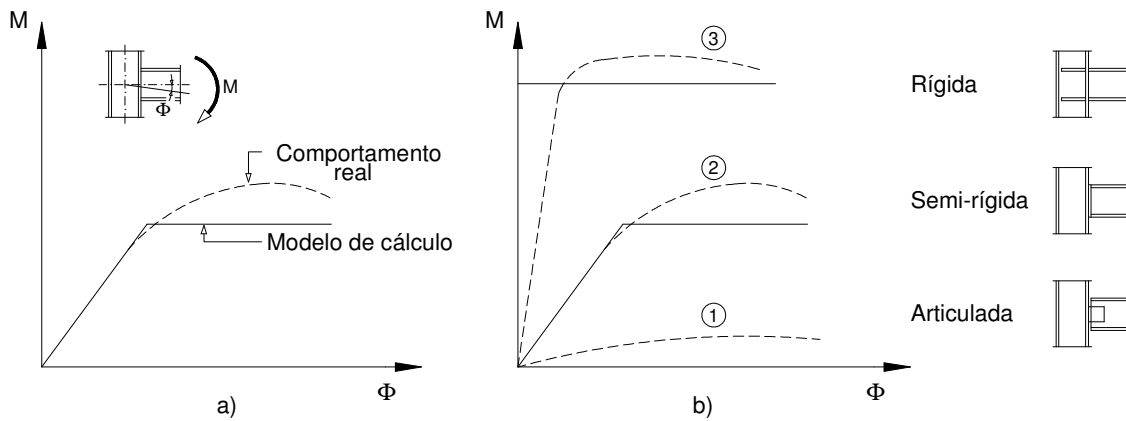


Figura 2.10 – Ligações. Relação momentos – rotação.

Na realidade, praticamente todos os pórticos metálicos apresentam um comportamento semi-rígido já que as ligações apresentam sempre um certo grau de rigidez e o uso de modelos contínuos ou rotulados consiste numa simplificação para facilitar a análise e o dimensionamento, mas não corresponde ao comportamento real das estruturas.

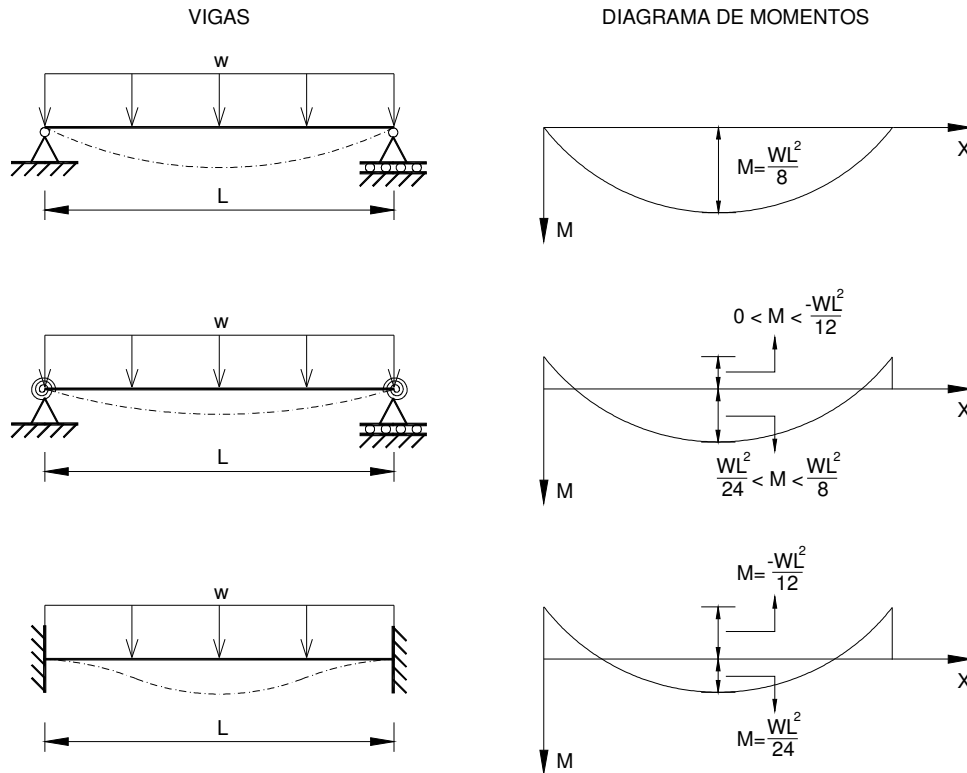


Figura 2.11 – Momentos e flechas para várias condições de fronteira.

Na maior parte dos casos, o comportamento apresentado pelas ligações com flexibilidade, corresponde a uma lei não linear o que obriga a processos iterativos para determinar a solução (Aristizabal-Ochoa 2001). Esta não linearidade está associada a factores como a cedência local, encurvadura local, concentração de tensões, deslizamento dos parafusos, etc.

Para analisar estruturas com ligações semi-rígidas, é necessário seleccionar um método que simule o seu comportamento. Para numa análise de instabilidade, pode-se simular o comportamento das ligações utilizando elementos lineares com rigidez inicial constante, situação também válida para análises de utilização (Chen e Lui 1991).

Na determinação do parâmetro crítico, é necessário escrever as equações de equilíbrio da estrutura, relativamente à configuração deformada considerando o efeito $P-\delta$.

Na modelação das ligações semi-rígidas podem ser utilizadas as equações de equilíbrio que se apresentaram para as ligações rígidas, alterando-as para introduzir o efeito da flexibilidade das ligações na instabilidade global da estrutura.

Dada a importância do funcionamento das ligações na análise não linear geométrica e consequente determinação do parâmetro crítico, será apresentada uma formulação da matriz de rigidez total exacta que introduz o efeito da flexibilidade das ligações.

Considerando um elemento de barra com molas de rotação nas extremidades, para simular a flexibilidade da ligação, pode-se equacionar o equilíbrio na configuração deformada, Figura 2.12 (Chen e Lui 1991, Chen e Seung-Eock 1997).

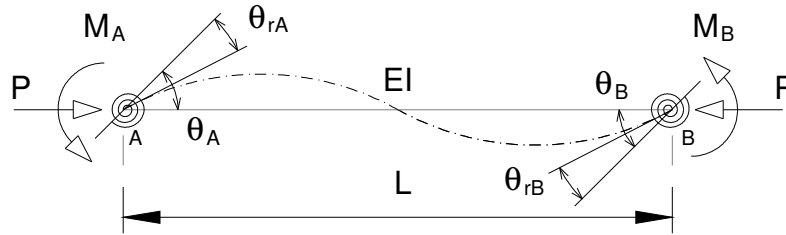


Figura 2.12 – Elemento 2D com rotação parcial nas extremidades.

Sendo R_{kiA} e R_{kiB} a rigidez inicial das ligações em A e B , respectivamente a rotação relativa entre o nó e a extremidade da viga pode ser escrita como

$$\theta_{rkA} = \frac{M_A}{R_{kiA}} \quad (2.3.47)$$

$$\theta_{rkB} = \frac{M_B}{R_{kiB}} \quad (2.3.48)$$

Como se pode observar, M_A e M_B são os momentos nas extremidades da viga e as equações dos momentos, modificadas pela presença da rigidez das ligações, são

$$M_A = \frac{EI}{L} \left[s_{ii} \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{kiA}} \right) + s_{ij} \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{kiB}} \right) \right] \quad (2.3.49)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} \left[s_{ij} \left(\theta_A - \frac{M_A}{R_{kiA}} \right) + s_{jj} \left(\theta_B - \frac{M_B}{R_{kiB}} \right) \right] \quad (2.3.50)$$

onde EI é a rigidez à flexão e L o comprimento da viga.

Resolvendo as equações 2.3.49 e 2.3.50 para M_A e M_B , obtêm-se:

$$M_A = \frac{EI}{L} [s_{ii}^* \theta_A + s_{ij}^* \theta_B] \quad (2.3.51)$$

$$M_B = \frac{EI}{L} [s_{ij}^* \theta_A + s_{jj}^* \theta_B] \quad (2.3.52)$$

com

$$s_{ii}^* = \left(s_{ii} + \frac{EIs_{ii}^2}{LR_{kiB}} - \frac{EIs_{ij}^2}{LR_{kiB}} \right) / R^* \quad (2.3.53)$$

$$s_{jj}^* = \left(s_{jj} + \frac{EIs_{jj}^2}{LR_{kiA}} - \frac{EIs_{ij}^2}{LR_{kiA}} \right) / R^* \quad (2.3.54)$$

$$s_{ij}^* = s_{ji}^* = s_{ij} / R^* \quad (2.3.55)$$

onde S_{ii} e S_{ij} são as funções de estabilidade como apresentadas para o caso das ligações rígidas nas extremidades do elemento de barra, e

$$R^* = \left(1 + \frac{EIs_{ii}}{LR_{kiA}} \right) \left(1 + \frac{EIs_{jj}}{LR_{kiB}} \right) - \left(\frac{EI}{L} \right)^2 \frac{s_{ij}^2}{R_{kiA}R_{kiB}} \quad (2.3.56)$$

As equações podem ser associadas a um elemento com seis graus de liberdade, Figura 2.13, relacionando os esforços nodais $r_i (i = 1, \dots, 6)$ com os esforços P , M_A , e M_B

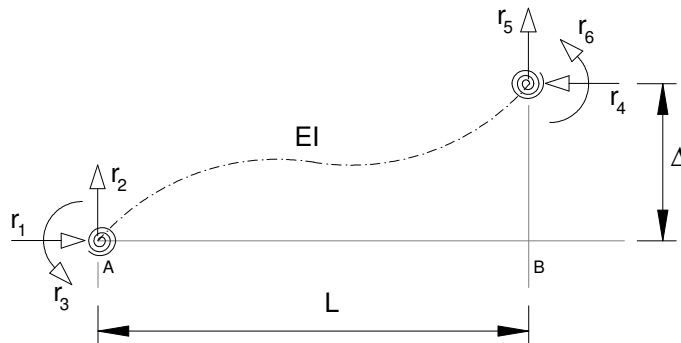


Figura 2.13 – Elemento 2D – graus de liberdade.

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \\ r_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{L}\Delta \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P}{L}\Delta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.3.57)$$

onde Δ corresponde à translação relativa do elemento.

Da mesma forma, u , θ_A e θ_B podem ser relacionados com $d_i (i=1, \dots, 6)$ através de

$$\begin{pmatrix} u \\ \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 1 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{pmatrix} \quad (2.3.58)$$

As equações 2.3.57 e 2.3.58 podem ser combinadas tendo em consideração que

$$\begin{pmatrix} P \\ M_A \\ M_B \end{pmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{pmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & S_{ii}^* & S_{ij}^* \\ 0 & S_{ji}^* & S_{jj}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \theta_A \\ \theta_B \end{pmatrix} \quad (2.3.59)$$

Substituindo a equação 2.3.59 na equação 2.3.56 e posteriormente em 2.3.57, obtém-se uma relação entre r_i e d_i dada por

$$(r) = [k]_{\text{viga}} (d) \quad (2.3.60)$$

Em que $[k]_{\text{viga}}$ representa a matriz de rigidez de um elemento de barra do tipo viga, pois numa estrutura com ligações semi-rígidas a rigidez parcial nas extremidades encontra-se associada às vigas.

$$[k]_{\text{viga}} = \frac{EI}{L} \left(\begin{array}{cccccc} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ \frac{(s_{ii}^* + 2s_{ij}^* + s_{jj}^*) - \rho^2}{L^2} & \frac{(s_{ii}^* + s_{jj}^*)}{L} & 0 & -\frac{(s_{ii}^* + 2s_{ij}^* + s_{jj}^*) + \rho^2}{L^2} & \frac{(s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L} & \\ & s_{ii}^* & 0 & -\frac{(s_{ii}^* + s_{jj}^*)}{L} & s_{ij}^* & \\ & & \frac{A}{I} & 0 & 0 & \\ \text{Sim.} & & & \frac{(s_{ii}^* + 2s_{ij}^* + s_{jj}^*) - \rho^2}{L^2} & -\frac{(s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L} & \\ & & & & & s_{jj}^* \end{array} \right) \quad (2.3.61)$$

com $\rho = kL$.

A equação 2.3.61 pode ser simplificada considerando que o esforço axial numa viga de um pórtico rectangular é normalmente desprezado. Assim, tomando $S_{ii} = S_{jj} = 4$ e $S_{ij} = S_{ji} = 2$ nas equações 2.3.63, 2.3.64, 2.3.65 e 2.3.66, obtém-se

$$[k]_{\text{viga}} = \frac{EI}{L} \left(\begin{array}{cccccc} \frac{A}{I} & 0 & 0 & -\frac{A}{I} & 0 & 0 \\ \frac{(s_{ii}^* + 2s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L^2} & \frac{(s_{ii}^* + s_{jj}^*)}{L} & 0 & -\frac{(s_{ii}^* + 2s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L^2} & \frac{(s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L} & \\ & s_{ii}^* & 0 & -\frac{(s_{ii}^* + s_{jj}^*)}{L} & s_{ij}^* & \\ & & \frac{A}{I} & 0 & 0 & \\ \text{Sim.} & & & \frac{(s_{ii}^* + 2s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L^2} & -\frac{(s_{ij}^* + s_{jj}^*)}{L} & \\ & & & & & s_{jj}^* \end{array} \right) \quad (2.3.62)$$

com S_{ii}^* e S_{jj}^* definidas por

$$s_{ii}^* = \left(4 + \frac{12EIs_{ii}^2}{LR_{kiB}} \right) R^* \quad (2.3.63)$$

$$s_{ij}^* = \left(4 + \frac{12EIs_{ii}^2}{LR_{kiA}} \right) / R^* \quad (2.3.64)$$

em que

$$s_{ij}^* = s_{ji}^* = 2 / R^* \quad (2.3.65)$$

onde

$$R^* = \left(1 + \frac{4EI}{LR_{kiA}} \right) \left(1 + \frac{4EI}{LR_{kiB}} \right) - \left(\frac{EI}{L} \right)^2 \frac{4}{R_{kiA}R_{kiB}} \quad (2.3.66)$$

com $k = \sqrt{P/EI}$

Como já foi referido, esta matriz é válida para elementos de barra do tipo viga. Para elementos de barra do tipo pilar, onde se garante a continuidade entre os vários elementos, a matriz de rigidez corresponde a matriz apresentada na equação 2.3.25.

2.3.2 Matriz de Rigidez Aproximada 2D

Para utilização em algoritmos computacionais, as formulações anteriores são de difícil aplicação, sobretudo na época em que foram apresentadas, pelos escassos recursos computacionais existentes e pela grande quantidade de informação envolvida no processamento. Com a chegada dos computadores pessoais com grande capacidade de processamento, os programadores introduziram a formulação dos elementos finitos (MEF), para resolver problemas relacionados com engenharia. Este método utiliza uma discretização da estrutura em elementos finitos com a determinação da matriz de rigidez para cada elemento relacionada com os seus graus de liberdade. A matriz do sistema é construída por assamblagem das matrizes elementares por compatibilização dos graus de liberdade.

Como se pode verificar na equação 2.3.25, a matriz de rigidez total exacta assemelha-se à matriz elástica utilizada na análise de 1ª ordem, equação 2.3.1, à qual foram adicionadas as funções de estabilidade ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 . No desenvolvimento de software para a análise de estruturas, a primeira formulação utilizada corresponde à análise de 1ª ordem pelo que se torna mais fácil ter um algoritmo com a matriz de rigidez elástica (ou de 1ª ordem) à qual seria adicionada, no caso de se proceder à análise de 2ª ordem, uma matriz com as funções de estabilidade.

Como estas funções na sua formulação exacta são altamente não lineares, optou-se por as linearizar, discretizando as barras em vários elementos de forma a obter valores próximos do resultado exacto.

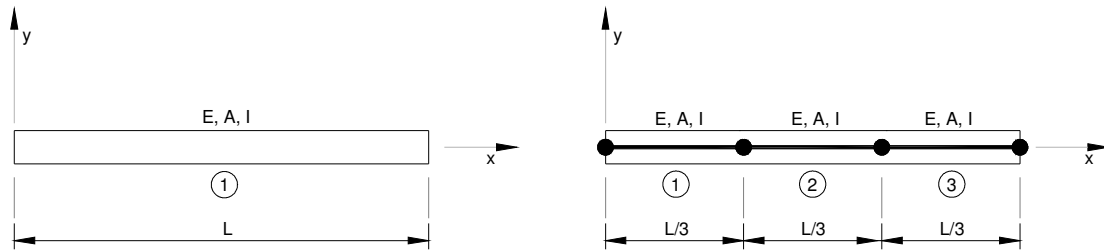


Figura 2.14 – Discretização de um elemento de barra 2D.

Desta forma foi desenvolvida uma formulação aproximada, baseada nas funções de estabilidade, que permite a separação da matriz de rigidez total exacta da equação 2.3.25 em duas matrizes: a matriz de rigidez elástica $[K]$, usada na análise de 1ª ordem; e a matriz de rigidez geométrica $[G]$, associada às funções de estabilidade e usada para introduzir o efeito do esforço axial na diminuição da rigidez à flexão, ou seja o efeito provocado, na matriz de rigidez total exacta, pela introdução das funções de estabilidade.

$$\{f\} = [K_t]\{u\} \quad (2.3.67)$$

Então, a matriz de rigidez total $[K_t]$ da equação 2.3.67, pode ser obtida através de $[K]$ e de $[G]$, como indicado na equação 2.3.68.

$$[K_t] = [K] + [G] \quad (2.3.68)$$

Na definição da matriz de rigidez exacta $[K_{exacta}]$ foram apresentados dois casos, um caso em que $[K_{exacta}]$ foi obtida pelo equilíbrio na configuração deformada de um elemento sem translações das extremidades e outro caso, mais geral, em que o equilíbrio se fez para um elemento com translações das extremidades. A matriz de rigidez total $[K_t]$, simplificação de $[K_{exacta}]$, será determinada a partir da formulação com translações das extremidades e que corresponde à formulação clássica. Como a matriz de rigidez total é composta pela matriz de rigidez elástica $[K]$ e pela matriz de rigidez geométrica $[G]$, na realidade, a matriz que interessa obter é a geométrica já que a elástica coincide com a matriz de rigidez de 1ª ordem.

2.3.2.1 Modelação com translação das extremidades

Para escrever a matriz de rigidez total 2D exacta procede-se ao equilíbrio de um elemento de barra na configuração deformada, Figura 2.15 (Johnson 1960, Chen e Lui 1991).

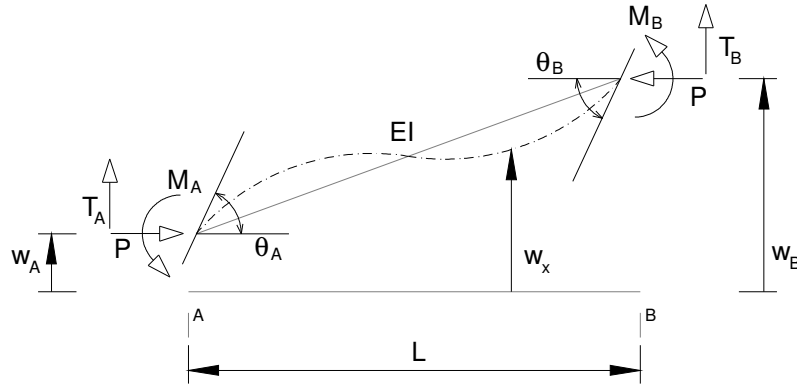


Figura 2.15 – Elemento 2D – configuração deformada.

Para obter a matriz de rigidez geométrica será utilizado o método de Rayleigh-Ritz (MRR), equação 2.3.69.

$$\delta^2 V = \delta^2 U + \delta^2 \Omega \tag{2.3.69}$$

em que

$$\delta^2 V = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \right] dx \tag{2.3.70}$$

e

$$\delta^2 U = - \int_0^L \left[\frac{P}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx - (M_A \theta_A + T_A w_A + M_B \theta_B + T_B w_B) \tag{2.3.71}$$

Introduzindo as condições de fronteira

$$\left. \begin{aligned} w_A = w(0), \quad w_B = w(L) \\ \theta_A = \frac{dw}{dx}(0), \quad \theta_B = \frac{dw}{dx}(L) \end{aligned} \right\} \tag{2.3.72}$$

e recorrendo a função deformada aproximada

$$w(x) = q_1 x^3 + q_2 x^2 + q_3 x + q_4 \quad (2.3.73)$$

pode-se escrever as constantes q_1, q_2, q_3, q_4 em relação aos deslocamentos nodais $W_A, \theta_A, W_B, \theta_B$ obtendo

$$w_A = w(0) = q_4, \quad w_B = w(L) = q_1 L^3 + q_2 L^2 + q_3 L + q_4 \quad (2.3.74)$$

$$\theta_A = \frac{dw}{dx}(0) = q_3, \quad \theta_B = \frac{dw}{dx}(L) = 3q_1 L^2 + 2q_2 L + q_3 \quad (2.3.75)$$

Substituindo em 2.3.72, obtém-se q_1, q_2, q_3, q_4

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{2}{L^3} W_A + \frac{1}{L^2} \theta_A - \frac{2}{L^3} W_B + \frac{1}{L^2} \theta_B \\ q_2 &= \frac{-3}{L^2} W_A - \frac{2}{L} \theta_A + \frac{3}{L^2} W_B - \frac{1}{L} \theta_B \\ q_3 &= \theta_A \\ q_4 &= W_A \end{aligned} \right\} \quad (2.3.76)$$

que introduzidas na equação 2.3.73 permite obter a função aproximada

$$w(x) = \theta_A \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \right) + \left(\frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \right) + \theta_B \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L} \right) + w_B \left(-\frac{2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \right) \quad (2.3.77)$$

ou

$$w(x) = Q_1 \psi_1(x) + Q_2 \psi_2(x) + Q_3 \psi_3(x) + Q_4 \psi_4(x) \quad (2.3.78)$$

A equação 2.3.78 pode ser apresentada em função de $\zeta = x/L$

$$w(\xi) = Q_1 \psi_1(\xi) + Q_2 \psi_2(\xi) + Q_3 \psi_3(\xi) + Q_4 \psi_4(\xi) \quad (2.3.79)$$

sendo as funções ψ_i ($i=1,2,3,4$) designadas por funções interpoladoras de Hermite, definidas

por

$$\left. \begin{aligned} \psi_1(\xi) &= L(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) \\ \psi_2(\xi) &= 2\xi^3 - 3\xi^2 + 1 \\ \psi_3(\xi) &= L(\xi^3 - \xi^2) \\ \psi_4(\xi) &= -2\xi^3 + 3\xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.80)$$

As funções ψ_i ($i=1,2,3,4$) correspondem às funções de forma associadas a cada um dos deslocamentos generalizados Q_i ($i=1,2,3,4$) e representam uma configuração deformada $Q_i=1$ e $Q_{i \neq j}=0$.

Recorrendo novamente ao MRR

$$\delta^2 V = \frac{1}{2} [K_{ij} + G_{ij}] Q_i Q_j - F_i Q_i \quad (2.3.81)$$

em que K_{ij} e G_{ij} são obtidas por

$$K_{ij} = EI \int_0^L \frac{d^2 \psi_i}{dx^2} \frac{d^2 \psi_j}{dx^2} dx \quad (2.3.82)$$

$$G_{ij} = -P \int_0^L \frac{d\psi_i}{dx} \frac{d\psi_j}{dx} dx \quad (2.3.83)$$

Utilizando o equilíbrio definido por

$$\frac{\partial(\delta^2 V)}{\partial Q_i} = 0 \quad (2.3.84)$$

obtém-se a equação de equilíbrio

$$[K_{ij} + G_{ij}] Q_j - F_i = 0 \Rightarrow F_i = [K_{ij} + G_{ij}] Q_j \quad (2.3.85)$$

$$F_i = K_{ij}^{-1} Q_j \quad (2.3.86)$$

A equação 2.3.85 pode ser representada na forma matricial

$$[K_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L} & \frac{-12EI}{L^3} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L} & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L} \\ \frac{-6EI}{L} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L} & \frac{12EI}{L^3} \end{pmatrix} \quad (2.3.87)$$

$$[G_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{-2PL}{15} & \frac{-P}{10} & \frac{PL}{30} & \frac{P}{10} \\ \frac{-P}{10} & \frac{-6P}{5L} & \frac{-P}{10} & \frac{6P}{5L} \\ \frac{PL}{30} & \frac{-P}{10} & \frac{-2PL}{15} & \frac{P}{10} \\ \frac{P}{10} & \frac{6P}{5L} & \frac{P}{10} & \frac{-6P}{5L} \end{pmatrix} \quad (2.3.88)$$

A matriz $[K]$ corresponde à matriz de rigidez elástica, usada na análise de 1ª ordem e $[G]$ à matriz de rigidez geométrica, associada à diminuição da rigidez à flexão, devido ao esforço axial.

Agrupando as duas matrizes obtém-se a matriz de rigidez total aproximada, equação 2.3.89, onde está representada a equação de equilíbrio utilizada na modelação aproximada da matriz de rigidez.

$$\begin{pmatrix} M_A \\ T_A \\ M_B \\ T_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} - \frac{2L}{15}P & \frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10}P & \frac{2EI}{L} + \frac{L}{30}P & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{1}{10}P \\ \frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10}P & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6}{5L}P & \frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10}P & \frac{-12EI}{L^3} + \frac{6}{5L}P \\ \frac{2EI}{L} + \frac{L}{30}P & \frac{6EI}{L^2} - \frac{1}{10}P & \frac{4EI}{L} - \frac{2L}{15}P & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{1}{10}P \\ \frac{-6EI}{L^2} + \frac{1}{10}P & \frac{-12EI}{L^3} + \frac{6}{5L}P & \frac{-6EI}{L^2} + \frac{1}{10}P & \frac{12EI}{L^3} - \frac{6}{5L}P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_A \\ W_A \\ \theta_B \\ W_B \end{pmatrix} \quad (2.3.89)$$

Nesta equação, verifica-se que a matriz geométrica reduz as parcelas correspondentes à matriz elástica o que comprova que a utilização do esforço axial na formulação da matriz de rigidez total, contribui para a diminuição da rigidez do elemento à flexão.

Quando se abordou a determinação da matriz de rigidez total exacta, foram definidas as funções de estabilidade exactas através do seu desenvolvimento em série de Taylor, equações 2.3.37, 2.3.38, 2.3.39, 2.3.40. Se forem eliminadas as parcelas de ordem superior, equação 2.3.90, as funções obtidas para cada desenvolvimento apresentar-se-ão como rectas tangentes às funções exactas que lhes deram origem.

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= 1 + \frac{(kL)^2}{10} \left[-\frac{(kL)^4}{8400} + \frac{(kL)^6}{108000} - \frac{37(kL)^8}{2328480000} \right] \\ s_3 &= 1 + \frac{(kL)^2}{60} - \frac{(kL)^4}{8400} + \frac{(kL)^6}{756000} - \frac{37(kL)^8}{2328480000} \\ s_4 &= 1 + \frac{(kL)^2}{30} - \frac{(11kL)^4}{25200} + \frac{(kL)^6}{108000} - \frac{509(kL)^8}{2328480000} \\ s_5 &= 1 - \frac{(kL)^2}{60} + \frac{13(kL)^4}{25200} - \frac{11(kL)^6}{756000} + \frac{907(kL)^8}{2328480000} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.90)$$

Desta forma, definem-se novas funções aproximadas, ϕ'_j ($j = 1, 2, 3, 4$), equação 2.3.91.

$$\left. \begin{aligned} \phi'_1 &= 1 - \frac{\pi^2 P}{10 P_e} \\ \phi'_2 &= 1 - \frac{\pi^2 P}{60 P_e} \\ \phi'_3 &= 1 - \frac{\pi^2 P}{30 P_e} \\ \phi'_4 &= 1 + \frac{\pi^2 P}{60 P_e} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.91)$$

Assim, a matriz de rigidez total aproximada, também pode ser obtida através da linearização da matriz de rigidez total exacta, usando as funções de estabilidade. Para o caso de $P=0$ a

matriz torna-se exacta (sem a contribuição do esforço axial) e para $P \neq 0$ a formulação será aproximada.

Comparando a matriz exacta com a matriz aproximada, constata-se que a principal diferença se refere à dependência do esforço axial P . No caso da matriz exacta, as funções são altamente não lineares, enquanto que na formulação aproximada a dependência é linear. Assim, como já foi referido, a matriz geométrica corresponde à linearização da matriz exacta através da substituição das funções de estabilidade pelas tangentes na origem.

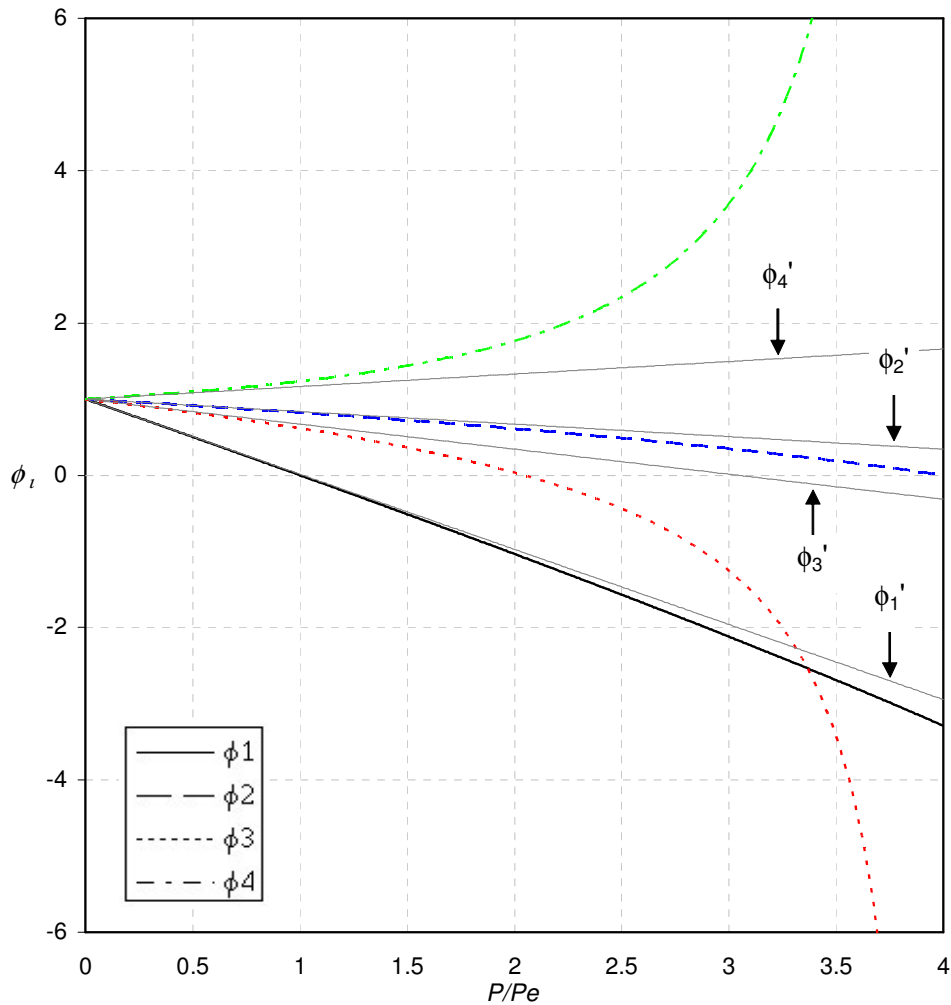


Gráfico 2.3 – Funções de estabilidade exactas e aproximadas.

No Gráfico 2.3 estão representadas as funções de estabilidade exactas ϕ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) e as correspondentes linearizações ϕ'_j ($j = 1, 2, 3, 4$). A introdução das funções aproximadas

produzem erros pequenos para relações P/Pe de valor reduzido, mas à medida que se aumenta essa relação, ou seja, para valores elevados de P/Pe , os erros associados são significativos.

Devido à simplificação introduzida na obtenção das funções de estabilidade aproximadas, a os valores dos parâmetros críticos e modos de instabilidade podem apresentar erros expressivos se não for utilizada uma discretização correcta das barras, já que as funções estão associadas à configuração deformada, e como no caso aproximado elas são lineares, é necessário aumentar o número de elementos (discretização) para que a deformada se aproxime de uma deformação não linear.

Para obter resultados próximos do valor exacto, com erros inferiores a 3%, é necessária uma discretização de 3 elementos por barra.

2.4 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA 3D

Como foi referido, as primeiras investigações efectuadas para estudar a análise linear de estabilidade foram efectuadas recorrendo à formulação exacta da matriz de rigidez de um elemento 2D.

Com o aumento da capacidade de processamento dos computadores tornou-se mais fácil introduzir algoritmos com formulações baseadas em elementos 3D, permitindo um estudo mais rigoroso do comportamento estrutural.

De seguida, são apresentadas as formulações exacta e aproximada para o caso de se considerarem elementos tridimensionais.

2.4.1 Matriz de Rigidez Total Exacta 3D

O objectivo da utilização da análise de estabilidade consiste na determinação dos valores exactos dos parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade, estando a análise mais completa baseada na utilização da matriz total exacta com formulação tridimensional (Seung-Eock *et al.* 2001, 2001a, 2001b, Kuw e Ju 2001). Diversos autores estudaram esta matéria desenvolvendo várias formulações, mais ou menos refinadas, para introduzir os efeitos não lineares geométricos na resolução de problemas estruturais 3D.

De seguida, serão apresentadas algumas formulações da matriz de rigidez para elementos 3D, de acordo com as notações de Chen e Lui (1991), Ekhande *et al.* (1989), Seung-Eock *et al.* (2001c) e será ainda mencionada a abordagem feita por Mijalković (1999).

2.4.1.1 Formulação de Chen e Lui

A matriz apresentada para o caso 2D de uma barra sujeita a momentos e esforços axiais nas extremidades pode ser adaptada ao caso 3D.

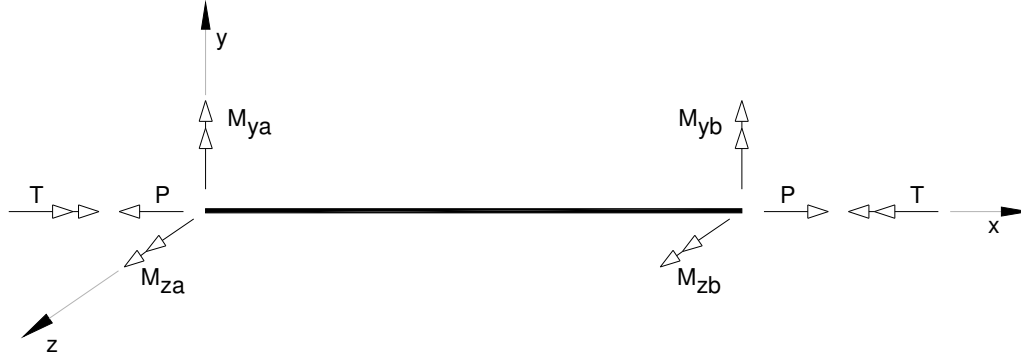


Figura 2.16 – Elemento 3D – esforços nas extremidades.

Neste caso, a matriz de rigidez tem que apresentar a influência do esforço axial na definição dos momentos associados a uma representação espacial do elemento, Figura 2.16.

Assim, a equação de equilíbrio força-deslocamento para um elemento 3D pode ser obtida por

$$\begin{pmatrix} P \\ M_{yA} \\ M_{yB} \\ M_{zA} \\ M_{zB} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 \frac{EI_y}{L} & S_2 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 \frac{EI_y}{L} & S_1 \frac{EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_3 \frac{EI_z}{L} & S_4 \frac{EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_4 \frac{EI_z}{L} & S_3 \frac{EI_z}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \theta_{yA} \\ \theta_{yB} \\ \theta_{zA} \\ \theta_{zB} \\ \phi \end{pmatrix} \quad (2.4.1)$$

em que S_1 , S_2 e S_3 são as funções de estabilidade relativamente ao eixo yy e S_4 relativamente ao eixo zz. M_{yA} , M_{yB} , M_{zA} , M_{zB} os momentos incrementais, P o esforço axial incremental, T a torção, θ_{yA} , θ_{yB} , θ_{zA} , θ_{zB} as rotações incrementais, δ o deslocamento transversal incremental, ϕ o ângulo de torção, A a área, I_y , I_z as inércias em yy e zz, L o comprimento do elemento e E o módulo de elasticidade.

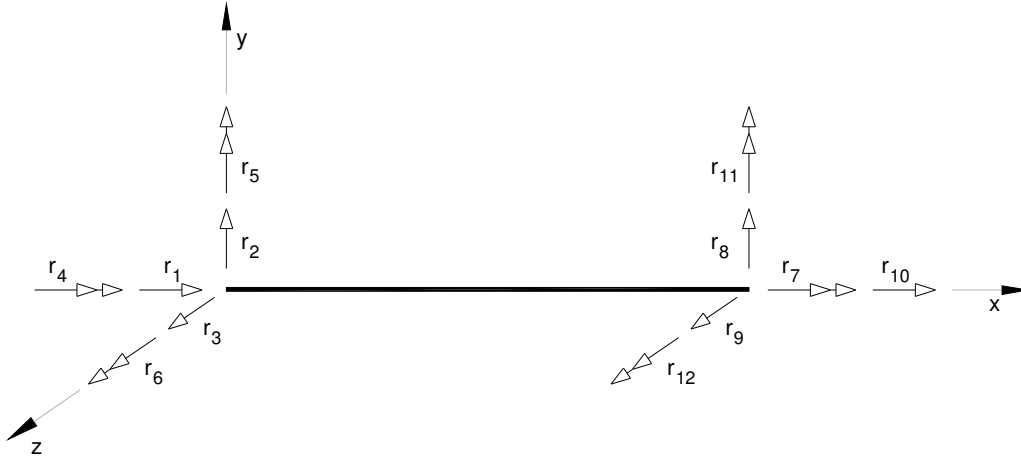


Figura 2.17 – Elemento 3D – graus de liberdade.

As funções de estabilidade associadas à matriz são definidas por:

$$S_1 = \begin{cases} \frac{\pi\sqrt{\rho_y} \sin(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi^2\rho_y \cos(\pi\sqrt{\rho_y})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi\sqrt{\rho_y} \sin(\pi\sqrt{\rho_y})} & \text{se } P < 0 \\ \frac{\pi^2\rho_y \cosh(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi\sqrt{\rho_y} \sinh(\pi\sqrt{\rho_y})}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi\sqrt{\rho_y} \sinh(\pi\sqrt{\rho_y})} & \text{se } P > 0 \end{cases} \quad (2.4.2)$$

$$S_2 = \begin{cases} \frac{\pi^2\rho_y - \pi\sqrt{\rho_y} \sin(\pi\sqrt{\rho_y})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi\sqrt{\rho_y} \sin(\pi\sqrt{\rho_y})} & \text{se } P < 0 \\ \frac{\pi\sqrt{\rho_y} \sinh(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi^2\rho_y}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho_y}) - \pi\sqrt{\rho_y} \sinh(\pi\sqrt{\rho_y})} & \text{se } P > 0 \end{cases} \quad (2.4.3)$$

$$S_3 = \begin{cases} \frac{\pi\sqrt{\rho_z} \sin(\pi\sqrt{\rho_z})\pi^2\rho_z \cos(\pi\sqrt{\rho_z})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho_z}) - \pi\sqrt{\rho_z} \sin(\pi\sqrt{\rho_z})} & \text{se } P < 0 \\ \frac{\pi^2\rho_z \cosh(\pi\sqrt{\rho_z}) - \pi\sqrt{\rho_z} \sinh(\pi\sqrt{\rho_z})}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho_z}) - \pi\sqrt{\rho_z} \sinh(\pi\sqrt{\rho_z})} & \text{se } P > 0 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

$$S_4 = \begin{cases} \frac{\pi^2 \rho_z - \pi \sqrt{\rho_z} \sin(\pi \sqrt{\rho_z})}{2 - 2 \cos(\pi \sqrt{\rho_z}) - \pi \sqrt{\rho_z} \sin(\pi \sqrt{\rho_z})} & \text{se } P < 0 \\ \frac{\pi \sqrt{\rho_z} \sinh(\pi \sqrt{\rho_z}) - \pi^2 \rho_z}{2 - 2 \cosh(\pi \sqrt{\rho_z}) - \pi \sqrt{\rho_z} \sinh(\pi \sqrt{\rho_z})} & \text{se } P > 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

em que $\rho_y = P/(\pi^2 EI_y/L^2)$, $\rho_z = P/(\pi^2 EI_z/L^2)$ e P positivo nas tracções.

Pode-se relacionar os esforços nas extremidades (Figura 2.16) com os deslocamentos nodais (Figura 2.17), obtendo as relações

$$\{f_n\} = [T]_{(6 \times 12)}^T \{f_e\} \quad (2.4.6)$$

$$\{d_e\} = [T]_{(6 \times 12)}^T \{d_L\} \quad (2.4.7)$$

em que

$$\{f_n^T\} = \{r_{n1}, r_{n2}, r_{n3}, r_{n4}, r_{n5}, r_{n6}, r_{n7}, r_{n8}, r_{n9}, r_{n10}, r_{n11}, r_{n12}\} \quad (2.4.8)$$

$$\{d_L^T\} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}\} \quad (2.4.9)$$

e a matriz de transformação $[T]$ é

$$[T]_{(6 \times 12)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{L} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.10)$$

Assim, a relação força-deslocamento pode ser dada por

$$\{f_n\} = [K_n]_{(12 \times 12)} \cdot \{d_L\} \quad (2.4.11)$$

com

$$[K_n]_{(12 \times 12)} = [T]_{(6 \times 12)}^T [K_e] [T]_{(6 \times 12)} \quad (2.4.12)$$

2.4.1.2 Formulação de Ekhande, Selvappalam e Madugula

A matriz que foi apresentada na secção anterior, não contabiliza todos os efeitos associados à deformação espacial do elemento de barra 3D. No final da década de 80, Ekhande, Selvappalam e Madugula (1989) estudaram com grande pormenor a estabilidade de elemento do tipo viga-coluna 3D, apresentando uma formulação da matriz de rigidez, fundamentada em nove funções de estabilidade. O estudo foi elaborado com base na projecção espacial de um elemento 3D, Figura 2.18, analisando o comportamento de cada projecção do elemento de barra nos planos X-Y e X-Z.

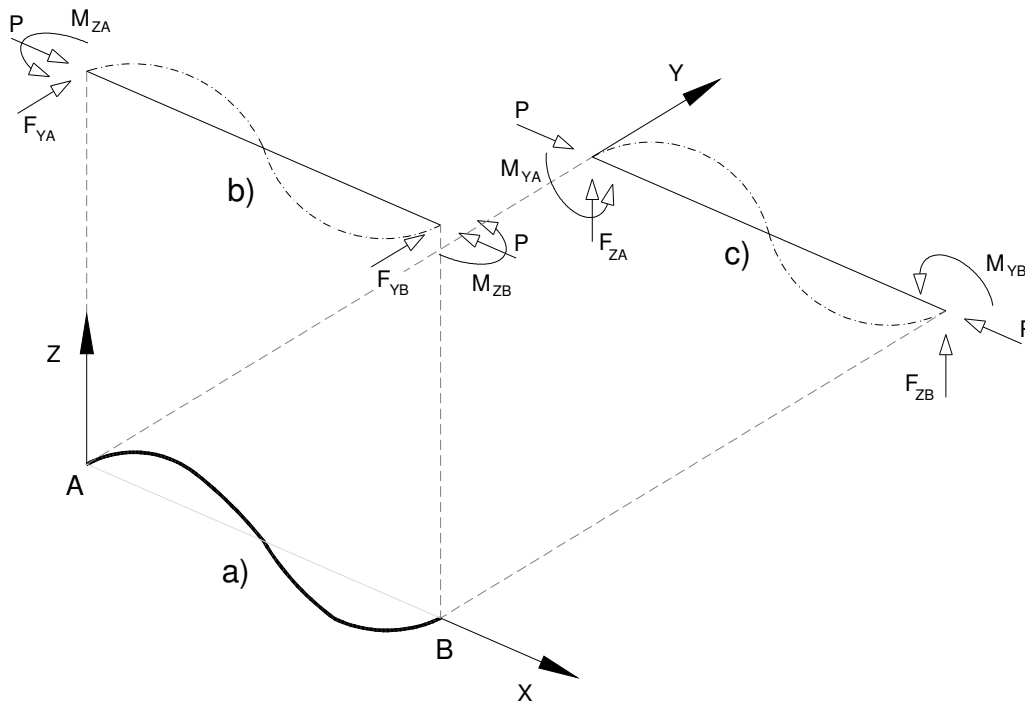


Figura 2.18 – Elemento 3D – Decomposição nos planos X-Y e X-Z.

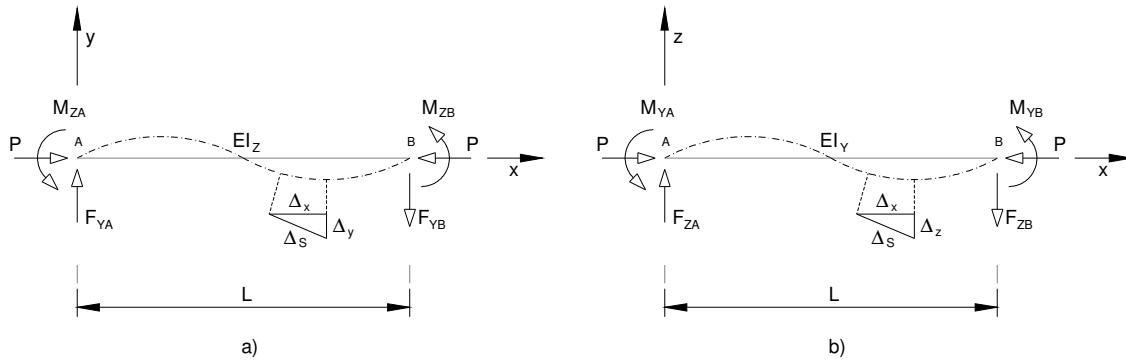


Figura 2.19 – Elemento 3D – Flexão nos planos nos planos a) X-Y e b) X-Z.

Para determinar as funções de estabilidade do elemento de barra, projectado nos referidos planos, estudaram-se as seguintes situações:

- O efeito do momento flector na rigidez axial;
- O efeito do esforço axial na rigidez à flexão;
- O efeito do esforço axial na rigidez de translação;

Nesta formulação, os efeitos do esforço axial na rigidez à torção e do momento torsor na rigidez axial, não foram considerados. O estudo da torção foi abordado por Yang e McGuire (1986) que apresentaram uma formulação aproximada da matriz de rigidez (elastica + geométrica) para análise de elementos 3D. Esta formulação será apresentada posteriormente neste capítulo.

De seguida, são apresentadas as bases teóricas que permitem definir as funções de estabilidade em função das referidas situações (efeitos).

(i) Efeito do momento flector na rigidez axial

A rigidez axial de uma barra, no caso de não existirem momentos, é dada por EA/L , e a deformação axial devido à carga P é dada por PL/EA . Se existirem momentos nas extremidades da barra, surge uma deformação adicional pelo que é necessário introduzir o efeito do momento flector na deformação axial do elemento. Considerando que a nova rigidez axial é $s_1(EA/L)$, define-se o factor s_1 como sendo a função de estabilidade que introduz o efeito do momento flector na rigidez axial. A equação da função de estabilidade pode ser obtida analisando as projecções do elemento de viga-coluna, Figura 2.19.

Assim, pode-se dizer que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.4.13)$$

ou

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \quad (2.4.14)$$

O encurtamento devido à flexão (aproximado) é dado por

$$d\delta_b = ds - dx \quad (2.4.15)$$

pelo que

$$\frac{d\delta_b}{dx} = \frac{ds}{dx} - 1 \quad (2.4.16)$$

Excluindo os termos de ordem superior, obtém-se

$$\frac{d\delta_b}{dx} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right] \quad (2.4.17)$$

e o encurtamento será

$$\delta_b = \int_0^1 \frac{d\delta_b}{dx} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right] dx \quad (2.4.18)$$

O encurtamento total da viga-coluna, δ_t , é igual à soma das parcelas relativas ao encurtamento devido à carga axial, δ_a , e o encurtamento devido à flexão, δ_b . Assim, pode-se definir a equação do encurtamento total, considerando que $\delta_a = PL/EA$ e que δ_b corresponde ao valor obtido pela equação 2.4.18, pelo que

$$\delta_t = \frac{PL}{EA} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right] dx = \frac{PL}{EA} \left\{ 1 + \frac{EA}{2PL} \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 \right] dx \right\} \quad (2.4.19)$$

ou

$$\delta_t = \frac{P}{s_1 \left(\frac{EA}{L} \right)} \quad (2.4.20)$$

em que

$$s_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{2PL} \int_0^1 \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx} \quad (2.4.21)$$

sendo necessário definir (dy/dx) e (dz/dx) .

Observando a Figura 2.19, conclui-se que a curvatura é dada por

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{EI_z} \left[-M_{za} + \frac{x}{L} (M_{za} + M_{zb}) - Py \right] \quad (2.4.22)$$

Admitindo que

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI_z} \quad (2.4.23)$$

e substituindo na equação 2.4.22, obtém-se

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha^2 y = \frac{\alpha^2}{PL} (M_{za} + M_{zb}) x - \frac{\alpha^2}{P} M_{za} \quad (2.4.24)$$

cuja solução é dada por

$$y = \left\{ A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \right\} + \left\{ \frac{x}{PL} (M_{za} + M_{zb}) - \frac{M_{za}}{P} \right\} \quad (2.4.25)$$

introduzindo as condições de fronteira $y=0$ para $x=0$ e $x=L$, retiram-se

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{1}{P} (\operatorname{cosec} \alpha L) [M_{za} \cos \alpha L + M_{zb}] \\ B &= \frac{M_{za}}{P} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.26)$$

A deformação da viga, no plano X-Y, é dada por

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x + \frac{1}{PL}(M_{za} + M_{zb}) \quad (2.4.27)$$

Procedendo da mesma forma, determina-se a equação da flexão da viga-coluna no plano X-Z

$$z = C \sin \beta x + D \cos \beta x + \frac{x}{PL}(M_{ya} + M_{yb}) - \frac{M_{ya}}{P} \quad (2.4.28)$$

com

$$\beta^2 = \frac{P}{EI_y} \quad (2.4.29)$$

introduzindo as condições de fronteira, $z=0$ para $x=0$ e $x=L$, obtém-se

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{1}{P}(\cos \beta L) [M_{ya} \cos \beta L + M_{yb}] \\ D &= \frac{M_{ya}}{P} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.30)$$

e a equação da deformação no plano X-Z é dada por

$$\frac{dz}{dx} = C\beta \cos \beta x - D\beta \sin \beta x + \frac{1}{PL}(M_{ya} + M_{yb}) \quad (2.4.31)$$

Introduzindo as equações 2.4.27 e 2.4.31 na equação 2.4.21, resulta

$$\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \left[\frac{1}{2P^2L} \alpha L (M_{za}^2 + M_{zb}^2) (\cot \alpha L + \alpha L \operatorname{cosec}^2 \alpha L) \right. \\ \left. - 2(M_{za} + M_{zb})^2 + 2\alpha L M_{za} M_{zb} (\operatorname{cosec} \alpha L) (1 + \alpha L \cot \alpha L) \right] \quad (2.4.32)$$

ou

$$\int_0^1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2P^2L} \cdot H_z \quad (2.4.33)$$

e

$$\int_0^1 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2P^2L} \left[\beta L (M_{ya}^2 + M_{yb}^2) (\cot \beta L + \beta L \operatorname{cosec}^2 \beta L) \right] \quad (2.4.34)$$

$$- 2(M_{ya} + M_{yb})^2 + 2\beta L M_{ya} M_{yb} (\operatorname{cosec} \beta L) (1 + \beta L \cot \beta L)$$

ou

$$\int_0^1 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 dx = \frac{1}{2P^2L} \cdot H_y \quad (2.4.35)$$

permitindo definir a função

$$s_I = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3L^2} [H_y + H_z]} \quad (2.4.36)$$

Note-se que no caso de não existirem momentos, a função s_I será unitária. Pode-se elaborar um estudo equivalente para determinar a função s_I no caso da carga P ser de tracção. A função neste caso será

$$s_I = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3L^2} [H'_y + H'_z]} \quad (2.4.37)$$

com

$$H'_y = \beta L (M_{ya}^2 + M_{yb}^2) (\coth \beta L + \beta L \operatorname{cosech}^2 \beta L) - 2(M_{ya} + M_{yb})^2 \quad (2.4.38)$$

$$+ 2\beta L M_{ya} M_{yb} \operatorname{cosech} \beta L (1 + \beta L \coth \beta L)$$

e

$$H'_z = \alpha L (M_{za}^2 + M_{zb}^2) (\coth \alpha L + \alpha L \operatorname{cosech}^2 \alpha L) - 2(M_{za} + M_{zb})^2 \quad (2.4.39)$$

$$+ 2\alpha L M_{za} M_{zb} \operatorname{cosech} \alpha L (1 + \alpha L \coth \alpha L)$$

(ii) Efeito do esforço axial na rigidez à flexão

– Flexão no plano X-Y

A equação diferencial da viga-coluna com flexão no plano X-Y é dada pela equação 2.4.24, cuja solução é dada pela equação 2.4.25. As rotações nas extremidade são obtidas substituindo $x=0$ e $x=L$, obtendo

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} &= \theta_{za} = A\alpha + \frac{1}{PL} [M_{za} + M_{zb}] \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} &= \theta_{zb} = A\alpha \cos \alpha L - B\alpha \sin \alpha L + \frac{1}{PL} [M_{za} + M_{zb}] \end{aligned} \right\} \quad (2.4.40)$$

cuja representação matricial é

$$\begin{bmatrix} M_{za} \\ M_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 (4EI_z / L) & s_3 (2EI_z / L) \\ s_3 (2EI_z / L) & s_2 (4EI_z / L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{za} \\ \theta_{zb} \end{Bmatrix} \quad (2.4.41)$$

Quando P é de compressão, as funções s_2 e s_3 são dadas por

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4} \alpha L \frac{\sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \\ S_3 &= \frac{1}{2} \alpha L \frac{\alpha L - \sin \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.42)$$

e para P de tracção

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{4} \alpha L \frac{\alpha L \cosh \alpha L - \sinh \alpha L}{2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L} \\ S_3 &= \frac{1}{2} \alpha L \frac{\sinh \alpha L - \alpha L}{2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.43)$$

– Flexão no plano X-Z

$$\begin{bmatrix} M_{ya} \\ M_{yb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_4 (4EI_y / L) & s_5 (2EI_y / L) \\ s_5 (2EI_y / L) & s_4 (4EI_y / L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{ya} \\ \theta_{yb} \end{Bmatrix} \quad (2.4.44)$$

Quando P é de compressão, as funções s_4 e s_5 são dadas por

$$\left. \begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{4} \beta L \frac{\sin \beta L - \beta L \cos \beta L}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \\ S_5 &= \frac{1}{2} \beta L \frac{\beta L - \sin \beta L}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.45)$$

e para P de tracção

$$\left. \begin{aligned} S_4 &= \frac{1}{4} \beta L \frac{\beta L \cosh \beta L - \sinh \beta L}{2 - 2 \cosh \beta L - \beta L \sinh \beta L} \\ S_5 &= \frac{1}{2} \beta L \frac{\sinh \beta L - \beta L}{2 - 2 \cosh \beta L - \beta L \sinh \beta L} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.46)$$

Se as extremidades da viga-coluna estiverem impedidas de sofrer rotações, e uma delas apresentar uma translação (Figura 2.20) a rigidez à flexão e ao corte relativamente a esta translação são afectadas pela força P .

- Translação no plano X-Y

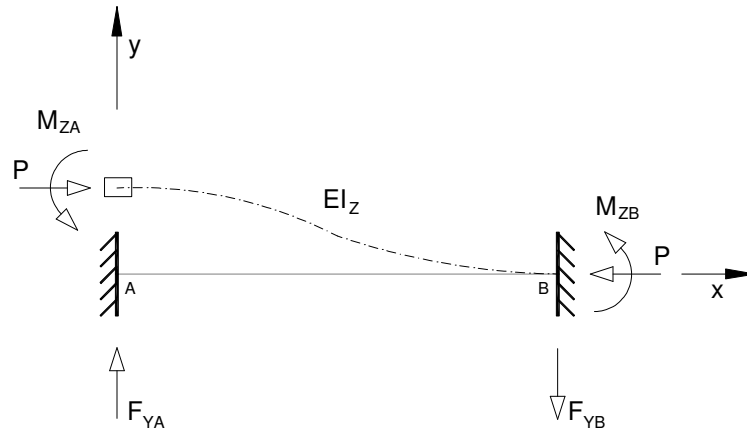


Figura 2.20 – Elemento 3D – Translação no plano X-Y.

Neste caso, a equação de equilíbrio será

$$M_{za} = s_2 \left(\frac{4EI_z}{L} \right) \frac{\Delta_y}{L} + s_3 \left(\frac{2EI_z}{L} \right) \frac{\Delta_y}{L} = \frac{6EI_z}{L^2} \Delta_y \left\{ \frac{2}{3} s_2 + \frac{1}{3} s_3 \right\} = s_6 \frac{6EI_z}{L} \Delta_y \quad (2.4.47)$$

A função s_6 corresponde à função de estabilidade associada ao efeito do esforço axial na rigidez à flexão (em torno de Z) no impedimento da translação Δ_y . Substituindo o valor das funções s_2 e s_3 para o caso de P ser de compressão, obtém-se

$$s_6 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (1 - \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L)} \quad (2.4.48)$$

e quando P é de tracção

$$s_6 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (\cosh \alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L)} \quad (2.4.49)$$

Pode-se determinar a função associada ao efeito do esforço axial na rigidez ao corte contra a translação Δ_y . Observando a Figura 2.20, verifica-se que

$$F_{ya} = \frac{\sum M}{L} \quad (2.4.50)$$

com

$$\sum M = M_{za} + M_{zb} - P\Delta_y \quad (2.4.51)$$

com

$$M_{za} = s_2 \frac{4EI_z}{L} \left(\frac{\Delta_y}{L} \right) + s_3 \frac{2EI_z}{L} \left(\frac{\Delta_y}{L} \right) \quad (2.4.52)$$

e

$$M_{zb} = s_3 \frac{2EI_z}{L} \left(\frac{\Delta_y}{L} \right) + s_2 \frac{4EI_z}{L} \left(\frac{\Delta_y}{L} \right) \quad (2.4.53)$$

pelo que

$$F_{ya} = \left[s_2 \left(\frac{8EI_z}{L^3} \right) + s_3 \left(\frac{4EI_z}{L^3} \right) - \frac{P}{L} \right] \Delta_y \quad (2.4.54)$$

e fazendo

$$\alpha^2 = \frac{P}{EI_z} \quad (2.4.55)$$

obtém-se

$$F_{ya} = \left[s_2 \left(\frac{8EI_z}{L^3} \right) + s_3 \left(\frac{4EI_z}{L^3} \right) - \frac{\alpha^2 EI_z}{L} \right] \Delta_y = \frac{12EI_z}{L^3} \left(\frac{2}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 - \frac{\alpha^2 EI_z}{L} \right) \quad (2.4.56)$$

pelo que

$$F_{ya} = s_7 \left(\frac{12EI_z}{L^3} \right) \quad (2.4.57)$$

Substituindo as funções s_2 e s_3 , obtém-se a função s_7 , que no caso de P ser de compressão é dada por

$$s_7 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (1 - \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L)} - \frac{\alpha^2 L^2}{12} \quad (2.4.58)$$

e no caso da tracção

$$s_7 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (\cosh \alpha L - 1)}{(2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L)} + \frac{\alpha^2 L^2}{12} \quad (2.4.59)$$

– Translação no plano X-Z

Procedendo como na secção anterior, pode-se determinar a função de estabilidade associada ao efeito do esforço axial na rigidez à flexão contra a translação Δ_z , sendo dada por

$$s_8 = \frac{2}{3}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \quad (2.4.60)$$

Substituindo as funções s_4 e s_5 , obtém-se, para P de compressão

$$s_8 = \frac{1}{6} \beta^2 L^2 \frac{(1 - \cos \beta L)}{(2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L)} \quad (2.4.61)$$

e para P de tracção

$$s_6 = \frac{1}{6} \beta^2 L^2 \frac{(\cosh \beta L - 1)}{(2 - 2 \cosh \beta L - \beta L \sinh \beta L)} \quad (2.4.62)$$

Pode-se também, determinar a função associada ao efeito do esforço axial na rigidez ao corte contra a translação Δ_z . Procedendo da mesma forma que na secção anterior, obtém-se para P de compressão

$$s_9 = \frac{2}{3} s_4 + \frac{1}{3} s_5 - \frac{\beta^2 L^2}{12} = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (1 - \cos \beta L)}{(2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L)} - \frac{\beta^2 L^2}{12} \quad (2.4.63)$$

e para P de tracção

$$s_9 = \frac{2}{3} s_4 + \frac{1}{3} s_5 + \frac{\beta^2 L^2}{12} = \frac{1}{6} \beta^2 L^2 \frac{(\cosh \beta L - 1)}{(2 - 2 \cosh \beta L - \beta L \sinh \beta L)} + \frac{\beta^2 L^2}{12} \quad (2.4.64)$$

Desta forma, ficam definidas as funções de estabilidade associadas às deformações espaciais, representadas nos planos X-Y e X-Z, de uma viga-coluna 3D.

Definindo o vector das solicitações e o vector dos deslocamentos nodais, obtém-se a equação de equilíbrio do elemento, dada por

$$[F] = [K][U] \quad (2.4.65)$$

em que

$$\{F\}^T = \{F_{xa}, F_{ya}, F_{za}, M_{xa}, M_{ya}, M_{za}, F_{xb}, F_{yb}, F_{zb}, M_{xb}, M_{yb}, M_{zb}\} \quad (2.4.66)$$

e

$$\{U\}^T = \{u_a, v_a, w_a, \theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}, u_b, v_b, w_b, \theta_{xb}, \theta_{yb}, \theta_{zb}\} \quad (2.4.67)$$

As funções de estabilidade são introduzidas na matriz de rigidez, associadas a cada grau de liberdade, resultando a matriz definida na equação 2.4.68 (incluindo a deformação por corte).

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix}
 s_1 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & s_1 \frac{12EI_z}{L^3(1-\phi_b)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & s_1 \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_b)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_b)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{12EI_z}{L^3(1-\phi_b)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_b)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_b)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{12EI_z}{L^3(1-\phi_b)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_b)} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_1 \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_b)}
 \end{pmatrix}$$

(2.4.68)

As funções ϕ_y e ϕ_z são definidas por

$$\left. \begin{aligned} \phi_y &= \frac{12EI_z}{GA_{sy}L^2} = 24(1-\nu) \frac{A}{A_{sy}} \left(\frac{r_z}{L} \right)^2 \\ \phi_z &= \frac{12EI_y}{GA_{sz}L^2} = 24(1-\nu) \frac{A}{A_{sz}} \left(\frac{r_y}{L} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.69)$$

2.4.1.3 Formulação de Eock, Yosuk e Hyu

Outra formulação é apresentada por Eock, Yosuk e Hyu em que o elemento 3D estudado permite ainda a introdução do efeito não linear material com a possibilidade de formação de rótulas plásticas, Figura 2.21.

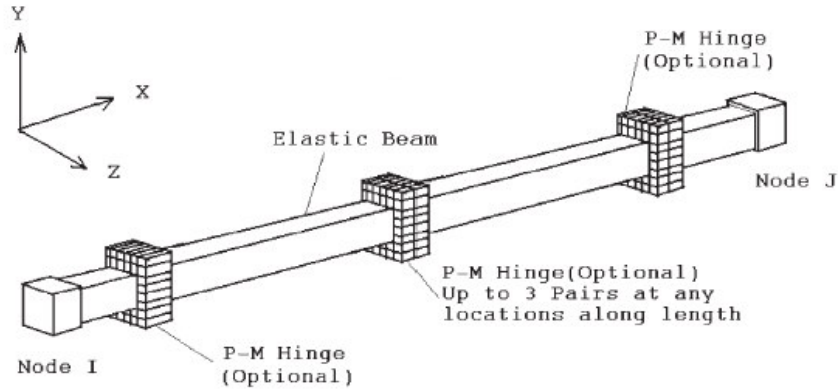


Figura 2.21 – Elemento 3D – Viga – Coluna com capacidade de formação de rótulas plásticas.

Esta matriz considera a degradação da rigidez provocada pela interacção entre o esforço axial e os momentos flectores. A relação força-deslocamento, neste caso, pode ser escrita como:

$$[F]^{local} = [K]_{(12 \times 12)}^{local} \cdot [U]^{local} \quad (2.4.70)$$

em que a matriz $[K]_{(12 \times 12)}$ representa a matriz de rigidez 3D tangente exacta para uma viga-coluna, Figura 2.18, e os factores S_i ($i=1 \sim 9$) são as funções de estabilidade, com

$$\{F\}^T = \{F_{xa}, F_{ya}, F_{za}, M_{xa}, M_{ya}, M_{za}, F_{xb}, F_{yb}, F_{zb}, M_{xb}, M_{yb}, M_{zb}\} \quad (2.4.71)$$

$$\{d\}^T = \{u_a, v_a, w_a, \theta_{xa}, \theta_{ya}, \theta_{za}, u_b, v_b, w_b, \theta_{xb}, \theta_{yb}, \theta_{zb}\} \quad (2.4.72)$$

sendo a matriz de rigidez dada por

$$[k] = \begin{pmatrix} S_1 k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 k_{7,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_7 k_{2,2} & 0 & 0 & 0 & S_6 k_{6,2} & 0 & S_7 k_{8,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_6 k_{12,2} \\ S_9 k_{3,3} & 0 & S_8 k_{5,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_9 k_{9,3} & 0 & S_8 k_{11,3} & 0 & 0 \\ k_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{10,4} & 0 & 0 & 0 \\ S_4 k_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & S_8 k_{9,5} & 0 & S_5 k_{11,5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 k_{6,6} & 0 & S_6 k_{8,6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_3 k_{2,6} & 0 & 0 & 0 \\ S_1 k_{7,7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_7 k_{8,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_6 k_{12,8} & 0 & 0 & 0 \\ sim. & & & & & & S_9 k_{9,9} & 0 & S_8 k_{11,9} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k_{10,10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & S_4 k_{11,11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & S_2 k_{12,12} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.73)$$

Com as funções S_i , equivalentes às apresentadas por Ekhande, Selvappalam e Madugula (1989), definidas da seguinte forma:

- S_1 - Função de estabilidade para o efeito da flexão na rigidez axial.
- S_2 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez à flexão contra a rotação da extremidade próxima em torno do eixo Z.
- S_3 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez à flexão contra a rotação da extremidade afastada em torno do eixo Z.
- S_4 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez à flexão contra a rotação da extremidade próxima em torno do eixo Y.
- S_5 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez à flexão contra a rotação da extremidade afastada em torno do eixo Y.
- S_6 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez à flexão (em torno do eixo Z) contra a translação na direcção Y.
- S_7 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez ao corte no eixo Y contra a translação na direcção Y.
- S_8 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez à flexão (em torno do eixo Y) contra a translação na direcção Y.
- S_9 - Função de estabilidade para o efeito do esforço axial na rigidez ao corte no eixo Z contra a translação na direcção Z.

No caso de cargas axiais de compressão, as funções de estabilidade são

$$S_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3 L^2} (H_y + H_z)} \quad (2.4.74)$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \alpha L \frac{\sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \quad (2.4.75)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \alpha L \frac{\alpha L - \sin \alpha L}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \quad (2.4.76)$$

$$S_4 = \frac{1}{4} \beta L \frac{\sin \beta L - \beta L \cos \beta L}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \quad (2.4.77)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \beta L \frac{\beta L - \sin \beta L}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \quad (2.4.78)$$

$$S_6 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (1 - \cos \alpha L)}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} \quad (2.4.79)$$

$$S_7 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (1 - \cos \alpha L)}{2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L} - \frac{\alpha^2 L^2}{12} \quad (2.4.80)$$

$$S_8 = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (1 - \cos \beta L)}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} \quad (2.4.81)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (1 - \cos \beta L)}{2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L} - \frac{\beta^2 L^2}{12} \quad (2.4.82)$$

com

$$H_y = \beta L (M_{ya}^2 + M_{yb}^2) (\cot \beta L + \beta L \operatorname{cosec}^2 \beta L) - 2 (M_{ya} + M_{yb})^2 + 2 \beta L M_{ya} M_{yb} \operatorname{cosec} \beta L (1 + \beta L \cot \beta L) \quad (2.4.83)$$

$$H_z = \alpha L (M_{za}^2 + M_{zb}^2) (\cot \alpha L + \alpha L \operatorname{cosec}^2 \alpha L) - 2 (M_{za} + M_{zb})^2 + 2 \alpha L M_{za} M_{zb} \operatorname{cosec} \alpha L (1 + \alpha L \cot \alpha L) \quad (2.4.84)$$

em que $\alpha^2 = \frac{P}{EI_z}$ e $\beta^2 = \frac{P}{EI_y}$

Quando o esforço axial é muito pequeno ou próximo de zero, as funções de estabilidade S_2 , S_3 , S_4 e S_5 tornam-se instáveis. Usando desenvolvimentos em série retira-se a referida instabilidade obtém-se

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= 1 - \frac{\pi^2}{30} \rho_z - \frac{11\pi^4}{25200} \rho_z^2 - \frac{\pi^6}{108000} \rho_z^3 - \frac{509\pi^8}{2328480000} \rho_z^4 - \frac{14617\pi^{10}}{2724321600000} \rho_z^5 \\ s_3 &= 1 + \frac{\pi^2}{60} \rho_z + \frac{13\pi^4}{25200} \rho_z^2 + \frac{11\pi^6}{756000} \rho_z^3 + \frac{907\pi^8}{2328480000} \rho_z^4 + \frac{27641\pi^{10}}{2724321600000} \rho_z^5 \\ s_4 &= 1 - \frac{\pi^2}{30} \rho_y - \frac{11\pi^4}{25200} \rho_y^2 - \frac{\pi^6}{108000} \rho_y^3 - \frac{509\pi^8}{2328480000} \rho_y^4 - \frac{14617\pi^{10}}{2724321600000} \rho_y^5 \\ s_5 &= 1 + \frac{\pi^2}{60} \rho_y + \frac{13\pi^4}{25200} \rho_y^2 + \frac{11\pi^6}{756000} \rho_y^3 + \frac{907\pi^8}{2328480000} \rho_y^4 + \frac{27641\pi^{10}}{2724321600000} \rho_y^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.85)$$

$$\rho_y = \frac{P}{\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \right)} \quad (2.4.86)$$

$$\rho_z = \frac{P}{\left(\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \right)} \quad (2.4.87)$$

e as funções de estabilidade S_6 , S_7 , S_8 e S_9

$$\left. \begin{aligned} s_6 &= \frac{2}{3} s_2 + \frac{1}{3} s_3 \\ s_7 &= \frac{2}{3} s_2 + \frac{1}{3} s_3 - \frac{\alpha^2 L^2}{12} \\ s_8 &= \frac{2}{3} s_4 + \frac{1}{3} s_5 \\ s_9 &= \frac{2}{3} s_4 + \frac{1}{3} s_5 - \frac{\beta^2 L^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.88)$$

Se o esforço axial é de tracção, as funções são definidas por

$$S_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3 L^2} (H'_y + H'_z)} \quad (2.4.89)$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \alpha L \frac{\alpha L \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L}{2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L} \quad (2.4.90)$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \alpha L \frac{\sinh \alpha L - \alpha L}{2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L} \quad (2.4.91)$$

$$S_4 = \frac{1}{4} \beta L \frac{\beta L \cosh \beta L - \sinh \beta L}{2 - 2 \cosh \beta L + \beta L \sinh \beta L} \quad (2.4.92)$$

$$S_5 = \frac{1}{2} \beta L \frac{\sinh \beta L - \beta L}{2 - 2 \cosh \beta L + \beta L \sinh \beta L} \quad (2.4.93)$$

$$S_6 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (\cosh \alpha L - 1)}{2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L} \quad (2.4.94)$$

$$S_7 = \frac{1}{6} \frac{\alpha^2 L^2 (\cosh \alpha L - 1)}{2 - 2 \cosh \alpha L + \alpha L \sinh \alpha L} + \frac{\alpha^2 L^2}{12} \quad (2.4.95)$$

$$S_8 = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (\cosh \beta L - 1)}{2 - 2 \cosh \beta L + \beta L \sinh \beta L} \quad (2.4.96)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \frac{\beta^2 L^2 (\cosh \beta L - 1)}{2 - 2 \cosh \beta L + \beta L \sinh \beta L} - \frac{\beta^2 L^2}{12} \quad (2.4.97)$$

com

$$H'_y = \beta L \left(M_{ya}^2 + M_{yb}^2 \right) \left(\coth \beta L + \beta L \operatorname{cosech}^2 \beta L \right) - 2 \left(M_{ya} + M_{yb} \right)^2 \quad (2.4.98)$$

$$+ 2 \beta L M_{ya} M_{yb} (\operatorname{cosech} \beta L) (1 + \beta L \coth \beta L)$$

$$H'_z = \alpha L \left(M_{za}^2 + M_{zb}^2 \right) \left(\coth \alpha L + \alpha L \operatorname{cosech}^2 \alpha L \right) - 2 \left(M_{za} + M_{zb} \right)^2 \quad (2.4.99)$$

$$+ 2 \alpha L M_{za} M_{zb} (\operatorname{cosech} \alpha L) (1 + \alpha L \coth \alpha L)$$

em que $\alpha^2 = \frac{P}{EI_z}$, $\beta^2 = \frac{P}{EI_y}$

Quando o esforço axial é muito pequeno ou próximo de zero, as funções de estabilidade S_2 até S_5 tornam-se instáveis. Usando desenvolvimentos em série retira-se a referida instabilidade

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= 1 - \frac{\pi^2}{30} \rho_z - \frac{11\pi^4}{25200} \rho_z^2 + \frac{\pi^6}{108000} \rho_z^3 - \frac{509\pi^8}{2328480000} \rho_z^4 + \frac{14617\pi^{10}}{2724321600000} \rho_z^5 \\ s_3 &= 1 - \frac{\pi^2}{60} \rho_z + \frac{13\pi^4}{25200} \rho_z^2 - \frac{11\pi^6}{756000} \rho_z^3 + \frac{907\pi^8}{2328480000} \rho_z^4 - \frac{27641\pi^{10}}{2724321600000} \rho_z^5 \\ s_4 &= 1 - \frac{\pi^2}{30} \rho_y - \frac{11\pi^4}{25200} \rho_y^2 + \frac{\pi^6}{108000} \rho_y^3 - \frac{509\pi^8}{2328480000} \rho_y^4 + \frac{14617\pi^{10}}{2724321600000} \rho_y^5 \\ s_5 &= 1 - \frac{\pi^2}{60} \rho_y + \frac{13\pi^4}{25200} \rho_y^2 - \frac{11\pi^6}{756000} \rho_y^3 + \frac{907\pi^8}{2328480000} \rho_y^4 - \frac{27641\pi^{10}}{2724321600000} \rho_y^5 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.100)$$

com

$$\rho_y = \frac{P}{\left(\frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \right)} \quad (2.4.101)$$

$$\rho_z = \frac{P}{\left(\frac{\pi^2 EI_z}{L^2} \right)} \quad (2.4.102)$$

e as funções s_6 , s_7 , s_8 e s_9

$$\left. \begin{aligned} s_6 &= \frac{2}{3} s_2 + \frac{1}{3} s_3 \\ s_7 &= \frac{2}{3} s_2 + \frac{1}{3} s_3 - \frac{\alpha^2 L^2}{12} \\ s_8 &= \frac{2}{3} s_4 + \frac{1}{3} s_5 \\ s_9 &= \frac{2}{3} s_4 + \frac{1}{3} s_5 - \frac{\beta^2 L^2}{12} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.103)$$

2.4.1.4 Formulação de Marina Mijalković

Para finalizar esta secção, apresenta-se a formulação de Mijalković (1999), que estudou as equações diferenciais da flexão de um elemento tridimensional. O elemento espacial estudado, antes e após extensão e os esforços internos num sistema de coordenadas locais, está representado na Figura 2.22.

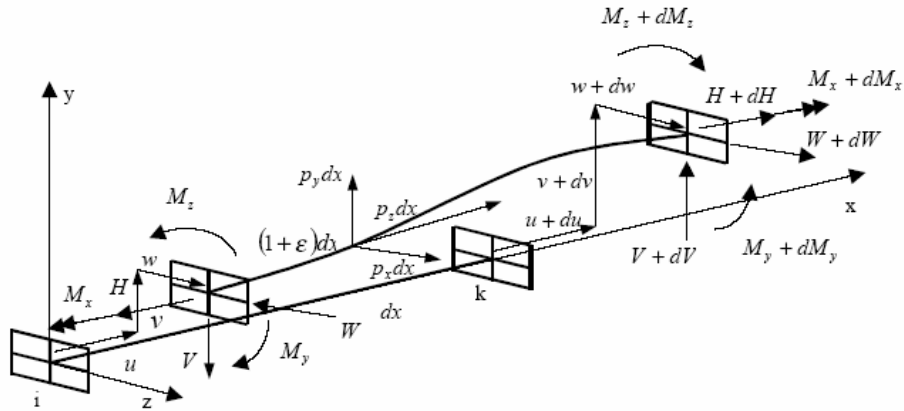


Figura 2.22 – Elemento 3D – Deformação.

Foram consideradas extensões e deformações independentes nos planos 0xy e 0xz e considerou-se a possibilidade de apresentar carregamento distribuído no elemento.

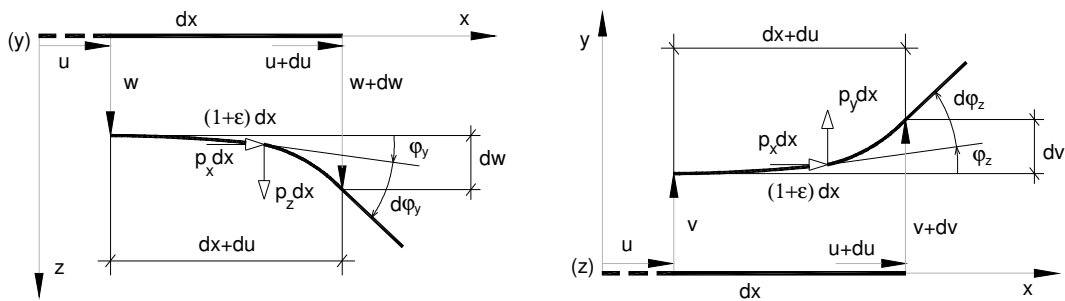


Figura 2.23 – Elemento 3D – Deformações nos planos.

Da Figura 2.23 e depois de manipular as equações de equilíbrio é possível escrever as equações diferenciais

$$\frac{d^4v}{dx^4} \pm k_z^2 \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{p_y}{EI_z}, k_z = \sqrt{\frac{|H|}{EI_z}}, \frac{d^4w}{dx^4} \pm k_y^2 \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{p_z}{EI_y}, k_y = \sqrt{\frac{|H|}{EI_y}} \quad (2.4.104)$$

Após equacionar as equações diferenciais, Mijalković apresenta as seguintes soluções para o elemento espacial apresentado na Figura 2.22

$$v(x) = v_0 + \varphi_{z0} \frac{\sin k_z x}{k_z} - M_{z0} \frac{1 - \cos k_z x}{H} - V_0 \frac{k_z x - \sin k_z x}{k_z H} + \int_0^x \frac{k_z (x - \xi) - \sin k_z (x - \xi)}{k_z H} p_y(\xi) d\xi \quad (2.4.105)$$

$$\varphi_z(x) = v'(x) = \varphi_{z0} \cos k_z x - M_{z0} \frac{k_z \sin k_z x}{H} - V_0 \frac{1 - \cos k_z x}{H} + \int_0^x \frac{1 - \cos k_z (x - \xi)}{H} p_y(\xi) d\xi \quad (2.4.106)$$

$$M_z(x) = -EI_z v''(x) = EI k_z \varphi_{z0} \sin k_z x + M_{z0} \cos k_z x + V_0 \frac{\sin k_z x}{k_z} - \int_0^x \frac{\sin k_z (x - \xi)}{k_z} p_y(\xi) d\xi \quad (2.4.107)$$

$$V(x) = EI_z v'''(x) - H v'(x) = V_0 - \int_0^x p_y(\xi) d\xi \quad (2.4.108)$$

Considerando que o elemento de barra pode ter carregamentos distribuídos, a equação de equilíbrio será

$$\{r\} = [k]\{d\} + \{r_f\} \quad (2.4.109)$$

com

$$\{r\}^T = [N_i, V_i, W_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, N_k, V_k, W_k, M_{xk}, M_{yk}, M_{zk}] \quad (2.4.110)$$

$$\{d\}^T = [u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}, \varphi_{zi}, u_k, v_k, w_k, \varphi_{xk}, \varphi_{yk}, \varphi_{zk}] \quad (2.4.111)$$

$$\{r_f\}^T = [r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, r_{10}, r_{11}, r_{12}] \quad (2.4.112)$$

em que $\{r_f\}$ corresponde às cargas nodais equivalentes. A matriz $[k]$ é obtida a partir das equações diferenciais de equilíbrio.

2.4.2 Matriz de Rigidez Total Aproximada 3D

Da mesma forma que se obteve a matriz de rigidez aproximada 2D, através da linearização das funções de estabilidade exactas, pode-se obter a matriz de rigidez aproximada 3D, considerando o desenvolvimento em série das funções de estabilidade em que as funções aproximadas se obtêm pela eliminação dos termos de ordem superior. Na abordagem clássica, considerando pequenos deslocamentos, determina-se a matriz de rigidez total aproximada através da análise de um elemento de barra rectilíneo, prismático, duplamente simétrico em relação aos eixos da secção e que apresenta 12 graus de liberdade, Figura 2.24.

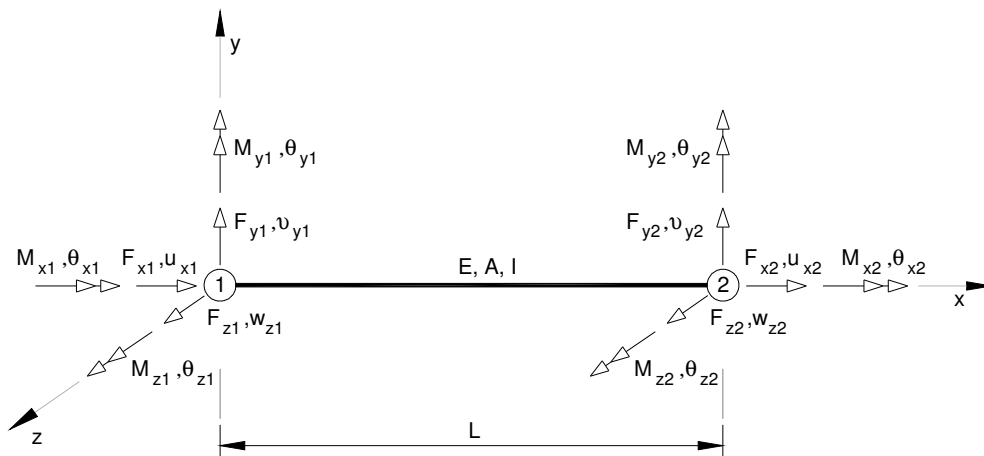


Figura 2.24 – Elemento 3D com dois eixos de simetria.

Desprezando a deformação por esforço transverso e a deformação por flexão-torção, pode-se determinar a matriz de rigidez para este elemento considerando que os efeitos de cada esforço são independentes, ou seja, considerando que cada esforço só produz um deslocamento na sua direcção (McGuire *et al.* 2000).

Desta forma, o problema envolve a análise de quatro casos separados:

- (i) Elemento com rigidez axial;
- (ii) Elemento com rigidez à torção;
- (iii) Elemento com rigidez à flexão no plano principal;
- (iv) Elemento com rigidez à flexão no plano perpendicular.

obtendo-se uma matriz $[K]$ de ordem (12x12).

Para o elemento com rigidez axial, a equação de equilíbrio é dada por

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4.113)$$

No caso do elemento com rigidez à torção obtém-se

$$\begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{x2} \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} \quad (2.4.114)$$

sendo G a rigidez à torção e J a constante de torção, dependente da geometria da secção.

Para analisar a rigidez à flexão, estudam-se dois casos – a flexão em torno do eixo Z e a flexão em torno do eixo Y, obtendo-se para o primeiro caso

$$\begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_{z1} \\ v_2 \\ \theta_{z2} \end{Bmatrix} \quad (2.4.115)$$

e para o segundo caso

$$\begin{Bmatrix} F_{z1} \\ M_{y1} \\ F_{z2} \\ M_{y2} \end{Bmatrix} = \frac{EI_y}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ -\frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} \quad (2.4.116)$$

sendo I_z a inércia em torno do eixo Z e I_y a inércia em torno do eixo Y.

Das equações 2.4.113, 2.4.114, 2.5.115 e 2.4.116, reorganizando as linhas e colunas e utilizando a relação

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4.117)$$

obtém-se a matriz de rigidez $[K]$ para o elemento 3D representado na Figura 2.24, dada por

$$K = E \begin{bmatrix} \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{L^2} & 0 & -\frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{2I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{L} \\ \hline \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & \frac{12I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12I_y}{L^3} & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12I_y}{L^3} & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J}{2(1+\nu)L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{2I_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_y}{L^2} & 0 & \frac{4I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_z}{L} & 0 & -\frac{6I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4I_z}{L} \end{bmatrix} \quad (2.4.118)$$

No caso de se pretender uma análise de 2ª ordem, a matriz de rigidez total aproximada $[K_r]$, equação 2.4.119, será obtida associando a matriz de rigidez elástica $[K]$ à matriz de rigidez geométrica $[G]$ formuladas para um elemento de barra 3D.

A matriz de rigidez elástica, corresponde à matriz utilizada numa análise de 1ª ordem, equação 2.2.118, e a matriz de rigidez geométrica, à matriz que introduz a interacção entre o esforço axial e o momento flector aquando da deformação do elemento, equação 2.2.153, com $[K_t]$ dada por

$$[K_t]_{(12 \times 12)} = [K]_{(12 \times 12)} + [G]_{(12 \times 12)} \quad (2.4.119)$$

sendo $[G]$ definida por

$$G = \frac{F_{x2}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\ & & \frac{6}{5} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{5} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 \\ & & & \frac{I_p}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & \frac{-L^2}{30} & 0 \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & \frac{-L}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{30} \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-L}{10} \\ & & & & & & & & \frac{6}{5} & 0 & \frac{L}{10} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{I_p}{A} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (2.4.120)$$

em que

$$I_p = \int_A (z^2 + y^2) dA \quad (2.4.121)$$

é o momento polar de inércia da secção.

Esta matriz corresponde à formulação clássica da matriz de rigidez geométrica, sem a introdução da deformação por corte e dos efeitos de flexão-torção.

Para introduzir a interacção entre a torção (Saint-Venant) e a flexão, na matriz de rigidez geométrica, utiliza-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) aplicado a um elemento de barra, Figura 2.25

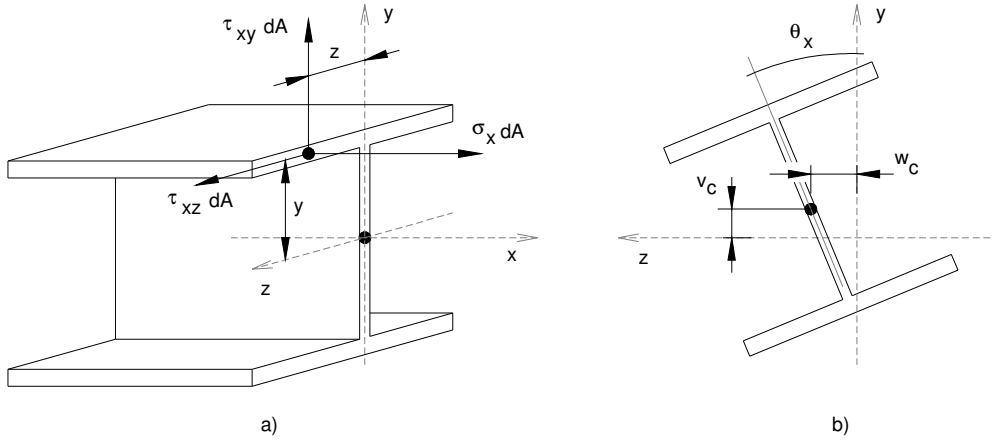


Figura 2.25 – Elemento 3D: a) tensões, b) deformações.

obtendo-se a equação

$$\int_V T_{ij} \delta \eta_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \delta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dV \quad (2.4.122)$$

de cujo desenvolvendo resulta a matriz G_{TF} , equação 2.4.123, que permite contabilizar o efeito da flexão-torção, quando associada à matriz de rigidez geométrica clássica.

$$G_{TF} = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{y1} & w_2 & \theta_{y2} \\ 0 & \frac{M_{x2}}{L} & 0 & \frac{-M_{x2}}{L} \\ \frac{M_{z1}}{L} & \frac{M_{z1} + M_{z2}}{6} & \frac{-M_{z1}}{L} & \frac{-M_{z1} - M_{z2}}{6} \\ \frac{M_{x2}}{L} & 0 & \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{-M_{x2}}{L} \\ 0 & \frac{-M_{x2}}{L} & 0 & \frac{M_{x2}}{L} \\ \frac{M_{z2}}{L} & \frac{-M_{z1} - M_{z2}}{6} & \frac{-M_{z2}}{L} & \frac{M_{z1} + M_{z2}}{6} \\ \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{M_{x2}}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.123)$$

A matriz G_{TF} não é válida para a situação ilustrada na Figura 2.26, em que o equilíbrio do ponto B, considerando pequenas rotações, não se verifica.

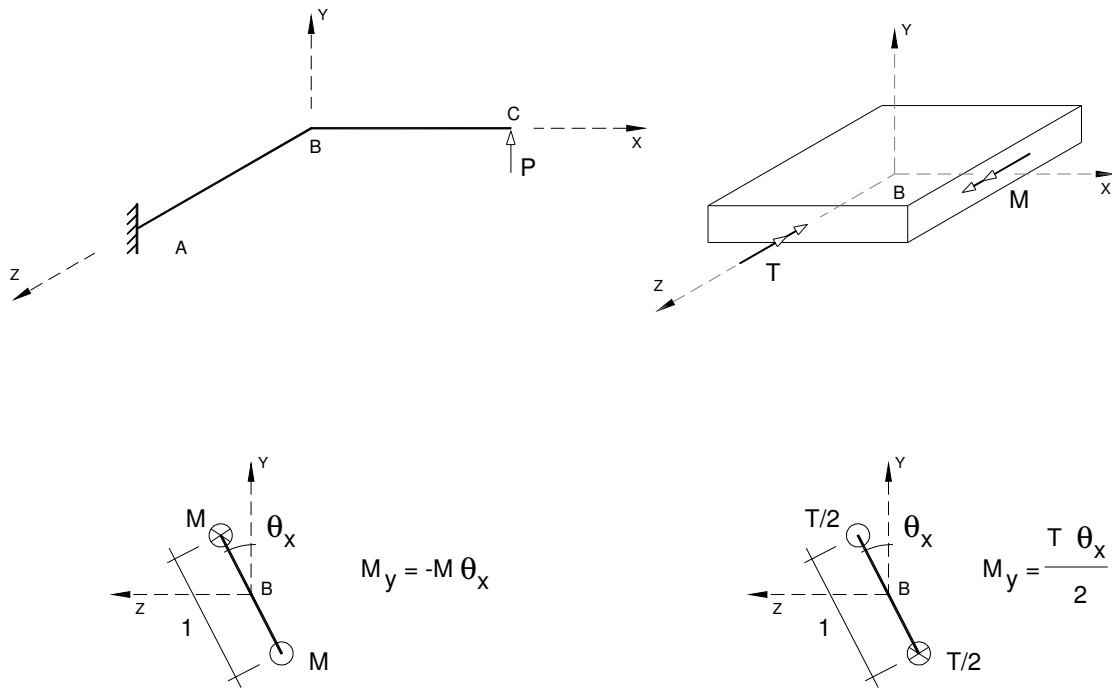


Figura 2.26 – Rotação finita nodal.

Se o nó B tiver uma pequena rotação θ_x , o momento incremental em torno de yy , gerado pelo momento flector M é superior ao gerado pelo momento torsor T . Compatibilizando os esforços e as deformações, obtém-se a matriz G_{TF}'

$$G_{TF}' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \theta_{x1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & \theta_{x2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\ 0 & -M_{z1} & M_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -M_{z2} & M_{y2} \\ & sim & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4.124)$$

que associada à matriz G , permite obter uma nova matriz de rigidez geométrica, equação 2.4.125.

Existe ainda a possibilidade de estudar o problema da torção não uniforme no elemento de barra (Figura 2.27).

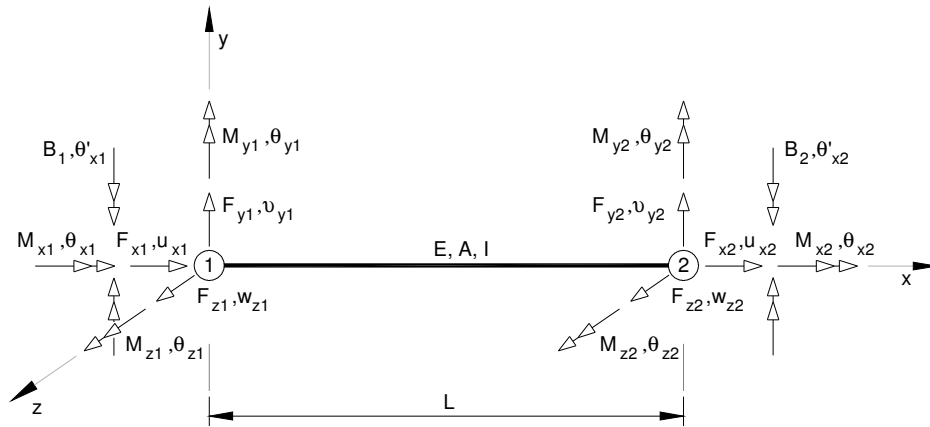


Figura 2.27 – Elemento duplamente simétrico, com 14 graus de liberdade.

McGuire, Gallager e Ziemian (2000) estudaram este problema, apresentando um elemento que incorpora dois novos graus de liberdade, para introduzir a taxa de torção nas extremidades da barra. A matriz de rigidez geométrica obtida, é dada por

$$G = \begin{bmatrix} G_{1,1} & G_{1,2} \\ G_{2,1} & G_{2,2} \end{bmatrix} \quad (2.4.126)$$

com

$$G_{1,1} = \begin{pmatrix} \frac{F_{x2}}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{F_{x2}}{L} \\ 0 & \frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{11M_{y1} - M_{y2}}{10L} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6F_{x2}}{5L} & \frac{11M_{z1} - M_{z2}}{10L} & \frac{-F_{x2}L}{10} & \frac{M_{x2}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{11M_{y1} - M_{y2}}{10L} & \frac{11M_{z1} - M_{z2}}{10L} & \frac{6F_{x2}I_{\rho}}{5AL} & \frac{M_{z2} - 2M_{z1}}{5} & \frac{2M_{y1} - M_{y2}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{-F_{x2}L}{10} & \frac{M_{z2} - 2M_{z1}}{5} & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{2M_{y1} - M_{y2}}{5} & 0 & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{F_{x2}}{L} \end{pmatrix} \quad (2.4.127)$$

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{-M_{y1} + 11M_{y2}}{10L} & \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{y1}}{10} & \frac{-M_{y2}}{10} \\ 0 & \frac{-6F_{x2}}{5L} & \frac{-M_{z1} + 11M_{z2}}{10L} & \frac{-F_{x2}}{10} & \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{M_{z1}}{10} & \frac{-M_{z2}}{10} \\ \frac{M_{y2} - 11M_{y1}}{10L} & \frac{M_{z2} - 11M_{z1}}{10L} & \frac{-6F_{x2} I_{\rho}}{5A} & \frac{-M_{z2} - 2M_{z1}}{10} & \frac{M_{y2} + 2M_{y1}}{10} & \frac{F_{x2} I_{\rho}}{10AL} & \frac{F_{x2} I_{\rho}}{10AL} \\ \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{-2M_{z2} - M_{z1}}{10} & \frac{-F_{x2} L}{30} & \frac{M_{x2}}{2} & \frac{-(3M_{z1} - M_{z2})L}{30} & \frac{M_{z1} L}{30} \\ \frac{-F_{x2}}{10} & \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{M_{y1} + 2M_{y2}}{10} & \frac{-M_{x2}}{2} & \frac{-F_{x2} L}{30} & \frac{(3M_{y1} - M_{y2})L}{30} & \frac{-M_{y1} L}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.128)$$

$$G_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-F_{x2}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6F_{x2}}{5L} & \frac{M_{z2} - 11M_{z1}}{10L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{-M_{x2}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{-M_{y1} + 11M_{y2}}{10L} & \frac{-M_{z1} + 11M_{z2}}{10L} & \frac{-6F_{x2} I_{\rho}}{5A} & \frac{-2M_{z2} - M_{z1}}{10} & \frac{M_{y1} + 2M_{y2}}{10} & 0 \\ 0 & \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{-F_{x2}}{10} & \frac{-M_{z2} - 2M_{z1}}{10} & \frac{-F_{x2} L}{30} & \frac{-M_{x2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{-M_{x2}}{L} & \frac{M_{y2} + 2M_{y1}}{10} & \frac{M_{x2}}{2} & \frac{-F_{x2} L}{30} & 0 \\ 0 & \frac{M_{y1}}{10} & \frac{M_{z1}}{10} & \frac{F_{x2} I_{\rho}}{10AL} & \frac{-(3M_{z1} - M_{z2})L}{30} & \frac{(3M_{y1} - M_{y2})L}{30} & 0 \\ 0 & \frac{-M_{y2}}{10} & \frac{-M_{z2}}{10} & \frac{F_{x2} I_{\rho}}{10AL} & \frac{M_{z1} L}{30} & \frac{-M_{y1} L}{30} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4.129)$$

$$G_{2,2} = \begin{pmatrix} \frac{6F_{x2}}{5L} & 0 & \frac{M_{y1} - 11M_{y2}}{10L} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{-F_{x2}}{10} & \frac{-M_{y1}}{10} & \frac{M_{y2}}{10} \\ 0 & \frac{6F_{x2}}{5L} & \frac{M_{z1} - 11M_{z2}}{10L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{-M_{z1}}{10} & \frac{M_{z2}}{10} \\ \frac{M_{y1} - 11M_{y2}}{10L} & \frac{M_{z1} - 11M_{z2}}{10L} & \frac{6F_{x2}I_{\rho}}{5AL} & \frac{M_{z1} - 2M_{z2}}{5} & \frac{-M_{y1} + 2M_{y2}}{5} & \frac{-F_{x2}I_{\rho}}{10AL} & \frac{-F_{x2}I_{\rho}}{10AL} \\ \frac{M_{x2}}{L} & \frac{F_{x2}}{10} & \frac{M_{z1} - 2M_{z2}}{5} & \frac{2F_{x2}L}{15} & 0 & \frac{-M_{z2}L}{30} & \frac{(3M_{z1} - M_{z2})L}{30} \\ \frac{-F_{x2}}{10} & \frac{M_{x2}}{L} & \frac{-M_{y1} + 2M_{y2}}{5} & 0 & \frac{2F_{x2}L}{15} & \frac{M_{y2}L}{30} & \frac{(M_{y1} - 3M_{y2})L}{30} \\ \frac{-M_{y1}}{10} & \frac{-M_{z1}}{10} & \frac{-F_{x2}I_{\rho}}{10AL} & \frac{-M_{z2}L}{30} & \frac{M_{y2}L}{30} & \frac{2F_{x2}I_{\rho}}{15A} & \frac{-2F_{x2}I_{\rho}}{30A} \\ \frac{M_{y2}}{10} & \frac{M_{z2}}{10} & \frac{-F_{x2}I_{\rho}}{10AL} & \frac{(3M_{z1} - M_{z2})L}{30} & \frac{(M_{y1} - 3M_{y2})L}{30} & \frac{-2F_{x2}I_{\rho}}{30A} & \frac{2F_{x2}I_{\rho}}{15A} \end{pmatrix} \quad (2.4.130)$$

2.5 CARGAS NOS VÃOS

A equação de equilíbrio $\{f\} = [K]\{u\}$ (equação 2.1.1), apresentada no início deste capítulo, só é válida quando as cargas são aplicadas nos nós. Se existirem cargas aplicadas no vão, Figura 2.28, então é necessário corrigir a equação de equilíbrio para introduzir os efeitos dessas cargas na análise da estrutura.

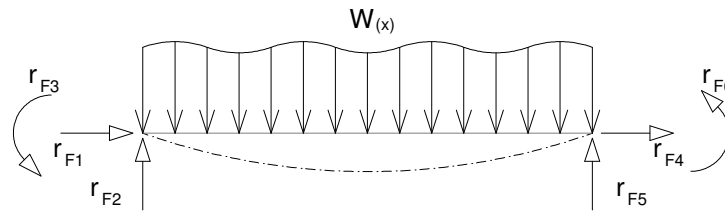
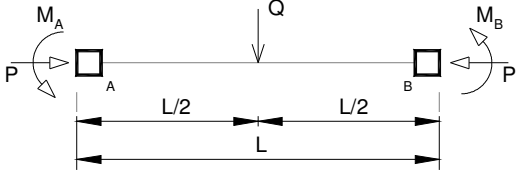
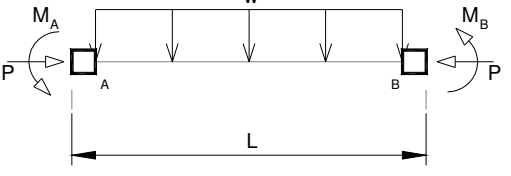
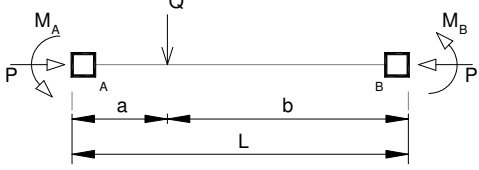
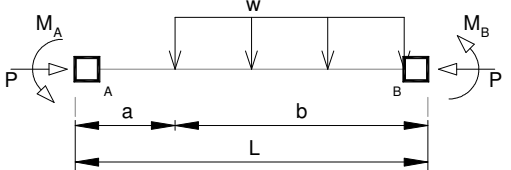
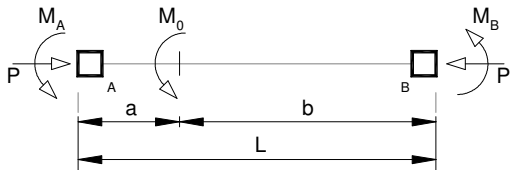


Figura 2.28 – Elemento de barra com cargas no vão. Forças de fixação.

Para inserir estas cargas na equação 2.1.1, procede-se à transformação das mesmas em cargas nodais equivalentes, situação análoga ao método dos deslocamentos. Se o vector forças nodais equivalentes for $\{f_r\}$, a equação de equilíbrio será dada por

$$\{f\} = [K]\{u\} + \{f_r\} \quad (2.5.1)$$

No quadro 2.1 (Chen e Lui, 1991) são apresentadas as forças nodais equivalentes para as situações mais correntes de carregamento.

Momentos nodais equivalentes	$u = kL/2 = L/2 \sqrt{P/EI}$; EI é constante.
	
$M_{FA} = \frac{QL}{8} \left[\frac{2(1 - \cos u)}{u \sin u} \right], \quad M_{FB} = -M_{FA}$	$M_{FA} = \frac{WL^2}{8} \left[\frac{3(\tan u - u)}{u^2 \tan u} \right], \quad M_{FB} = -M_{FA}$
	
$M_{FA} = \frac{QL}{d} \left[\frac{2ub}{L} \cos 2u - 2u \cos \frac{2ub}{L} - \sin 2u + \sin \frac{2ua}{L} + \sin \frac{2ub}{L} + \frac{2ua}{L} \right]$ $M_{FB} = -\frac{QL}{d} \left[\frac{2ua}{L} \cos 2u - 2u \cos \frac{2ua}{L} - \sin 2u + \sin \frac{2ub}{L} + \sin \frac{2ua}{L} + \frac{2ub}{L} \right]$ $d = 2u(2 - 2 \cos 2u - 2u \sin 2u)$	
	
$M_{FA} = \frac{WL^2}{8u^2 e} \left[(2 \cos ec 2u - 1) \left(\frac{2ub}{L} - \sin \frac{2ub}{L} \right) + (\tan u) \left(1 - \cos \frac{2ub}{L} - \frac{2u^2 b^2}{L^2} \right) \right]$ $M_{FB} = \frac{-WL^2}{8u^2 e} \left[(2 \cot 2u - 1) \left(\frac{2ub}{L} - \sin \frac{2ub}{L} \right) + (\tan u) \left(1 - \cos \frac{2ub}{L} - \frac{2u^2 b^2}{L^2} \right) - 2u \left(1 - \cos \frac{2ub}{L} \right) \right]$ $e = \tan u - u$	
	
$M_{FA} = \frac{M_0}{2e} \left[(2u \cos ec 2u - 1) \sin \frac{2ub}{L} - (\tan u) \left(1 - \cos \frac{2ub}{L} \right) \right]$ $M_{FB} = \frac{M_0}{2e} \left[(1 - 2u \cot 2u) \sin \frac{2ub}{L} - (\tan u) \left(1 + \cos \frac{2ub}{L} \right) + 2u \cos \frac{2ub}{L} \right]$ $e = \tan u - u$	

Quadro 2.1 – Momentos nodais equivalentes para uma viga-coluna.

As equações apresentadas neste quadro foram obtidas considerando insignificante o encurtamento da barra, ou seja, $r_{F1} = r_{F4} = 0$.

A utilização de cargas no vão dos elementos aumenta o grau de complexidade da análise da estrutura, uma vez que, as forças de fixação dependem da carga aplicada P .

Nesta dissertação não serão analisados pórticos nestas condições, considerando que as cargas verticais aplicadas no vão das vigas podem ser directamente transportadas para as extremidades como cargas pontuais equivalentes, eliminando a possibilidade de existirem momentos primários. Na realidade, a não introdução destes momentos no cálculo de instabilidade, não altera significativamente o valor da carga crítica, como se provará no capítulo 4.

2.6 NOTA FINAL

As formulações apresentadas, exactas e aproximadas, podem ser aplicadas à maioria das estruturas constituídas por elementos lineares (do tipo barra). A utilização de cada formulação depende do resultado pretendido e das simplificações admitidas para modelar o sistema estrutural.

Nos casos correntes, a utilização das matrizes mais simples fornecem bons resultados, sobretudo se forem correctamente idealizadas as ligações entre os diversos elementos. As formulações fundamentadas em matrizes exactas são, obviamente, as que fornecem melhores resultados, apresentando como principal inconveniente a utilização de algoritmos mais complexos. Os algoritmos com formulações simplificadas, baseados na matriz elástica e geométrica, são as mais utilizadas na ANLG, nomeadamente, no desenvolvimento de software comercial, tendo a desvantagem de ser necessário dividir as barras num número suficiente de elementos para obter um resultado rigoroso.

No capítulo seguinte, serão apresentados os principais métodos de análise não linear geométrica utilizados para determinar os parâmetros de carga e os modos de instabilidade, com especial ênfase para o Método dos Elementos Finitos e o Método dos 3 graus de liberdade por piso, sendo o primeiro fundamentado numa análise aproximada (matriz geométrica) e o segundo na análise exacta (funções de estabilidade).

3 - MÉTODOS DE ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

3.1 INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, foram introduzidos os fundamentos teóricos que permitem abordar o problema da não linearidade geométrica. Apresentaram-se formulações 2D e 3D exactas e aproximadas, considerando várias condições de fronteira; translações laterais dos nós e ligações semi-rígidas, para obter uma formulação o mais rigorosa possível.

Quando se estudam sistemas estruturais recorrendo à análise não linear geométrica (ANLG), uma das principais dificuldades reside no grande número de equações que é necessário processar para obter o resultado final, pelo que, é comum recorrer ao cálculo automático sendo esta ferramenta indispensável para obter os resultados em tempo útil. A sua utilização permite ainda o cálculo repetitivo, apresentando-se como uma vantagem quando se pretende analisar a influência da introdução de pequenas alterações numa estrutura, ou no estudo de alternativas à concepção estrutural de forma a otimizar o seu desempenho.

Assim, no presente trabalho pretende-se estudar a instabilidade estrutural de pórticos 2D e 3D, através de programas de cálculo automático, utilizando uma abordagem matricial fundamentada nas teorias apresentadas no capítulo 2.

Para estudar estas estruturas, foram modelados vários pórticos 2D e 3D, com o recurso a software que engloba pacotes computacionais comerciais e uma ferramenta computacional, a qual se designou por INST3D, desenvolvida em linguagem FORTRAN. Nestes programas de cálculo automático estão implícitas as teorias apresentadas para a ANLG, sendo esta análise conseguida através da resolução da equação 3.1.1

$$\{f\} = [K]\{d\} \quad (3.1.1)$$

em que $\{f\}$ o vector das cargas nodais, $[K]$ a matriz de rigidez da estrutura e $\{d\}$ o vector dos deslocamentos nodais.

A principal diferença entre os pacotes comerciais e o INST3D, reside na formulação da matriz de rigidez total $[K]$. Enquanto o software comercial usado neste trabalho recorre a uma formulação aproximada da matriz de rigidez total, em que esta matriz é determinada pela associação das matrizes de rigidez elástica e geométrica, o INST3D fundamenta a sua análise numa formulação exacta da matriz de rigidez. Embora a abordagem seja diferente, na

definição das formulações utilizadas, este software (comercial e o INST3D) permite realizar o mesmo tipo de ANLG, em que são determinados os parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade, para pórticos 2D e 3D.

Referiu-se que o principal problema, quando se pretende analisar estruturas, está relacionado com o elevado número de equações que é necessário resolver, motivo pelo qual se recorre ao cálculo automático. Convém, no entanto, recordar que qualquer sistema estrutural pode ser simplificado, para diminuir o número de incógnitas ou para obter uma primeira aproximação do resultado final. Nestes casos, as metodologias de simplificação são utilizadas para transformar um problema de dimensão n num problema de dimensão $n-1$, de forma a eliminar uma dimensão e conseqüentemente as incógnitas associadas a essa dimensão. Como exemplo, pode citar-se o estudo de estruturas tridimensionais, onde o número de incógnitas é significativamente elevado, com o recurso a formulações bidimensionais onde existem menos equações e incógnitas.

Os programadores de software podem tirar proveito destas simplificações, sempre que seja possível, para que o problema em estudo seja mais fácil de modelar e analisar, pois existem menos variáveis a introduzir na definição do modelo, mas também porque facilita a interpretação dos resultados obtidos.

Desta forma, torna-se importante explicitar a metodologia utilizada por cada programa de cálculo automático utilizado neste trabalho, nomeadamente o algoritmo de resolução, para entender o modo de funcionamento desse software, assim como identificar as simplificações introduzidas na modelação do esquema estrutural.

3.2 MODELAÇÃO ESTRUTURAL

O software utilizado nesta dissertação permite a determinação dos parâmetros críticos de pórticos bidimensionais e tridimensionais, assim como a obtenção dos respectivos modos de instabilidade. Para proceder a esta análise, os programadores escolhem uma metodologia que permita abordar o problema de forma rigorosa e que ao mesmo tempo permita uma fácil modelação do esquema estrutural. Quando se analisam estruturas 2D o estudo é mais simples, uma vez que há menos variáveis no problema, consumindo menos recursos computacionais. No caso de se analisarem pórticos tridimensionais são mais difíceis de modelar, pois possuem um maior número de graus de liberdade e conseqüentemente um maior número de equações para resolver.

Como foi referido, na análise matricial de estruturas existem varias modelações possíveis para processar pórticos tridimensionais:

- Método dos Elementos Finitos;
- Método de 6 graus de liberdade por nó (3GL/nó).

No caso do Método dos Elementos Finitos (MEF), que corresponde ao método mais rigoroso, a simplificação é feita ao nível da modelação matemática que define o comportamento dos materiais e da estrutura.

Na análise de estruturas podem ser ainda usadas modelações em que se simplificam as estruturas tridimensionais recorrendo a estruturas bidimensionais:

- Método de três graus de liberdade por piso (3GL/piso);
- Método dos pórticos planos.

Embora estas simplificações estejam usualmente associadas à análise dinâmica de estruturas, estes métodos podem ser utilizados na ANLG, uma vez que o problema dinâmico é análogo ao problema não linear geométrico (na formulação aproximada), pois ambos constituem um problema de valores e vectores próprios. No primeiro caso – a análise dinâmica, as incógnitas são as frequências de vibração ω e os respectivos modos de vibração (Clough e Penzien, 1993), de acordo com a equação 3.2.1

$$\det([K] - \omega^2 [M]) = 0 \quad (3.2.1)$$

e no caso da não linearidade geométrica (formulação aproximada), as incógnitas são os parâmetros de carga λ e respectivos modos de instabilidade, de acordo com a equação 3.2.2.

$$\det([K] - \lambda [G]) = 0 \quad (3.2.2)$$

Estas simplificações podem significar a impossibilidade de aplicação do método a determinada situação ou a obtenção de erros significativos, pelo que a sua utilização deve ser cuidadosamente ponderada. Para poder decidir sobre a utilização de um dos métodos supra referidos, é necessário enunciar os fundamentos teóricos que justificam a sua utilização e apresentar as vantagens e inconvenientes de cada um.

Os modelos mais completos usam matrizes de rigidez tridimensionais e permitem agrupar elementos lineares, laminares e de volume de forma a simular com precisão todos os aspectos de uma estrutura, como no caso do MEF.

A análise de instabilidade de pórticos através do MEF pode ser feita recorrendo à modelação tridimensional dos pórticos. Neste método, é possível modelar os pilares, lajes etc., recorrendo a elementos de barra e elementos laminares, e no caso de estudos mais rigorosos, a elementos de volume. Permite ainda a introdução de diversas formulações não lineares (material, geométrica, de contacto, etc.), e também a detecção de efeitos localizados de instabilidade para posterior análise, pelo que se torna no processo mais rigoroso, mas ao mesmo tempo de maior consumo de recursos computacionais e de resolução mais demorada. O software comercial, SAP 2000, ANSYS e LUSAS, utilizam esta modelação.

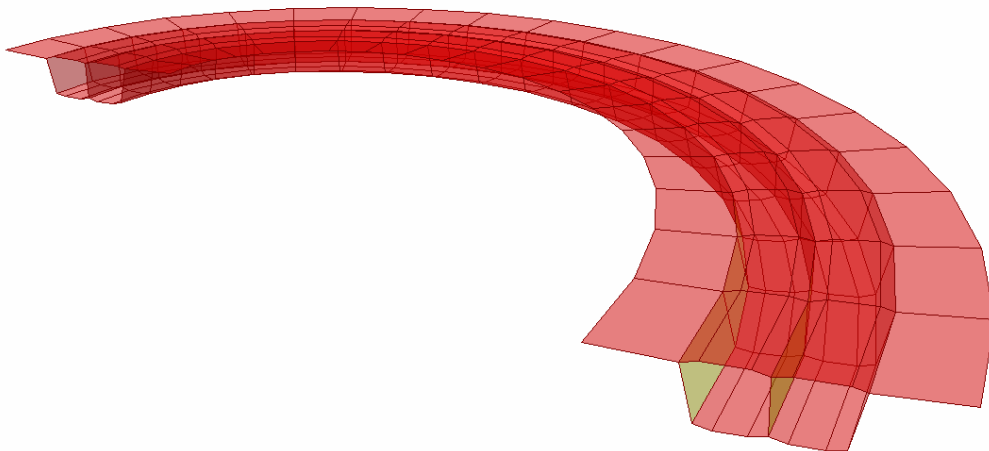


Figura 3.1 – Método dos Elementos Finitos (MEF) 3D – Modelação.

Quando se utiliza o MEF, o número de graus de liberdade é bastante elevado, e os resultados obtidos podem não ser de interpretação imediata quando se pretende estudar o comportamento estrutural, pois existem muitas singularidades que influenciam o desempenho da estrutura e que é necessário avaliar para identificar a sua importância relativa no referido desempenho. A associação de elementos de várias dimensões é uma vantagem, pois torna o modelo mais rigoroso, mas ao mesmo tempo é um inconveniente, já que torna a estrutura mais difícil de modelar e de interpretar.

Este método é mais eficaz na procura de fenómenos de instabilidade em zonas localizadas ou para análises de pormenor em situações onde uma análise global não permite entender o funcionamento da estrutura.

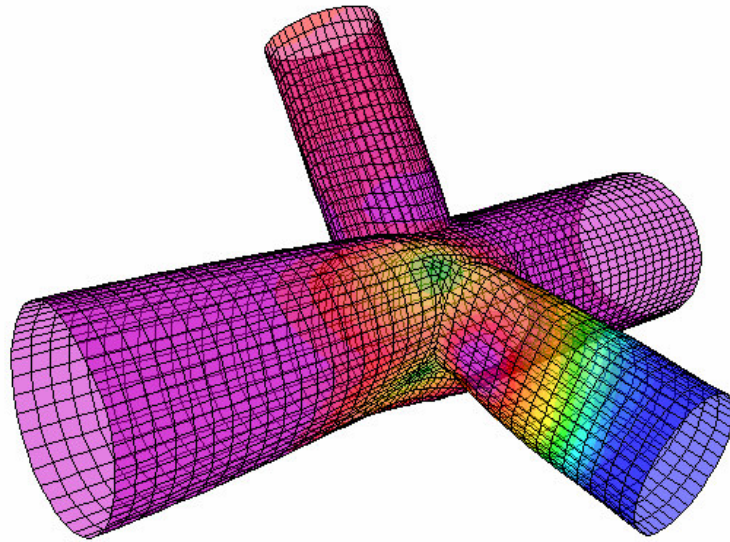


Figura 3.2 – Método dos Elementos Finitos (MEF) 3D – Instabilidade local.

Se o estudo pretendido se refere à análise global da estrutura, então pode ser utilizada outra metodologia que também se fundamenta numa análise tridimensional, mas que recorre a elementos lineares ou de barra para discretizar o sistema estrutural, com a vantagem de diminuir drasticamente o número de incógnitas do problema. Se as lajes forem consideradas como tendo rigidez infinita no seu plano, o que normalmente sucede no caso de se utilizarem lajes de betão armado ou elementos com grande rigidez no seu plano, então este método pode ser aplicado sem diminuição significativa do rigor do resultado final, mas com uma diminuição expressiva do número de incógnitas. Esta abordagem consiste na modelação dos pórticos tridimensionais usando um modelo de barras com 6 graus de liberdade por nó.

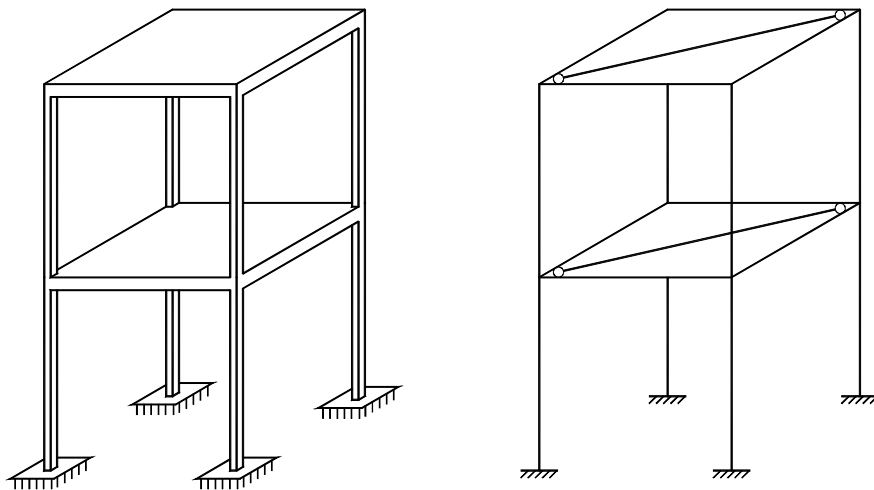


Figura 3.3 – Modelo de 6 graus de liberdade por nó – Modelação.

As lajes são modeladas recorrendo a barras diagonais com reduzida rigidez à flexão e elevada rigidez axial. Os elementos lineares usados nesta metodologia possuem 6 graus de liberdade em cada nó, ou seja um elemento linear 3D, Figura 3.4.

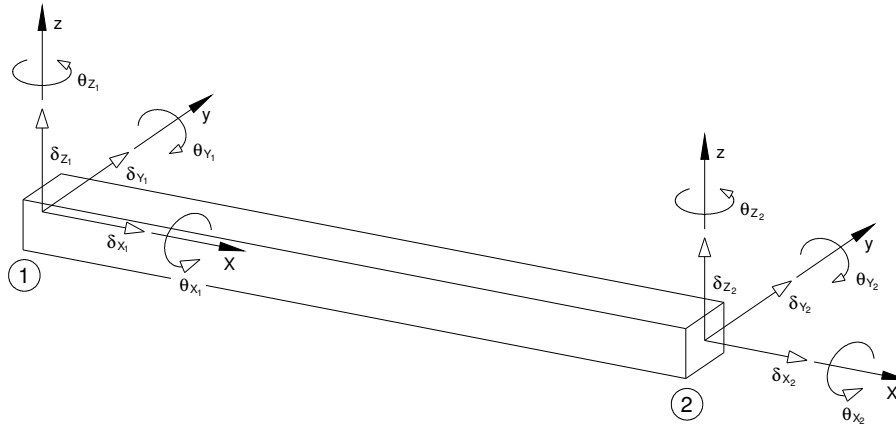


Figura 3.4 – Elemento de barra 3D. Graus de liberdade.

As vantagens da utilização deste modelo englobam a facilidade de modelação, a diminuição do número de incógnitas e o estudo rigoroso de vigas e pilares. Como inconvenientes, apresenta desvantagens na modelação dos elementos laminares, como as lajes e a necessidade de estudar cuidadosamente a estrutura para saber como proceder à simplificação das lajes sem perda de rigor.

Os métodos que foram apresentados utilizam uma abordagem 3D para analisar sistemas estruturais. Contudo, podem-se usar metodologias que permitem o estudo de estruturas 3D através de estruturas 2D, como o método dos 3GL/ piso e o método dos pórticos planos.

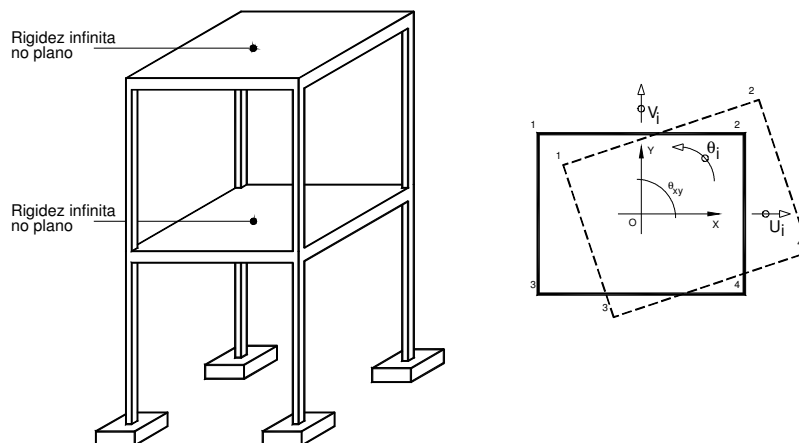


Figura 3.5 – Método de 3 graus de liberdade por piso – Modelação.

Na Figura 3.5 está representada a modelação associada ao método de 3GL/piso, em que a estrutura 3D é transformada numa estrutura 2D multimodal (análise dinâmica), constituída por um elemento vertical com as massas concentradas ao nível dos pisos, considerados infinitamente rígidos no seu plano, sendo compatibilizados os deslocamentos dos elementos verticais (pilares e paredes), Figura 3.6.

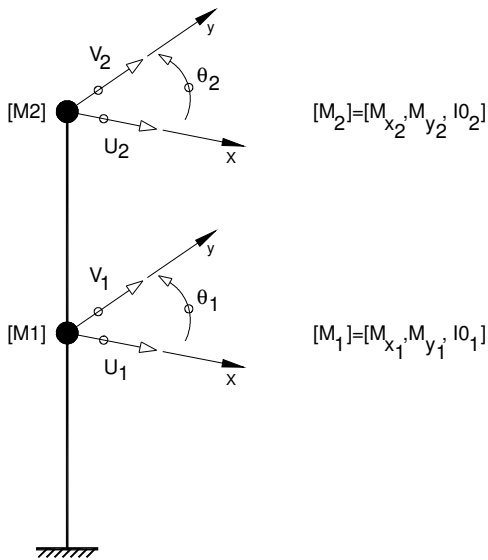


Figura 3.6 – Sistema equivalente para o método de 3 GL/ piso (dinâmica).

Neste modelo são usados 3 graus de liberdade por piso, pelo que o número de variáveis necessárias para resolver o problema, é significativamente reduzido com consequentes implicações no tempo de resolução e nos recursos computacionais necessários.

As principais vantagens deste método correspondem à diminuição significativa do número de incógnitas e a facilidade da sua utilização. Como desvantagens apontam-se a compatibilização dos deslocamentos verticais dos elementos lineares (pilares) e a eliminação da rigidez dos elementos laminares, considerados rígidos no seu plano, simplificação que não pode ser considerada como hipótese válida quando se utilizam elementos estruturais como lajes de chapas metálicas, lajes finas, lajes do tipo “Sandwich”, lajes de madeira, etc.

A análise tridimensional pode também ser realizada através da sua conversão num problema bidimensional, na qual se associam no espaço as sub-estruturas planares que constituem o sistema 3D, compatibilizando os deslocamentos em cada andar. Esta metodologia consiste no chamado método dos pórticos planos em que a estrutura 3D é substituída por numa estrutura

2D equivalente através da associação em comboio dos pórticos 2D que contribuem para a rigidez numa determinada direcção (Taranath, 1988), Figura 3.7.

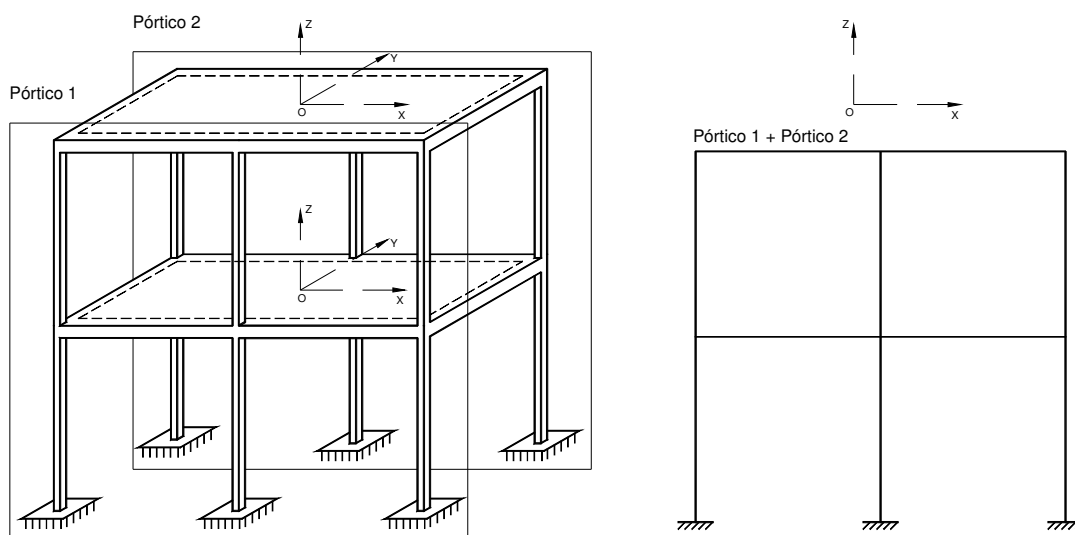


Figura 3.7 – Sistema equivalente para o método dos pórticos planos.

Neste método surge a obrigatoriedade dos deslocamentos serem iguais por andar e das estruturas serem regulares em planta e alçado sem assimetrias acentuadas.

As vantagens estão associadas à simplicidade da modelação, ou seja, pelo reduzido número de incógnitas resultantes e pela possibilidade de utilizar métodos 2D universais na análise de estruturas, como o método dos deslocamentos.

Estas metodologias pseudo-3D, devem ser aplicadas a casos onde a importância dos elementos laminares ou o recurso a elementos volumétricos são relativamente pouco importantes para a compreensão do funcionamento global da estrutura. Também se deve evitar estas simplificações em estruturas geometricamente complexas, onde o comportamento não pode ser estudado sem uma rigorosa modelação.

É possível analisar estruturas tridimensionais, numa abordagem não linear geométrica, através de métodos simplificados preconizados nos regulamentos, nomeadamente o Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios (REAE, 1985) e o Eurocódigo 3 (CEN, 1992), que permitem o estudo global da estrutura e a posterior verificação da capacidade resistente. Estes métodos obedecem a determinadas regras que impõem limitações à sua aplicação, pelo que, não são de aplicação universal.

Neste contexto, uma das metodologias mais utilizadas corresponde ao método de ampliação dos momentos de 1ª ordem associados ao deslocamento horizontal relativo entre pisos, no

qual os momentos obtidos na análise elástica de 1ª ordem são aumentados pela introdução de um termo corrector (ECCS, 1991; Schimizzze, 2001), equação 3.2.3.

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\lambda_{cr}}} \quad (3.2.3)$$

Estes métodos não serão abordados neste trabalho pois não se fundamentam na análise matricial da não linearidade geométrica.

De entre os métodos apresentados, que são usualmente utilizados na análise dinâmica, o MEF é ao método mais frequente para qualquer tipo de análise, pois corresponde à modelação mais universal, com teorias perfeitamente conhecidas e implementadas para o estudo da maioria dos problemas estruturais, razão pela qual é a metodologia utilizada na maioria do software comercial. Se as estruturas foram porticadas e regulares, o método dos 3GL/piso revela-se vantajoso para a ANLG de estruturas 3D, pois permite reduzir as incógnitas e simplificar a análise sem perda significativa de rigor. Nesta dissertação, este último método assume grande importância pois foi utilizado para a elaboração do software INST3D.

Dada a importância destes dois métodos no desenvolvimento do presente trabalho, seguidamente são apresentadas as bases teóricas que definem estas metodologias (MEF e 3GL/piso) e a sua aplicação à ANLG de estruturas porticadas.

3.2.1 Método dos Elementos Finitos

Para a resolução das equações diferenciais que governam o comportamento das estruturas, foram desenvolvidas ferramentas numéricas baseadas no cálculo automático, que com o desenvolvimento da capacidade de processamento dos computadores, permitiram a resolução de problemas cada vez mais complexos.

De entre as ferramentas numéricas para a resolução dos problemas de engenharia, o MEF constitui uma das metodologias mais utilizadas. O MEF é um procedimento numérico com o qual se pode modelar o comportamento de uma estrutura com grande rigor, com a capacidade de relacionar elementos de várias dimensões geométricas (1D, 2D e 3D), variações nas propriedades dos materiais e ainda variações nas condições de fronteira.

Uma das principais vantagens deste método, consiste na facilidade com que se implementa o algoritmo de um programa de cálculo automático para resolver um problema específico,

motivo pelo qual se tornou na ferramenta mais utilizada na investigação e no projecto, em todas as áreas científicas desde a engenharia até à medicina.

Nesta modelação, é necessário dividir um domínio em várias partes, sendo cada uma das partes designadas por elemento finito, que são associadas no espaço para formar o esquema estrutural (Zienkiewicz e Taylor, 1989; Torrealba *et. al*, 1992).

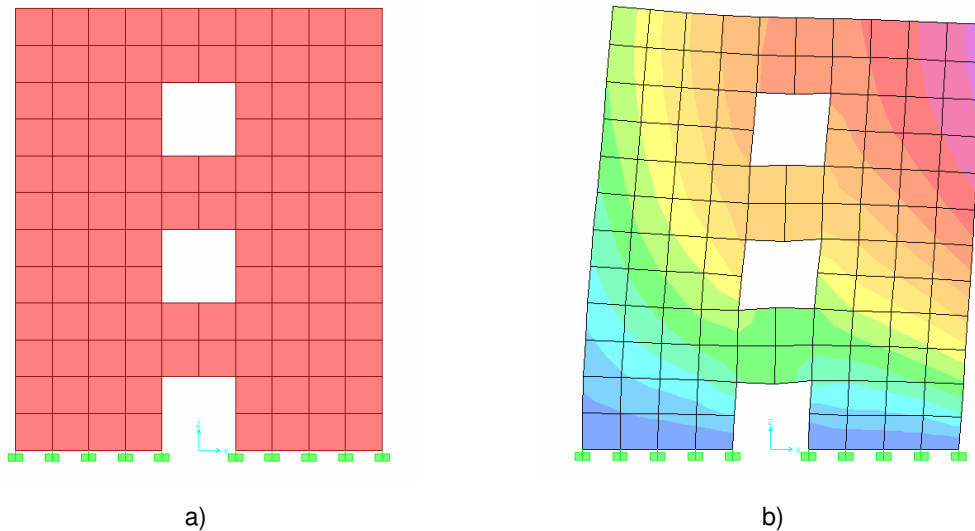


Figura 3.8 – Modelação MEF: a) malha, b) mapa de esforços.

A divisão do domínio em partes, corresponde à geração da malha de elementos finitos (Figura 3.8) que é escolhida de forma a simular o sistema estrutural a estudar (Bathe, 1996). A quantidade de elementos finitos influencia o tempo de processamento já que as incógnitas correspondem aos graus de liberdade de cada elemento e com o aumento do número de elementos, aumenta o número de equações a resolver (Weaver, 1967).

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & & \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ K_{n1} & & & & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (3.2.4)$$

As equações são formuladas para cada elemento, determinando a lei de comportamento definida através da matriz de rigidez elementar. Após ter determinado a matriz elementar, o problema global é equacionado combinando todas as matrizes elementares e escrevendo a

equação que governa o comportamento estrutural, equação 3.2.4.

Como supracitado, este método permite a introdução de elementos do tipo barra (1D), de superfície (2D) e elementos de volume (3D), permitindo a modelação rigorosa de qualquer sistema estrutural.

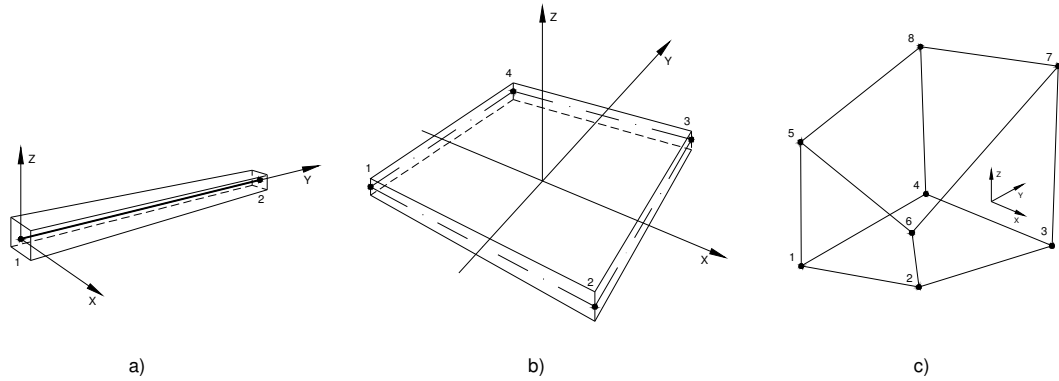


Figura 3.9 – Elementos MEF – a) barra (1D), b) laminar (2D), c) volume (3D).

Os modelos tridimensionais com modelações fundamentadas em elementos 3D, são mais rigorosos e permitem estudar o sistema estrutural em várias direcções, mas possuem um maior número de incógnitas implicando uma maior complexidade na criação do modelo, justificando a sua utilização em casos especiais.

Para o caso de pórticos rectangulares regulares em planta e alçado, a modelação MEF pode ser feita recorrendo a elementos do tipo barra (1D), Figura 3.10.

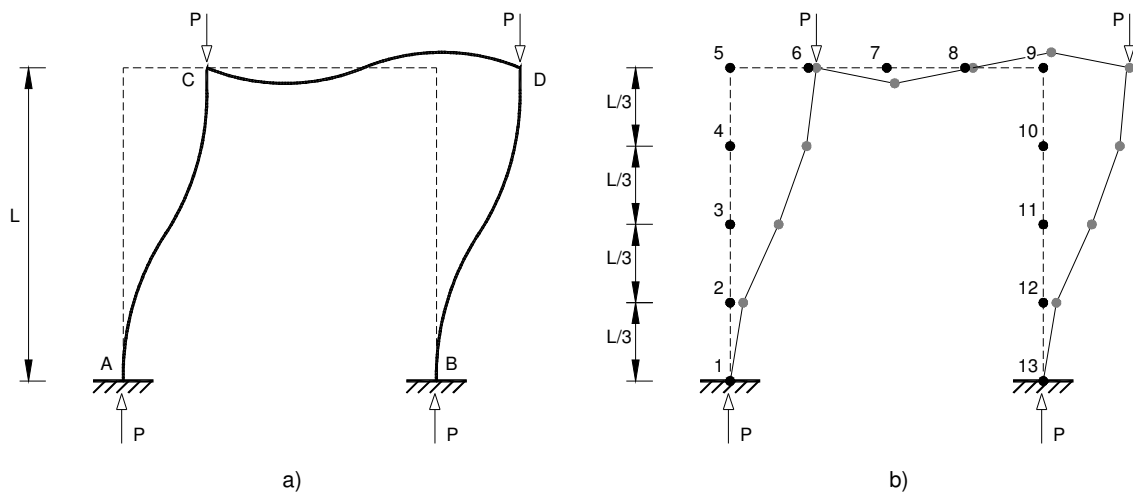


Figura 3.10 – Discretização: a) modelo exacto, b) modelo aproximado (MEF).

Esta metodologia pode ser aplicada à maioria dos edifícios, utilizando os elementos de barra para simular o esquema estrutural e assim simplificar a sua análise pela redução dos graus de liberdade.

Na ANLG o principal objectivo consiste, como se viu no capítulo 2, na obtenção dos parâmetros críticos e dos respectivos modos de instabilidade, que numa abordagem matricial do problema, podem ser obtidos recorrendo a formulações exactas e aproximadas da matriz de rigidez. No caso do MEF, e como se trata de uma ferramenta numérica, a formulação utilizada corresponde à aproximada, obtida por simplificação da formulação exacta.

Na criação de software para a análise de estruturas, é comum a utilização do MEF quando se pretende abordar o problema da não linearidade geométrica, em particular no desenvolvimento de software comercial.

O recurso à metodologia baseada em formulações aproximadas deve-se à facilidade com que se implementa um algoritmo não linear, no algoritmo usado na análise linear elástica ou de 1ª ordem, uma vez que este constitui a base de qualquer software de cálculo estrutural. Ou seja, o primeiro propósito de um software de análise estrutural consiste na determinação dos esforços e deslocamentos, formulando o problema na configuração inicial da estrutura (indeformada), pelo que os programadores desenvolveram algoritmos universais para a sua resolução. Quando é necessário estudar a estrutura na configuração deformada, é mais fácil utilizar o algoritmo inicial (na configuração indeformada) e introduzir algumas alterações para permitir este tipo de análise, o que é bastante fácil quando se utiliza a formulação aproximada da matriz de rigidez.

Assim, numa análise de 1ª ordem (configuração não deformada da estrutura), a relação entre os deslocamentos e as forças aplicadas é definida pela equação

$$\{f\} = [K]\{u\} \quad (3.2.5)$$

em que $\{f\}$ representa o vector das forças nodais, $[K]$ a matriz de rigidez global da estrutura e $\{u\}$ o vector dos deslocamentos nodais.

Contudo, devido à acção dos esforços actuantes a estrutura deforma-se e a relação linear apresentada deve ser alterada para contabilizar a deformação da estrutura no equilíbrio da mesma. Quando se formula o equilíbrio na configuração deformada, obtém-se a contribuição do efeito do esforço axial na alteração da rigidez à flexão dos elementos que compõem o sistema estrutural.

Para conseguir este objectivo, basta introduzir na equação uma nova matriz de rigidez, com a contribuição dos esforços desenvolvidos por cada elemento aquando da sua deformação devido a acção do esforço axial, definindo a equação de equilíbrio

$$\{f\} = [K_t]\{u\} \quad (3.2.6)$$

onde $[K_t]$ corresponde a matriz de rigidez total da estrutura, sendo

$$[K_t] = [K] + [G] \quad (3.2.7)$$

em que $[K]$ corresponde à matriz de rigidez elástica (utilizada na análise de 1ª ordem) e $[G]$ (ou $[K_g]$) a matriz de rigidez geométrica da estrutura e que permite introduzir o efeito do esforço axial na deformação da estrutura.

No caso do MEF (Wilson, 2000), a matriz $[K]$ é determinada por

$$[K] = \int B^T D B \, dv \quad (3.2.8)$$

e a matriz $[K_g]$ por

$$[K_g] = \int G^T D G \, dv \quad (3.2.9)$$

A matriz $[K_g]$ depende da deformação geométrica da estrutura e dos esforços axiais aplicados. Os deslocamentos alteram a posição dos nós e conseqüentemente $[K]$ varia durante a análise da estrutura.

O cálculo da carga crítica de instabilidade, baseado na geometria inicial da estrutura, permite obter a chamada carga de instabilidade linear. O objectivo da realização desta análise consiste na determinação de λ_{cr} , que corresponde ao parâmetro de carga crítico, e com o qual é possível obter a carga crítica de equilíbrio na configuração deformada da estrutura.

Quando se analisa um sistema com um único grau de liberdade, a instabilidade é calculada tornando $[K_t]$ igual a zero e resolvendo a equação de forma a obter o valor de $\{f\}$. No caso de um sistema com vários graus de liberdade, o determinante de $[K_t]$ será igual a zero e obtêm-se vários valores de $\{f\}$ em que o valor mais baixo corresponde à carga crítica.

$$\{P_{crit}\} = \lambda_{crit} \{f\} \quad (3.2.10)$$

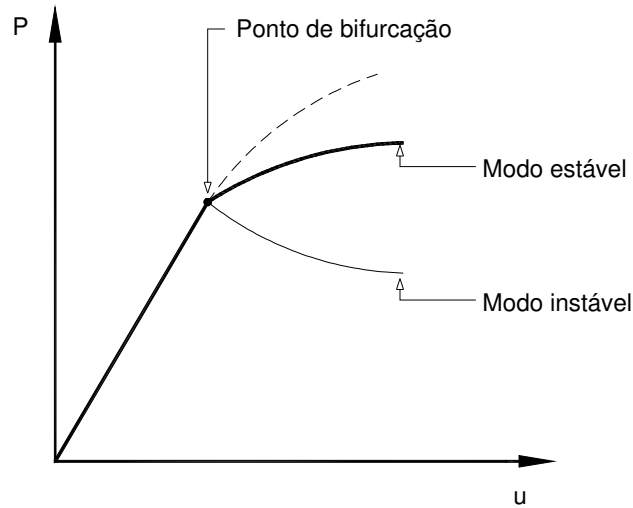


Figura 3.11 – Bifurcação de equilíbrio.

Quando se estuda a instabilidade de uma estrutura, o que se pretende é encontrar o ponto de equilíbrio que identifica a passagem de uma estrutura estável para uma estrutura instável.

Matematicamente, este ponto pode ser obtido quando pequenas alterações no vector das cargas originam deslocamentos infinitos no vector dos deslocamentos, Figura 3.11; ou seja, o sistema de equações de equilíbrio é singular em que o vector dos deslocamentos diferente de zero satisfaz

$$[K_r]\{u\} = \{0\} \quad (3.2.11)$$

Se o objectivo é a o estudo da instabilidade estrutural, então na maior parte dos sistemas, pode-se excluir a influência da não linearidade material e assumir que a distribuição relativa das forças internas se mantêm constantes para todas os factores de carga. Combinando estas simplificações com o facto de todas as matrizes de rigidez geométrica dos elementos apresentarem funções lineares, pode-se escrever a equação 3.2.11 como sendo

$$([K] + \lambda[G])\{u\} = \{0\} \quad (3.2.12)$$

ou ainda

$$[K]\{u\} = \lambda[-G]\{u\} \quad (3.2.13)$$

em que $[-G]$ é calculada das forças nos elementos obtidas pela análise linear elástica para um vector de carga de referencia $\{P_{ref}\}$, e λ representa o parâmetro da carga crítica elástica para essa carga de referência.

Assim, para um sistema estrutural pode escrever-se a equação de equilíbrio como sendo

$$([K] + \lambda[G])\{u\} = \lambda\{f\} \quad (3.2.14)$$

em que os deslocamentos nodais podem ser obtidos da equação 3.2.14, através de

$$\{u\} = ([K] + \lambda[G])^{-1} \lambda\{f\} \quad (3.2.15)$$

A equação 3.2.12 corresponde à forma geral de um problema linear de vectores e valores próprios do tipo (Champion, 1993)

$$([b]_{n \times n} - \lambda[I]_{n \times n})\{x\}_{n \times 1} = 0 \quad (3.2.16)$$

que pode ser apresentada na forma

$$[b]_{n \times n} \{x\}_{n \times 1} = \lambda \{x\}_{n \times 1} \quad (3.2.17)$$

em que o vector coluna é o vector de valores próprios (eigenvector) da matriz e o multiplicador λ é o valor próprio (eigenvalue).

A equação 3.2.16 representa um sistema de n equações lineares homogêneas e a solução de $\{x\}=\{0\}$ obtém-se através de

$$\det([b] - \lambda[I]) = 0 \quad (3.2.18)$$

Assim, a solução da equação 3.2.12 reduz-se ao cálculo de

$$\det([K] + \lambda[G]) = 0 \quad (3.2.19)$$

sendo λ a incógnita.

A utilização do problema de valores e vectores próprios corresponde à metodologia utilizada pelo software MEF para a resolução da ANLG de estruturas.

Comparativamente à realização de um processo incremental, o recurso ao problema linear de vectores e valores próprios (PLVVP) pressupões, para um grande número de casos, uma metodologia mais simples e de fácil aplicação.

Para a resolução do PLVVP, podem utilizar-se vários algoritmos de resolução, dos quais se destacam (Champion, 1993; McGuire *et. al*, 2000):

- Método de Redução à forma standard;
- Método da Expansão polinomial;
- Método da potenciação;
- Método de Jacobi;
- Método de Gauss-Siedel.

Bathe e Wilson (1976), apresentaram um método computacional designado por “método da interacção inversa ou interacção matricial de Stodola”, para resolver os problemas relacionados com a análise não linear geométrica, e cuja principal vantagem consiste na diminuição dos recursos computacionais utilizados.

Azevedo (1993) utilizou este método para o desenvolvimento de um algoritmo computacional, que foi implementado num programa de cálculo automático de estruturas reticuladas tridimensionais em regime elástico designado por EIGENF, desenvolvimento a partir do software FEMIX (baseado no MEF).

Neste método, a equação fundamental é dada por

$$[K]\{\phi_i\} = \lambda_i [-G]\{\phi_i\} \quad (3.2.20)$$

em que $\{\phi_i\}$ é o vector próprio ligado ao modo i e λ_i corresponde ao valor próprio associado ao vector próprio $\{\phi_i\}$.

O primeiro valor próprio (parâmetro de carga, λ) e o respectivo vector próprio (modo de instabilidade, ϕ) são obtidos a partir da equação 3.2.20, com

$$[K]\{\phi_1\} = \lambda_1 [-G]\{\phi_1\} \quad (3.2.21)$$

Inicialmente é introduzida uma primeira aproximação para a configuração de instabilidade através da deformação inicial $\{u_0\}$, resultando

$$[K]\{\phi\}_1 = (\lambda_1)_1 [-G]\{u_0\} \quad (3.2.22)$$

ou então

$$[K] \frac{1}{(\lambda_1)_1} \{\phi\}_1 = [-G]\{u_0\} \quad (3.2.23)$$

Como $[-G]\{u_0\}$ pode ser associado a um vector solicitação $\{f_G\}$, então a equação passa a ser

$$[K] \frac{1}{(\lambda_1)_1} \{\phi\}_1 = \{f_G\}_1 \quad (3.2.24)$$

e da resolução do sistema de equações resulta

$$\{\bar{u}\}_1 = \frac{1}{(\lambda_1)_1} \{\phi\}_1 \quad (3.2.25)$$

No caso de se ter introduzido uma configuração exacta do modo de instabilidade $\{\phi_i\}$, então as relações entre os vectores $\{u_0\}$ e $\{u\}_1$ são constantes e definidas por

$$\lambda_1 = \frac{(u_j)_0}{(\bar{u}_j)_1} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.26)$$

Como a configuração inicial corresponde a uma aproximação, o modo de instabilidade obtido $\{\phi_i\}$, não será exacto, pelo que as relações entre os vectores $\{u_0\}$ e $\{u\}_1$ não são constantes e consequentemente, não se pode utilizar a equação 3.2.26 para a determinação do parâmetro de carga λ_1 .

Para iniciar o processo com uma aproximação de λ_1 pode-se usar o quociente de Rayleigh, dado por

$$\{\lambda_1\}_1 = \frac{\{\bar{u}\}_1^T [-G]\{u\}_0}{\{\bar{u}\}_1^T [-G]\{u\}_1} \quad (3.2.27)$$

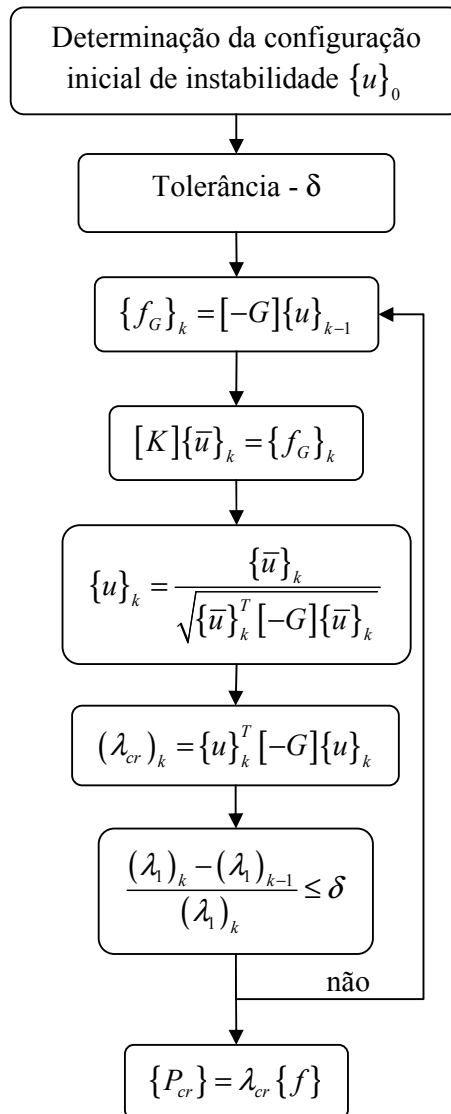
De modo a garantir a ortogonalização em relação à matriz de rigidez geométrica $[G]$, dada por

$$\{u\}^T [-G]\{u\} = 1 \quad (3.2.28)$$

utiliza-se para configuração da deformada o vector

$$\{u\}_1 = \frac{\{\bar{u}\}_1}{\sqrt{\{\bar{u}\}_1^T [-G]\{\bar{u}\}_1}} \quad (3.2.29)$$

que corresponde à segunda aproximação de λ_1 . Assim, para a determinação do valor da carga crítica de uma estrutura, pode-se utilizar o seguinte algoritmo:



Para a determinação dos restantes modos de instabilidade, é usada a ortogonalização de Gram-Schmidt que permite obter vectores ortogonais aos vectores previamente calculados, cuja equação é dada por

$$\{u^*\}_k = \left([I] - \sum_{i=1}^m \{\phi_i\}^T \{\phi_i\} [-G] \right) \{u_k\} \quad (3.2.30)$$

e em que o vector $\{u^*\}_k$ substitui o vector $\{u_k\}$ no algoritmo de resolução.

Para finalizar a apresentação do MEF, há a salientar que o software comercial utilizado para elaborar esta dissertação, nomeadamente SAP 2000, ANSYS e LUSAS se fundamenta nesta metodologia e embora tenham algoritmos de resolução próprios, a formulação da matriz de rigidez é aproximada e a ANLG constitui um PLVVP como apresentado nesta secção.

3.2.2 Método dos 3GL/piso – Software INST3D

No caso das estruturas tridimensionais apresentarem geometria regular constituída por pórticos rectangulares, para um grande número de casos, pode-se comparar estas estruturas a um conjunto de pórticos 2D, ligados entre si pelas lajes e para as quais se considera um comportamento de diafragma rígido no seu plano.

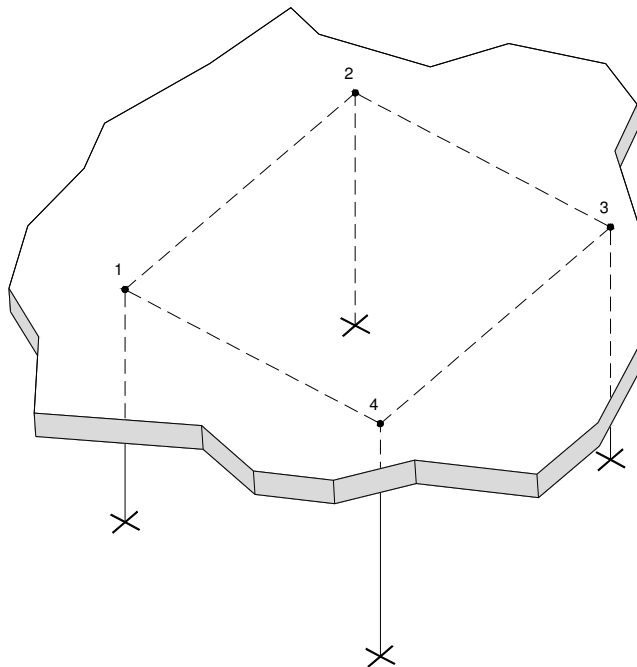


Figura 3.12 – Diafragma rígido no plano.

Esta análise permite concluir que é possível analisar pórticos 3D com o recurso a formulações 2D, através da simplificação da modelação 3D, à qual já se fez referência como Modelo de 3 graus de liberdade por piso (3GL/piso). O software desenvolvido (INST3D) baseia-se nesta simplificação que, como anteriormente se referiu, se baseia na condensação da estrutura tridimensional para obter uma estrutura bidimensional. Neste caso, os pórticos 2D são associados no espaço no espaço para simular o comportamento tridimensional da estrutura.

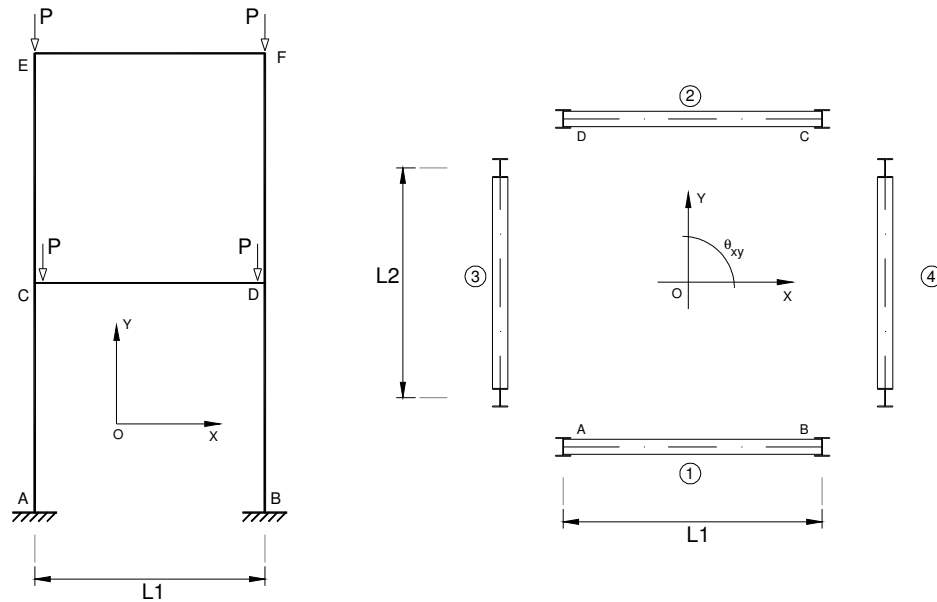


Figura 3.13 – Modelação INST3D: a) pórtico 2D, b) associação de pórticos 2D.

Embora o INST3D utilize um modelo simplificado, a formulação utilizada no algoritmo é exacta e corresponde ao uso da matriz de rigidez exacta $[K]$ na equação 3.1.1. O recurso a esta simplificação está relacionado com a diminuição dos graus de liberdade e consequentemente das equações que é necessário resolver. Por outro lado, a universalidade dos algoritmos fundamentados na utilização da matriz de rigidez exacta para pórticos 2D, justifica a sua utilização do ponto de vista computacional.

As matrizes de rigidez exactas baseadas em formulações tridimensionais são mais complexas e a sua utilização implica a resolução de um número significativo de equações, dificultando a sua programação. No caso de se pretender estudar de forma simplificada o efeito do esforço axial na rigidez da estrutura, então o modelo de 3 GL/piso apresenta-se como uma boa alternativa, sobretudo pela facilidade com se implementa uma rotina computacional (simplicidade de programação) e também pela redução do tempo necessário para processar os dados.

O software INST3D foi baseado num algoritmo originalmente desenvolvido em FORTRAN 77. Este formato de programação corresponde a uma linguagem não estruturada, dificultando a interpretação do algoritmo, justificando a sua adaptação para uma linguagem mais recente, neste caso o FORTRAN Powerstation. Simultaneamente, foram introduzidas alterações para eliminar as limitações que o algoritmo inicial apresentava, como o número máximo de pisos, a limitação no tamanho dos ficheiros de dados, a introdução e o armazenamento de dados no disco rígido, conforme mais detalhado no respectivo manual (César e Barros, 2003). Foi ainda reformulada a análise matricial, para permitir estudar os sistemas estruturais para os quais se pretende utilizar este software, que serve de base para o principal objectivo desta dissertação – o estudo paramétrico sobre a instabilidade de pórticos 2D e 3D, neste caso com o recurso à formulação exacta do problema não linear geométrico.

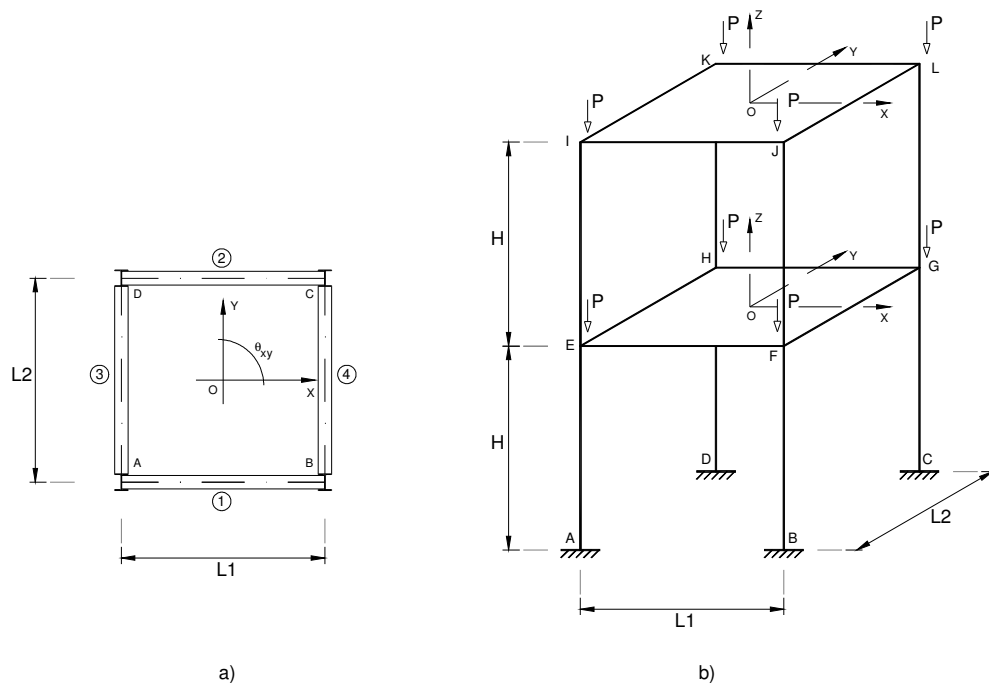


Figura 3.14 – Modelação INST3D – Pórtico 3D: a) planta, b) alçado.

O algoritmo inicial e o algoritmo do INST3D fundamentam-se no método de 3GL/piso para elaborar a ANLG de pórticos rectangulares 3D, considerando que a estrutura 3D pode ser obtida por associação de pórticos 2D rectangulares, Figuras 3.13 e 3.14.

Como o objectivo é analisar a instabilidade de pórticos, torna-se necessário apresentar os fundamentos e a metodologia utilizada para a obtenção dos parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade, implícitos no algoritmo do INST3D, para se entender o funcionamento deste software.

Em primeiro lugar, refere-se que a utilização deste tipo de modelação implica uma série de condicionantes; no caso do INST3D, as estruturas analisadas deverão apresentar as seguintes características:

- Indeformabilidade axial das barras;
- Pórticos rectangulares com igual número de pilares em cada andar;
- Pórticos com pilares situados na mesma prumada;
- Cargas concentradas aplicadas nos nós;
- Encastramento na base do pórtico (ligações ao exterior);
- Área e inércia constantes para cada elemento;
- Módulo de elasticidade constante em cada pórtico 2D;

Como os pórticos 3D são modelados recorrendo a formulações 2D, isto é, pórticos bidimensionais ou planos, então a matriz de rigidez será definida para um elemento linear do tipo barra com 3 graus de liberdade por nó, como ilustrado na Figura 3.15.

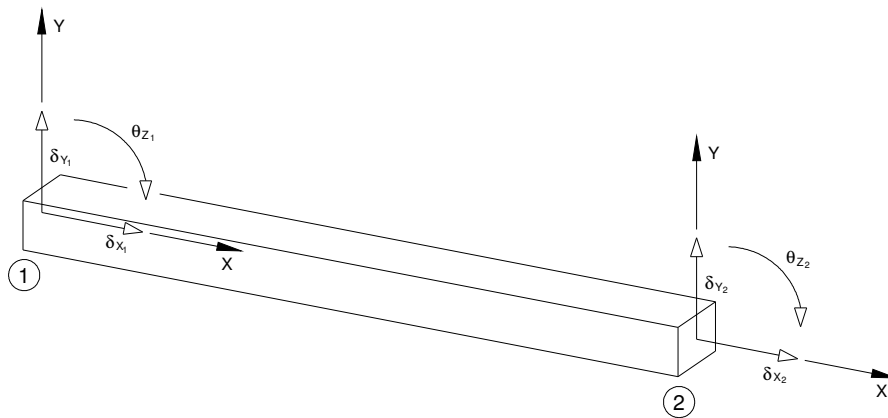


Figura 3.15 – Elemento de barra 2D. Graus de liberdade.

Deste modo, considerando um sistema local de coordenadas $0xyz$, os deslocamentos possíveis $\{\Delta\}$ nas extremidades da barra são numerados como indicado na Figura 3.16, onde E é o módulo de elasticidade, A_x a área da secção transversal, L o comprimento da barra e I_z o momento de inércia da secção em torno do seu eixo pelo seu centro de gravidade, normalmente ao plano da figura.

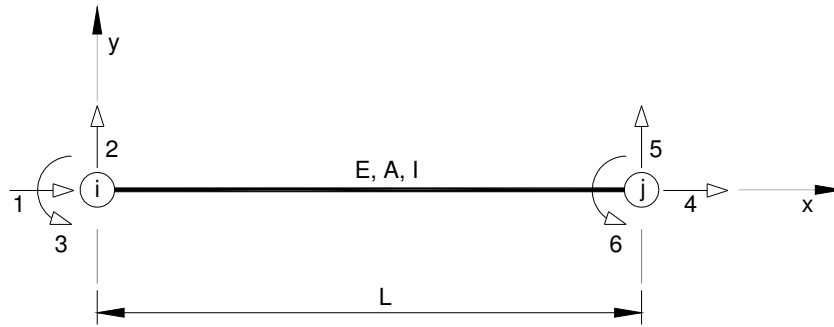


Figura 3.16 – Elemento de barra 2D – numeração dos deslocamentos.

Se o equilíbrio se fizer na configuração indeformada da barra, despreza-se a influência do esforço axial e obtém-se a matriz de rigidez 1ª ordem do elemento de barra

$$[K_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \quad (3.2.31)$$

A equação de equilíbrio será

$$\{F\} = [K_{ij}]\{\Delta\} \quad (3.2.32)$$

em que $\{F\}$ corresponde ao vector das solicitações, $[K_{ij}]$ a matriz de rigidez do elemento e $\{\Delta\}$ o vector dos deslocamentos nodais.

A equação 3.2.32, que corresponde à equação 3.1.1, pode ser apresentada em função do sistema de eixos admitido.

Considerando os esforços nodais H, V e M e os deslocamentos nodais Δ_H , Δ_V e θ , então a equação de equilíbrio será

$$\begin{Bmatrix} H_i \\ V_i \\ M_i \\ H_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{H,i} \\ \Delta_{V,i} \\ \theta_i \\ \Delta_{H,j} \\ \Delta_{V,j} \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.2.33)$$

Introduzindo as funções de instabilidade na matriz $[K_{ij}]$, obtém-se

$$[K_{ij}]_{\text{exacta}} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & 0 & \frac{-12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{4EI}{L} \phi_3 & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{2EI}{L} \phi_4 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{-6EI}{L^2} \phi_2 & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{2EI}{L} \phi_4 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{4EI}{L} \phi_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.34)$$

A matriz anterior corresponde à numeração dos deslocamentos generalizados associada ao referencial local da Figura 3.16, na qual as funções ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 são as funções de estabilidade associadas aos termos da matriz de rigidez de 1ª ordem. A obtenção destas funções foi abordada no capítulo 2 para diversas condições de fronteira, nomeadamente, a possibilidade de ocorrerem translações nodais e ligações semi-rígidas.

Assim, as funções de estabilidade ϕ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) são, para o caso de $P < 0$ (compressão):

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \phi_2 \beta \cot \beta \\ \phi_2 &= \frac{\beta^2}{3(1 - \beta \cot \beta)} \\ \phi_3 &= \frac{3}{4} \phi_2 + \frac{1}{4} \beta \cot \beta \\ \phi_4 &= \frac{3}{2} \phi_2 - \frac{1}{2} \beta \cot \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.2.35)$$

com

$$\beta = \frac{kL}{2} = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_e}} \quad (3.2.36)$$

em que P_e corresponde a carga crítica de Euler

$$P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad (3.2.37)$$

No algoritmo original, a formulação utilizada no INST3D foi baseada na matriz de rigidez exacta de vigas-coluna com as funções de estabilidade desenvolvidas por Livesley e Chandler (1956):

em que para $\rho > 0$ (barras comprimidas):

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{(1 - 2\alpha \cdot \cot 2\alpha) \alpha}{\tan \alpha - \alpha} \\ c &= \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.38)$$

onde

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \sqrt{\rho} \quad (3.2.39)$$

com $\rho = \frac{P}{P_e}$.

e para $\rho < 0$ (barras traccionadas) as equações adoptam a forma:

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{(1 - 2\gamma \cdot \coth(2\gamma))\gamma}{\tanh \gamma - \gamma} \\ c &= \frac{2\gamma - \sinh(2\gamma)}{\sinh(2\gamma) - 2\gamma \cdot \cosh(2\gamma)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.40)$$

Ainda nesta formulação, para considerar o efeito da translação da barra, Merchant (Merchant, 1955; Horne e Merchant, 1965) introduziu a função m que permite representar a diminuição de rigidez ao movimento transversal da barra prismática bi-encastada, como consequência da inclinação que ocorre entre o eixo da barra e a direcção das forças P responsáveis pela compressão axial.

$$m = \frac{2s(1+c)}{2s(1+c) - \pi^2 \rho} \quad (3.2.41)$$

em que $\rho = P/P_e$ sendo $P_e = \pi^2 EI_z/L^2$ a carga crítica de Euler.

Estas funções de estabilidade, s , c e m podem ser relacionadas com as funções de estabilidade ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 apresentadas na equação 3.2.34. Adoptaram-se as funções ϕ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) com base na abordagem apresentada no capítulo 2, e ainda, por configurarem a teoria da estabilidade na sua notação mais recente.

A matriz $[K_{ij}]_{\text{exacta}}$ pode ser reorganizada de forma a obter uma matriz que agrupe os termos que definem as translações e as rotações nodais, equação 3.2.42.

$$[K_{ij}]_{\text{exacta}} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{-12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \\ 0 & 0 & \frac{-12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \\ \hline 0 & 0 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{-6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{4EI}{L} \phi_3 & \frac{2EI}{L} \phi_4 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 & \frac{2EI}{L} \phi_4 & \frac{4EI}{L} \phi_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.42)$$

Associando os índices H, V e θ a cada parcela da matriz K_{ij} obtém-se

$$[K_{ij}]_{exacta} = \begin{pmatrix} K_{HH} & K_{HV} & K_{H\theta} \\ K_{VH} & K_{VV} & K_{V\theta} \\ K_{\theta H} & K_{\theta V} & K_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad (3.2.43)$$

sendo H o deslocamento horizontal, V o deslocamento vertical e θ a rotação associados aos graus de liberdade do elemento de barra.

3.2.2.1 Determinação da carga crítica em pórticos 2D

Quando se analisam estruturas porticadas, é possível observar dois tipos de comportamento em função da mobilidade da estrutura. O pórtico pode apresentar uma configuração deformada de nós fixos, ou uma configuração de nós móveis (Figura 3.17).

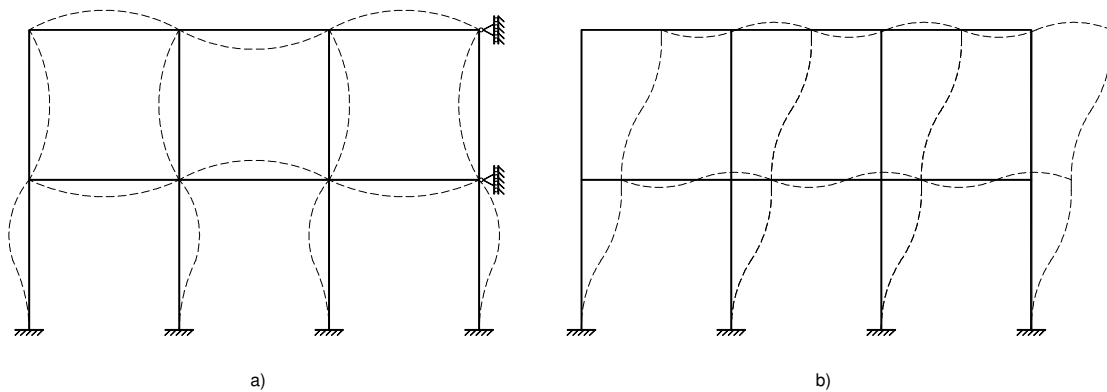


Figura 3.17 – Mobilidade de pórticos: a) pórtico de nós fixos, b) pórtico de nós móveis.

No caso do pórtico de nós fixos, os nós localizados nas extremidades dos elementos não sofrem translações, pelo que, as cargas aplicadas apenas podem introduzir rotações do elemento em torno dos nós de extremidade, e assim, a perda de estabilidade, estará associada à rotação nodal. Para os pórticos de nós móveis, existe a possibilidade de translações das extremidades, pelo que a perda de estabilidade será atingida para um valor menor de carga.

Se forem analisados pórticos 2D e considerando que o objectivo é determinar a carga crítica P_{cr} do esquema estrutural, pode-se concluir que P_{cr} será encontrada numa configuração intermédia entre pórtico de nós fixos e pórtico de nós móveis.

Como primeira aproximação para a determinação de P_{cr} , pode admitir-se que o seu valor será obtido de entre os limites definidos pelos seguintes esquemas estruturais:

- Pórtico de nós fixos

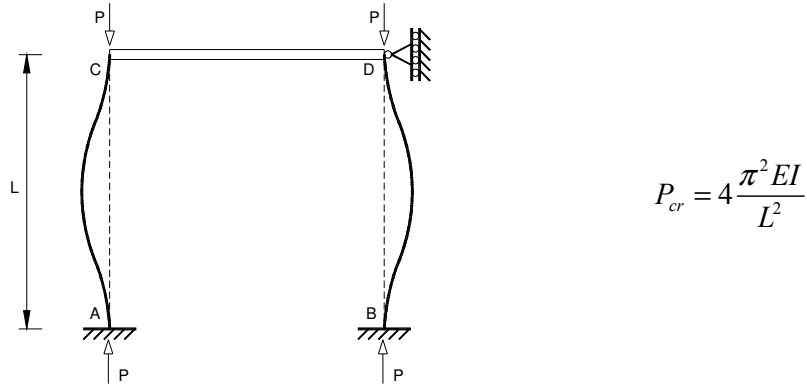


Figura 3.18 – Pórtico 2D de nós fixos com viga de rigidez infinita.

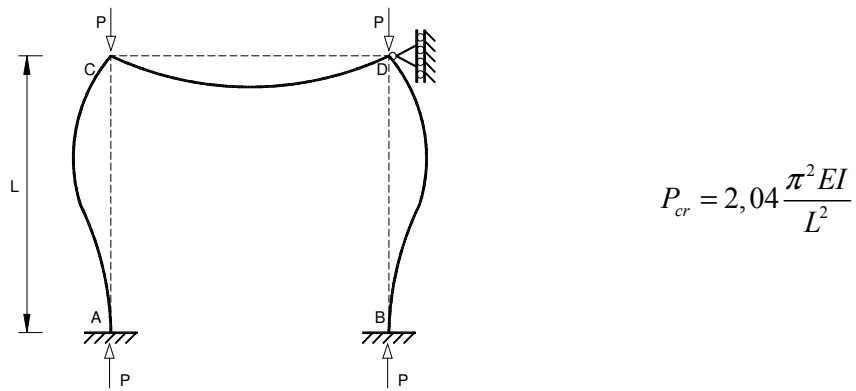


Figura 3.19 – Pórtico 2D de nós fixos.

- Pórtico de nós móveis

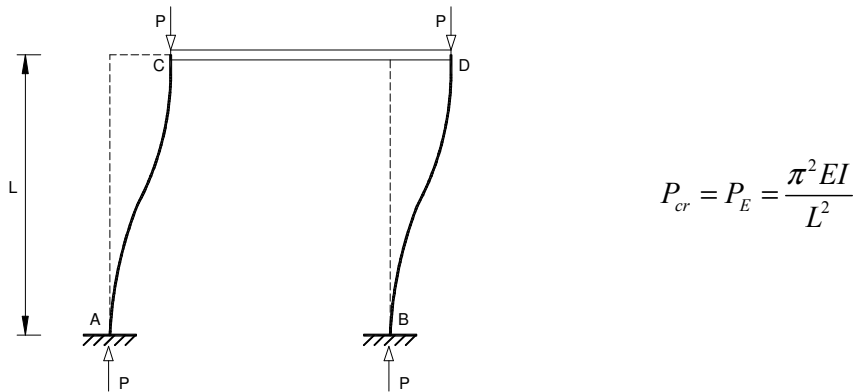
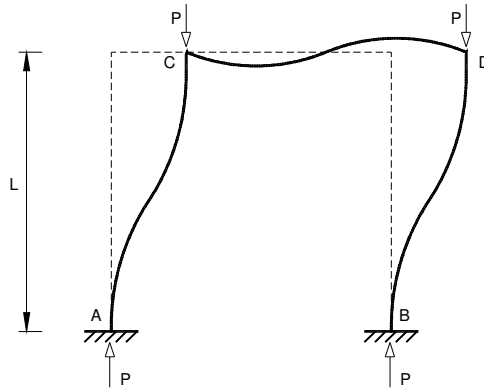


Figura 3.20 – Pórtico 2D de nós móveis com viga de rigidez infinita.



$$P_{cr} = 0,25 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

Figura 3.21 – Pórtico 2D de nós móveis.

Observando as figuras 3.18, 3.19, 3.20 e 3.21, pode-se verificar que a carga crítica se encontrará entre o valores extremos, ou seja entre

$$0,25P_E < P_{cr} < 4P_E \quad (3.2.44)$$

É então necessário explicitar o processo de obtenção da carga crítica e do respectivo modo de estabilidade para cada configuração de mobilidade da estrutura (pórtico de nós fixos e pórtico de nós móveis).

3.2.2.2 Instabilidade de pórticos de nós fixos

Nos pórticos de nós fixos, um aumento das cargas aplicadas pode provocar a perda de estabilidade por rotação nodal indefinida, sem que ocorra translação horizontal dos nós. Neste caso, pode-se analisar o pórtico, considerando que há impedimentos ao movimento dos andares e a instabilidade será encontrada tendo em conta que o pórtico com os deslocamentos horizontais impedidos, ou seja, tendo como únicos deslocamentos livres a rotação dos nós, $\{d_\theta^P\}$.

Neste caso, a carga crítica corresponderá ao limite superior para o carregamento crítico correspondente à condição real de comportamento do pórtico, condição esta intermédia entre a de pórtico de nós fixos e de nós móveis.

Como nestes pórticos não há deslocamentos horizontais, o sistema de equações será dado por

$$\{f_\theta^P\} = [K_{\theta\theta}^P] \{d_\theta^P\} \quad (3.2.45)$$

O pórtico de nós fixos torna-se instável, quando para momentos nodais nulos ocorrem rotações $\{d_\theta^P\}$.

Assim, obtém-se a equação

$$[K_{\theta\theta}^P] \{d_\theta^P\} = 0 \quad (3.2.46)$$

cujas soluções serão dadas por

$$\det[K_{\theta\theta}^P] = 0 \quad (3.2.47)$$

3.2.2.2.1 Determinação da carga crítica

Se o pórtico de nós fixos estiver sujeito a cargas nodais verticais $\{f_V\}$, no sentido descendente, os esforços nos pilares podem ser calculados através do equilíbrio das forças verticais em cada nó. Supondo que as cargas podem variar simultaneamente em todos os nós, então o vector das forças nodais $\{f_V\}$ pode ser alterado pela introdução do parâmetro λ_0 , com $\lambda_0 > 0$, cujo valor crítico se pretende determinar. Neste caso λ_0 é o menor valor do parâmetro para o qual o pórtico de nós fixos perde a estabilidade.

O princípio da sobreposição dos efeitos, para as cargas verticais, continua válido se as cargas horizontais forem nulas e se os momentos forem nodais. A equação que relaciona o esforço axial nos elementos com o parâmetro de carga é dada por

$$N_{\lambda,i} = \lambda \cdot N_i \quad (3.2.48)$$

em que N_i é o esforço axial na barra i para $\lambda_0 = 1$ e $N_{\lambda,i}$ o esforço axial correspondente à ampliação de N_i devido ao parâmetro de carga.

Para a análise do pórtico de nós fixos, a matriz $[K_{ij}]$ (equação 3.2.43) pode ser simplificada, passando a ser definida pela submatriz associada às rotações nodais

$$[K_{\theta\theta}] = \begin{pmatrix} \frac{4EI_z}{L} \phi_3 & \frac{2EI_z}{L} \phi_4 \\ \frac{2EI_z}{L} \phi_4 & \frac{4EI_z}{L} \phi_3 \end{pmatrix} \quad (3.2.49)$$

Desta forma, são determinadas as matrizes $[K_{\theta\theta}]$ (equação 3.2.49) para diversos valores de λ e a partir destas a matriz de rigidez $[K_{\theta\theta}^P]$ (equação 3.2.45). O valor do parâmetro crítico λ_0 será o menor valor de λ para o qual:

$$\det[K_{\theta\theta}^P] = 0 \quad (3.2.50)$$

No decorrer da resolução deste determinante, o valor de λ toma sucessivamente valores positivos e negativos, pelo que se torna difícil, determinar quando toma pela primeira vez o valor zero. Como o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus auto-valores o problema pode ser transformado noutra de determinação de auto-valores da matriz $[K_{\theta\theta}^P]$ através da equação 3.2.51.

$$[K_{\theta\theta}^P] = [B] + [D] \quad (3.2.51)$$

em que $[B]$ é obtida de $[K_{\theta\theta}^P]$ igualando a zero os elementos da diagonal principal e $[D]$ é a matriz diagonal com os elementos diagonais de $[K_{\theta\theta}^P]$. Das equações 3.2.47 e 3.2.51 obtém-se

$$\det[K_{\theta\theta}^P] = \det\{([B][D]^{-1} + [I])[D]\} = 0 \quad (3.2.52)$$

Para $\lambda < \lambda_0$, os elementos da diagonal principal de $[K_{\theta\theta}^P]$ nunca se anulam, e a matriz $[B][D]^{-1}$ obtém-se a partir de $[K_{\theta\theta}^P]$, dividindo os elementos de cada coluna pelo elemento dessa coluna pertencente à diagonal principal, obtém-se

$$\det([B][D]^{-1} + [I]) = 0 \quad (3.2.53)$$

o que significa que no caso de $\lambda = \lambda_0$, $[B][D]^{-1}$ apresentar auto valor $\lambda = -1$ e para $\lambda = 0$ as funções ϕ_3 e ϕ_4 são iguais à unidade, pelo que os auto-valores se situam entre -1 e 1, no entanto, verifica-se que o intervalo onde se encontram os auto-valores de $[B][D]^{-1}$ se situa entre -0,5 e 0,5. À medida que se aumenta λ , os auto-valores de $[B][D]^{-1}$ alteram-se, até que o menor auto-valor atinja o valor de $\lambda_{\min} = -1$, obtendo-se nesse instante $\lambda = \lambda_0$.

Para diminuir o tempo de processamento e evitar inconvenientes associados à definição de $[B][D]^{-1}$ que pode não ser simétrica, pode-se determinar o parâmetro crítico λ_0 através da matriz $[K_{\theta\theta}^P]$ que é sempre simétrica, pelo que, enquanto não for atingida a carga crítica (ou enquanto $\lambda < \lambda_0$), todos os auto valores de $[K_{\theta\theta}^P]$ serão positivos. O $\det[K_{\theta\theta}^P] = 0$ permanece válido para $\lambda = \lambda_0$ e o menor auto valor de $[K_{\theta\theta}^P]$ será $\lambda_{\min} = 0$. Para $\lambda > \lambda_0$, existirão autovalores negativos.

O valor de λ será procurado entre os limites $[0, \lambda_{\max}]$, com

$$\lambda_{\max} = \frac{4}{\rho_{\max}}; \rho = \frac{P}{P_E} \quad (3.2.54)$$

que corresponde ao limite superior de carga crítica do pórtico de nós fixos, Figura 3.17.

Para a determinação da totalidade dos auto-valores e auto-vectores, utiliza-se o método de Jacobi.

3.2.2.3 Instabilidade de pórticos de nós móveis

Considerando a indeformabilidade axial das barras, pode-se obter a matriz $[K^P]$ correspondente aos deslocamentos do pórtico, em que

$$[K^P] = \begin{bmatrix} K_{\theta\theta}^P & K_{\theta H}^P \\ K_{H\theta}^P & K_{HH}^P \end{bmatrix} \quad (3.2.55)$$

sendo λ_θ já conhecido, pode-se afirmar que para valores de λ satisfazendo $0 < \lambda < \lambda_\theta$, a matriz $[K_{\theta\theta}^P]$ é não singular e definida positiva, portanto existe $[K_{\theta\theta}^P]^{-1}$. Chamando λ_H ao valor do parâmetro crítico para o pórtico de nós móveis, e sendo a carga crítica deste pórtico inferior que a do pórtico de nós fixos, a instabilidade do primeiro deverá ser procurada para valores de λ satisfazendo

$$0 < \lambda_H < \lambda_\theta \quad (3.2.56)$$

Como existe $[K_{\theta\theta}^P]^{-1}$, pode-se calcular a matriz de rigidez reduzida

$$[K_{HH}^*] = [K_{HH}^P] - [K_{H\theta}^P][K_{\theta\theta}^P]^{-1}[K_{\theta H}^P] \quad (3.2.57)$$

onde $[K_{HH}^*]$ corresponde à matriz de rigidez reduzida associada aos deslocamentos horizontais nos andares enquanto são livres as rotações dos nós do pórtico. Os esforços horizontais nos andares e os deslocamentos nos mesmos estarão relacionados por

$$\{f_H^P\} = [K_{HH}^*]\{d_H^P\} \quad (3.2.58)$$

3.2.2.3.1 Determinação da carga crítica

Uma vez determinada a matriz $[K_{HH}^*]$, a carga crítica $\lambda = \lambda_H$ do pórtico de nós móveis sujeito a um carregamento vertical concentrado nos nós, pode ser procurada, admitindo como acções

perturbadoras do equilíbrio os esforços horizontais $\{f_H^P\}$ aplicados nos andares. O pórtico deslocável torna-se instável quando, mesmo com esforços horizontais nulos aplicados $\{f_H^P\}=0$, ocorrem deslocamentos horizontais dos mesmos, ou seja

$$[K_{HH}^*]\{d_H^P\}=0 \quad (3.2.59)$$

sistema que só admite solução quando o $\det[K_{HH}^*]=0$. O parâmetro crítico $\lambda = \lambda_H$ será o menor valor de λ para o qual o $\det[K_{HH}^*]=0$. Supondo nulas as cargas horizontais e os momentos nos nós, continua válido o princípio de sobreposição dos efeitos para as cargas verticais, de maneira que o esforço axial N_λ em cada barra i pode ser calculado por

$$N_{\lambda,i} = \lambda \cdot N_i \quad (3.2.60)$$

onde N_i é o esforço axial na mesma barra para $\lambda=1$.

Para cada valor de λ determinam-se as matrizes de rigidez das barras e a sua contribuição na parte triangular superior de $[K^P]$.

Sabe-se que antes de atingir a carga crítica, $[K_{HH}^*]$ é definida positiva, deixando de sê-lo quando a mesma é atingida. O procedimento de determinação é o mesmo que o utilizado para o de pórticos de nós fixos, iniciando o processo com o limite $[0, \lambda_{\text{máx}}]$, em que $\lambda_{\text{máx}}=\lambda_\theta$ determinado para o pórtico de nós fixos.

3.2.2.4 Instabilidade de pórticos com barras diagonais

Quando se estuda a mobilidade de pórticos, pretende-se sempre obter uma estrutura com a maior capacidade resistente, pelo que a configuração de deformada de nós fixos constitui a melhor solução. Quando se estuda uma estrutura de nós móveis, deve-se procurar a alteração do seu comportamento para que, numa análise de capacidade resistente, apresente o desempenho de uma estrutura de nós fixos. Esta alteração é conseguida através da adição de novos elementos, que impedem a estrutura de ter translações ao nível dos pisos, e que normalmente constituem o sistema de contraventamento, materializado pela adição de elementos diagonais entre pilares.

De seguida, é apresentado o procedimento para análise de instabilidade de pórticos planos que possuem barras diagonais em alguns andares.

Na realidade, os pórticos rectangulares com barras diagonais, são estruturas que aparecem frequentemente, sendo as barras diagonais usadas para aumentar a segurança contra a perda de estabilidade.

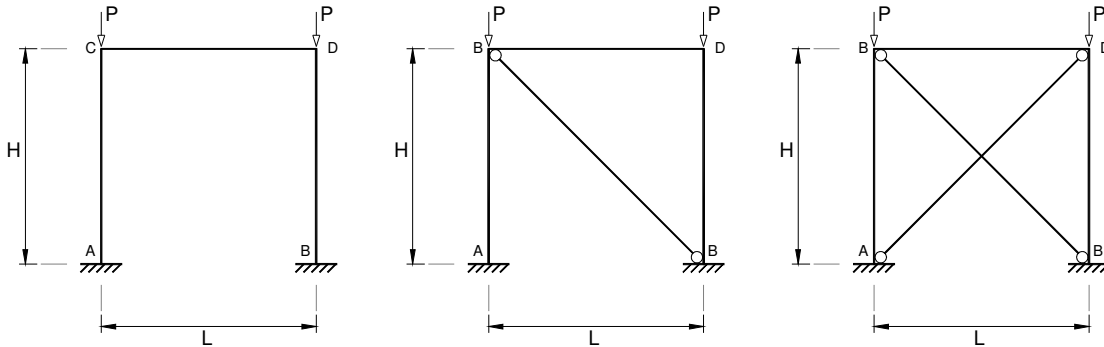


Figura 3.22 – Pórtico 2D de nós móveis com vários tipos de contraventamento.

Para estes pórticos, continuam válidas as hipóteses enumeradas para o caso dos pórticos de nós fixos e de nós móveis.

Se o pórtico rectangular apresentar elementos diagonais em todos os andares, Figura 3.23, então a estrutura pode ser classificada como tendo um comportamento de nós fixos.

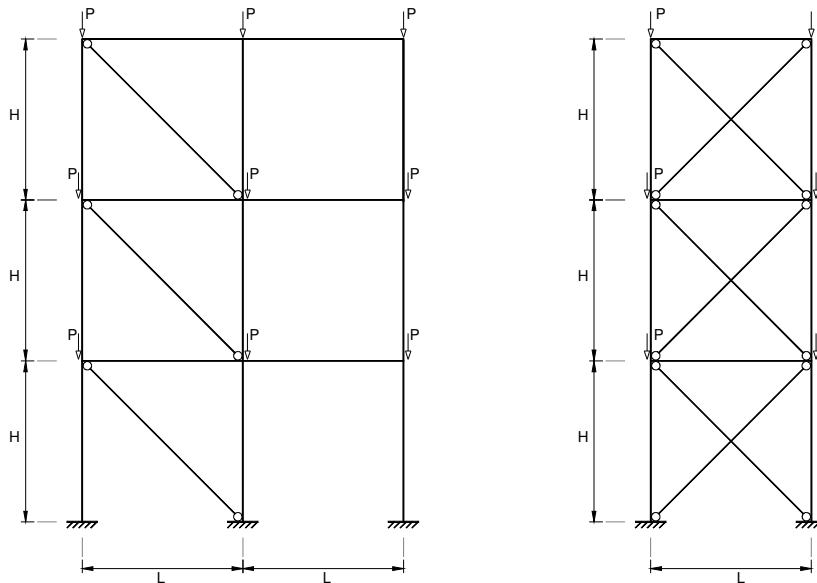


Figura 3.23 – Pórtico 2D contraventados.

A classificação do pórtico como estrutura de nós fixos, não garante que ao perder estabilidade por efeito das cargas verticais, o modo de instabilidade do pórtico seja caracterizado por

grandes rotações dos nós e translações horizontais insignificantes nos andares. Para que o pórtico, classificado como sendo de nós fixos, perca de facto estabilidade como tal e não como um pórtico de nós móveis, é necessário que a rigidez axial das diagonais seja suficientemente grande para impedir a translação dos nós ao nível dos pisos. Existem estruturas que mesmo com grande rigidez axial das diagonais, a perda de estabilidade ocorre por translações horizontais significativas nos andares.

Para um grande número de casos, principalmente quando o pórtico possui poucas prumadas de pilares, as diagonais apresentam áreas das secções bastante menores que a dos pilares e vigas no mesmo andar.

Para assegurar um contraventamento eficiente, é comum introduzir duas diagonais cruzadas em cada andar. No entanto, quando se utiliza o cálculo automático numa análise de instabilidade, pode-se introduzir apenas uma diagonal no andar, com rigidez axial capaz de suportar os esforços de tracção ou de compressão que lhe são transmitidos. Esta simplificação será adoptada para a introdução do contraventamento no software comercial e no INST3D.

Quando se introduz um contraventamento num pórtico para impedir a translação dos nós nos andares, classificando-o como sendo de nós fixos, e não se garante que as diagonais são suficientes para impedir a translação do pórtico, então é necessário verificar também a instabilidade supondo um comportamento de nós móveis. Na realidade, é sempre necessário verificar o comportamento da estrutura para garantir um eficiente aproveitamento do sistema de contraventamento, pelo que será necessário realizar duas análises de instabilidade, uma para o pórtico considerado de nós fixos e outra para o pórtico com configuração de nós móveis e o parâmetro crítico estará localizado no intervalo

$$0 < \lambda_H < \lambda_\theta \quad (3.2.61)$$

Se as barras diagonais estiverem ligadas rigidamente aos nós, então pode-se considerar a sua rigidez à flexão para a matriz $[K^P]$ da estrutura, embora esta contribuição seja insignificante supondo que os elementos de contraventamento apresentam reduzida rigidez à flexão.

Quando se introduzem diagonais de contraventamento, e sabendo que a rigidez axial dessas diagonais é suficiente para impedir a deformação de pórtico com comportamento de nós móveis, pretende-se que a estrutura apresente um comportamento de corpo rígido, garantido pela presença de “treliças” compostas pelas vigas, pilares e diagonais, Figura 3.24. A treliça impede as translações horizontais relativas, entre dois pisos consecutivos, e a rigidez da treliça

pode ser inserida na matriz $[K^P]$, através da contribuição da rigidez axial das diagonais nas parcelas de $[K_{HH}^P]$.

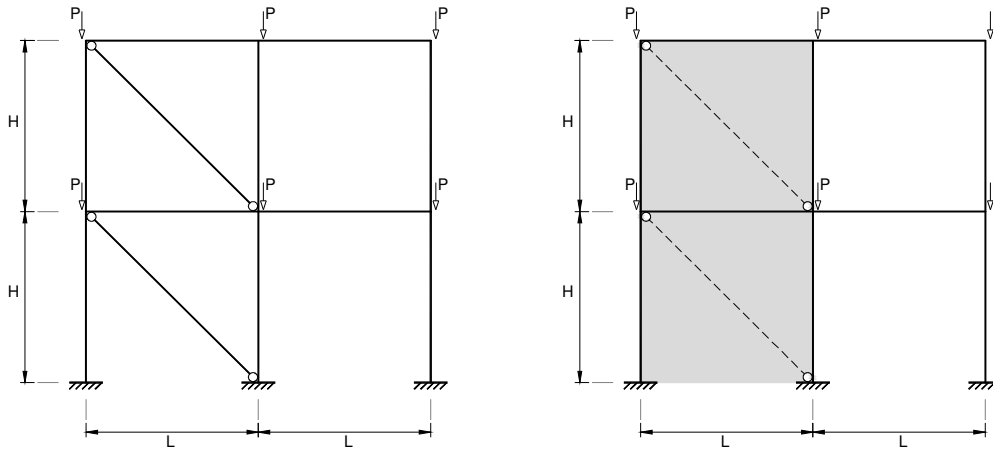


Figura 3.24 – Pórtico 2D contraventado, com comportamento rígido.

Como se referiu, para o caso de existirem diagonais, é necessário realizar um estudo considerando o pórtico como sendo de nós fixos e outro considerando-o como sendo de nós móveis. Se o pórtico for de nós fixos, a introdução de barras diagonais não altera significativamente o procedimento apresentado para a determinação do parâmetro crítico λ_0 . No caso do pórtico de nós móveis, para a maioria das estruturas contraventadas, supõem-se a deformabilidade axial das diagonais, desprezando-a para os dos pilares. Esta simplificação deve ser utilizada para pórticos com elementos diagonais de rigidez axial inferior à dos pilares, o que é frequente nas estruturas correntes, caso contrario pode resultar uma carga crítica superior à obtida no cálculo.

Admitindo a deformação axial dos pilares e das diagonais e desprezando-a nas vigas, pode-se escrever a equação de equilíbrio

$$\begin{Bmatrix} H \\ V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{HH} & k_{HV} & k_{H\theta} \\ k_{VH} & k_{VV} & k_{V\theta} \\ k_{\theta H} & k_{\theta V} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_H \\ \Delta_V \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (3.2.62)$$

na qual H representa o deslocamento horizontal, V o deslocamento vertical e θ a rotação.

Desprezando os efeitos dos deslocamentos verticais dos nós relativamente aos momentos, $[K_{\theta V}] = [K_{V\theta}]$, pode-se calcular uma matriz simplificada relativa aos deslocamentos horizontais

$$[k_{HH}^{**}] = [K_{HH}] - [K_{H\theta}] [K_{\theta\theta}]^{-1} [K_{\theta H}] - [K_{HV}] [K_{VV}]^{-1} [K_{VH}] \quad (3.2.63)$$

que será utilizada para introduzir as acções perturbadoras (horizontais).

Pode-se simplificar o cálculo de $[K_{HH}^{**}]$ admitindo que:

1. Se no calculo de $[K]$ for tida em conta apenas a rigidez à flexão das barras e desprezada a sua rigidez axial, $[K]$ será:

$$[K] = \begin{pmatrix} [K_{\theta\theta}] & [K_{\theta H}] & 0 \\ [K_{H\theta}] & [K_{HH}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2.64)$$

Assim, as matrizes de rigidez exactas das barras horizontais, verticais e inclinadas serão dadas por:

$$[K]_I = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{L} \phi_3 & \frac{2EI}{L} \phi_4 & -\frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy \\ \frac{2EI}{L} \phi & \frac{4EI}{L} \phi_3 & -\frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy \\ -\frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy & -\frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 \cdot C_y^2 & -\frac{12EI}{L^3} \phi_1 \cdot C_y^2 \\ \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy & \frac{6EI}{L^2} \phi_2 \cdot Cy & -\frac{12EI}{L^3} \phi_1 \cdot C_y^2 & \frac{12EI}{L^3} \phi_1 \cdot C_y^2 \end{pmatrix} \quad (3.2.65)$$

em que

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L} \quad (3.2.66)$$

e

$$C_y = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (3.2.67)$$

sendo (x_i, y_i) as coordenadas do nó inicial e (x_j, y_j) as coordenadas do nó final, L o comprimento do elemento, I a inércia da secção e E o módulo de elasticidade do material que compõem a estrutura.

2. Se no cálculo for considerada unicamente a rigidez axial e desprezada a rigidez à flexão, $[K]$ será:

$$[K]_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [K_{HH}] & [K_{VH}] \\ 0 & [K_{VH}] & [K_{VV}] \end{bmatrix} \quad (3.2.68)$$

em que só é introduzida a rigidez axial dos elementos, ou seja

$$[K]_D = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} C_y^2 & -C_y^2 & C_x \cdot C_y & -C_x \cdot C_y \\ -C_y^2 & C_y^2 & -C_x \cdot C_y & C_x \cdot C_y \\ C_x \cdot C_y & -C_x \cdot C_y & C_x^2 & -C_x^2 \\ -C_x \cdot C_y & C_x \cdot C_y & -C_x^2 & C_x^2 \end{pmatrix} \quad (3.2.69)$$

Desta forma, a matriz $[K_{HH}^{**}]$ pode ser simplificada, obtendo-se

$$[k_{HH}^{**}] = [K_{HH}^*]_I + [K_{HH}^*]_A \quad (3.2.70)$$

em que

$$[K_{HH}^*]_I = [K_{HH}]_I - [K_{H\theta}]_I \cdot [K_{\theta\theta}]_I^{-1} \cdot [K_{\theta H}]_I \quad (3.2.71)$$

e

$$[K_{HH}^*]_A = [K_{HH}]_A - [K_{HV}]_A \cdot [K_{VV}]_A^{-1} \cdot [K_{VH}]_A \quad (3.2.72)$$

estando o índice I relacionado com a rigidez à flexão (inércia) e o índice A com a rigidez axial.

No caso de não existirem diagonais, a rigidez axial dos pilares não intervém na matriz $[K_{HH}^{**}]$, pelo que $[K_{HH}^*]_I$ será a matriz de rigidez correspondente ao pórtico com pilares de rigidez axial infinita e diagonais de rigidez axial nula e a matriz $[K_{\theta\theta}]_I^{-1}$ às acções perturbadores associadas ao pórtico de nós fixos.

A matriz $[K_{HH}^*]_A$, é a matriz de rigidez reduzida de uma treliça 2D com dois graus de liberdade em cada nó (dois deslocamentos) e $[K_{VV}]_A^{-1}$

No caso da barra ser vertical ou inclinada, terá de se introduzir a contribuição da treliça na definição da matriz de rigidez global. Se a barra for horizontal, não existe contribuição para a matriz reduzida da treliça, respeitante aos deslocamentos horizontais nos pisos e após obter a matriz $[K_{HH}^{**}]$, a análise do pórtico é idêntica à efectuada para o pórtico de nós móveis, substituindo a matriz $[K_{HH}^*]$ pela nova matriz $[K_{HH}^{**}]$ no algoritmo de resolução.

Este procedimento permite obter resultados mais próximos do valor exacto para todas as possibilidades de contraventamento, pelo que será utilizada no algoritmo de resolução.

3.2.2.5 Instabilidade de pórticos 3D

Como já foi referido, pode-se analisar estruturas tridimensionais de edifícios, tendo em conta que os mesmos são constituídos por pórticos 2D, ligados entre si pelas lajes, de rigidez infinita no seu plano da laje e rigidez transversal nula, ou seja com comportamento de diafragma rígido horizontal. Desprezando-se a interacção vertical de pórticos que se interceptam, as matrizes de rigidez desses pórticos correspondem a uma das matrizes $[K_{HH}^*]$ ou $[K_{HH}^{**}]$. A primeira matriz define o comportamento do pórtico quando não existem elementos diagonais e a segunda quando o pórtico apresenta elementos diagonais de contraventamento.

A matriz $[K_{HH}^{**}]$ descreve com maior rigor o comportamento do pórtico tridimensional pois a matriz $[K_{HH}^*]$ sobrestima a rigidez horizontal do pórtico pelo que se pode obter um valor da carga crítica superior ao valor correcto, não constituindo uma análise conservativa do problema. Assim, escolhe-se a matriz $[K_{HH}^{**}]$ para analisar a instabilidade de pórticos 3D.

A carga crítica de um pórtico 3D não pode ser obtida analisando cada um dos pórticos 2D em separado, pois a existência dos pórticos associados no espaço através das lajes, fazem com que os pórticos 2D não percam a estabilidade isoladamente. Na realidade, a carga crítica do pórtico 3D tem de ser encontrada considerando o comportamento global da estrutura, obtendo um valor da carga crítica ligeiramente superior à carga crítica do pórtico mais desfavorável (no caso de estruturas regulares).

De seguida, será apresentado o procedimento, implícito no INST3D, para o cálculo de pórticos 3D utilizando as formulações apresentadas para os pórticos 2D com a possibilidade da introdução de elementos diagonais.

3.2.2.5.1 Matriz de Transformação

No início da secção sobre o INST3D, foi referido que este programa de cálculo fundamenta a análise de pórticos tridimensionais no método de 3GL/piso. Neste método, adoptando um sistema de coordenadas $0xyz$ para a estrutura 3D, existem três esforços que actuam em cada laje, uma força na direcção x , outra na direcção y e um momento em torno de $0z$. A localização de cada pórtico P pode ser descrita em planta (plano $0xy$) por um vector unitário \vec{u}_p contido na intercepção do plano do pórtico com o plano xy e de sentido concordante com os deslocamentos positivos do pórtico. Se forem desprezadas as interacções entre os pórticos verticais, o comportamento do esquema estrutural sob acção de cargas horizontais, pode ser descrito pela matriz do pórtico 3D $[K_S]$ de ordem $(3n_a \times 3n_a)$ correspondente aos esforços horizontais actuando sobre as lajes, sendo n_a o número de lajes.

Neste estudo não será tida em conta a rigidez à torção dos elementos que constituem a estrutura.

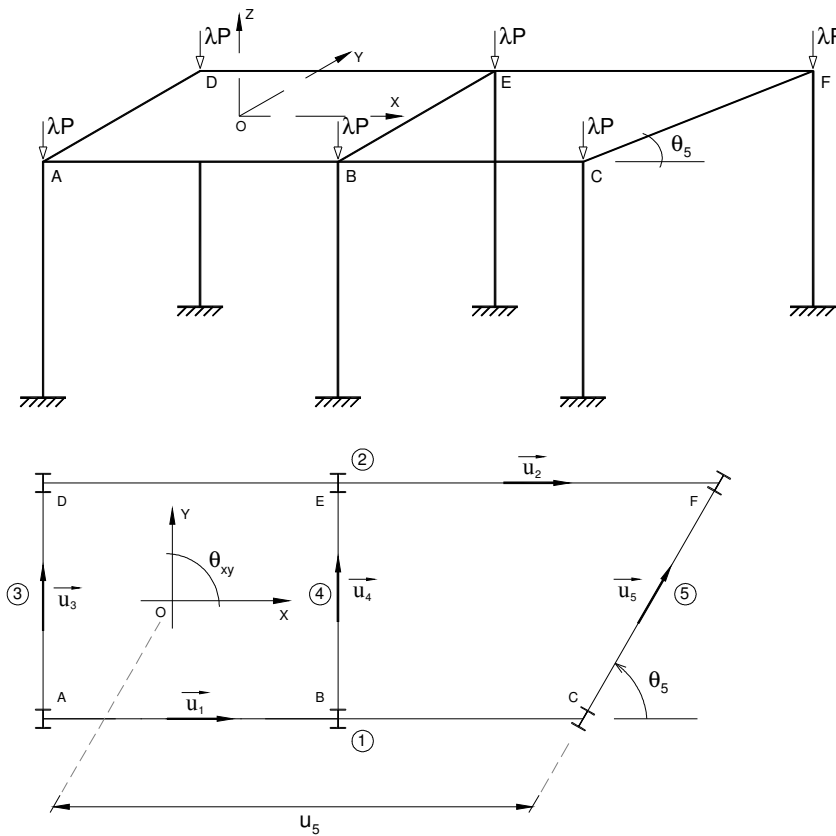


Figura 3.25 – Orientação no espaço de um pórtico 3D.

A posição de cada pórtico pode ser dada por uma matriz posição $[t_p]$ tal que:

$$[t_p] = [(\cos \theta)_p \quad (\sin \theta)_p \quad u_p] \quad (3.2.73)$$

Os deslocamentos horizontais $\{\Delta_p\}$ de cada pórtico numerados por pisos e os deslocamentos $\{\Delta_s\}$ do sistema também numerados por pisos, seguindo a ordem x_s, y_s, z_s em cada andar, estarão relacionados por:

$$\{\Delta_p\} = [T_p] \cdot \{\Delta_s\} \quad (3.2.74)$$

em que $[T_p]$ corresponde à matriz de transformação:

$$[T_p] = \begin{pmatrix} c_{p,s_p,u_p} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{p,s_p,u_p} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{p,s_p,u_p} \end{pmatrix} \quad (3.2.75)$$

com $c_p = (\cos \theta)_p$ e $s_p = (\sin \theta)_p$, que pode ser apresentada por

$$[T_p] = \begin{pmatrix} [t_p] & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [t_p] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & [t_p] & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [t_p] \end{pmatrix} \quad (3.2.76)$$

Desta forma pode-se obter a matriz de rigidez do sistema $[K_s]$, que corresponde aos deslocamentos $\{\Delta_s\}$ resultante da soma das contribuições de todos os pórticos, dada por

$$[K_s] = \sum_{p=1}^n [K_s^p] \quad (3.2.77)$$

sendo n o número de pórticos e a matriz $[K_S^P]$ a contribuição de cada pórtico, obtida por:

$$[K_S^P] = [T_P]^T [K^P] [T_P] \quad (3.2.78)$$

onde $[K^P]$ é a matriz de rigidez do pórtico correspondente aos deslocamentos horizontais nos pisos. Na realidade a matriz $[K^P]$ é a matriz $[K_{HH}^{**}]$ obtida para o pórtico com elementos diagonais, equação 3.3.70.

Ao serem efectuadas as operações apresentadas na equação 3.2.78, resulta uma sub-matriz de $[K_S^P]$, de ordem (3x3).

A matriz de rigidez $[K_S]$ do sistema é obtida pela soma das contribuições de todos os pórticos.

Para obter $[K_S^P]$ com elementos da mesma ordem de grandeza, convém dividir todos os \bar{u}_p por \bar{u}_{\max} .

3.2.2.5.2 Determinação da carga crítica

Supondo o edifício carregado com cargas verticais e concentradas nos nós dos pórticos, para cada valor do parâmetro λ podem ser determinadas uma a uma as bandas superiores das matrizes de rigidez $[K_S^P] = [K_{HH}^{**}]$ dos pórticos e somadas as contribuições na banda superior da matriz de rigidez $[K_S]$ do sistema.

Ao atingir a instabilidade com uma configuração de nós móveis, a estrutura apresenta deslocamentos horizontais relacionados com as translações e rotações das lajes no seu plano, pelo que se considera que $[K_S]$, equação 3.2.77, correspondente as acções perturbadoras do equilíbrio.

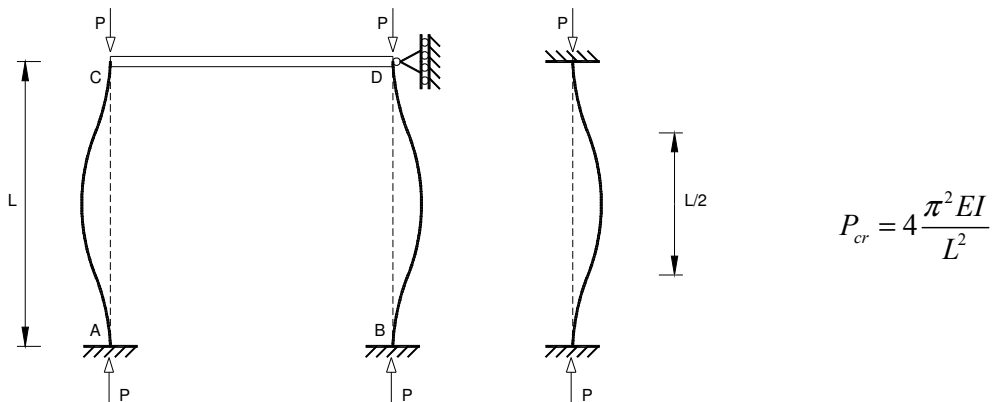


Figura 3.26 – Pórtico 2D de nós fixos com viga de rigidez infinita.

O parâmetro crítico será procurado no intervalo cujos limites são fixados através da determinação das cargas críticas de todos os pórticos 2D que constituem a estrutura 3D, para as configurações de nós fixos e de nós móveis. Nestas condições, o valor máximo de P_{cr} corresponde ao valor obtido para um pórtico 2D de nós fixos com pilares encastrados nas extremidades (Figura 3.26).

Se λ_H^P for o parâmetro crítico para o pórtico de nós móveis e λ_θ^P o parâmetro crítico para o pórtico de nós fixos, então

$$\left(\lambda_H^P\right)_{\min} \leq \lambda \leq \left(\lambda_\theta^P\right)_{\min} \quad (3.2.79)$$

O parâmetro crítico do sistema, λ_S , será o menor valor de λ para o qual $[K_S]$ deixa de ser definida positiva.

3.2.2.5.3 Determinação dos modos de instabilidade

Para determinação dos auto-valores e auto-vectores, que correspondem aos parâmetros críticos e respectivos modos de instabilidade, pode aplicar-se o método de Jacobi.

Na sua formulação clássica, este método iterativo usa sucessivas rotações planas da matriz original de ordem n para obter duas matrizes $[A]$ e $[V]$, também de ordem n , sendo a matriz $[A]$ uma matriz diagonal com os n auto-valores na diagonal principal e contendo a matriz $[V]$ os n auto-vectores normalizados e ortogonais entre si associados aos auto-valores de $[A]$. Os auto-vectores são calculados através da série de multiplicações de matrizes (Wilson, 2000)

$$V = R_0 \cdot R_1 \dots R_k \dots R_{n-1} \cdot R_n \quad (3.2.80)$$

A matriz inicial R_0 é uma matriz unitária e a matriz de transformação ortogonal $[R_k]$ possui a seguinte forma

$$[R_k] = \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - \\ - & R_{ii} & - & - & R_{ij} & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & R_{ji} & - & - & R_{jj} & - \\ - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \quad (3.2.81)$$

sendo os termos não nulos definidos em função de um ângulo θ , através de

$$\left. \begin{aligned} R_{ii} &= R_{jj} = \cos \theta \\ R_{ij} &= R_{ji} = \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2.82)$$

pelo que $R_k^T \cdot R_k = I$, sendo portanto independente do ângulo θ .

O processo iterativo envolve a operação

$$A_k = R_k^T \cdot A_{k-1} \cdot R_k \quad (3.2.83)$$

permanecendo os auto-valores contidos na matriz A , uma vez que R é uma matriz ortogonal.

O ângulo θ é escolhido para que os termos i,j e j,i da matriz R_k sejam nulos, condição satisfeita se o ângulo for calculado através de

$$\tan 2\theta = \frac{2(A_{ij})_{k-1}}{(A_{ii})_{k-1} - (A_{jj})_{k-1}} \quad (3.2.84)$$

O algoritmo para a determinação de auto-valores e auto-vectores pelo método de Jacobi é apresentado no anexo A.

3.3. NOTA FINAL

Como se verá no capítulo seguinte, o método dos 3GL/piso utilizado no INST3D permite obter com grande rigor a carga crítica e o modo de instabilidade de pórticos 2D e 3D cujas características se enquadrem nas hipóteses inicialmente admitidas.

Relativamente ao MEF, este software tem a vantagem de utilizar a formulação exacta da matriz de rigidez, não sendo necessário discretizar a estrutura para obter um resultado rigoroso. Como desvantagem, apresenta a incapacidade de analisar estruturas de geometria complexa, com elementos laminares ou volumétricos e ainda a impossibilidade de analisar, neste algoritmo, pórticos com cargas distribuídas nos elementos.

4. CALIBRAÇÃO DO SOFTWARE

4.1 INTRODUÇÃO

Na introdução referiu-se que se utilizaria software com diferentes formulações, para proceder à determinação do parâmetro crítico de estruturas reticuladas e estudar a influência da variação de parâmetros geométricos no desempenho do sistema estrutural. Para justificar a utilização do software, é necessário validar os resultados obtidos pelo que se procedeu à sua calibração.

O software utilizado nesta dissertação pode ser dividido em dois grupos, o que utiliza uma formulação exacta da matriz de rigidez total e o que utiliza a formulação aproximada, por simplificação da matriz de rigidez total exacta. No primeiro grupo, encontra-se o INST3D e no segundo, com a formulação aproximada, encontram-se os pacotes comerciais SAP2000, ANSYS e LUSAS.

O software comercial deve ser classificado em função da facilidade de utilização, da complexidade dos modelos numéricos e do seu rigor. O ANSYS e LUSAS são pacotes mais completos e conseqüentemente mais complexos de utilizar quando comparados com o SAP2000. Estes pacotes permitem o estudo de elementos com diversas formulações materiais, com comportamento material específico para cada tipo de elemento, assegurando um melhor conhecimento das estruturas. Também é possível o estudo de fenómenos como a fluência, retracção e fendilhação em elementos de betão armado, garantindo análises rigorosas do comportamento local e global das estruturas. Os problemas podem ser analisados estática ou dinamicamente, possibilitando ainda a capacidade de estudar a interacção entre sistemas estruturais ou materiais (por exemplo solo-estrutura).

Assim, no presente capítulo, procede-se à calibração do software comercial e do INST3D, através da análise de pórticos com solução analítica conhecida.

O processo de calibração envolve a determinação analítica do parâmetro crítico e respectivo modo de instabilidade para pórticos metálicos 2D e 3D. Após conhecer o valor exacto, introduzem-se os dados desses pórticos no software INST3D e precede-se à obtenção dos referidos parâmetros. De seguida, utiliza-se o software comercial SAP 2000, ANSYS e LUSAS repetindo o processo anteriormente descrito

Como foi referido no capítulo anterior, o software INST3D utiliza uma formulação exacta da matriz de rigidez de um elemento 2D, recorrendo ao método dos 3GL/piso para realizar a

ANLG da estrutura, enquanto que o SAP 2000, ANSYS e LUSAS utilizam uma formulação aproximada, com a associação das matrizes elástica $[K]$ e geométrica $[G]$. No caso do ANSYS e LUSAS, utiliza-se uma formulação mais elaborada da matriz de rigidez elástica da barra prismática tridimensional, possibilitando a introdução da deformação por corte do elemento, sendo este efeito desprezado no SAP 2000.

4.2 CALIBRAÇÃO

Para concretizar o processo de calibração estudaram-se pórticos constituídos por barras metálicas. Os pórticos de calibração foram modelados utilizando elementos de barra, considerando que as ligações entre as vigas e os pilares são rígidas.

Embora seja comum usar o pórtico de calibração (2D) proposto por Vogel (1985), neste trabalho utilizou-se uma estrutura 2D com geometria definida pelo autor. A estrutura foi analisada para duas configurações de mobilidade: nós fixos e nós móveis, determinando-se para cada caso o parâmetro crítico e o modo de instabilidade.

A modelação do sistema estrutural pode influenciar o resultado final sendo, portanto, necessário quantificar o erro cometido com a utilização de um modelo baseado em elementos de barra. Assim, os referidos pórticos 2D foram analisados através do MEF (software comercial) considerando que as barras são constituídas por elementos do tipo SHELL.

Realizou-se ainda um estudo sobre a influência da rigidez da ligação na análise de instabilidade, considerando três situações possíveis de união entre os elementos: articulada, semi-rígida e rígida.

Para a calibração de estruturas 3D foram estudados dois casos, o primeiro corresponde à estrutura idealizada por Razzaq e Naim (1980) e posteriormente analisada por Aristizábal-Ochoa (2002), e o segundo caso é constituído por um pórtico com deslocamentos impedidos ao nível da laje, ou seja de nós fixos. No caso tridimensional não foi realizado nenhum estudo relativo ao tipo de modelação, pois existem muitas variáveis que influenciam o comportamento estrutural, o que implicaria uma análise exaustiva para concluir qual a importância de cada variável no desempenho da estrutura. O estudo da influência da rigidez da ligação é ainda mais complexo, obrigando à modelação real das ligações para perceber qual a contribuição dessas ligações no desempenho tridimensional da estrutura.

Neste processo de calibração, os pórticos modelados possuem as seguintes características:

- Indeformabilidade axial das barras;
- Pórticos rectangulares, com igual número de pilares em cada andar;
- Pórticos com pilares situados na mesma prumada;
- Cargas concentradas aplicadas nos nós;
- Encastramento na base do pórtico (ligações ao exterior);
- Área, inércia e módulo de elasticidade constantes para cada elemento;

Todos os casos foram analisados com o software INST3D, SAP 2000, ANSYS e LUSAS, comparando os resultados obtidos. Como cada programa utiliza notações (e formulações) diferentes, é necessário explicitar o processo de obtenção do parâmetro crítico. Em primeiro lugar é apresentado, resumidamente, o algoritmo que cada software utiliza para proceder à ANLG de estruturas reticuladas. Na realidade não se fará referência ao processo de obtenção dos parâmetros de carga e respectivos modos de estabilidade, pois a sua obtenção envolve rotinas universais perfeitamente conhecidas, como o método de Jacobi, pelo que só será apresentada a matriz de rigidez (exacta ou aproximada) que cada software utiliza para analisar o sistema estrutural. Convém, no entanto, referir que os pacotes numericamente mais poderosos, como o ANSYS e o LUSAS, utilizam técnicas mais elaboradas para determinar os auto-valores (eigenvalues) e auto-vectores (eigenvectors), que correspondem às incógnitas do problema não linear geométrico.

De acordo com o algoritmo apresentado no capítulo 3, o INST3D utiliza o método dos 3GL/piso, recorrendo à formulação exacta de um elemento de barra 2D dada por

$$[K_{ij}]_{exacta} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3}\phi_1 & \frac{6EI}{L^2}\phi_2 & 0 & \frac{-12EI}{L^3}\phi_1 & \frac{6EI}{L^2}\phi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi_2 & \frac{4EI}{L}\phi_3 & 0 & \frac{-6EI}{L^2}\phi_2 & \frac{2EI}{L}\phi_4 \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3}\phi_1 & \frac{-6EI}{L^2}\phi_2 & 0 & \frac{12EI}{L^3}\phi_1 & \frac{6EI}{L^2}\phi_2 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi_2 & \frac{2EI}{L}\phi_4 & 0 & \frac{6EI}{L^2}\phi_2 & \frac{4EI}{L}\phi_3 \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

sendo a numeração dos deslocamentos generalizados associada ao referencial local da Figura 4.1, em que as funções ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 correspondem às funções de estabilidade associadas aos termos da matriz de rigidez de 1ª ordem.

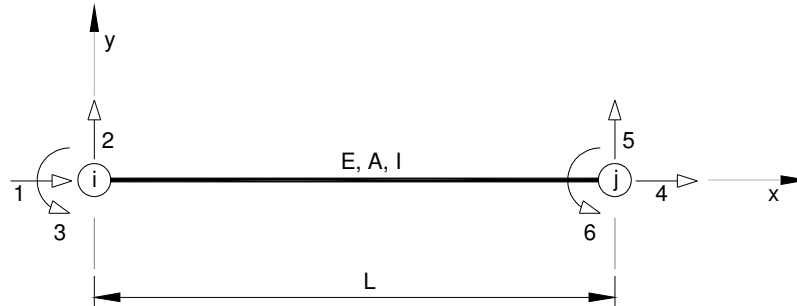


Figura 4.1 – Elemento de barra 2D. Graus de liberdade.

O processo de obtenção do parâmetro crítico e do modo de instabilidade baseia-se no método de Jacobi (Capítulo 3). Note-se que, o principal objectivo quando se pretende estudar a instabilidade no projecto de estruturas, é precisamente a obtenção do parâmetro crítico e respectivo modo de estabilidade.

Pela versatilidade e pela facilidade de introdução de dados, O SAP 2000 é o pacote comercial mais utilizado pelos engenheiros projectistas quando pretendem elaborar um estudo fundamentado no MEF. A versão actual (8.0) apresenta algumas limitações quando se pretende simular problemas não lineares, em especial quando é necessário recorrer à análise não linear material (análise global). Convém referir que existem no mercado pacotes comerciais mais usuais no projecto de engenharia civil, como o ROBOT MILLENNIUM, CYPE, ARTEK TRICALC, etc., que não serão utilizados, pois não permitem análises não linear geométrica e/ou material.

Assim, no caso do SAP 2000, e de acordo com o manual do programa (SAP2000 2002a), para resolução do problema da determinação do parâmetro crítico, o software utiliza a equação (SAP2000 2002b)

$$[K - \lambda \cdot G(r)] = 0 \quad (4.2.2)$$

em que K corresponde à matriz de rigidez elástica, G a matriz de rigidez geométrica, λ os parâmetros de carga (eigenvalues) e φ os modos de instabilidade (eigenvectors). Esta formulação segue a utilização das matrizes elástica e geométrica como consequência da linearização das funções de estabilidade.

Logo, no caso de se considerar a deformação no equilíbrio estrutural, a relação esforço/deformação é dada por

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{T}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ \phi_i \\ V_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad \text{ou } F_G = k_G \cdot v \quad (4.2.3)$$

e a relação elástica entre esforço/deformação traduz-se na matriz

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ M_i \\ F_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & -2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & -2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ \phi_i \\ V_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad \text{ou } F_E = k_E \cdot v \quad (4.2.4)$$

que corresponde à matriz de rigidez elástica utilizada na análise de 1ª ordem. O esforço total será então definido pela soma das duas parcelas, elástica e geométrica, constituindo a matriz de rigidez total aproximada, dada por

$$F_T = F_E + F_G = [k_E + k_G] \cdot v \quad (4.2.5)$$

O ANSYS é um dos pacote mais completos e rigorosos pelo que o pré e pós-processamento são muito mais exigentes comparativamente ao SAP 2000.

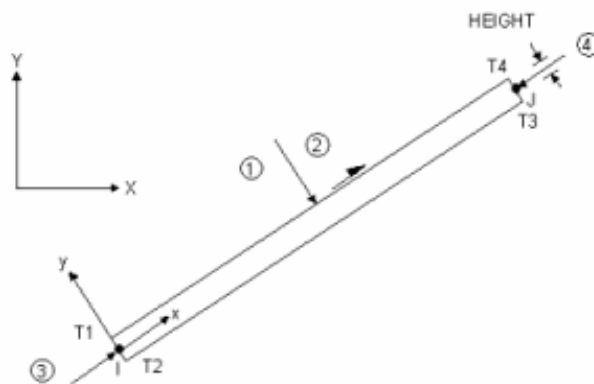


Figura 4.2 – BEAM3 – Elemento de barra 2D (ANSYS).

Este software tem maior utilização no campo da investigação, incorporando dezenas de elementos e assim garantindo uma grande amplitude de aplicabilidade, com características específicas para cada área da engenharia (ANSYS 2001, Saeed 1999). Permite ainda relacionar diferentes fenómenos físicos como a transmissão térmica, etc. O elemento utilizado neste trabalho é o “BEAM3”, que corresponde a um elemento elástico 2D com três graus de liberdade por nó: translação nodal nas direcções X e Y e rotação nodal em torno do eixo Z (ANSYS 2003).

Este elemento permite introduzir variações de temperatura, a adição de massa, a análise não linear geométrica, etc. De entre as características do elemento, destaca-se a possibilidade de considerar a deformação por esforço transversal, que no presente estudo foi desprezada. As variáveis necessárias para definir o elemento são: AREA (área da secção), IZZ (momento de inércia), HEIGHT (altura total do elemento, Figura 4.2), SHEARZ (constante de deformação por corte), ISTRN (tensão inicial) e ADDMASS (massa adicionada por unidade de comprimento). Se SHEARZ for nulo, então não existe deformação por corte na direcção Z do elemento, situação válida no desenvolvimento desta dissertação.

A definição da matriz de rigidez elástica, para este elemento, foi formulada por Przemieniecki (1968), sendo dada por

$$[K_i] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

com

$$\phi = \frac{12EI}{GA^s L^2} \quad (4.2.7)$$

em que G é o módulo de corte, $A^S=A/F^S$ é a área de corte e F^S é a constante de deformação por corte.

$$[S_l] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{1}{10}L & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}L \\ 0 & \frac{1}{10}L & \frac{2}{15}L^2 & 0 & -\frac{1}{10}L & -\frac{1}{30}L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10}L & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}L \\ 0 & \frac{1}{10}L & -\frac{1}{30}L^2 & 0 & -\frac{1}{10}L & \frac{2}{15}L^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

Como já foi referido, a ANLG envolve um problema de valores e vectores próprios, que pode ser resolvido através da equação

$$[K]\{\phi_i\} = \lambda_i [S]\{\phi_i\} \quad (4.2.9)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez elástica, $[S]$ a matriz de rigidez geométrica, $\{\phi_i\}$ o auto-vector e λ_i o auto-valor.

De acordo com o manual do programa, a obtenção dos auto-valores e auto-vectores pode ser feita de duas formas:

- Extracção total a partir de matrizes reduzidas (MR);
- Extracção parcial a partir de matrizes completas (MC).

No primeiro caso (MR), o software utiliza o *Reduced Method* (mantém-se a designação anglo-saxónica para facilitar a identificação relativamente ao manual), no qual o sistema de equações é inicialmente condensado aos graus de liberdade associados com os graus de liberdade globais, pela redução de Guyan. No segundo caso (MC), o software permite utilizar vários métodos:

- *Subspace* (com o recurso ao Jacobi);
- *Block Lanczos* (Lanczos com o algoritmo QL);

- *Unsymmetric eigensolver* (Lanczos com iterações QR);
- *Damped eigensolver* (Lanczos com iterações QR);
- *QR damped eigensolver* (Algoritmo QR para a matriz de amortecimento modal reduzida).

Estes métodos são utilizados em problemas de instabilidade e problemas dinâmicos (substituindo a matriz $[S]$, pela matriz de massa $[M]$ na equação 4.2.9) apresentando algumas limitações, pelo que se deve escolher o que melhor se adapta ao tipo de resultado pretendido.

O LUSAS é um software numericamente muito próximo do ANSYS, mas com um menor número de elementos-tipo e conseqüentemente mais limitado, mas muito mais poderoso que o SAP 2000, permitindo análises rigorosas dos principais problemas da engenharia.

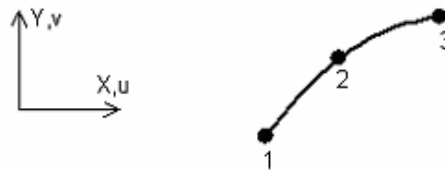


Figura 4.3 – BM3 – Elemento de barra 2D (LUSAS).

Neste software foi escolhido o elemento finito 2D curvo (parabólico), elástico e isotrópico “BM3” pertence ao subgrupo das vigas de Kirchhoff, Figura 4.3 (LUSAS 2004, 2004a). O elemento apresenta 3 nós (nas extremidades e um nó central), com um total de 4 graus de liberdade: U , V e θ_z nos nós de extremidade e dU (deslocamento relativo) no nó central.

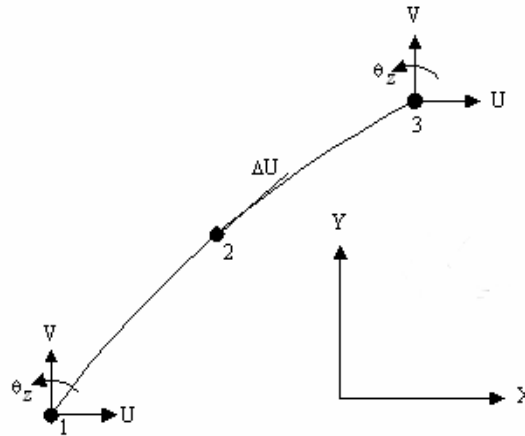


Figura 4.4 – BM3 – Elemento de barra 2D (LUSAS) – graus de liberdade.

Este elemento apresenta características específicas, como a possibilidade de estudar a fendilhação no caso do material utilizado na modelação ser o betão. As variáveis necessárias para definir o elemento são, em cada nó: A (área da secção), I_{zz} (momento de inércia da secção em torno do eixo Z) e I_z (momento estático em torno do eixo Z).

Como é um software baseado no MEF, a matriz de rigidez total aproximada é dada por

$$K_T = K_G + K = \int_V G^T \cdot \hat{S} \cdot G dV + \int_V B^T \cdot D \cdot B dV \quad (4.2.10)$$

sendo a matriz K_G igual à matriz de rigidez geométrica [S_i] utilizada no ANSYS e a matriz K equivalente à matriz de rigidez elástica [K_i] do mesmo programa.

A obtenção dos auto-valores (parâmetros de carga) e auto-vectores (modos de instabilidade) é conseguida resolvendo a equação

$$(K + \lambda K_G) \Phi = 0 \quad (4.2.11)$$

sendo a carga crítica R_{crit} dada por

$$R_{crit} = \lambda_1 R \quad (4.2.12)$$

em que λ_1 é o auto-valor mais reduzido e R o vector de solitação inicial.

Neste programa, para determinar os auto-valores e auto-vectores podem-se utilizar os seguintes métodos (de acordo com o manual do programa):

- *Subspace Iteration (Jacobi and QL solvers);*
- *Guyan Reduction eigenvalue analysis;*
- *Inverse Iteration with Shifts;*
- *Lanczos.*

Para finalizar a apresentação do software, refere-se que a totalidade do trabalho desenvolvido e materializado nesta dissertação, se fundamenta na utilização da formulação exacta da matriz de rigidez, ou seja no INST3D. A utilização do software comercial, com o recurso ao MEF, permite aferir a capacidade de cálculo do INST3D e simultaneamente comparar as diferentes formulações (exacta e aproximada) implícitas em cada software.

Antes de iniciar o processo de calibração, apresenta-se um exemplo que permite justificar a hipótese associada à utilização de cargas verticais concentradas nos nós, como sendo as acções representativas do carregamento a que a estrutura está sujeita, o que implica que não serão considerados os momentos de fixação resultantes da existência de cargas distribuídas nos nós, como foi referido no final do capítulo 2.

O exemplo escolhido, consiste numa estrutura 2D com carregamento distribuído nas vigas (Figura 4.5), sendo idêntico ao pórtico utilizado por Azevedo (1993) para estudar a influência da tolerância e do modo de discretização da estrutura, no processo de obtenção do parâmetro crítico através do software EIGENF.

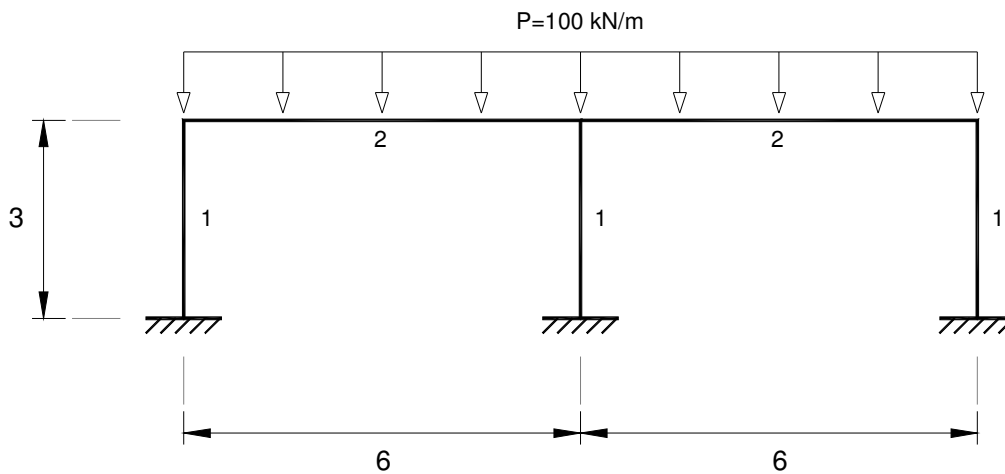


Figura 4.5 – Pórtico de 1 piso (Azevedo, 1993).

A estrutura apresenta um carregamento vertical uniformemente distribuído de 100 kN/m, adoptando-se para cada elemento as características mecânicas indicadas no Quadro 4.1.

Elementos	E (GPa)	I_x (cm ⁴)	I_y (cm ⁴)	A (cm ²)
1	200.0	30823.0	9239.0	162.3
2	200.0	48200.0	2142.0	116.0

Quadro 4.1 – Características dos elementos (Azevedo, 1993).

Para estudar a influência da passagem da carga distribuída para cargas nodais equivalentes, ou seja, desprezando a contribuição dos momentos de fixação na análise de instabilidade da estrutura, analisou-se um pórtico com a mesma geometria que o estudado por Azevedo (1993), mas supondo um novo caso de carga constituído por cargas nodais verticais, cujo valor foi definido em função da área de influencia de cada pilar (Figura 4.6).

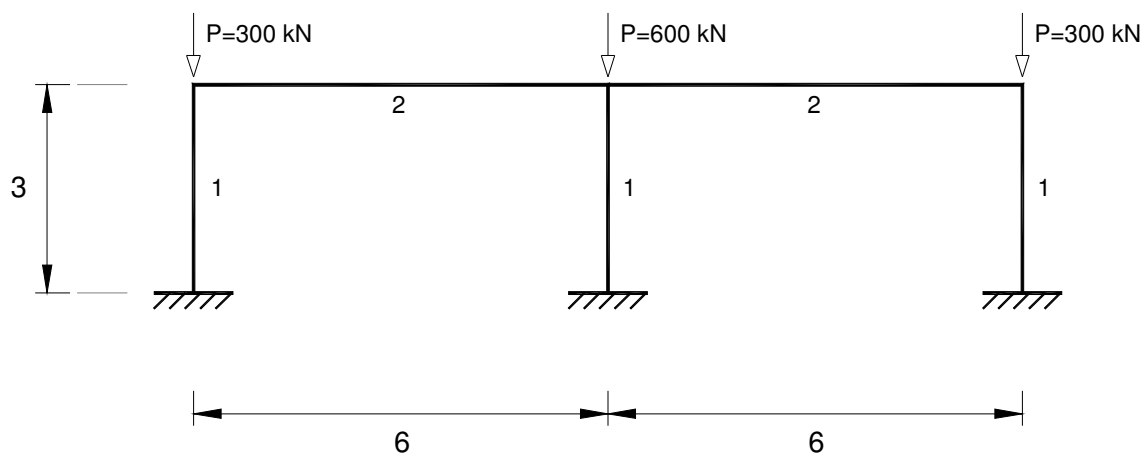


Figura 4.6 – Pórtico de Azevedo (1993) com cargas nodais equivalentes.

Os pórticos foram modelados no INST3D, SAP 2000, ANSYS e LUSAS, tendo-se obtido os resultados apresentados no Quadro 4.2.

Tipo de carregamento	EIGENF*	SAP 2000	ANSYS	LUSAS	INST3D
Distribuído (Azevedo, 1993)	123.97	121.80	123.10	123.21	--
Concentrado (cargas equivalente)	--	120.90	122.90	122.88	122.77

* Para uma discretização de 3 nós por barra e uma tolerância de $1e-4$.

Quadro 4.2 – Parâmetros de carga associados ao 1º modo de encurvadura.

Os erros obtidos, considerando que o carregamento distribuído é substituído por cargas aplicadas nos nós (excluindo os momentos de fixação), são inferiores a 1% pelo que a utilização desta simplificação não influencia significativamente a análise de instabilidade deste tipo de estruturas.

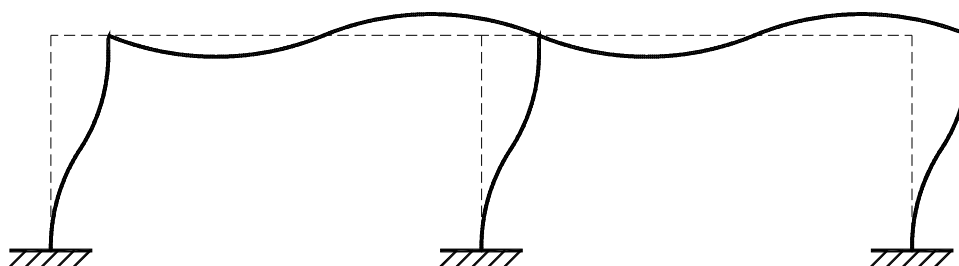


Figura 4.7 – Configuração do 1º modo de instabilidade.

Para os dois casos, obteve-se a mesma configuração de deformação de nós móveis (Figura 4.7) para o modo de instabilidade. No caso de Azevedo (1993), o 1º modo de encurvadura corresponde ao 5º modo encontrado com o EIGENF.

4.2.1 CASO 1 – PÓRTICO 2D – NÓS FIXOS E NÓS MÓVEIS

Neste primeiro caso, serão analisados dois pórticos com igual geometria mas com diferentes configurações de deformação, nós fixos e nós móveis (Figura 4.8).

Para iniciar o processo de calibração, determinou-se analiticamente o valor exacto do parâmetro crítico de cada pórtico, considerando-se contínuas as ligações viga-pilar (ligações rígidas).

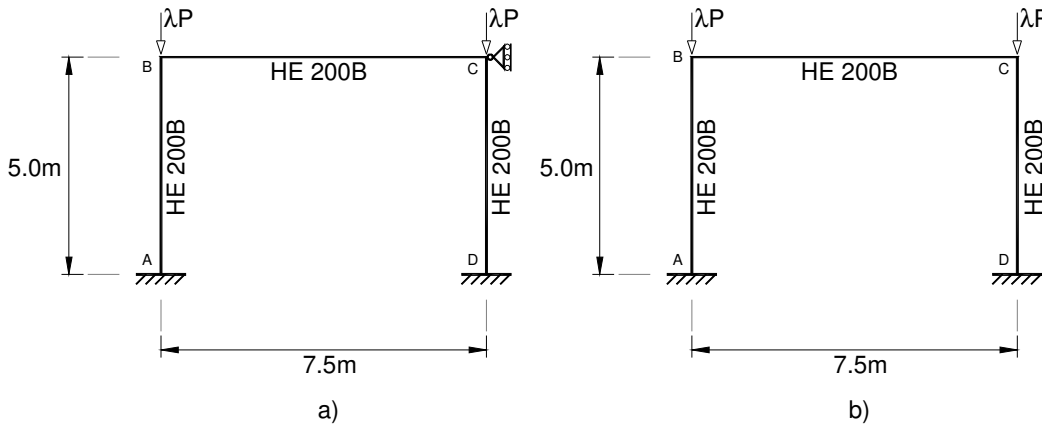
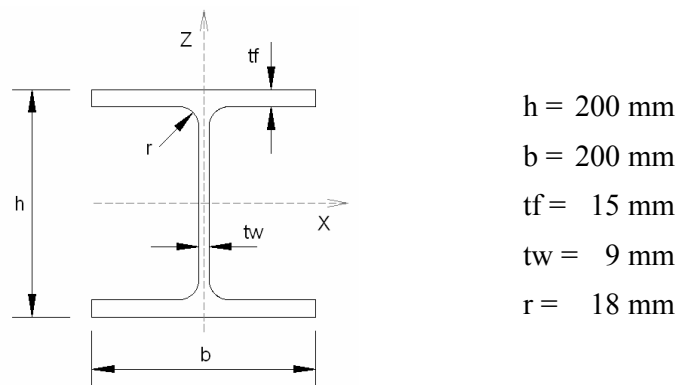


Figura 4.8 – Pórticos 2D: a) nós fixos, b) nós móveis.

De seguida, procedeu-se à determinação dos parâmetros, utilizando a matriz de rigidez exacta total com a formulação apresentada na equação 4.2.1 (INST3D). Após conhecer o valor exacto, os pórticos foram introduzidos no software comercial, com formulações aproximadas, e determinado para diversas discretizações das barras, o valor do parâmetro crítico. Finalmente, são comparados os valores exacto e aproximado, para cada discretização.



$A = 7810 \text{ mm}^2$	$I_x = 56960000 \text{ mm}^4$	$I_z = 20030000 \text{ mm}^4$
-------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Quadro 4.3 – HE 200B – propriedades geométricas.

As cargas são verticais e aplicadas nos nós, considerando-se a instabilidade no plano XZ (2D) e a impossibilidade de encurvar na direcção perpendicular YZ. Utilizou-se o aço S235 com um módulo de elasticidade $E=200e10^6$ kPa, coeficiente de Poisson $\nu=0.3$ e massa específica $\rho=7.85$ Ton/m³.

Como já foi referido, em primeiro lugar, procede-se à determinação analítica do valor exacto para as duas configurações, nós fixos e nós móveis. A notação da matriz de rigidez total exacta e as funções de estabilidade está de acordo com Reis e Camotim (2000). Estes autores apresentam a resolução analítica para os dois pórticos.

(i) Estrutura de nós fixos

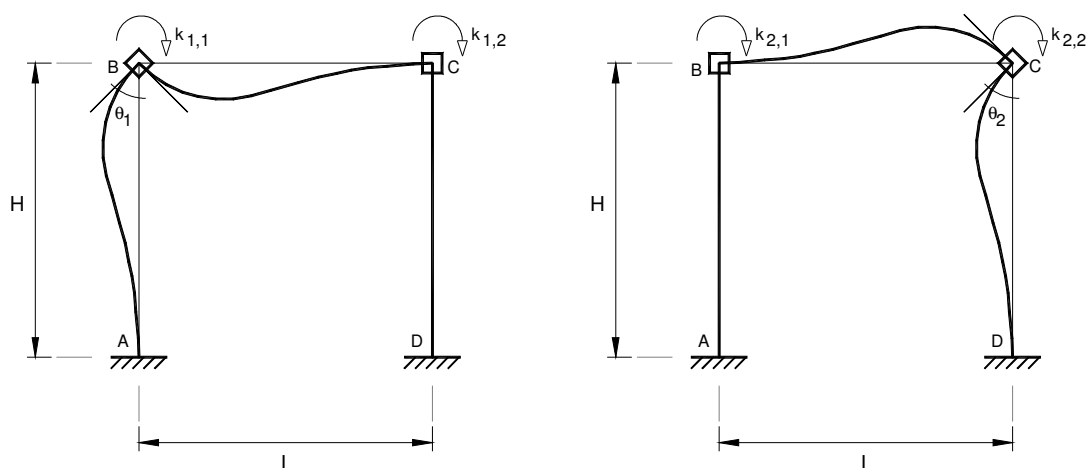


Figura 4.9 – Pórtico 2D de nós fixos – Elementos da matriz de rigidez.

A estrutura apresenta dois graus de liberdade globais, pelo que a matriz de rigidez será

$$[K_{ij}] = \begin{pmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{pmatrix} \quad (4.2.13)$$

substituindo $k_{i,j}$ ($i,j=1,2$), obtém-se

$$[K_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{H} \phi_3^{AB} + \frac{4EI}{L} \phi_3^{BC} & \frac{2EI}{L} \phi_4^{BC} \\ \frac{2EI}{L} \phi_4^{BC} & \frac{4EI}{H} \phi_3^{BC} + \frac{4EI}{L} \phi_3^{CD} \end{pmatrix} \quad (4.2.14)$$

com $L=1.5H$

e

$$\left. \begin{aligned} \phi_3^{AB} = \phi_3^{CD} = \phi_3 \quad (N = P) \\ \phi_3^{BC} = \phi_4^{BC} = 1 \quad (N = 0) \end{aligned} \right\} \quad (4.2.15)$$

O valor do parâmetro crítico, λ_{cr} , obtém-se através de

$$\det([K_{ij}]) = 0 \quad (4.2.16)$$

ou seja

$$|K_{ij}| = \begin{vmatrix} \frac{4EI}{H}\phi_3 + \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{H} + \frac{4EI}{L}\phi_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.2.17)$$

tendo como resultado

$$(\phi_3 + 1)(\phi_3 + \frac{1}{3}) = 0 \quad (4.2.18)$$

obtendo-se $\phi_3 = -0,333333$ com $P/P_e \approx 2.41$ e então

$$\lambda_{cr} = P_{cr} = 2.41 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 23.79 \frac{EI}{L^2} \quad (4.2.19)$$

pelo que o valor da carga crítica é $P_{cr} = 10838.69$.

Considerando os graus de liberdade θ_1 e θ_2 , o modo crítico de instabilidade, associado ao parâmetro crítico, será

$$\theta_C = -\theta_D \quad (4.2.20)$$

que corresponde à deformada ilustrada na Figura 4.10.

O cálculo computacional do parâmetro crítico pelo INST3D permitiu determinar para este pórtico (nós fixos) $\lambda_{fixos} = 10822.65$, valor muito próximo do analítico.

Confirma-se a validade do INST3D, obtendo um erro relativo inferior a 0.15%.

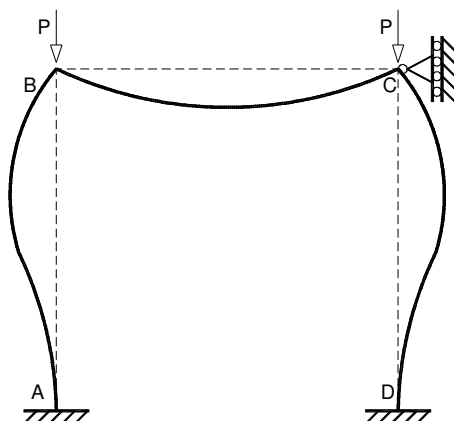


Figura 4.10 – Pórtico 2D – Modo de instabilidade crítico.

Posteriormente, foi introduzido o pórtico no software comercial SAP 2000, ANSYS e LUSAS e procedeu-se à determinação do parâmetro crítico e respectivo modo de instabilidade, para várias discretizações dos elementos que constituem a estrutura, obtendo-se os resultados indicados no Quadro 4.4.

Modelo (# barra)	Nós Fixos ($\lambda_{cr}=10838.69$)				Erro relativo		
	SAP 2000	LUSAS	ANSYS	INST3D	Sap2k	Lusas	Anslys
1	1043895	29120	18224	10823	98.9%	62.8%	40.8%
2	12613	11650	11090	10823	14.2%	7.1%	2.4%
3	11677	11000	10902	10823	7.3%	1.6%	0.7%
4	10988	10880	10852	10823	1.5%	0.5%	0.3%
8	10258	10830	10828	10823	-5.5%	0.0%	0.0%
16	10072	10830	10826	10823	-7.5%	0.0%	0.0%
32	10026	10830	10826	10823	-7.9%	0.0%	0.0%

Quadro 4.4 – Erros associados à discretização de barras – Pórtico de nos fixos.

Constata-se que o SAP 2000 é o software que apresenta maior erro relativo, sobretudo quando se utiliza um único elemento para definir os elementos estruturais. O restante software, ANSYS e LUSAS, apresenta também erros significativos sendo o ANSYS o que apresenta melhor desempenho numérico. Como seria de esperar, quando se aumenta a discretização vai-se obtendo um erro relativo menor.

Quando se estuda uma estrutura através do MEF, considera-se como correcta uma discretização de 3 elementos por barra, obtendo-se um erro relativo inferior a 3%. Do software comercial escolhido para a calibração, o SAP 2000 foi o único que, para uma

discretização de 3 elementos por barra, não obteve um erro inferior a 3%, atingindo um valor inferior para uma divisão das barras em 4 elementos. Curiosamente, a convergência do valor obtido com este software aponta para um resultado inferior ao valor exacto, situação que não se verifica no restante software. O ANSYS continua a ser o software com melhores resultados, apresentando um erro inferior a 1% para a referida discretização de 3 elementos. O LUSAS apresenta resultados muito próximos do ANSYS convergindo para o valor exacto com discretizações de 8 elementos por barra.

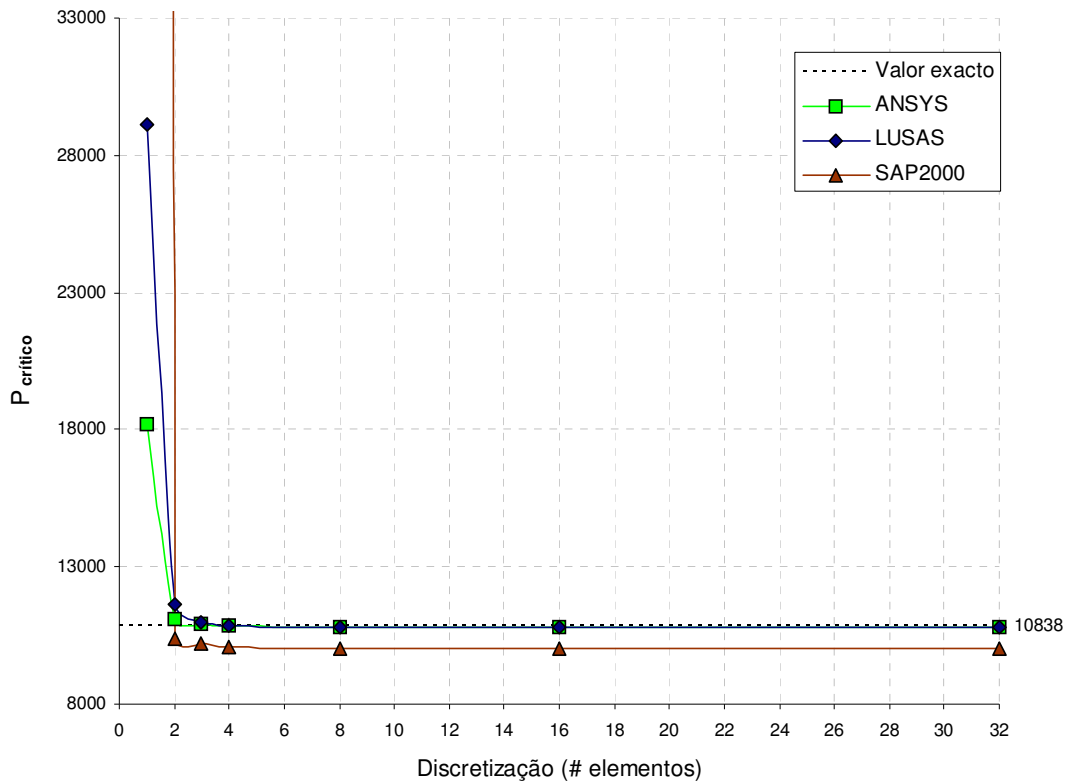


Gráfico 4.1 – Parâmetro crítico em função da discretização para o pórtico 2D de nós fixos.

A evolução do valor do parâmetro crítico em cada software, relativamente ao valor exacto, para várias discretizações das barras pode ser observado no Gráfico 4.1. Verifica-se que a partir de uma discretização de 4 elementos por barra, os resultados são praticamente constantes, concluindo que o aumento da discretização (mais de 4 elementos por barra) não introduz um acréscimo significativo de rigor. A discretização excessiva é de evitar pois implica mais graus de liberdade em cada elemento e a resolução de um maior número de equações, aumentando o tempo de processamento e o consumo de recursos computacionais, situação que se torna mais gravosa quando a estrutura é constituída por um elevado número de barras.

Para finalizar a análise deste pórtico, são apresentados os seis primeiros modos de instabilidade, Figura 4.11.

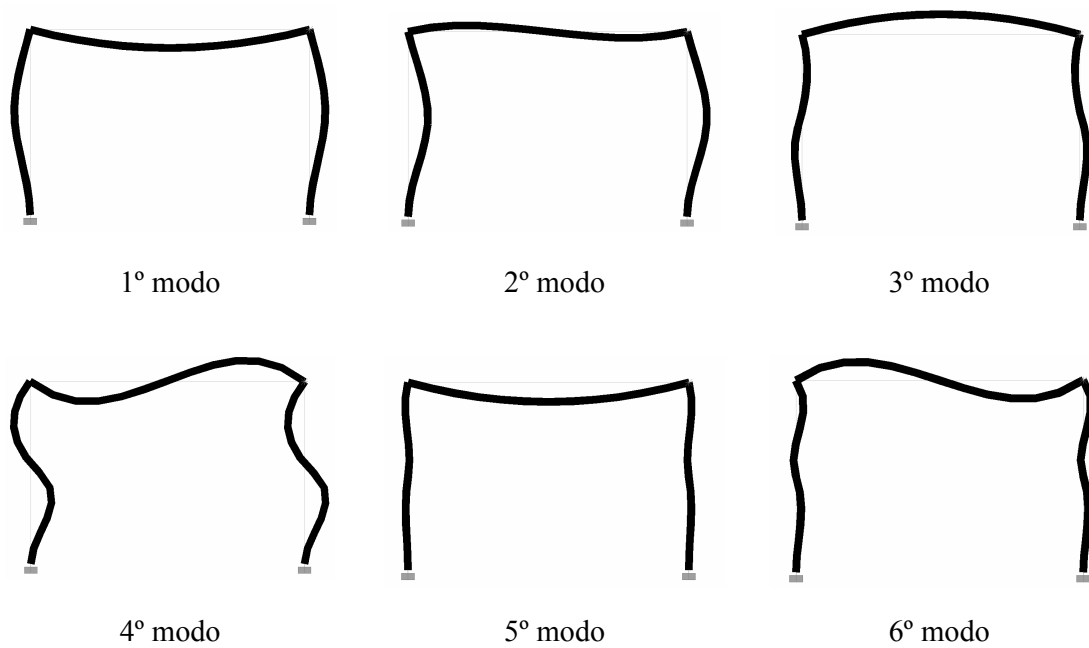
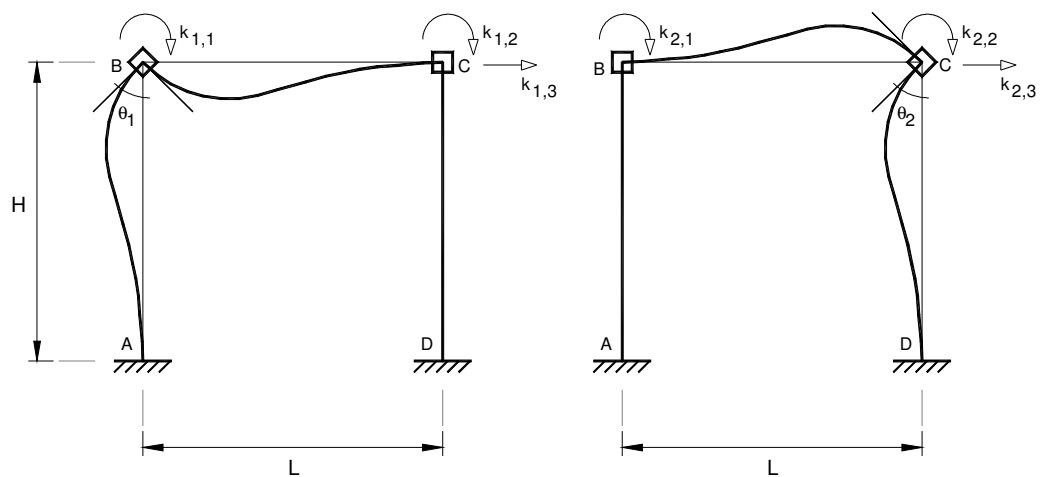


Figura 4.11 – Pórtico de nós fixos – modos de instabilidade.

O seguinte caso corresponde ao estudo da instabilidade do pórtico de nós móveis (Figura 4.8b), seguindo o procedimento de análise que foi utilizado para o caso anterior.

(ii) Estrutura de nós móveis



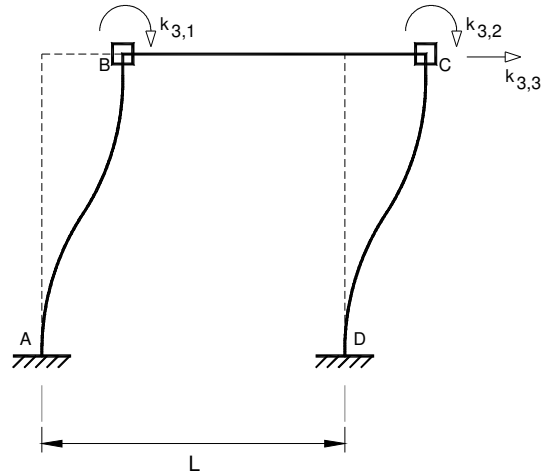


Figura 4.12 – Pórtico 2D de nós móveis – Elementos da matriz de rigidez.

Neste caso a matriz de rigidez exacta é dada por

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \quad (4.2.21)$$

ou

$$[K_{ij}] = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{H} \phi_3^{AB} + \frac{8EI}{3L} & \frac{4EI}{3L} & \frac{-12EI}{2L^2} \phi_2^{AB} \\ \frac{4EI}{3L} & \frac{4EI}{H} \phi_3^{CD} + \frac{8EI}{3L} & \frac{-12EI}{2L^2} \phi_2^{CD} \\ \frac{-12EI}{2L^2} \phi_2^{AB} & \frac{-12EI}{2L^2} \phi_2^{CD} & \frac{12EI}{L^3} (\phi_1^{AB} + \phi_1^{CD}) \end{pmatrix} \quad (4.2.22)$$

em que $L=1.5H$, com

$$\phi_i^{AB} = \phi_i^{CD} = \phi_i \quad (4.2.23)$$

sendo o valor do parâmetro crítico, λ_{cr} , obtido através de

$$\det([K_{ij}]) = 0 \quad (4.2.24)$$

$$|K_{ij}| = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{H} \phi_3^{AB} + \frac{8EI}{3L} & \frac{4EI}{3L} & -\frac{12EI}{2L^2} \phi_2^{AB} \\ \frac{4EI}{3L} & \frac{4EI}{H} \phi_3^{CD} + \frac{8EI}{3L} & -\frac{12EI}{2L^2} \phi_2^{CD} \\ -\frac{12EI}{2L^2} \phi_2^{AB} & -\frac{12EI}{2L^2} \phi_2^{CD} & \frac{12EI}{L^3} (\phi_1^{AB} + \phi_1^{CD}) \end{pmatrix} = 0 \quad (4.2.25)$$

resultando

$$4\phi_1(1 + \phi_3) - 3\phi_2^2 = 0 \quad (4.2.26)$$

de cuja solução se obtém

$$\frac{P}{P_e} \approx 0.67 \rightarrow \lambda_{cr} = P_{cr} = 0.67 \frac{\pi^2 EI}{L^2} = 6.61 \frac{EI}{L^2} \quad (4.2.27)$$

pelo que $P_{cr} = 3012.04$.

Neste caso os graus de liberdade são θ_1 , θ_2 e Δ , e o 1º modo de instabilidade é dado por

$$\begin{cases} 1.424\theta_1 + 0.333\theta_2 - 1.326\Delta/L = 0 \\ 0.333\theta_1 + 1.424\theta_2 - 1.326\Delta/L = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \theta_2 = \theta \\ \Delta = 1.325 \cdot \theta \cdot L \end{cases} \quad (4.2.28)$$

que corresponde à deformada indicada na Figura 4.13.

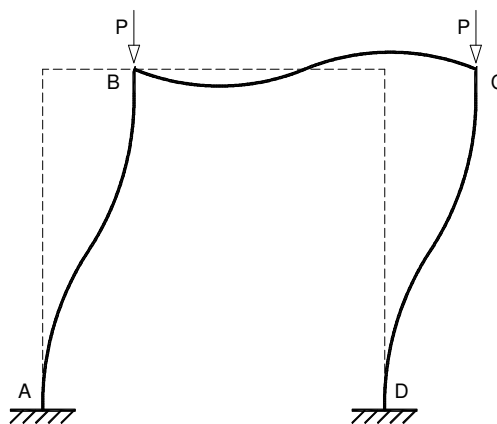


Figura 4.13 – Pórtico 2D – Modo de instabilidade crítico.

Utilizando o INST3D determinou-se o parâmetro crítico $\lambda_{\text{móveis}} = 3009.22$, concluindo que este software fornece resultados praticamente coincidentes com o valor exacto, com erro relativo inferior a 0.09%.

Modelo (# barra)	Nós Fixos ($\lambda_{\text{cr}}=3009.22$)						
	SAP 2000	LUSAS	ANSYS	INST3D	Erro relativo		
					Sap2k	Lusas	Ansys
1	3315	3251	3034	3009	10.2%	7.4%	0.8%
2	2941	3027	3016	3009	-2.2%	0.6%	0.5%
3	2933	3013	3010	3009	-2.5%	0.1%	0.0%
4	2931	3010	3009	3009	-2.6%	0.0%	0.0%
8	2930	3009	3009	3009	-2.6%	0.0%	0.0%
16	2929	3009	3009	3009	-2.7%	0.0%	0.0%
32	2929	3009	3009	3009	-2.7%	0.0%	0.0%

Quadro 4.5 – Erros associados à discretização de barras – Pórtico de nós móveis.

Posteriormente, introduziu-se o pórtico no software comercial, discretizando as barras de forma idêntica ao caso anterior, tendo obtido os resultados apresentados no Quadro 4.5.

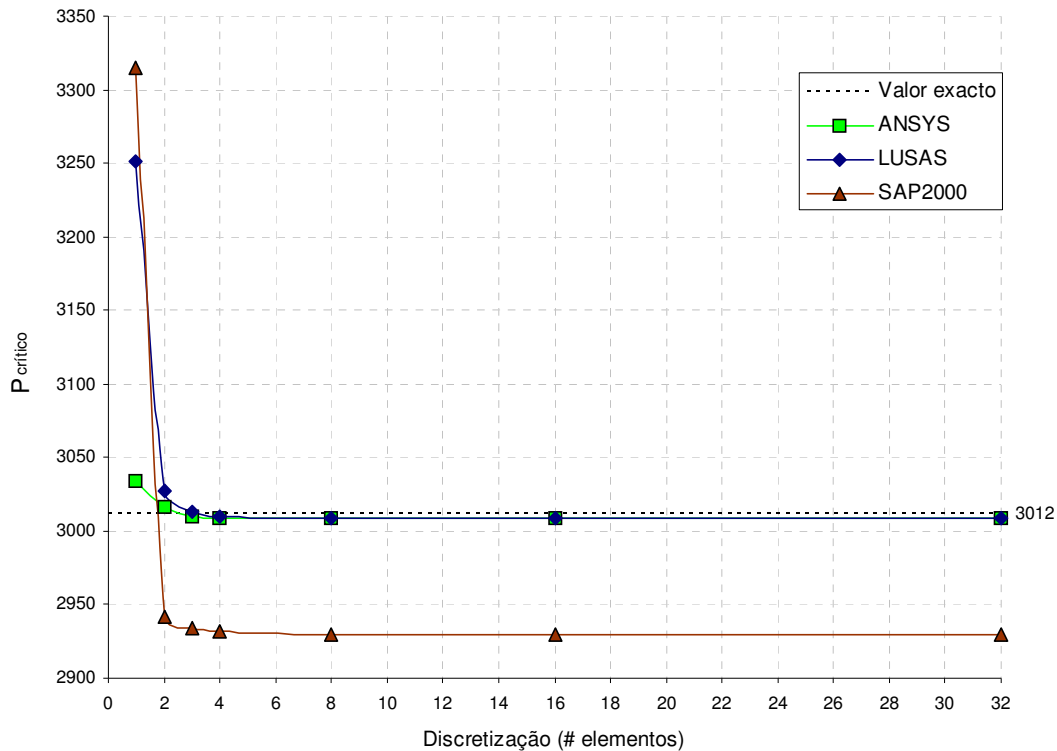


Gráfico 4.2 – Parâmetro crítico em função da discretização para o pórtico 2D de nós móveis.

Constata-se que o SAP 2000 é o software que apresenta erros mais significativos (por excesso e por defeito), correspondendo ao ANSYS o melhor desempenho na determinação do parâmetro crítico. O LUSAS apresenta resultados muito próximos dos obtidos com o ANSYS, com erro de valor reduzido para discretizações superiores a 3 elementos por barra. No Gráfico 4.2 observa-se a evolução do parâmetro crítico para as diversas discretizações das barras, relativamente ao valor exacto. Os seis primeiros modos de instabilidade estão ilustrados na Figura 4.14.

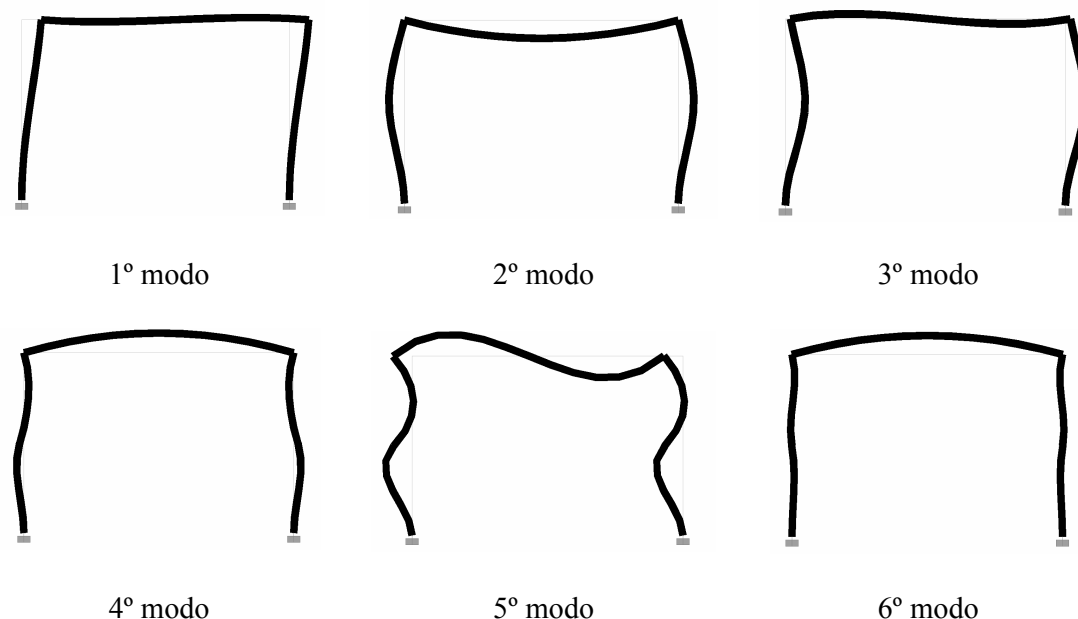


Figura 4.14 – Pórtico de nós móveis – modos de instabilidade.

Comparativamente ao pórtico de nós fixos, verifica-se que no pórtico de nós móveis, o erro associado à utilização de um único elemento por barra é menos significativo, o que permite concluir que é necessário escolher cuidadosamente a discretização dos elementos para analisar estruturas de nós fixos.

4.2.2 CASO 2 – MODELAÇÃO 2D COM ELEMENTOS DO TIPO SHELL

A modelação estrutural assume um papel importante quando se utiliza este tipo de análise, em particular quando se pretende estudar a ocorrência de fenómenos locais de instabilidade ou quando se aborda o problema da rigidez nas zonas de ligação, ou seja nos nós. Neste último caso, é necessário recorrer a modelações tridimensionais para conseguir um perfeito conhecimento do funcionamento da ligação.

Na análise dos pórticos estudados nesta dissertação, foi usado um modelo de cálculo baseado em elementos de barra com continuidade nas ligações, que corresponde a uma simplificação da geometria real dos elementos que compõem a estrutura, desprezando a forma da secção das barras.

Para analisar a importância da forma da secção e dos respectivos fenómenos de instabilidade, no estudo da não linearidade geométrica, procedeu-se à modelação dos pórticos recorrendo a elementos de área (laminares) do tipo SHELL com formulação implícita de *Thick plate*, no software comercial SAP2000. A escolha deste programa está relacionada com a facilidade de pré-processamento e posterior análise dos resultados.

As características das barras são semelhantes às utilizadas na modelação com elementos lineares, sendo definida a geometria dos elementos a usar no MEF em função da espessura da alma e dos banzos do perfil HE 200B. Na Figura 4.15 está representada a discretização utilizada para modelar os elementos do tipo SHELL a partir da secção do perfil comercial.

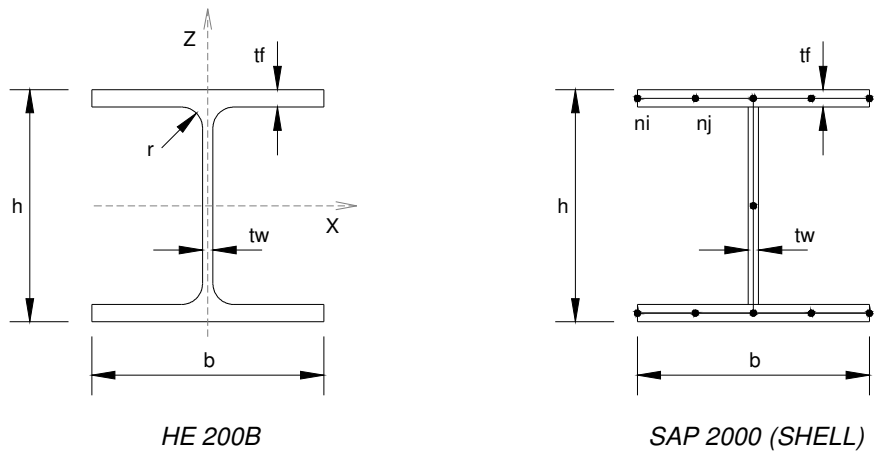


Figura 4.15 – Perfil HE 200B e elemento equivalente SHELL.

As características geométricas do perfil HE 200B, assim como do modelo MEF-SHELL, estão indicadas no Quadro 4.6.

h (mm)	b (mm)	t_w (mm)	t_f (mm)	r (mm)
200	200	9,0	15,0	18

Quadro 4.6 – Características geométricas do perfil HE 200B.

A discretização dos elementos SHELL foi escolhida após ter efectuado várias subdivisões desses elementos, de forma a obter um resultado convergente. O pórtico base foi subdividido em 478 elementos e utilizada uma tolerância de 1.00e-7, para determinação do parâmetro

crítico. As características geométricas do pórtico ($L=5.0$ m; $H=7.5$ m) foram mantidas e o aço utilizado apresenta o mesmo módulo de elasticidade, $E=200$ GPa. Os pórticos foram estudados no seu plano, sem possibilidade de perda de estabilidade no plano perpendicular.

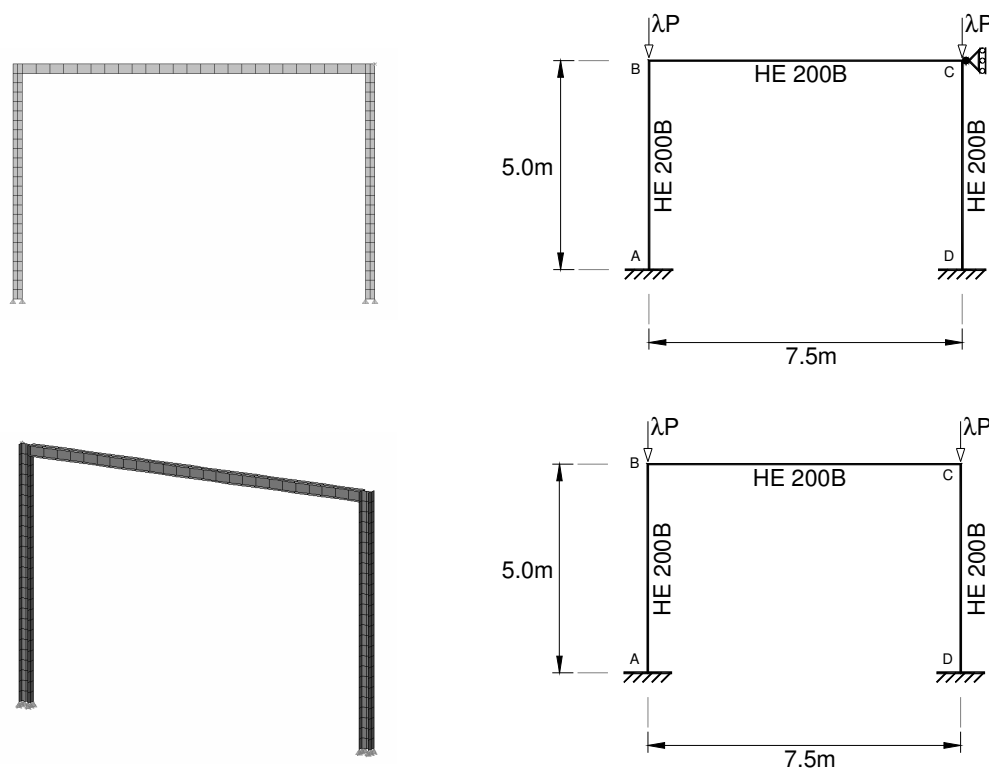


Figura 4.16 – Modelo utilizado (SHELL) – Geometria dos pórticos (nós fixos e nós móveis).

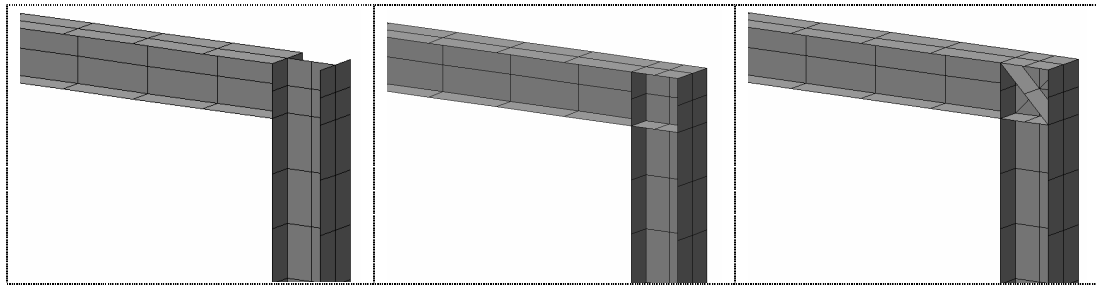
Nas modelações utilizadas, os elementos SHELL do pilar apresentam continuidade na união com os elementos SHELL da viga. Na realidade, é possível materializar este tipo de ligação em estruturas metálicas através da utilização de peças unidas por soldadura. Para garantir a continuidade, é comum introduzir elementos de reforço das ligações através de chapas metálicas adicionais, simuladas neste estudo com o recurso a elementos SHELL. Alterando as características das ligações, união viga-pilar, comprova-se que a rigidez destas zonas influenciam o desempenho da estrutura.

Os reforços das ligações são efectuados, como já foi referido, através da adição de elementos laminares com espessura equivalente à utilizada nos banzos do perfil HE 200B (15mm). As várias configurações de reforço das ligações estão indicadas no Quadro 4.7.

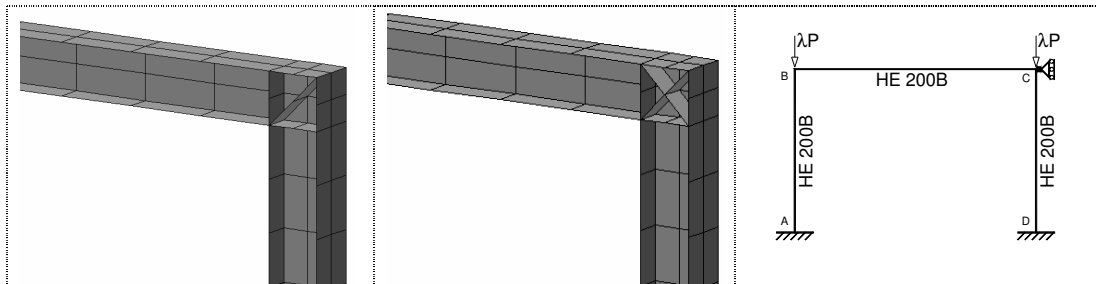
Para cada configuração de reforço foram determinados os parâmetros críticos para os seis primeiros modos de instabilidade.

(i) Pórtico de nós fixos

Como seria de esperar, este modelo conduz a cargas críticas mais baixas. Este facto deve-se à introdução da forma do elemento na modelação, diminuindo a capacidade resistente do elemento devido à perda de geometria da secção.



Modo		λ_{cr}		λ_{cr}		λ_{cr}
1º	Tipo 1	7946.59	Tipo 2	8047.36	Tipo 3	8058.21
2º		9282.36		9593.41		9748.85
3º		19047.56		19141.58		19153.96
4º		19653.74		19943.41		19967.20
5º		30795.48		31180.44		31219.75
6º		31115.31		31308.65		31334.14



Modo		λ_{cr}		λ_{cr}		λ_{cr}
1º	Tipo 4	8041.06	Tipo 5	8050.26	Modelo de elementos de barras (contínuo)	10100.39
2º		9730.95		9798.92		11916.93
3º		19138.98		19149.08		24314.71
4º		19946.78		19962.90		25326.71
5º		31187.06		31218.64		43600.08
6º		31256.33		31319.35		44521.87

Quadro 4.7 – Parâmetros de carga para o pórtico SHELL de nós fixos.

Os resultados da análise com elementos do tipo SHELL conduzem a valores inferiores de λ_{cr} , o que seria de esperar considerando a possibilidade de alteração da geometria espacial das

secções da viga e dos pilares. Neste caso, o erro máximo cometido relativamente ao modelo de elementos de barra para o 1º modo de encurvadura, corresponde a 21.32%, o que indica que alguns cuidados devem ser tomados na determinação do parâmetro crítico quando se utiliza uma modelação baseada em elementos de barra com continuidade nodal.

Na Figura 4.17 estão ilustrados os modos de instabilidade associados aos parâmetros de carga do Quadro 4.7. A coloração indica o deslocamento vertical U_z .

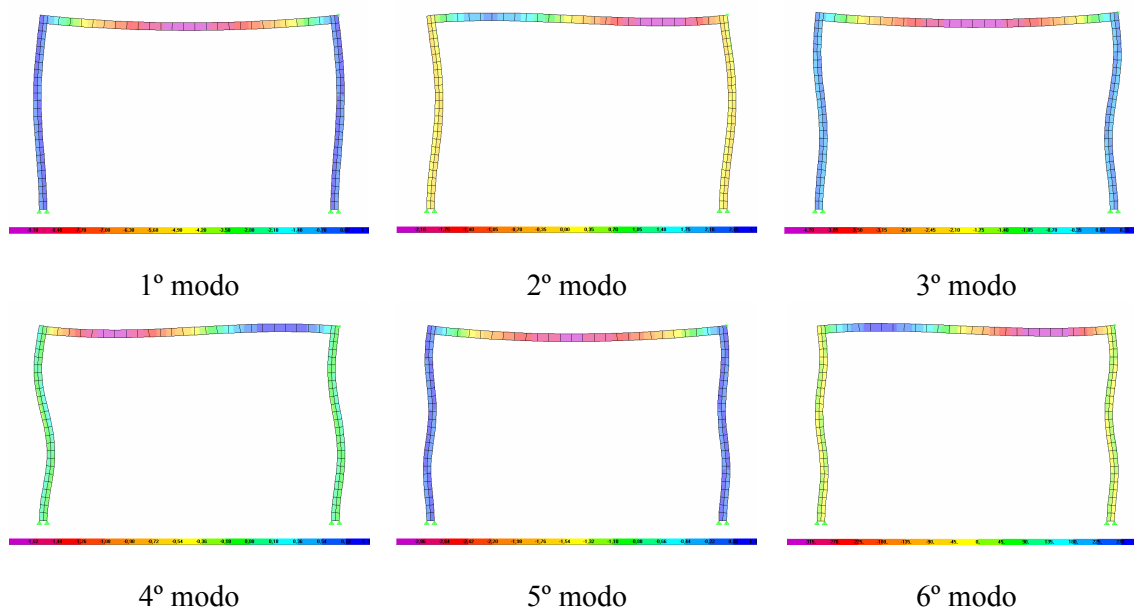


Figura 4.17 – Modelo utilizado (SHELL) – Modos de instabilidade – Pórtico de nós fixos.

Pela análise da deformação para cada modo de instabilidade, pode-se observar a importância dos fenómenos locais de encurvadura para a perda de estabilidade da estrutura.

Verifica-se que, para um determinada configuração de ligação, o parâmetro crítico apresenta valores superiores num determinado modo de encurvadura, quando comparados com outra configuração. Esta variação do valor do parâmetro crítico está associada ao tipo de deformação do pórtico e conseqüente à maior ou menor mobilização da rigidez dos nós (contribuição para o modo de instabilidade).

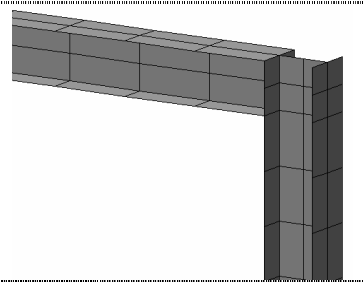
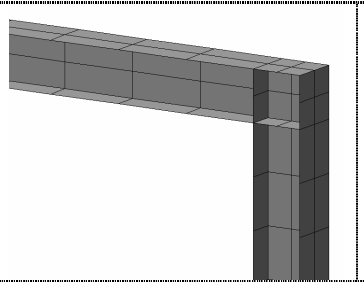
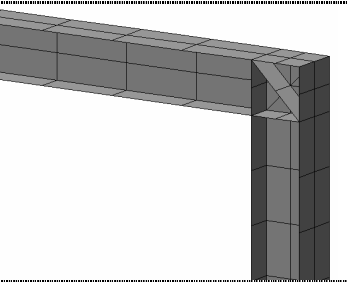
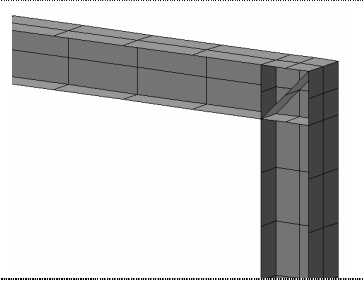
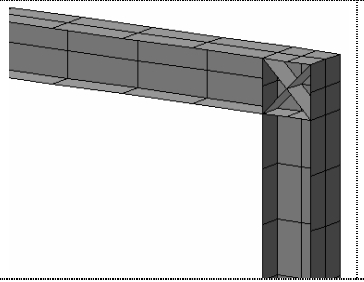
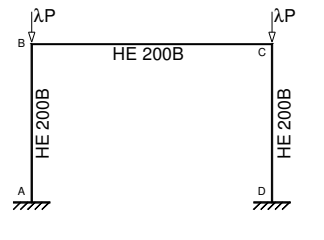
Quando se aumenta a rigidez dos nós, os resultados obtidos para o pórtico modelado com elementos de área do tipo SHELL (*Thick plate*) tendem para os resultados da análise efectuada com elementos de barra, pelo que se conclui que é necessário estudar adequadamente a rigidez nodal a aplicar no modelo de barras, alterando as ligações através da introdução de molas de rigidez com características equivalentes à ligação real.

Note-se que os fenómenos associados à instabilidade local, que são analisados recorrendo a este tipo de modelação, não serão objecto de estudo no presente trabalho.

(ii) Pórtico de nós móveis

O mesmo estudo foi elaborado para o pórtico de nós móveis, sendo as configurações dos reforços idênticas às utilizadas no pórtico de nós fixos.

No Quadro 4.8, são apresentados os resultados obtidos na determinação do parâmetro crítico, para cada configuração.

								
Modo		λ_{cr}			λ_{cr}			λ_{cr}
1º	Tipo 1	2210,68	Tipo 2	2319,23	Tipo 3	2418,13		
2º		7972,09		8054,05		8065,36		
3º		9453,24		9696,91		9831,69		
4º		19090,35		19158,53		19173,37		
5º		20764,73		21082,47		21136,67		
6º		30870,77		31192,37		31229,38		
								
Modo		λ_{cr}			λ_{cr}			λ_{cr}
1º	Tipo 4	2413,27	Tipo 5	2451,24	Modelo de elementos de barras (contínuo)	2931,62		
2º		8062,42		8068,92		10100,40		
3º		9823,47		9877,42		12040,63		
4º		19170,46		19177,82		24315,10		
5º		21130,84		21154,03		26951,02		
6º		31209,60		31235,63		43600,72		

Quadro 4.8 – Parâmetros de carga para o pórtico SHELL de nós móveis.

Verifica-se que os resultados da análise com elementos do tipo SHELL conduzem a valores inferiores de λ_{cr} , obtendo-se neste caso, um erro máximo para o 1º modo de encurvadura de 24.59%, valor superior ao caso do pórtico de nós fixos, pelo que fica evidenciada a necessidade de estudar convenientemente a estrutura, sobretudo quando se utiliza um modelo simplificado.

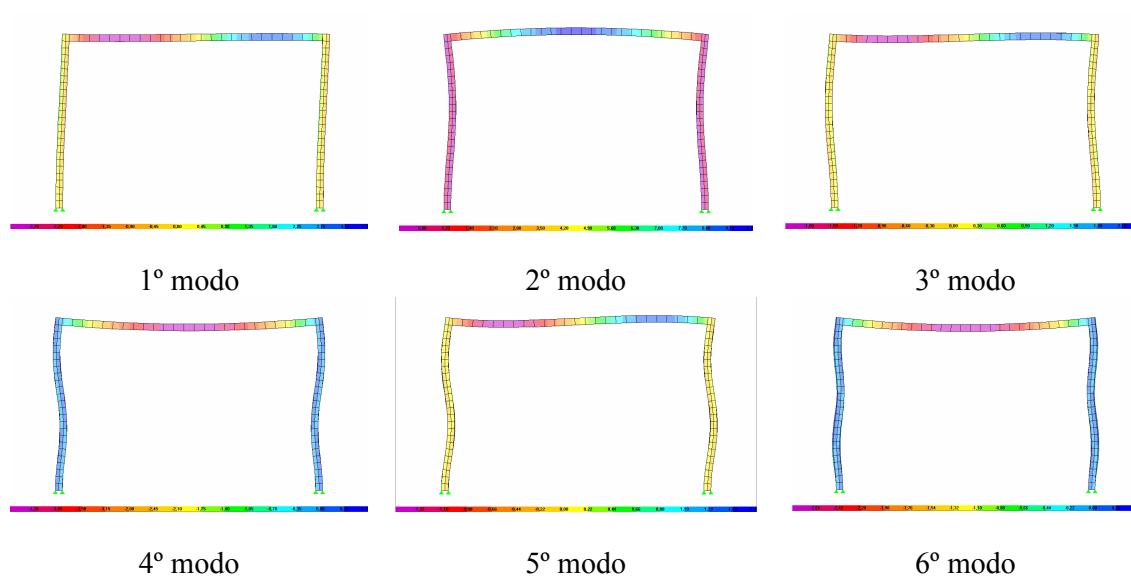


Figura 4.18 – Modelo utilizado (SHELL) – Modos de instabilidade – Pórtico de nós móveis.

Na Figura 4.18 estão representadas as deformadas relativas aos seis primeiros modos de instabilidade do pórtico de nós móveis. A coloração representa o deslocamento U_z .

4.2.3 CASO 3 – PÓRTICOS 2D COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS

No caso anterior, introduziu-se o problema da rigidez nas ligações entre as barras, nomeadamente a ligação viga-pilar. De forma simplificada, este problema pode ser analisado num modelo de elementos de barra através da utilização de três tipos de condições de fronteira na ligação entre as barras: contínuas, rotuladas e com molas de rotação. A ligação com continuidade é obtida pelo impedimento da totalidade dos graus de liberdade dos nós envolvidos na ligação, garantindo a transmissão da totalidade dos esforços internos. A rotulada, libertando os graus de liberdade associados aos momentos e a terceira, com molas, corresponde a situação intermédia em que a ligação apresenta uma rigidez parcial, com capacidade de rotação definida pela rigidez da mola.

Este modelo é o que mais se aproxima da realidade, tendo como principal dificuldade para a sua aplicação a calibração da rigidez das molas que simulam as ligações.

Na Figura 4.19, estão representados os pórticos de calibração com a adição de molas de translação para simular o comportamento flexível das ligações.

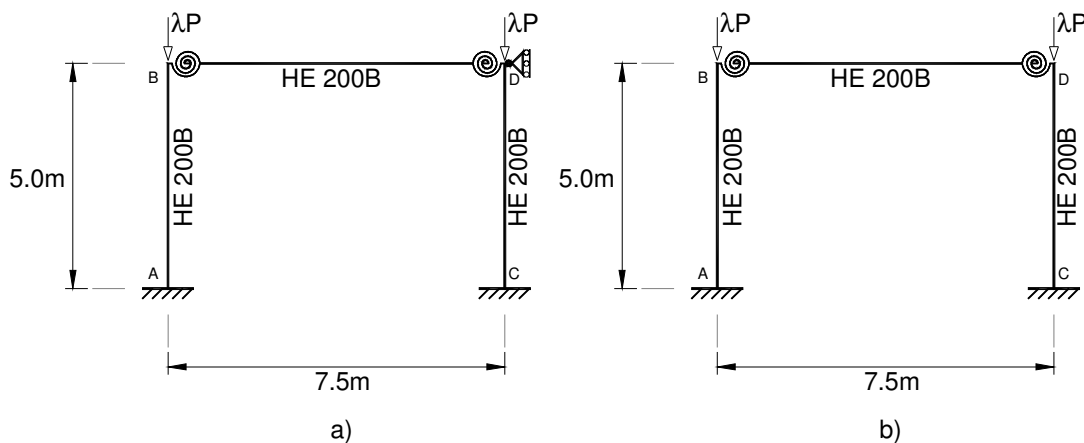


Figura 4.19 – Pórticos 2D com ligações semi-rígidas, a) nós fixos, b) nós móveis.

Estes pórticos foram modelados no SAP2000 considerando como válida uma discretização de 4 elementos por barra. Procedeu-se à introdução de molas nas ligações viga-pilar, fazendo variar o valor da rigidez desde 0.0, ligação rotulada, até 1.0e10 que corresponde à ligação contínua, ou seja, uma modelação sem molas.

(i) Pórtico de nós fixos

Numa primeira análise foram determinados, para diversas discretizações, os parâmetros de carga para os seis primeiros modos de instabilidade, considerando que o pórtico apresenta ligações contínuas entre a viga e o pilar (situação equivalente ao Caso 1).

Modo	Discretização – # elementos por barra						
	1	2	3	4	8	16	32
1º	18347.35	10408.73	10184.58	10100.39	10032.21	10017.78	10014.35
2º	27455.56	12192.52	12036.15	11916.93	11815.15	11793.13	11787.88
3º	933285.30	35459.41	25022.30	24314.71	23446.21	23250.05	23202.96
4º	---	39321.50	25805.53	25326.71	24435.60	24224.52	24173.52
5º	---	104942.05	64077.00	43600.08	40801.41	39836.47	39602.25
6º	---	120871.95	68928,41	44521.87	42188.33	41172.63	40923.70

Quadro 4.9 – Pórtico de nós fixos (sem molas) – Parâmetros de carga λ.

Neste quadro salienta-se a divisão da barra em 3 elementos, que corresponde à discretização associada à obtenção de erros inferiores a 3% em relação ao valor exacto de λ .

Modo	Rigidez da mola (kN.m/rad)						
	0.0	k= 1.0e0	k= 1.0e2	k= 1.0e4	k= 1.0e6	k=1.0e10	∞
1º	8631.41	8631.98	8686.61	9800,51	10096.64	10100,39	10100.39
2º	8638.65	8639.21	8693.79	10730,13	11898.71	11916,93	11916.93
3º	23692.98	23693.19	23713.43	24177,16	24312.95	24314,71	24314.71
4º	23713.70	23713.91	23734.34	24628,24	25314.72	25326,71	25326.71
5º	43005.57	43005.77	43025.24	43472,66	43598.46	43600,08	43600.08
6º	43051.88	43052.08	43071.28	43887,84	44510.98	44521,86	44521.87

Quadro 4.10 – Pórtico de nós fixos (#4 por barra) – λ_{cr} em função da rigidez da mola.

Na Quadro 4.10, apresentam-se os valores dos parâmetros de carga, em função da rigidez da mola, para os seis primeiros modos de instabilidade. No Gráfico 4.3 pode-se observar a variação dos parâmetros de carga em função da rigidez, para cada modo de instabilidade.

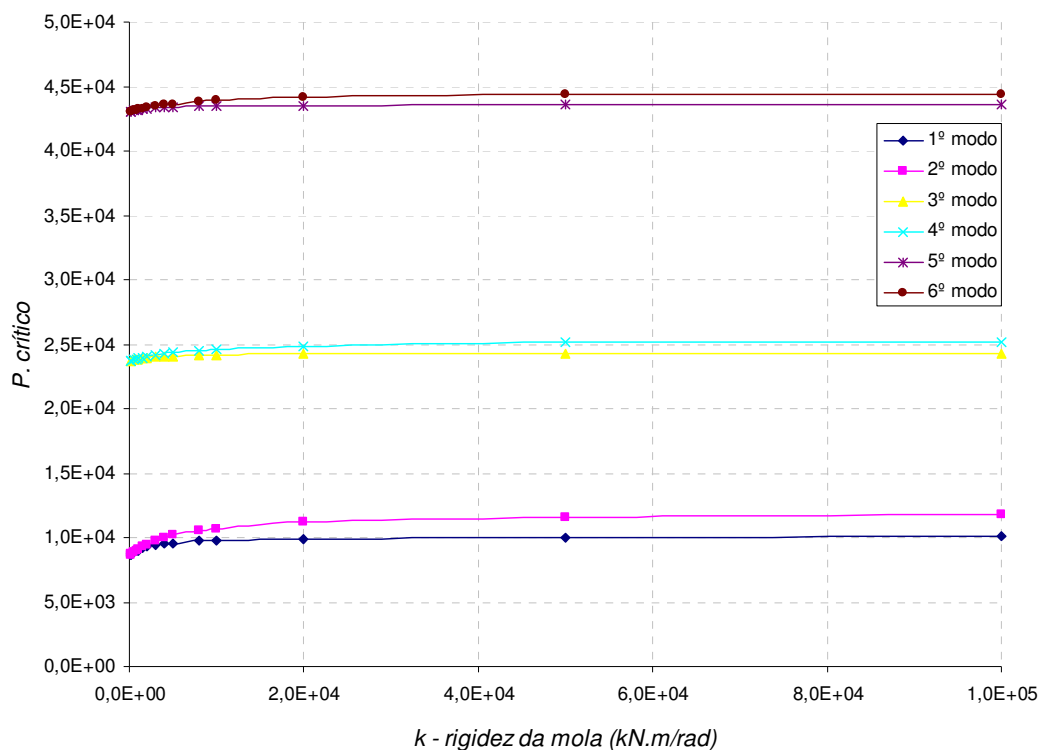


Gráfico 4.3 – Variação de λ (k) para cada modo de instabilidade (nós fixos).

Analisando o Gráfico 4.3, constata-se que existe uma componente inicial não linear para valores reduzidos da rigidez, apresentando um valor praticamente constante para valores mais elevados.

No Gráfico 4.4 é apresentada uma ampliação, para o primeiro modo de instabilidade, da zona onde o comportamento não linear é mais acentuado, indicando ainda o valor exacto do parâmetro crítico obtido com a modelação de elementos de barra com continuidade na ligação entre as vigas e os pilares.

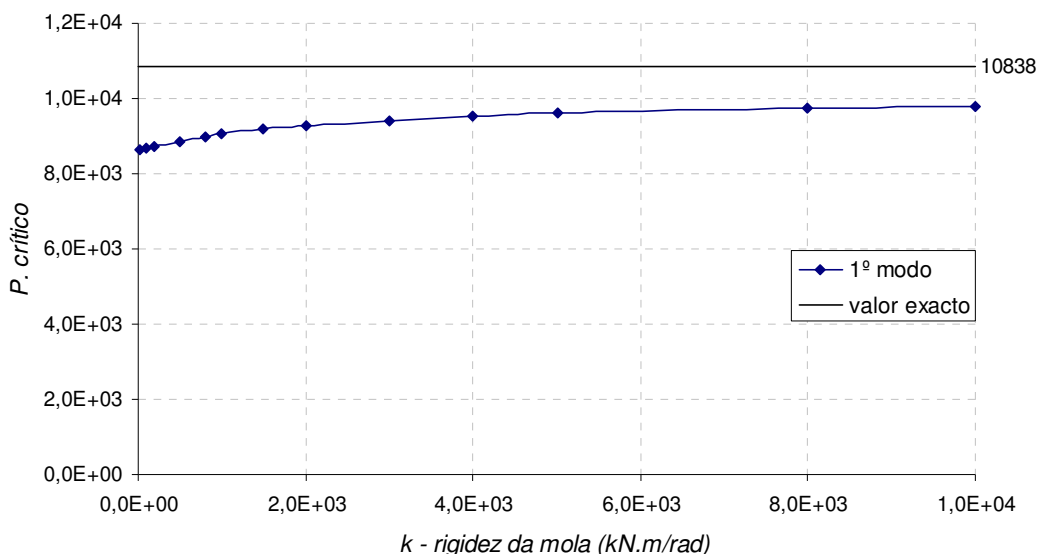


Gráfico 4.4 – Variação de λ_{cr} (k) para o 1º modo de instabilidade (nós fixos).

Neste caso, o erro médio cometido pela avaliação incorrecta da rigidez na ligação viga-pilar situa-se nos 10% (excluindo a situação rotulada).

(ii) Pórtico de nós móveis

O procedimento é idêntico ao do caso anterior, determinando em primeiro lugar os parâmetros críticos para os seis primeiros modos de instabilidade para diversas discretizações das barras, apresentando-se no Quadro 4.11 os resultados obtidos.

Modo	Discretização – # elementos por barra						
	1	2	3	4	8	16	32
1º	2963,35	2941,17	2933,57	2931,62	2930,17	2929,87	2929,80
2º	18347,38	10408,74	10184,59	10100,40	10032,22	10017,79	10014,36
3º	27457,83	12387,29	12169,79	12040,63	11932,22	11908,92	11903,38
4º	1863601,65	35459,97	25022,85	24315,10	23446,51	23250,34	23203,25
5º	---	41419,48	27518,54	26951,02	25895,34	25647,88	25588,19
6º	---	104943,23	64077,34	43600,72	40801,66	39836,69	39602,46

Quadro 4.11 – Pórtico de nós móveis (sem mola) – Parâmetros de carga λ .

Estes resultados referem-se a uma análise com elementos de barra com continuidade nodal, utilizando uma discretização de 4 elementos por barra.

Modo	Rigidez da mola (kN.m/rad)						
	0.0	k= 1.0e0	k= 1.0e2	k= 1.0e4	k= 1.0e6	k=1.0e10	∞
1°	1115,43	1115,83	1154,02	2376,82	2923,86	2931,62	2931,62
2°	8635,04	8635,61	8689,63	9800,52	10096,65	10100,40	10100,40
3°	9516,55	9516,90	9551,41	11024,66	12024,31	12040,63	12040,63
4°	23703,45	23703,66	23723,78	24177,71	24313,33	24315,10	24315,10
5°	24617,62	24617,91	24646,44	25929,22	26933,32	26951,02	26951,02
6°	43029,17	43029,37	43048,49	43473,88	43599,10	43600,72	43600,72

Quadro 4.12 – Pórtico de nós móveis (#4 por barra) - λ_{cr} em função da rigidez da mola.

De seguida, determinaram-se os mesmos parâmetros de carga considerando rigidez nodal variável (Quadro 4.12). A evolução dos parâmetros de carga com o aumento da rigidez das molas, para os seis primeiros modos de encurvadura, está representada no Gráfico 4.5.

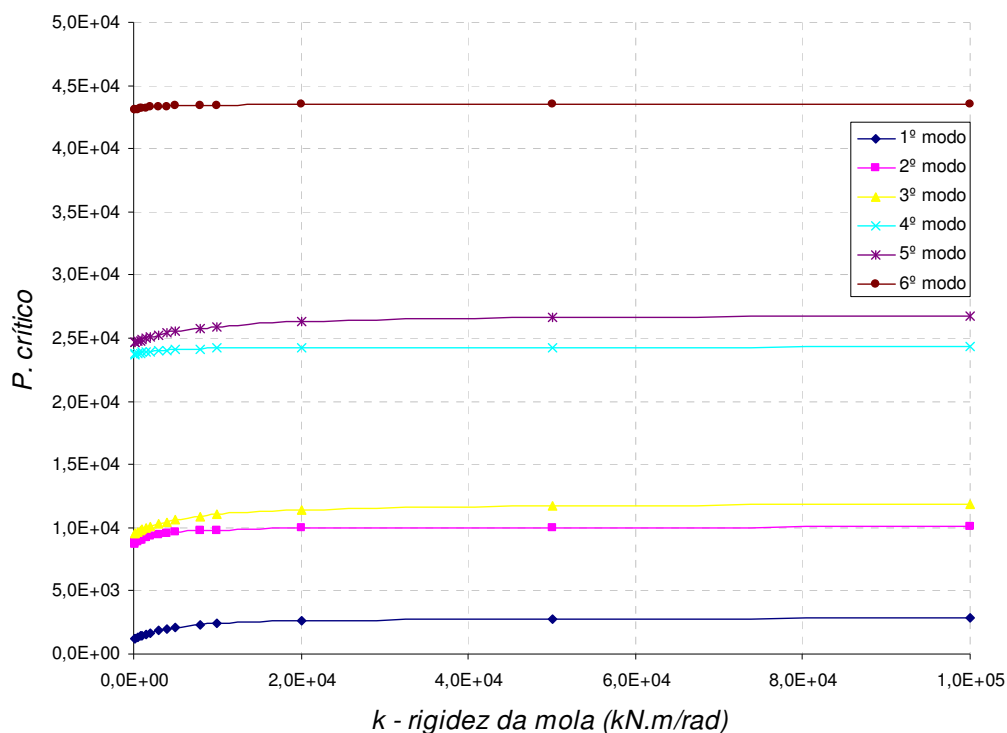


Gráfico 4.5 – Variação de λ_{cr} (k) para cada modo de encurvadura (nós móveis).

Esta estrutura apresenta um comportamento não linear para rigidez nodal reduzida, e praticamente linear para valores mais elevados. Neste pórtico, obteve-se um erro médio, relativamente à modelação com continuidade nodal, que pode chegar aos 60%, o que indica a

necessidade de estudar convenientemente o tipo de ligação usada, sobretudo quando se pretende analisar o desempenho da estrutura considerando ligações rígidas, obrigando à utilização de sistemas de ligação que garantam a continuidade entre os elementos.

Conclui-se que o tipo de ligação utilizada na modelação pode alterar significativamente o comportamento da estrutura e conseqüentemente o valor do parâmetro crítico, sobretudo no caso do pórtico de nós móveis, pelo que a utilização de modelos com continuidade nodal (ligação rígida viga-pilar) deve ser devidamente analisada.

4.2.4 CASO 4 – PÓRTICO 3D – RAZZAQ E NAIM (1980)

Neste caso estuda-se um pórtico espacial com dupla simetria em planta, representado na Figura. 4.17. A numeração dos pórticos 2D, utilizada para introduzir a estrutura no INST3D, está indicada na planta da estrutura (Figura 4.20b).

Este pórtico foi estudado por Razzaq e Naim (1980), para analisar o efeito da distribuição do esforço axial na definição do valor da carga crítica e do modo de instabilidade. Assim, o pórtico está sujeito a um carregamento nodal definido pelos parâmetros de carga α_1 , α_2 , α_3 e α_4 , que podem variar para simular acções assimétricas.

Este tipo de análise não será abordado, determinando a cargas crítica para uma distribuição Como o objectivo neste capítulo é calibrar o software,.

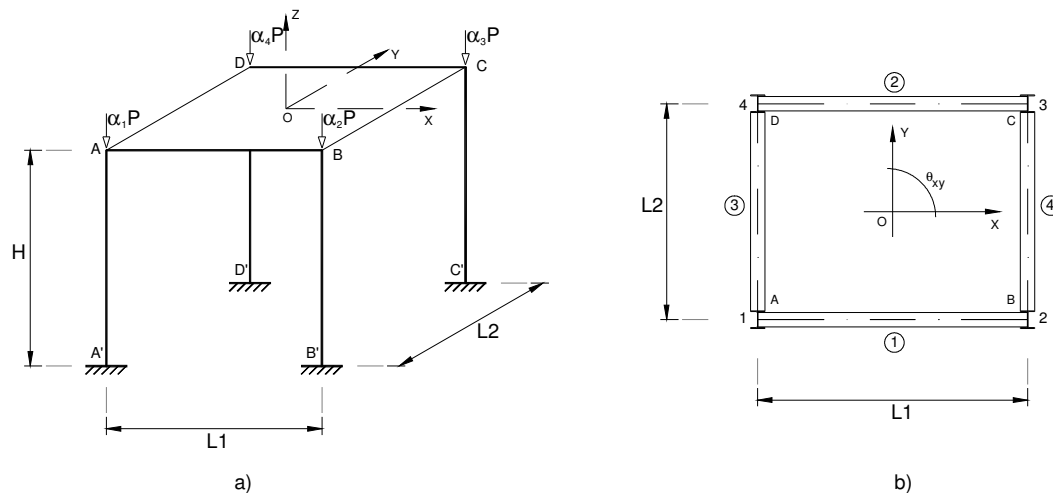


Figura 4.20 – Pórtico 3D, Razzaq e Naim (1980).

Assume-se que a laje, definida pelos pontos ABCD, tem comportamento de diafragma rígido no seu plano. As dimensões do pórtico são: $H=6350\text{mm}$ (250 in), $L_1=3810\text{ mm}$ (150 in) e

$L_2=3048$ mm (120 in). Utilizou-se um perfil metálico W10x33 para todas as barras, com as seguintes características: $A=6503.2$ mm² (10.08 in.²), $I_y=72,215,320$ mm⁴ (173.498 in.⁴), $I_x=14,227,260$ mm⁴ (534.182 in.⁴), rigidez à torção $GJ_e=17.907$ kNm² (6235 Kip in.²), módulo de elasticidade $E=200.1 \times 10^6$ kN/m² (29,000 ksi) e $G=80 \times 10^6$ kN/m² (11,600 ksi). A orientação dos eixos, para as vigas e pilares, pode ser observada na Figura 4.20b).

Pórtico	α_1	α_2	α_3	α_4	^a (P_{cr}) _{total} [Kips]	^b (P_{cr}) _{total} [Kips]
F1-1	0.500	1.000	0.500	0.250	590.0	595.8
F1-2	1.000	1.005	1.000	1.000	601.2	612.0
F1-3	1.000	0.005	0.000	0.000	520.3	520.0
F1-4	1.000	1.000	0.000	0.000	560.0	532.0
F1-5	0.000	1.000	1.000	0.000	576.0	604.8
F1-6	1.000	0.005	1.005	0.000	590.0	607.7
F1-7	1.000	1.000	1.000	0.000	591.0	596.9

^aRazzaq e Naim (1980), pp. 1393-1397. ^bCalculado com o SAP90.

Quadro 4.13 – Parâmetros de carga e carga crítica total, (P_{cr})_{Total}.

Este pórtico foi estudado por diversos autores, nomeadamente Razzaq e Naim (1980) e Aristizábal-Ochoa (2002), que analisaram sete combinações de carga, designadas por F1-i (i=1 até 7).

Foi ainda utilizado pelos referidos autores o software SAP90 (Torrealba *et al.* 1992), desenvolvido por Wilson e Habibullah (1991), cujo algoritmo corresponde a uma versão anterior do SAP2000. A estrutura foi introduzida no software como sendo tridimensional, sem o comportamento de diafragma rígido da laje. Os resultados obtidos para os diferentes parâmetros de carga estão indicados na Quadro 4.13, sendo a carga crítica total, a soma dos quatro cargas nodais.

Foi escolhida a combinação F1-2, com igual valor dos parâmetros de carga α_1 , α_2 , α_3 e α_4 , para calibrar o software INST3D. Este caso de carga foi também introduzido no software comercial SAP 2000, para comparar o valor obtido com os resultados apresentados por Razzaq e Naim (1980).

Com o INST3D obteve-se um valor da carga crítica total de 603.6, que está muito próximo do valor encontrado pelos referidos autores, (P_{cr})_{total} = 601.2 (Quadro 4.13). O software comercial (SAP 2000) apresenta um valor ligeiramente superior, (P_{cr})_{total} = 613.1 ao obtido com a versão anterior (SAP 90), com um erro de 2% relativamente ao valor exacto.

Para esta configuração de carga, os autores obtiveram uma deformação associada ao modo de instabilidade dada por $\Delta_x = 1.0$, $\Delta_y = 0.0$ e $\theta_{xy} = 0.0$, coincidente com os resultados obtidos no INST3D e no SAP 2000 e cuja representação gráfica pode ser observada na Figura 4.21.

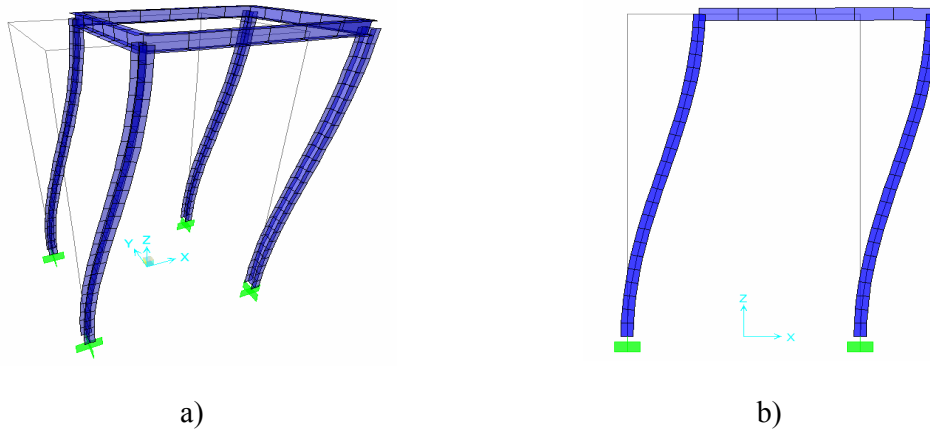


Figura 4.21 – Pórtico 3D, Razzaq e Naim (1980) – Deformada: a) perspectiva, b) alçado.

Da análise deste caso, conclui-se que o INST3D fornece valores exactos quando se estudam estruturas 3D com as características do pórtico analisado.

4.2.5 CASO 5 – PÓRTICO 3D – NÓS FIXOS

Para finalizar a calibração do INST3D, foi modelado um pórtico tridimensional impedido de ter translações ao nível da laje (pontos EFGH da Figura 4.22).

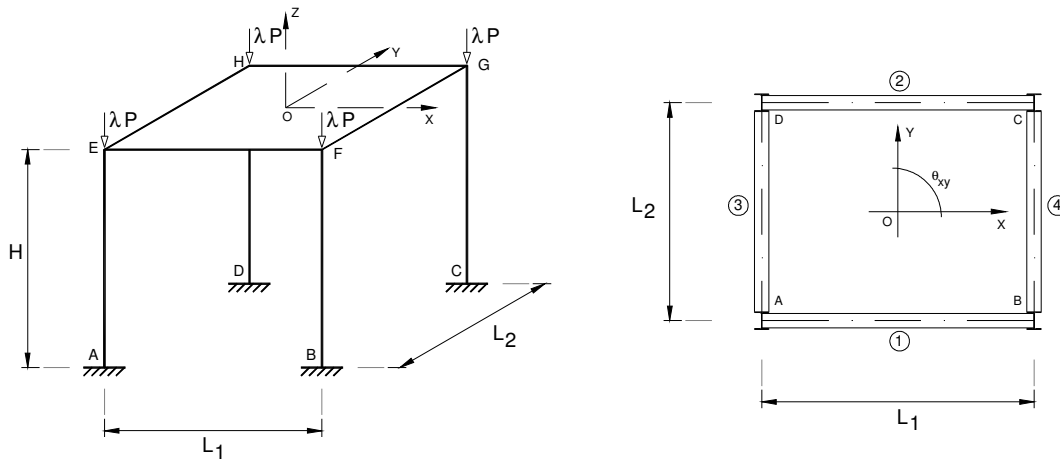


Figura 4.22 – Pórtico 3D com ligações nodais rígidas – Nós fixos.

Com esta limitação à deformação da estrutura, pretende-se simular o comportamento de um pórtico de nós fixos. Esta modelação foi elaborada para estudar a sensibilidade do software relativamente à determinação dos modos de instabilidade (deformada da estrutura).

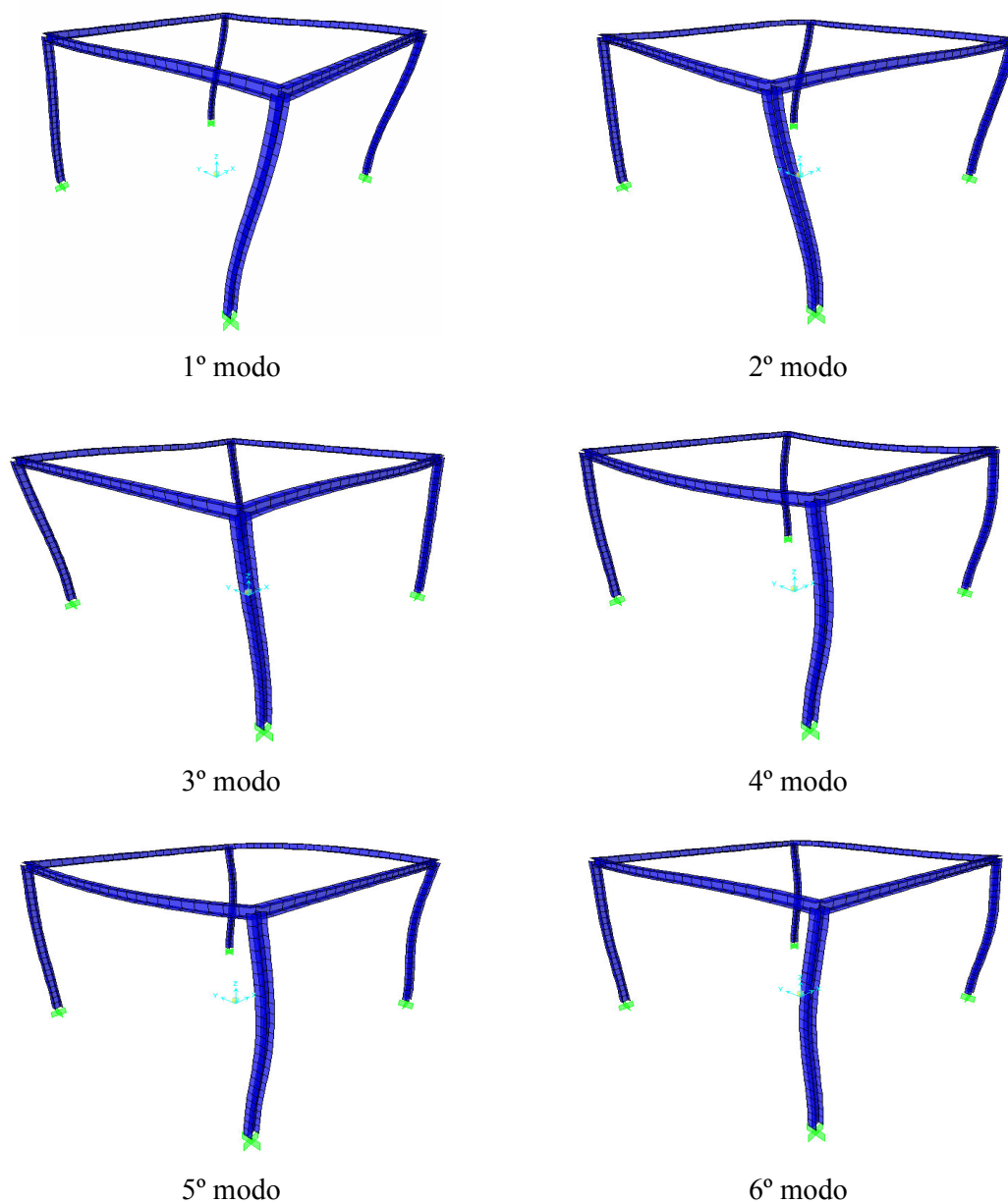


Figura 4.23 – Pórtico 3D de nós fixos – Modos de instabilidade.

Nesta estrutura foram utilizados perfis metálicos HE 200B, com $L_1 = L_2 = 7.5$ m, $H = 5.0$ m e um módulo de elasticidade $E = 200$ GPa. O pórtico foi modelado no INST3D, e no SAP2000 com uma discretização de 4 elementos por barra.

Os valores obtidos com o INST3D ($\lambda=1259.2$) e com o SAP 2000 ($\lambda=1332.2$) são praticamente iguais, validando o resultado obtido. Foram detectados os mesmos modos de instabilidade nos dois programas (Figura 4.23), concluindo que o INST3D apresenta um bom

desempenho numérico quando se efectua uma ANLG de pórticos 3D, com translações impedidas ao nível das lajes.

4.3 NOTA FINAL

Aferiu-se o rigor do software INST3D, verificando que os resultados obtidos coincidem com os valores analíticos, validando a sua utilização para elaborar análises de instabilidade de pórticos. Relativamente ao software comercial, na avaliação do parâmetro crítico, verificou-se que os resultados obtidos com o SAP 2000, LUSAS e ANSYS, apresentam erros devido à formulação aproximada utilizada pelos programas. Como forma de diminuir o erro aumentou-se o grau de discretização dos elementos obtendo-se resultados “exactos” para discretizações bastante elevadas. Os resultados obtidos pelo ANSYS e LUSAS (nos pórticos de calibração 2D) são praticamente coincidentes com os obtidos pelo INST3D, revelando uma maior precisão e simplicidade de modelação em relação ao SAP 2000 (menor número de elementos por barra).

A utilização de modelos com molas de rigidez à flexão, para simular ligações semi-rígidas, deve ser ponderada para situações em que a rigidez influencia o comportamento estrutural (rigidez reduzida), sobretudo em estruturas de nós móveis.

5 - ESTUDOS PARAMÉTRICOS

5.1 INTRODUÇÃO

De acordo com as hipóteses e procedimentos apresentados nos capítulos anteriores, procedeu-se à análise de instabilidade de vários sistemas estruturais bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D), tendo como finalidade a determinação da carga crítica e do respectivo modo de instabilidade. Para atingir este objectivo, utilizaram-se os programas de cálculo automático apresentados nos capítulos anteriores, nomeadamente o INST3D e o software comercial SAP 2000. A utilização destes programas permitiu comparar os resultados obtidos usando a formulação exacta (INST3D) do problema não linear geométrico, com soluções obtidas recorrendo à formulação aproximada (SAP 2000).

A escolha do SAP 2000 em detrimento de outro software (ANSYS e LUSAS) está relacionada com a utilização deste software no dia-a-dia do engenheiro projectista, apresentando-se como um programa de fácil utilização, tendo como principal vantagem a simplicidade de introdução de dados. O ANSYS e LUSAS são pacotes mais completos e consequentemente mais complexos de utilizar quando comparados com o SAP2000, implicando um tempo de adaptação muito dilatado e obrigando a um estudo exaustivo das suas capacidades, pelo que são programas talhados para a elaboração de trabalhos de investigação, ou em casos pontuais, de elevada complexidade no desenvolvimento de projectos de estruturas de engenharia civil.

Pretende-se estudar a influência da variação de parâmetros geométricos, como a altura interpisos e a distância entre pilares, no comportamento dos sistemas estruturais e ainda estudar a importância da utilização de esquemas de contraventamento na análise linear de 2ª ordem, para concluir qual a melhor solução a utilizar para os casos em estudo, de forma a otimizar a relação economia/eficiência estrutural, nomeadamente no aumento da capacidade resistente, analisando a sua importância relativamente ao desempenho estrutural.

O recurso ao cálculo automático, permitiu um estudo de maior amplitude na variação paramétrica, e a obtenção dos resultados em quantidade suficiente para poder comparar os valores obtidos.

Como já foi referido, o estudo baseia-se na utilização das funções de estabilidade associadas aos elementos da matriz de rigidez de barras prismáticas, permitindo incluir o efeito do esforço axial na deformação da estrutura (Brush 1975, Chen e Lui 1988).

Para elaborar este estudo, as estruturas foram modeladas através de elementos de barra, apresentando as seguintes características:

- Pórticos rectangulares;
- Pilares situados na mesma prumada;
- Ligações rígidas entre vigas e pilares;
- Cargas concentradas aplicadas nos nós;
- Encastramento na base do pórtico (ligações ao exterior);
- Indeformabilidade axial das barras;
- Área, inércia e módulo de elasticidade constantes para cada elemento;

Considera-se, ainda, a indeformabilidade dos planos que constituem as lajes ao nível de cada piso, sendo independentes os deslocamentos entre pisos.

Inicialmente, é apresentado um estudo sobre a influência da disposição dos elementos de contraventamento no desempenho estrutural, justificando a utilização do sistema adoptado nas estruturas analisadas.

De seguida, são apresentados 3 casos relativos à análise não linear geométrica de estruturas 2D e 3D. Pretende-se avaliar a capacidade resistente das estruturas, através da determinação da carga crítica e do modo de instabilidade. Este estudo, permite conhecer o comportamento estrutural, nomeadamente o grau de mobilidade das estruturas analisadas, permitindo melhorar o seu desempenho através da adição de elementos de contraventamento, aumentando a capacidade resistente da estrutura.

Identificam-se zonas que condicionam o desempenho estrutural e apresentam-se soluções para alterar a sua preponderância no comportamento não linear geométrico dos sistemas estruturais estudados, em particular na deformação da estrutura, garantindo um aumento da capacidade de carga.

Finalmente, refere-se que os resultados obtidos para estes exemplos não podem ser generalizados, fornecendo, no entanto, alguns indicadores sobre o comportamento deste tipo de estruturas e permitindo verificar a validade das hipóteses apresentadas, sobretudo na aplicação do software INST3D.

5.2 SISTEMA DE CONTRAVENTAMENTO

Quando se projecta a estrutura de um edifício, concebe-se um esquema estrutural capaz de assegurar a capacidade resistente em função dos requisitos regulamentares, sendo depois verificadas as imposições relativas a deformabilidade e estabilidade local dos elementos estruturais.

Geralmente, as estruturas metálicas (projectadas para as acções verticais) não possuem rigidez suficiente para assegurar a estabilidade global do sistema, pelo que é necessário dimensionar um sistema estrutural adicional que seja capaz de assegurar a estabilidade do conjunto ou maximizar o seu desempenho estrutural. Esta estrutura adicional constitui o sistema de contraventamento que, numa análise de 2ª ordem, tem que garantir a indeformabilidade da estrutura principal.

Quando se estuda este sistema, e se a análise pretendida for mais rigorosa que a aquela que usualmente se efectua no projecto de estruturas, duas questões podem ser equacionadas no seu dimensionamento (Kollár 1999):

- Qual é a rigidez necessária (do sistema de contraventamento) para garantir a melhor resposta da estrutura;
- Como dimensionar os elementos verticais nos quais se introduzem elementos de contraventamento.

Seja qual for a estrutura em análise, pretende-se sempre que a estrutura apresente um comportamento global de estabilidade definido em função do carregamento e da capacidade resistente obtida no seu dimensionamento, ou seja, os elementos mais resistentes devem condicionar a resposta da estrutura.

A resposta às questões pode ser encontrada nos regulamentos (ECSS 1976), nos quais são indicados métodos de dimensionamento dos contraventamentos e elementos verticais (pilares). Um dos métodos mais utilizados baseia-se na utilização do factor de amplificação da carga de Euler, sendo conhecido como método de amplificação dos momentos, em que

$$M = \psi M_{ben} \quad (5.2.1)$$

Neste método, considera-se que o acréscimo de deformação devido às acções actantes produz uma deformada (encurvadura) idêntica à obtida numa análise de 1ª ordem. Assim, o

momento inicial ou de 1ª ordem (M_{ben}), é aumentado através do factor de ampliação ψ (Timoshenko e Gere 1961)

$$\psi = \frac{1}{1 - \frac{Q}{Q_{cr}}} \quad (5.2.2)$$

em que Q é a carga total do edifício e Q_{cr} é a carga crítica elástica do contraventamento, sendo o quociente Q/Q_{cr} limitado regulamentarmente para assegurar a segurança em relação à encurvadura ($Q_{cr} \geq 4Q$).

O trabalho apresentado nesta dissertação, não contempla o dimensionamento estrutural, pelo que estas questões não serão directamente abordadas.

Se o estudo incidir sobre a geometria espacial da estrutura, então, podem-se formular três novas questões:

- Onde colocar o sistema de contraventamento;
- Qual a melhor disposição em alçado e em planta;
- De que forma a disposição influencia o desempenho estrutural.

Para responder a estas questões, é necessário estudar convenientemente o comportamento das estruturas, justificando a elaboração do trabalho apresentado neste capítulo.

De forma simplificada, um edifício pode apresentar três tipos de comportamento global (modos de instabilidade):

- Flexão nos planos principais (Euler);

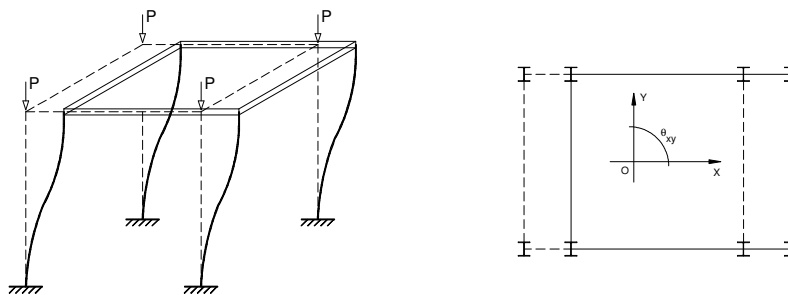


Figura 5.1 – Modos de instabilidade: Flexão no sentido da menor inércia.

– Torção pura;

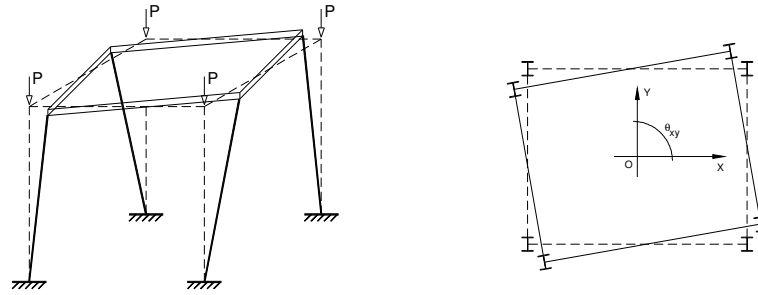


Figura 5.2 – Modos de instabilidade: Torção pura.

– Flexão-torção (combinação das duas anteriores).

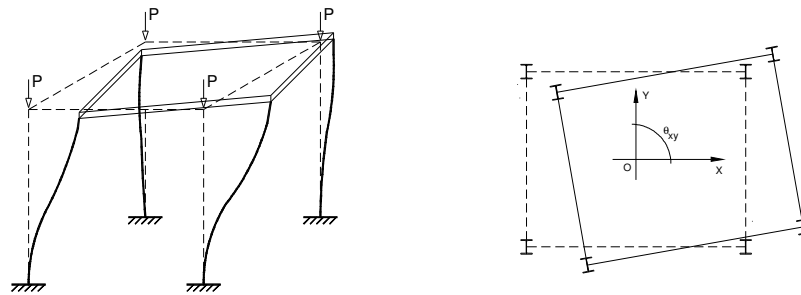


Figura 5.3 – Modos de instabilidade: Flexão-torção.

Para impedir estas deformações, geralmente são introduzidos “núcleos de rigidez” materializados por caixas de escadas/elevadores, paredes resistentes, diagonais, etc., que constituem o sistema de contraventamento do edifício, e cujo dimensionamento deve ser equacionado recorrendo a uma análise de 2ª ordem.

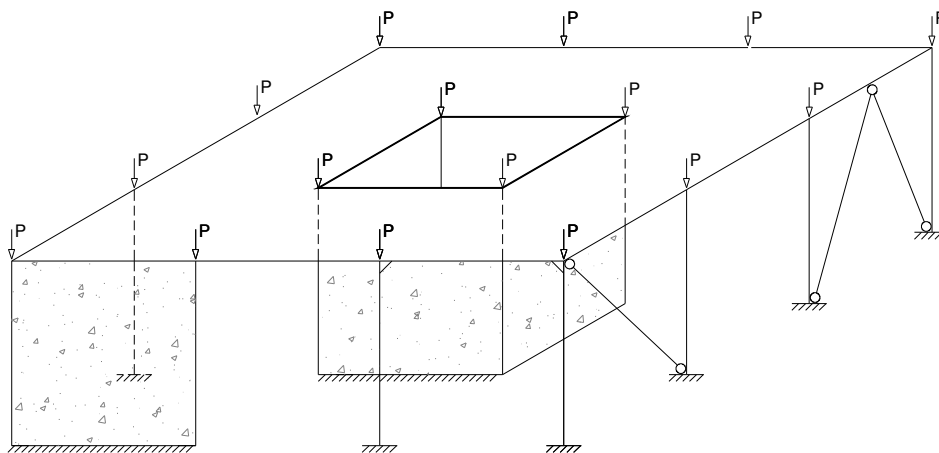
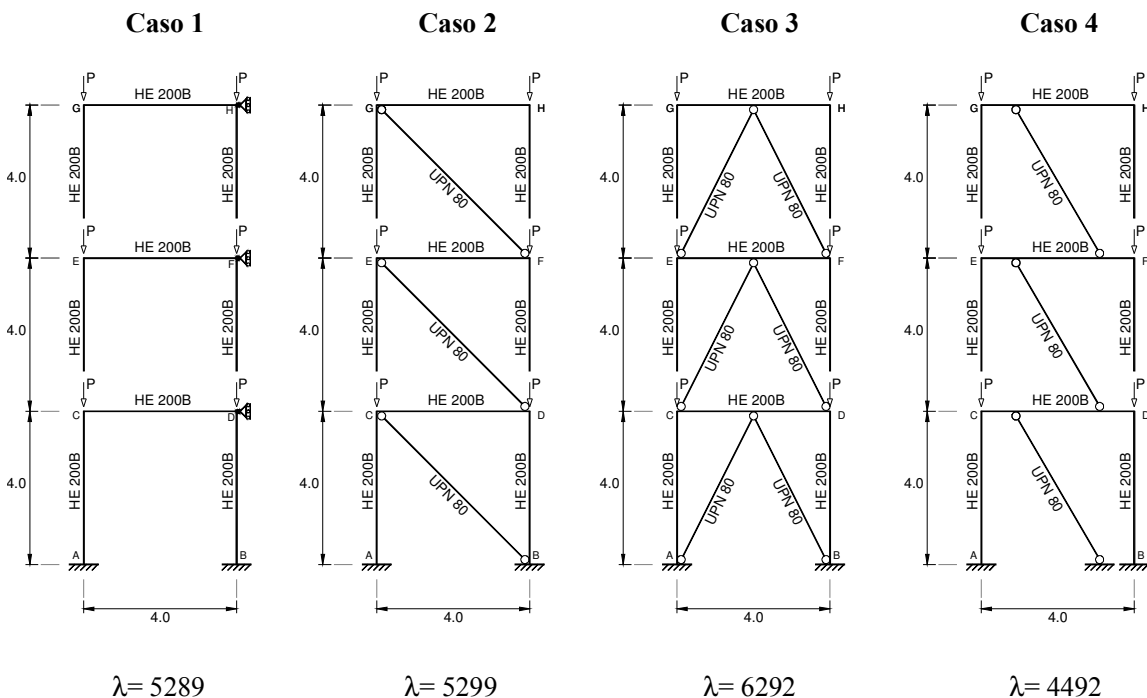


Figura 5.4 – Sistemas de contraventamento.

Nas estruturas analisadas neste capítulo, foram utilizados elementos de contraventamento, justificando a necessidade de elaborar um estudo sobre a sua disposição nos pórticos, para concluir qual a solução que otimiza o desempenho estrutural.



Quadro 5.1 – Sistemas de contraventamento – Parâmetro crítico.

Foram analisados 4 casos (Quadro 5.1), estudando a influência da disposição das diagonais no aumento da capacidade resistente da estrutura. O 1º caso, corresponde a um pórtico de nós fixos (sem diagonais) e no 2º apresenta-se um sistema de contraventamento constituído por 1 diagonal em cada piso. Os casos 3 e 4 constituem sistemas de contraventamento utilizados em estruturas sujeitas a acções sísmicas. Note-se, que todos os sistemas pretendem induzir na estrutura o comportamento de um pórtico de nós fixos (Caso 1).

Os pórticos foram analisados no SAP2000 com uma discretização de 4 elementos por barra e uma tolerância de 1e-6.

Da análise dos resultados obtidos, conclui-se que, a melhor solução corresponde à configuração de contraventamento indicada no caso 3, sendo a capacidade resistente aumentada devido ao incremento de rigidez da estrutura, ultrapassando o valor obtido para o pórtico de nós fixos. No entanto, esta disposição é a mais dispendiosa e como o objectivo é obter um contraventamento de pórtico de nós fixos, optou-se por utilizar a solução apresentada no segundo caso (1 diagonal).

5.3 PÓRTICO COM 3 PISOS (2D E 3D)

5.3.1 Descrição da estrutura

Neste primeiro caso, foi idealizada uma estrutura 3D de três pisos com simetria em planta e alçado (Figura 5.5) que consiste na repetição de um pórtico base 3D, com dupla simetria em planta (César e Barros 2003).

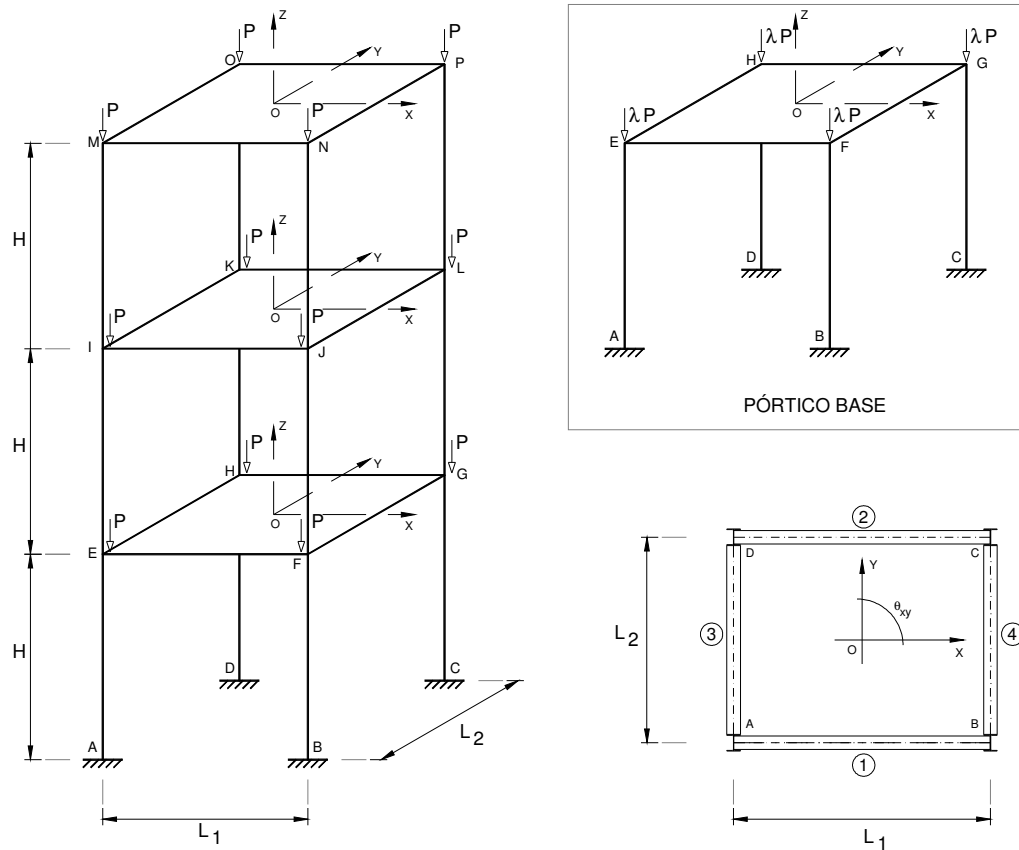
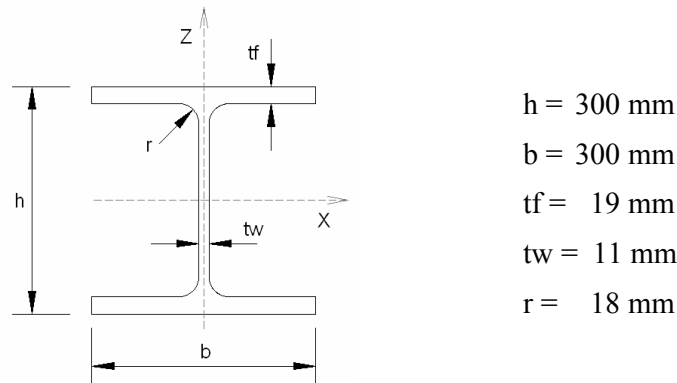


Figura 5.5 – Geometria da estrutura 3D (repetição do pórtico base), perspectiva e planta.

Assim, as estruturas tridimensionais analisadas, são obtidas através da repetição espacial do pórtico base, permitindo que o estudo paramétrico seja de fácil interpretação, garantindo a verificação das hipóteses admitidas através da modularidade da estrutura. No presente caso, existe uma repetição em altura do pórtico base.

Foi escolhido um perfil da série HEB (HE 300B), usual nos projectos de estruturas metálicas, quer para as vigas quer para os pilares, de forma a minorar diversidades de interpretação de resultados.

No Quadro 5.2 estão indicadas as principais características do perfil comercial utilizado.



$h = 300 \text{ mm}$
 $b = 300 \text{ mm}$
 $tf = 19 \text{ mm}$
 $tw = 11 \text{ mm}$
 $r = 18 \text{ mm}$

$A = 1.49\text{e-}2 \text{ m}^2$	$I_x = 2.517\text{e-}4 \text{ m}^4$	$I_z = 8.563\text{e-}5 \text{ m}^4$
----------------------------------	-------------------------------------	-------------------------------------

Quadro 5.2 – HE 300B – propriedades geométricas.

Para o sistema de contraventamento, constituído por barras diagonais, utilizaram-se elementos metálicos que possuem uma rigidez à flexão nula e uma área de 10cm^2 , inferior à adoptada para os pilares e vigas (149 cm^2). Esta secção garante o contraventamento necessário para impedir a translação horizontal das lajes. O aço utilizado possui um módulo de elasticidade $E=210 \text{ GPa}$.

5.3.2 Modelação Estrutural

Como o programa de cálculo automático INST3D começa por tratar os pórticos no plano, em primeiro lugar, identificam-se os pórticos 2D que definem a estrutura tridimensional, numerando-os e localizando-os no espaço relativamente a um sistema de eixos. Observando a Figura 5.5, verifica-se que os pilares são elementos comuns a vários pórticos 2D, o que implica especial cuidado na introdução das características mecânicas destes elementos, nomeadamente o momento de inércia, na modelação da estrutura.

Numa primeira análise, foram analisados os pórticos 2D sem elementos de contraventamento, determinando-se para cada pórtico o parâmetro crítico. Este estudo, permite evidenciar o desempenho estrutural dos pórticos 2D que compõem a estrutura tridimensional, e assim entender a influência de cada subestrutura no comportamento global (tridimensional), embora neste caso seja fácil identificar a importância de cada pórtico na deformação da estrutura.

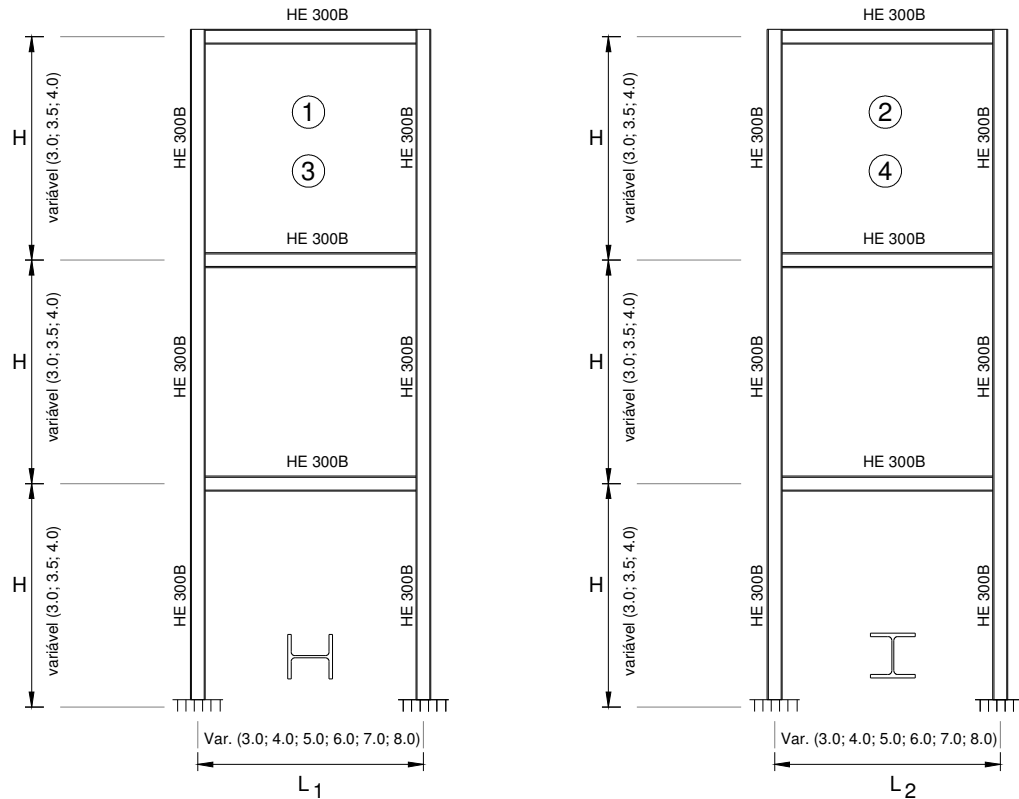


Figura 5.6 – Características dos pórticos 2D, que definem a estrutura 3D.

Note-se que, neste exemplo não foram consideradas cargas regulamentares, efectuando um estudo simplificado relativamente à quantificação das acções, mas válido para a avaliação do desempenho estrutural. Se forem consideradas as mesmas acções a actuar em cada piso, e lembrando que a estrutura é duplamente simétrica em planta, então a distribuição de cargas é equitativa, obtendo o mesmo valor para cada carga vertical concentrada nos pilares.

De seguida, procedeu-se ao estudo dos pórticos com elementos de contraventamento, alterando a sua disposição e localização, Figura 5.7. Após obter os parâmetros críticos para o pórtico 2D, com e sem contraventamento, foram alterados parâmetros associados à geometria da estrutura (altura inter-pisos e vãos entre pilares) para melhor compreender o comportamento da estrutura.

Estes parâmetros relativos à geometria global do pórtico plano, foram alterados realisticamente, nomeadamente o vão entre pilares ($L=L_1=L_2$) e a altura dos pisos (H). O parâmetro L varia entre 3m e 8m (com incrementos de 1.0m) enquanto o parâmetro H varia entre 3m e 4m, com incrementos de 0.5m. Para cada variação paramétrica foi determinada a carga crítica e o modo de instabilidade.

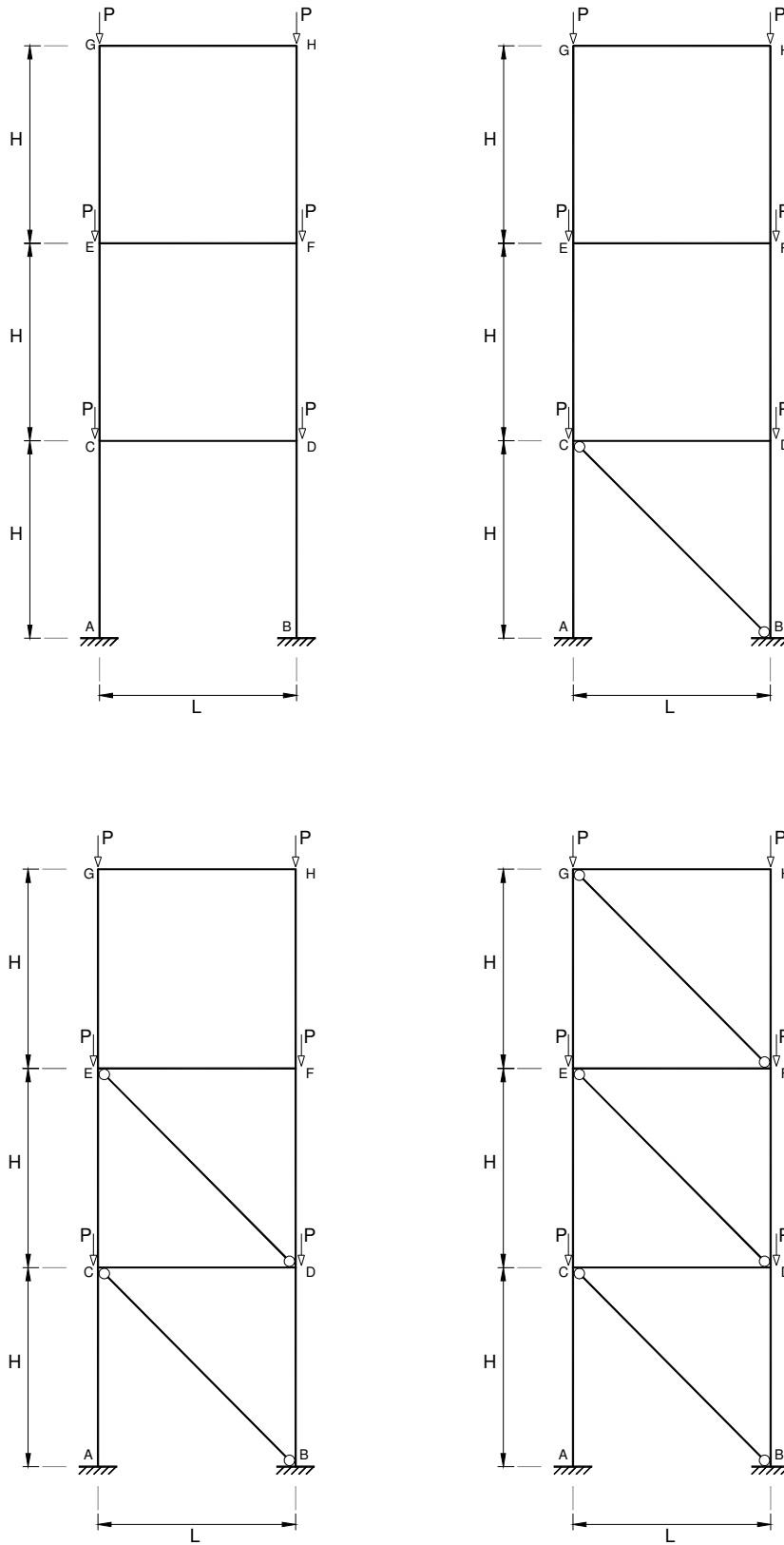


Figura 5.7 – Geometria dos pórticos 2D, com e sem diagonais de contraventamento.

Como foi referido, os pórticos 2D são subestruturas que, no seu conjunto, definem o esquema estrutural tridimensional ilustrado na Figura 5.5. O estudo dos pórticos 2D foi elaborado para estudar a capacidade do software na análise deste tipo de estruturas, mas também para poder relacionar o seu desempenho relativamente ao comportamento global da estrutura tridimensional.

Assim, o procedimento descrito para a análise dos pórticos 2D foi repetido para a estrutura tridimensional, efectuando a mesma variação paramétrica, ou seja, alterando os parâmetros associados à geometria da estrutura: o vão entre pilares ($L=L_1=L_2$) e a altura dos pisos (H), em que L varia entre 3m e 8m com incrementos de 1.0m e H varia entre 3m e 4m, com incrementos de 0.5m. Foi determinada, para cada variação paramétrica, a carga crítica e o modo de instabilidade.

De acordo com o algoritmo do INST3D, a carga crítica do sistema tridimensional será encontrada entre os limites definidos pelo maior e menor valor do parâmetro crítico, obtido para os pórticos 2D que constituem a estrutura 3D.

Também se utilizaram diagonais de contraventamento, para melhorar o desempenho global da estrutura 3D e assim assegurar o aumento da capacidade resistente do pórtico.

A introdução de um sistema de contraventamento, deve alterar o comportamento da estrutura, garantindo um modo de instabilidade associado a uma deformação que maximize a carga crítica, ou seja, uma configuração de pórtico de nós fixos.

Para estudar a influência da localização do sistema de contraventamento, no comportamento não linear geométrico da estrutura, foram modelados dois casos com diferentes disposições dos elementos de travamento da estrutura (diagonais).

A primeira disposição (Figura 5.8) é constituída por um contraventamento simétrico, garantido pela introdução de barras diagonais na totalidade dos pórticos 2D. Como o pórtico 3D é constituído pelos pórticos 2D inicialmente apresentados, as diagonais, vigas e pilares possuem as mesmas características geométricas e mecânicas.

O segundo caso de contraventamento, ilustrado na Figura 5.9, corresponde à introdução de um sistema de travamento assimétrico, no qual dois pórticos 2D adjacentes não possuem diagonais. Neste caso, existem dois pórticos com mobilidade de nós móveis, para qualquer configuração do sistema de contraventamento. Com este estudo, pretende-se compreender a importância dos pórticos não contraventados, na determinação da capacidade resistente da estrutura.

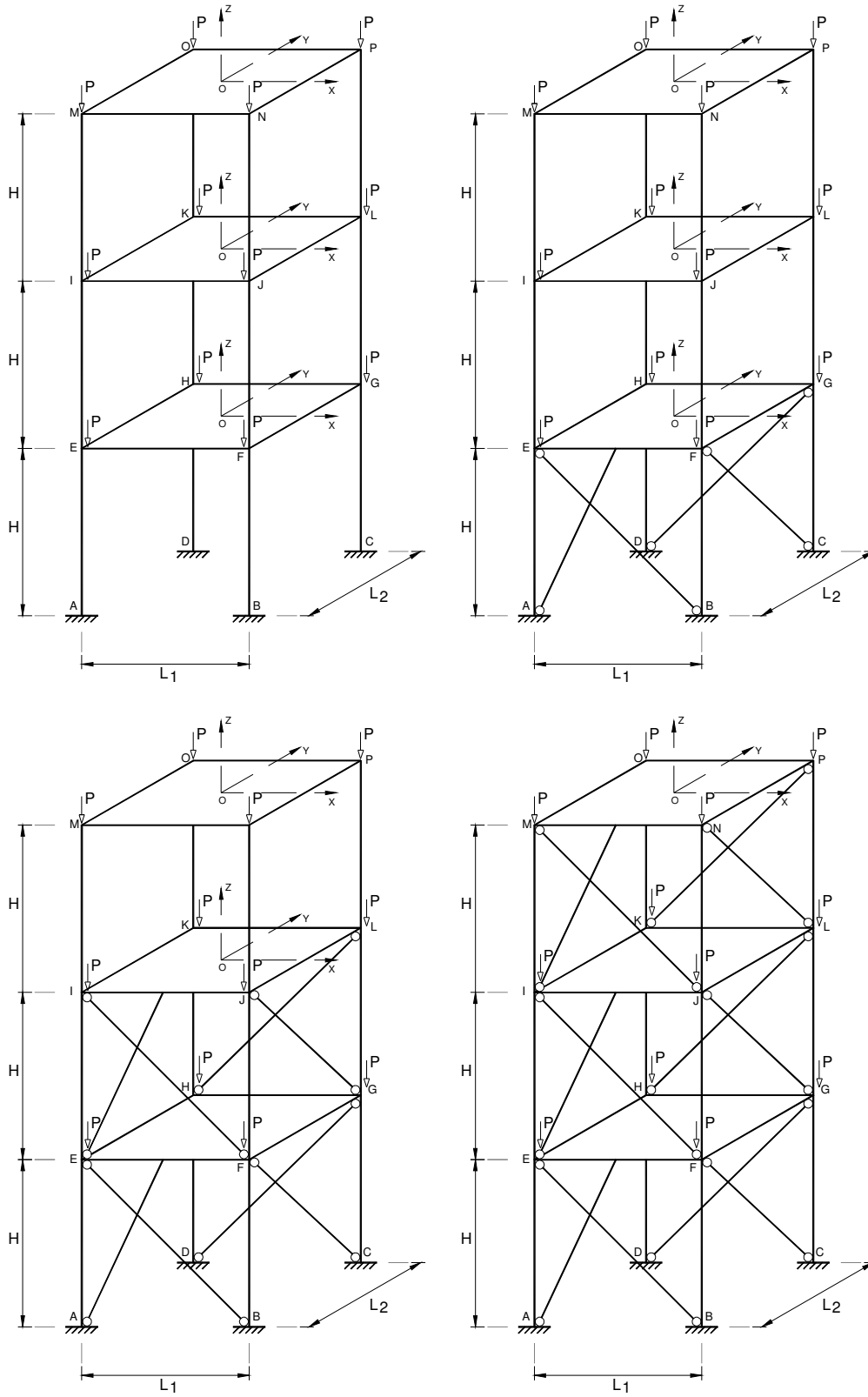


Figura 5.8 – Geometria dos pórticos 3D, com e sem contraventamento (simétrico).

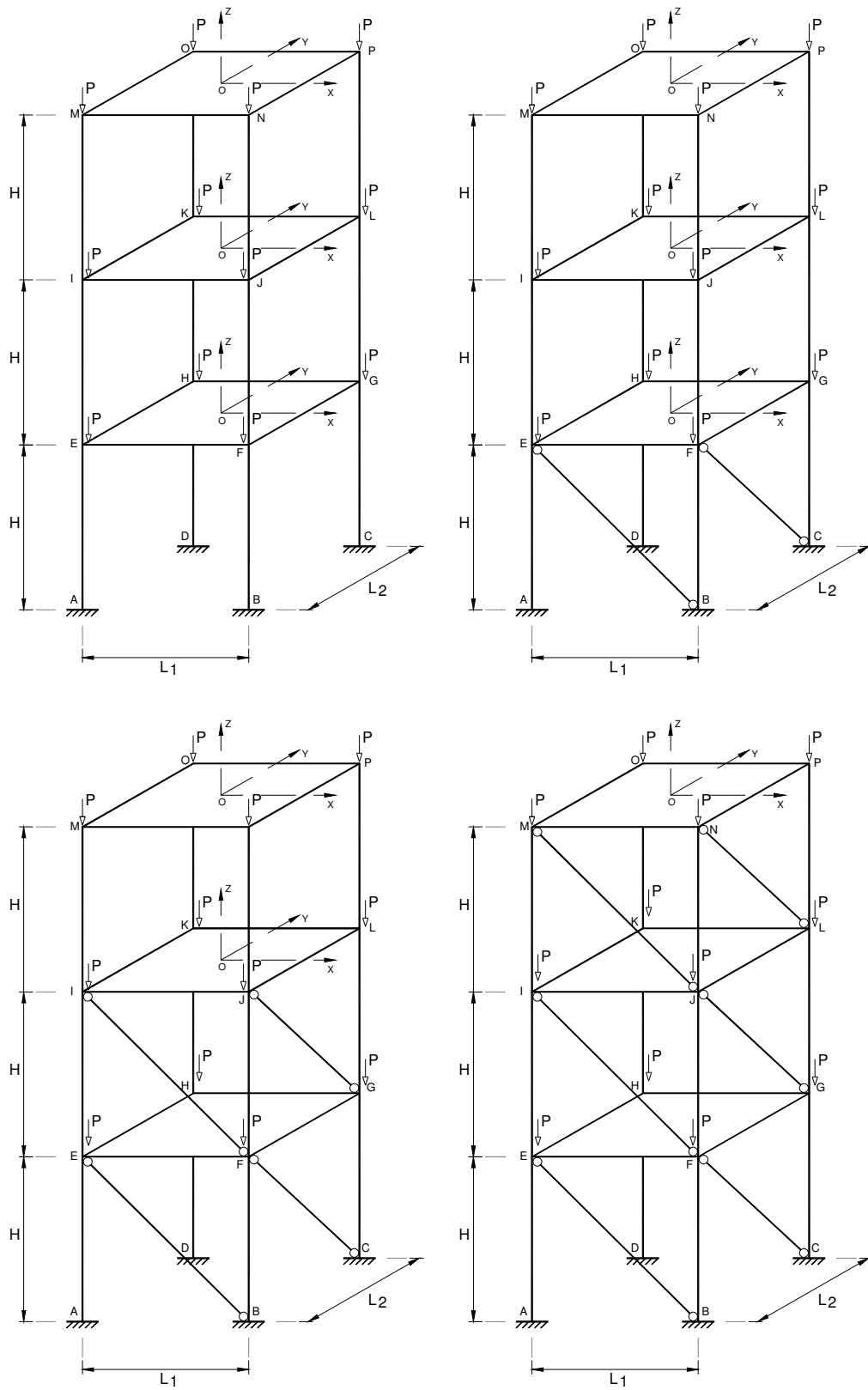


Figura 5.9 – Geometria dos pórticos 3D, com e sem contraventamento (assimétrico).

Pretende-se ainda, verificar a sua influência da disposição do contraventamento na mobilidade da estrutura, analisando a configuração de deformação do modo de instabilidade comparativamente à primeira disposição dos elementos diagonais.

De seguida, são apresentados os resultados obtidos para a referida variação paramétrica dos pórticos 2D e da estrutura 3D, para cada configuração do sistema de contraventamento, evidenciando os principais factores que influenciam o desempenho não linear geométrico das estruturas analisadas.

5.3.3 Resultados

Com a utilização do programa INST3D, determinaram-se o parâmetro de carga crítica e o modo de instabilidade, para cada configuração de contraventamento.

Em primeiro lugar, foram estudados os pórticos 2D, analisando a mobilidade da estrutura para as diferentes disposições das diagonais. Note-se que os pórticos 3D, com contraventamento simétrico e assimétrico, são combinações dos pórticos 2D apresentados na Figura 5.7.

Na Figura 5.10 estão ilustradas, para cada configuração de contraventamento, as deformadas associadas aos modos de instabilidade dos pórticos 2D.

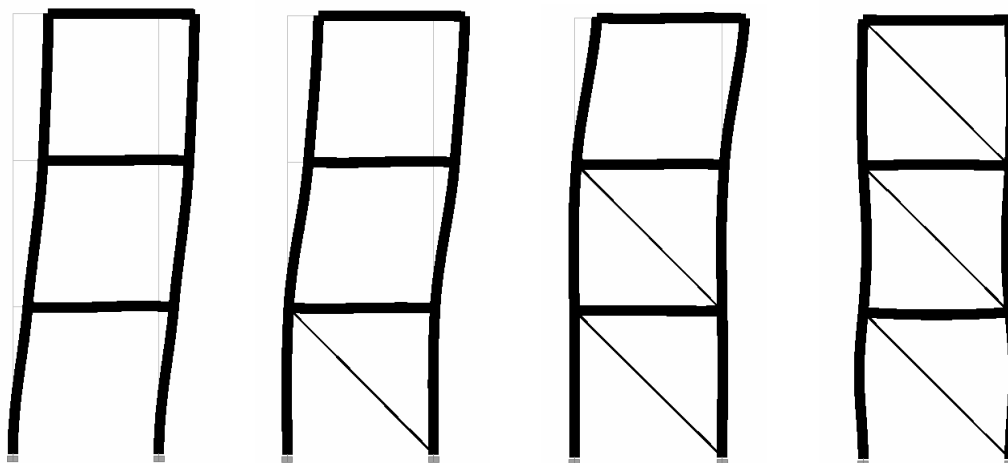


Figura 5.10 – Modo de instabilidade para cada pórtico 2D.

Quando não existe nenhum elemento de contraventamento, a estrutura tem uma deformação de nós móveis, apresentando translações horizontais dos nós que definem a ligação entre vigas e pilares. À medida que se introduzem elementos de contraventamento, a translação

desse nós fica impedida, alterando a mobilidade da estrutura pela indeformabilidade adquirida em cada piso com a introdução das diagonais. Quando todos os pisos estão contraventados, a estrutura tem um comportamento igual ao de um pórtico de nós fixos e a carga crítica pode ser determinada para esta configuração.

Com base nos resultados obtidos, foram elaborados os gráficos 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4, que ilustram o desempenho estrutural em função da variação da altura inter-pisos e do vão entre pilares (variação paramétrica). Os gráficos apresentados referem-se ao pórtico 2D que mobiliza maior inércia, tendo o pórtico de menor inércia o mesmo comportamento, mas com parâmetro crítico de valor mais reduzido.

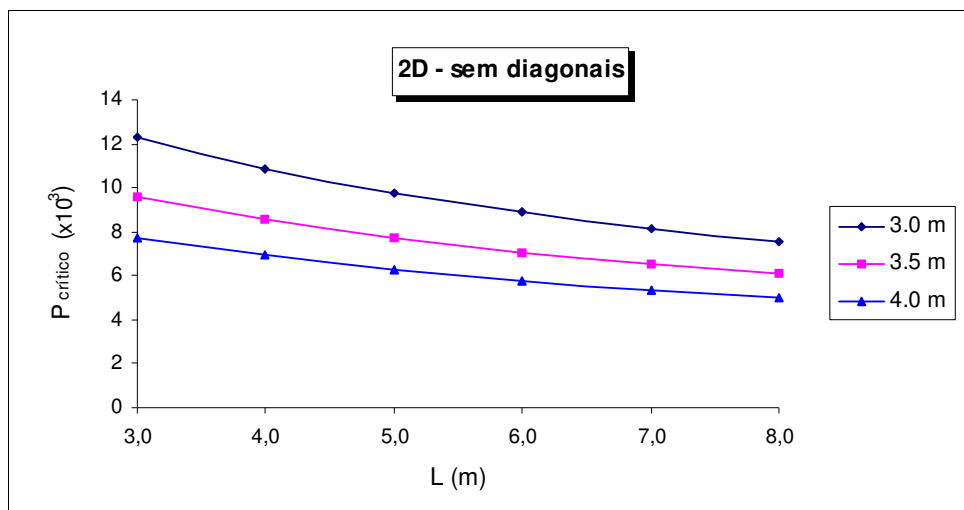


Gráfico 5.1 – Variação paramétrica (2D) – sem diagonais.

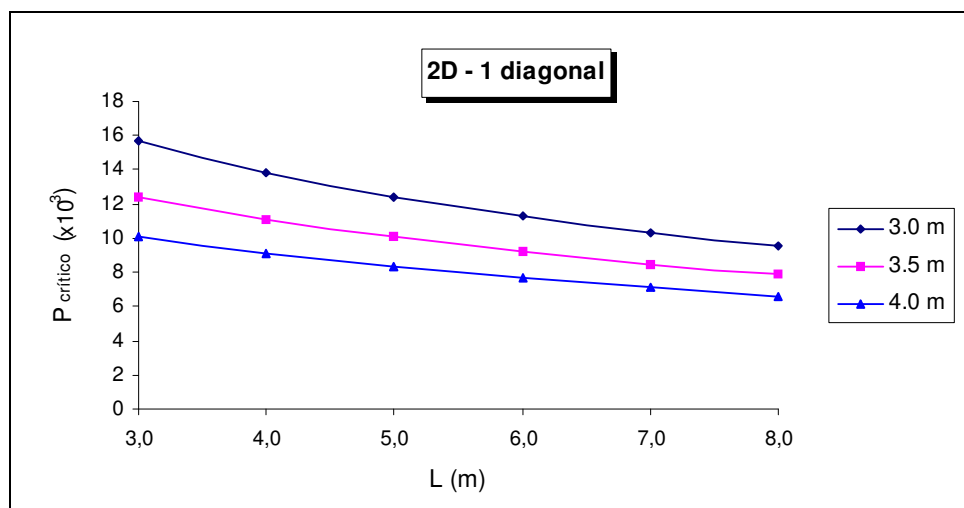


Gráfico 5.2 – Variação paramétrica (2D) – 1 diagonal.

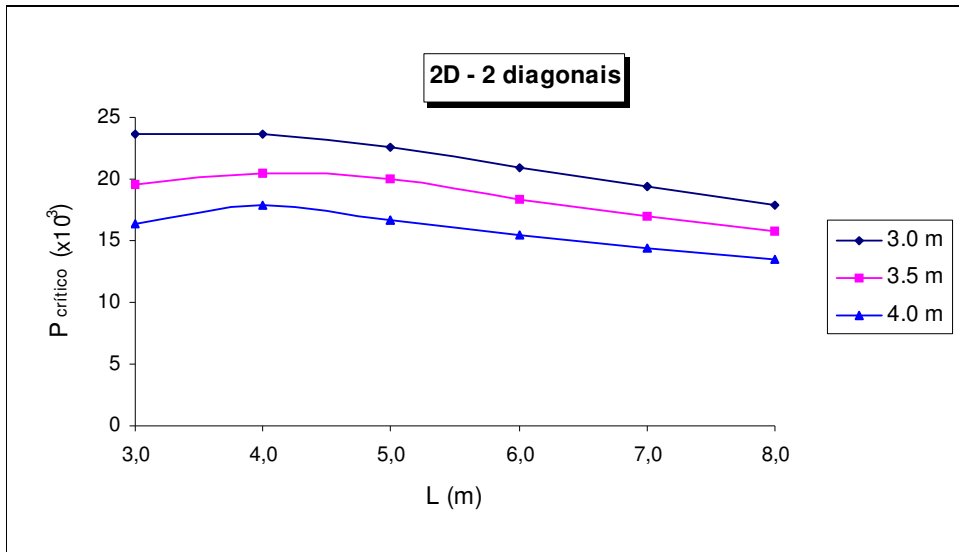


Gráfico 5.3 – Variação paramétrica (2D) – 2 diagonais.

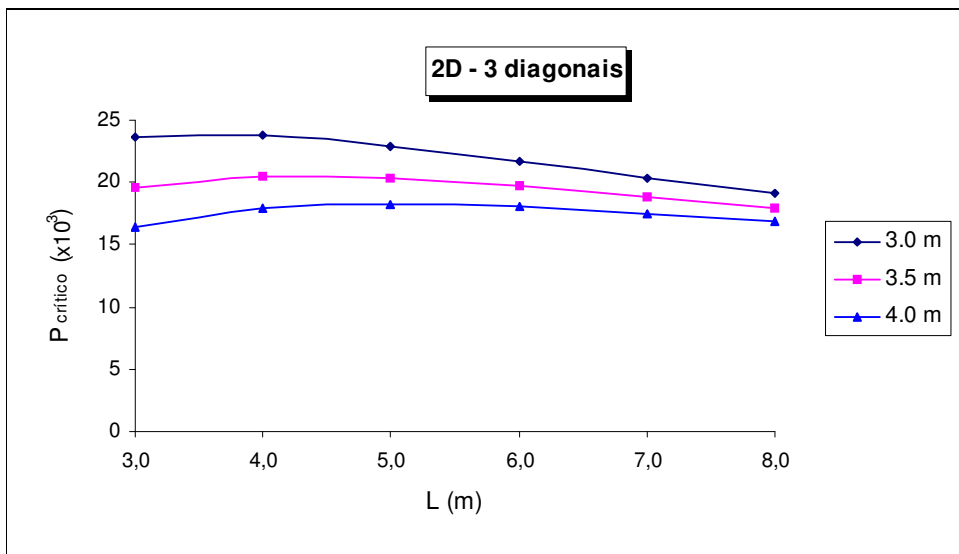


Gráfico 5.4 – Variação paramétrica (2D) – 3 diagonais.

Verifica-se que o melhor desempenho corresponde ao pórtico que apresenta todos os pisos contraventados, situação esperada, pois com este sistema de diagonais garante-se a indeformabilidade da estrutura (em todos os pisos). Nos dois primeiros gráficos, sem diagonais e com 1 diagonal, o pórtico apresenta o mesmo desenvolvimento das curvas da variação paramétrica, tendo uma ligeira concavidade positiva, diminuindo o valor do parâmetro crítico com o aumento da distância entre pilares. Note-se que nestes casos a estrutura tem uma deformada de pórtico de nós móveis, indicando que este padrão de traçado da curva está associado a este tipo de mobilidade.

No caso de existirem 2 e 3 diagonais, a estrutura apresenta um comportamento diferente do encontrado para os dois primeiros casos. Quando existem dois pisos contraventados, a deformação da estrutura encontra-se parcialmente impedida (dois pisos indeformáveis), pelo que a mobilidade estará compreendida entre uma situação de nós fixos e de nós móveis, sendo mais importante a contribuição dos pisos contraventados para o desempenho global da estrutura. Verifica-se, que o valor do parâmetro crítico para $L=3$ (com $H=3; 3,5$ e 4), é inferior ao parâmetro crítico para $L=4$, sendo atingido para este último caso o valor mais elevado da carga crítica. Este comportamento, pode ser justificado pela relevância dos pisos com diagonais na mobilidade da estrutura, indicando a importância da degradação das cargas nesses elementos e conseqüente comportamento indeformável. Como se pode observar na Figura 5.11, a melhor relação entre a altura e largura de um pórtico rectangular contraventado, para que a estrutura tenha um desempenho otimizado, corresponde à situação em que a estrutura apresenta o mesmo grau de deformabilidade nas duas direcções, ou seja, $\theta=45^\circ$. A configuração mais desfavorável corresponde a $\theta < 45^\circ$.

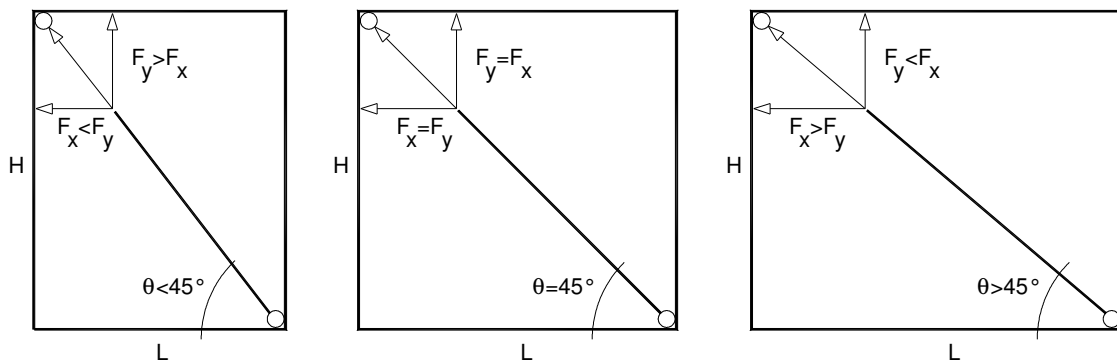
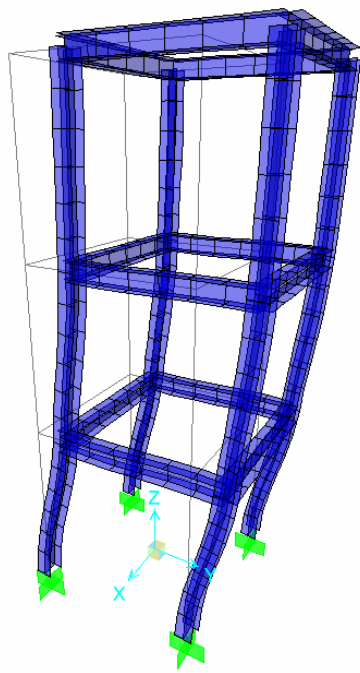


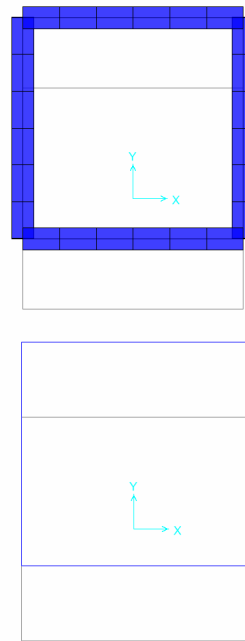
Figura 5.11 – Decomposição de forças nas diagonais para várias relações L/H.

As curvas que descrevem a variação paramétrica, para 2 e 3 diagonais, têm desenvolvimento semelhante; quando se aumenta a distância entre os pilares (L), a carga crítica sofre um diminuição menos acentuada do que nos dois primeiros casos estudados (sem diagonais ou com 1 diagonal), apresentando uma concavidade negativa.

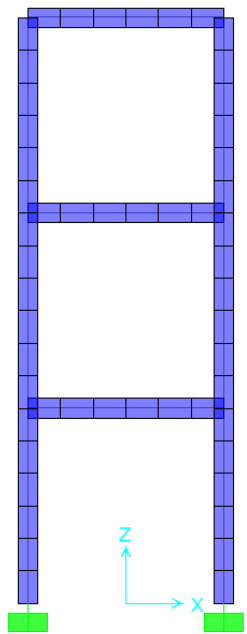
De seguida, serão apresentados os resultados obtidos com a variação paramétrica de L e H , no caso do pórtico tridimensional com contraventamento simétrico, e posteriormente para o pórtico assimétrico. Como o INST3D não possui ambiente gráfico, as figuras apresentadas foram obtidas através de capturas de imagens no SAP 2000. As configurações da deformação obtidas com este software e com o INST3D são equivalentes, justificando assim o recurso ao ambiente gráfico do SAP 2000.



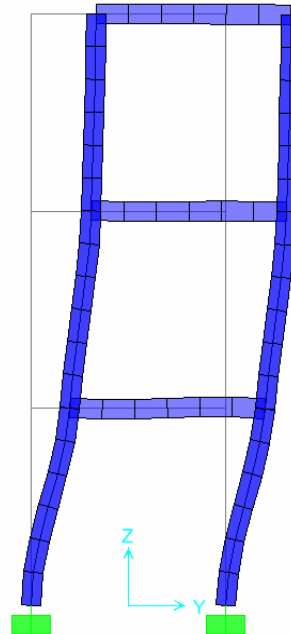
a) perspectiva



b) planta

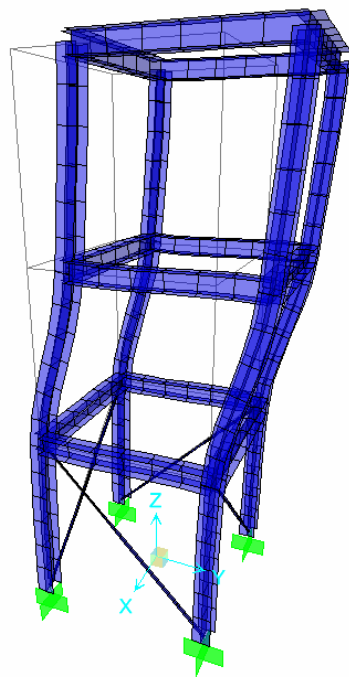


c) alçado X-Y

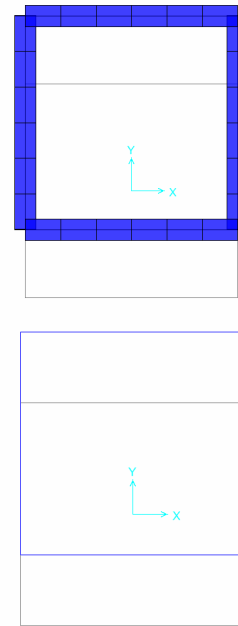


d) alçado Y-Z

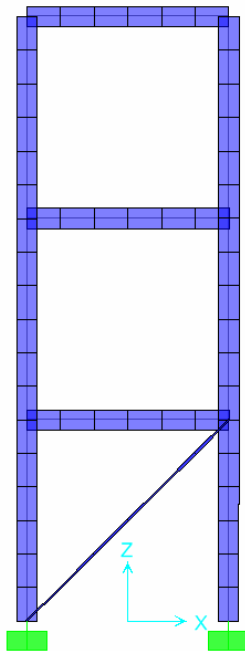
Figura 5.12 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D sem diagonais (L=3, H=3).



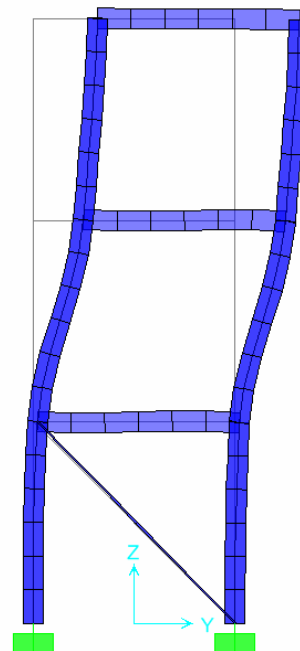
a) perspectiva



b) planta

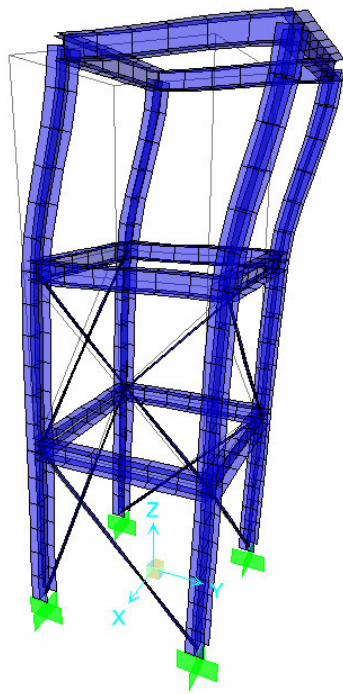


c) alçado X-Y

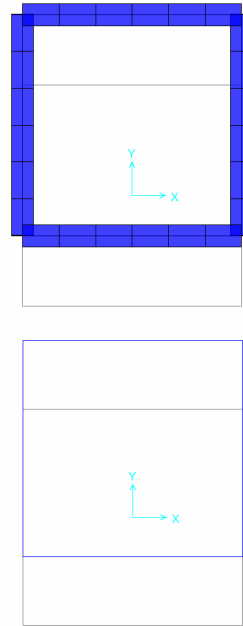


d) alçado Y-Z

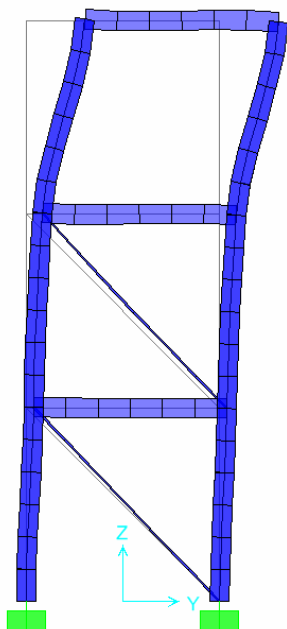
Figura 5.13 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 1 diagonal (L=3, H=3).



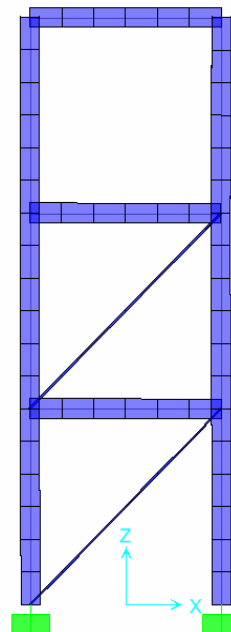
a) perspectiva



b) planta

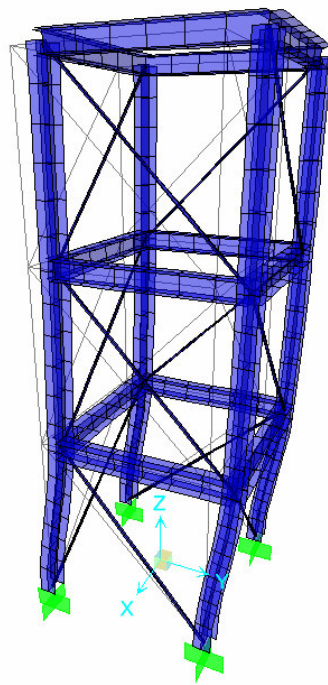


c) alçado X-Y

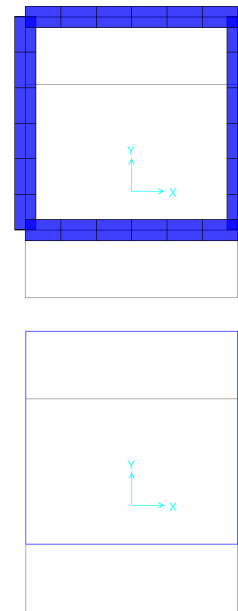


d) alçado Y-Z

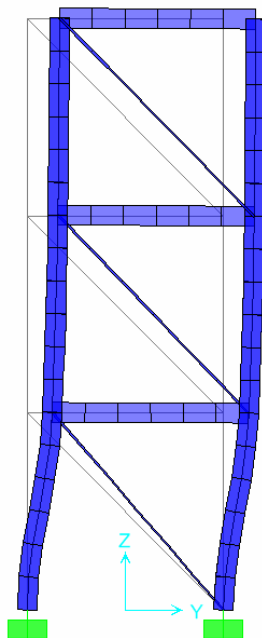
Figura 5.14 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 2 diagonais ($L=3$, $H=3$).



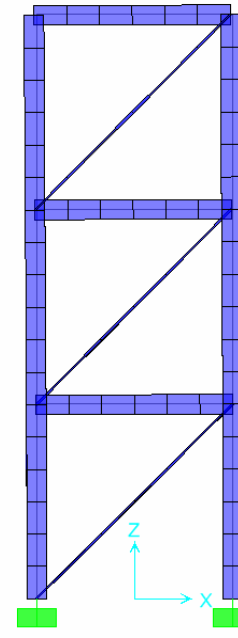
a) perspectiva



b) planta



c) alçado X-Y



d) alçado Y-Z

Figura 5.15 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 3 diagonais.

Analisando a deformação dos pórticos 3D para cada configuração de contraventamento, conclui-se que a estrutura apresenta um comportamento diferente ao encontrado para os pórticos 2D trabalhando isoladamente, sobretudo para as situações de 2 e 3 pisos contraventados. Quando os pórticos 2D possuem 2 e 3 diagonais nos pisos, a estrutura tem a translação horizontal das lajes impedida (pórtico de nós fixos), situação que não se verifica no caso do pórtico 3D, em que a estrutura apresenta uma translação parcial, Figuras 5.14 e 5.15. Desta análise, conclui-se que foi adoptado um sistema de contraventamento insuficiente, em que as diagonais não têm a capacidade resistente necessária para impedir a deformação do pórtico que define o piso.

Como as diagonais são constituídas por barras biarticuladas, a capacidade resistente fica definida pela área da secção. Duplicando-se a área da secção ($A= 20 \text{ cm}^2$), observa-se que a estrutura passa a ter um comportamento de pórtico de nós fixos nos pisos contraventados, sem translação dos nós que definem o diafragma rígido (lajes), Figura 5.16.

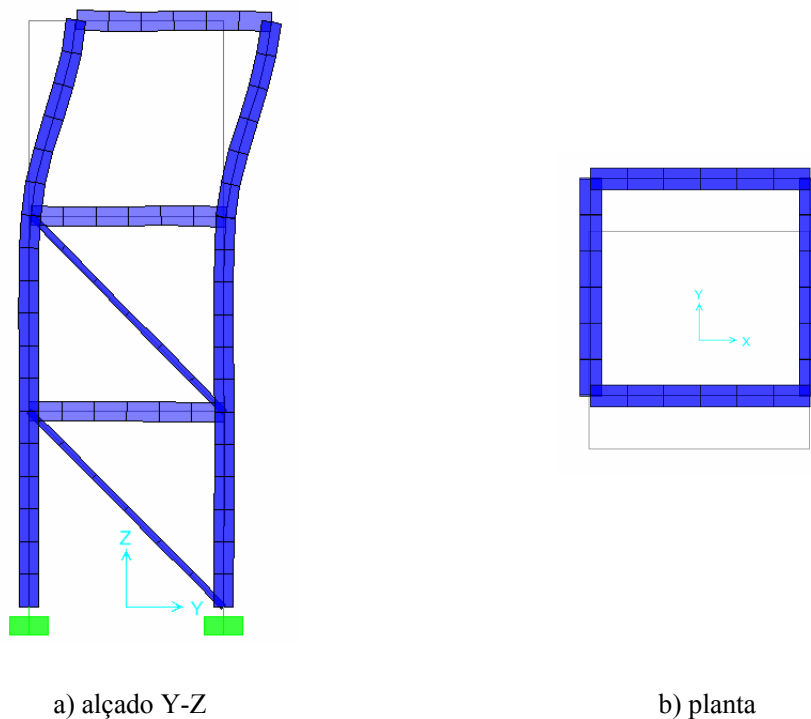


Figura 5.16 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 2 diagonais ($A=20\text{cm}^2$).

Conclui-se que é necessário estudar convenientemente as características mecânicas das diagonais, para obter um eficiente sistema de contraventamento e assim maximizar a capacidade resistente.

Analisando as plantas do pórtico na configuração deformada, verifica-se que o 1º modo de instabilidade está associada à flexão na direcção de menor inércia dos pilares. Como seria de esperar, a maior translação de piso corresponde ao caso em que a estrutura não possui diagonais.

Comparando o comportamento dos pórticos 2D e 3D, verifica-se que o desempenho da estrutura tridimensional não pode ser obtida directamente da análise dos pórticos 2D, uma vez que a configuração de deformação do sistema pode não corresponder à obtida com os pórticos 2D trabalhando isoladamente.

De seguida, apresentam-se os gráficos relativos ao estudo paramétrico.

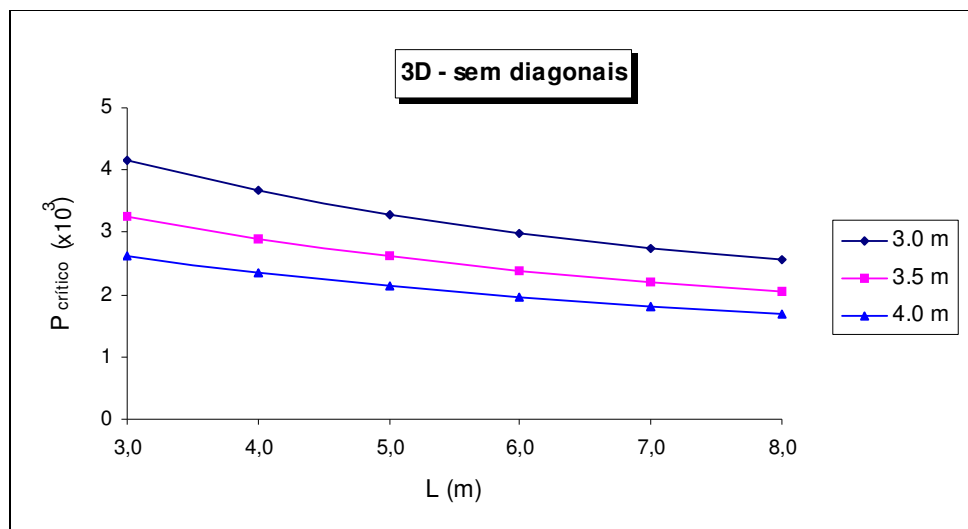


Gráfico 5.5 – Variação paramétrica (3D) – sem diagonais.

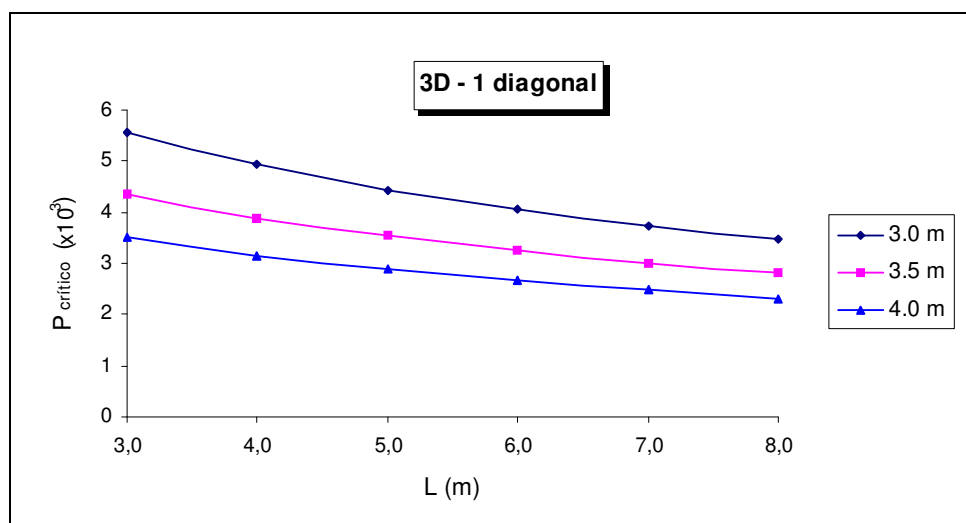


Gráfico 5.6 – Variação paramétrica (3D) – 1 diagonal.

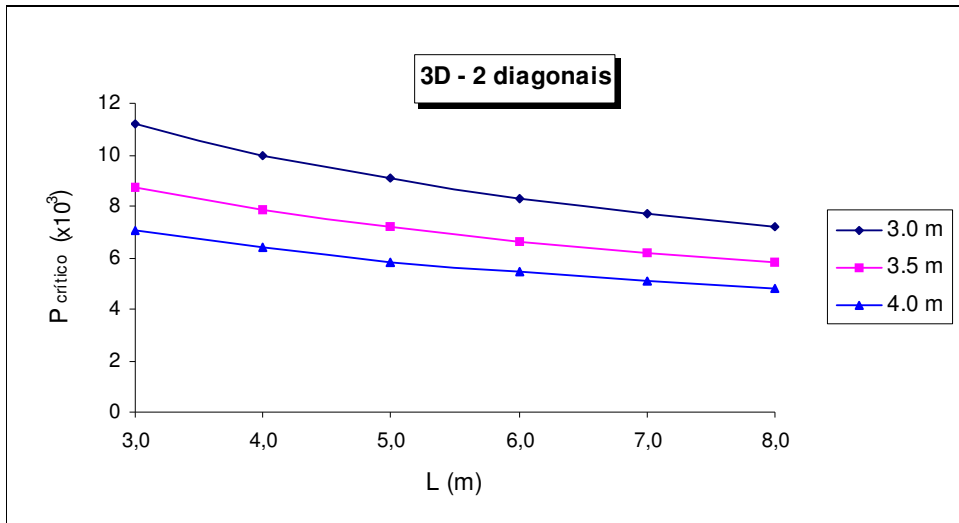


Gráfico 5.7 – Variação paramétrica (3D) – 2 diagonais.

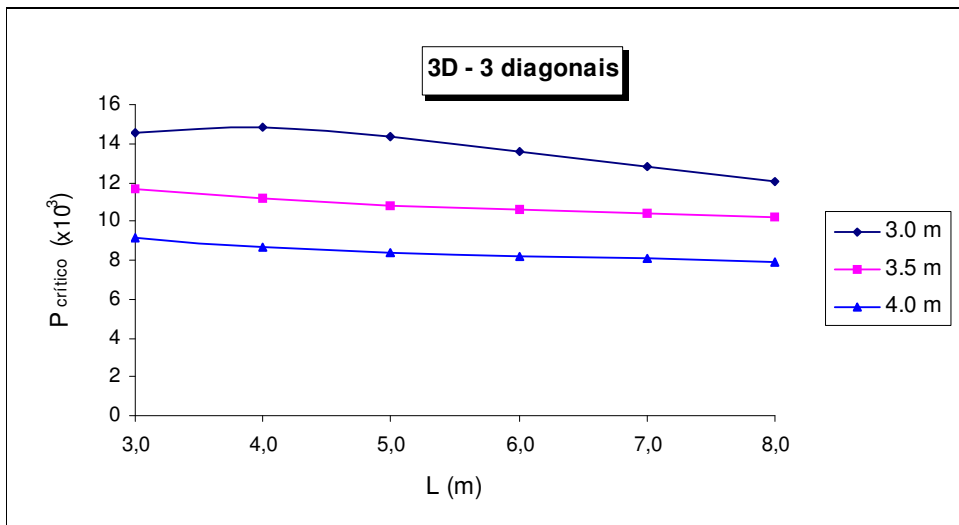
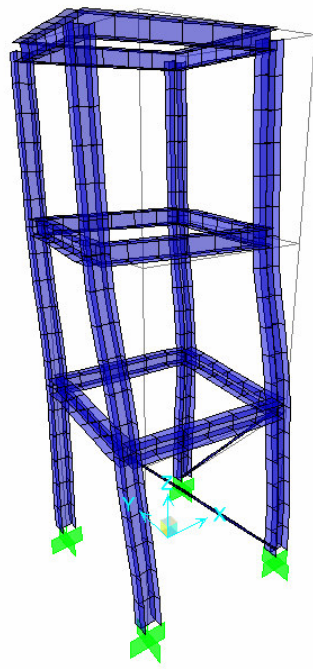


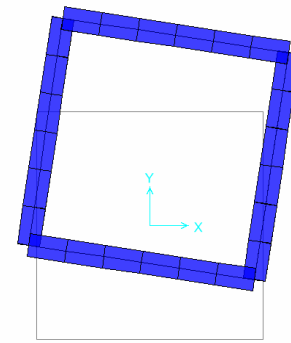
Gráfico 5.8 – Variação paramétrica (3D) – 3 diagonais.

Em primeiro lugar, constata-se que o gráfico da variação paramétrica, para o caso de existirem 3 diagonais, apresenta um comportamento diferenciado em relação aos restantes casos de contraventamento. Para os 3 primeiros casos, sem diagonais, 1 e 2 diagonais, observa-se um desenvolvimento das curvas idêntico ao obtido para os pórticos 2D, com deformações associadas à mobilidade de nós móveis. No caso de 3 diagonais, as curvas são praticamente horizontais ($P_{cr} \approx \text{constante}$), com exceção de $H=3.0$ m, que corresponde ao sistema mais compacto e conseqüentemente menos deformável (para valores reduzidos de L).

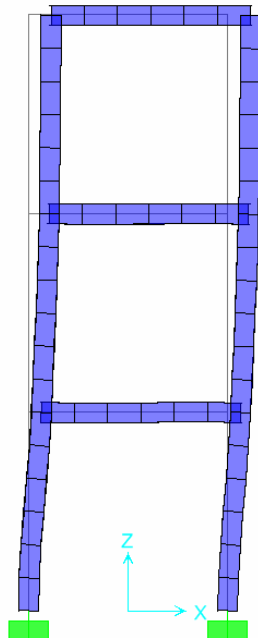
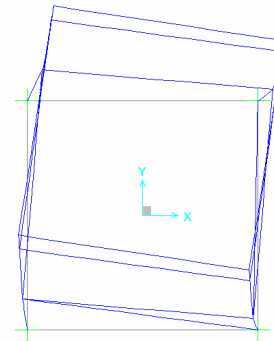
O mesmo estudo foi elaborado para o pórtico 3D com um sistema de contraventamento assimétrico, tendo obtido os resultados que se seguem.



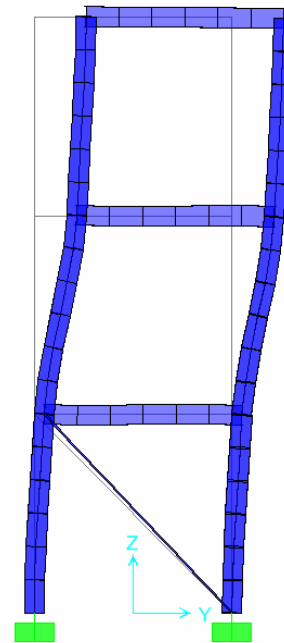
a) perspectiva



b) planta

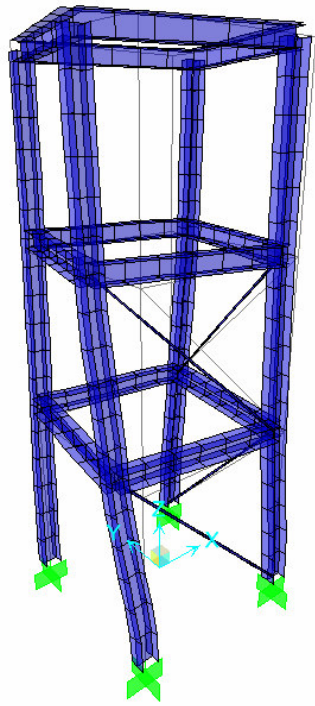


c) alçado X-Y

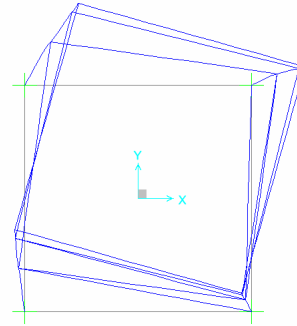
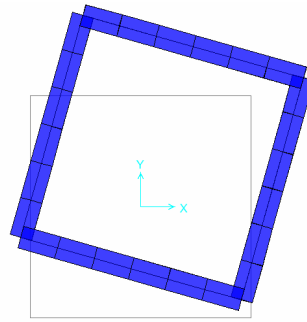


d) alçado Y-Z

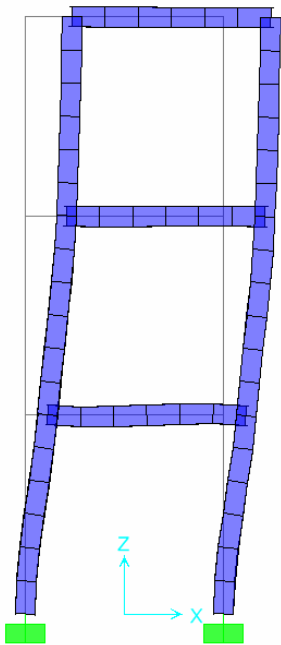
Figura 5.17 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 1 diagonal assimétrica (L=3, H=3).



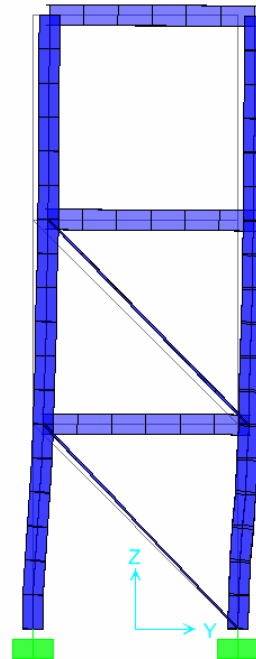
a) perspectiva



b) planta

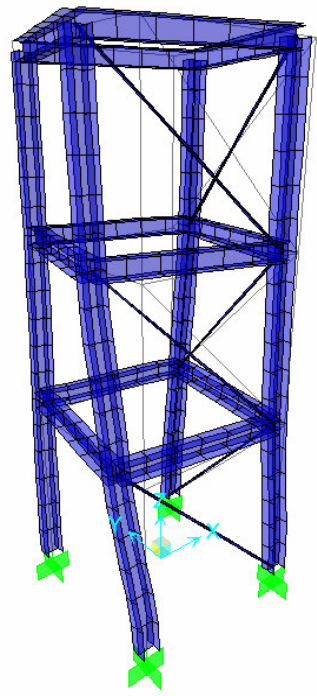


c) alçado X-Y

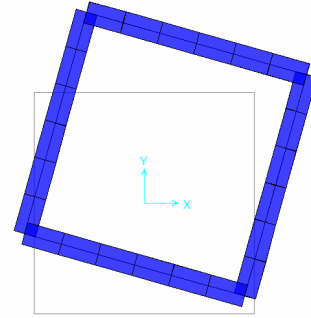


d) alçado Y-Z

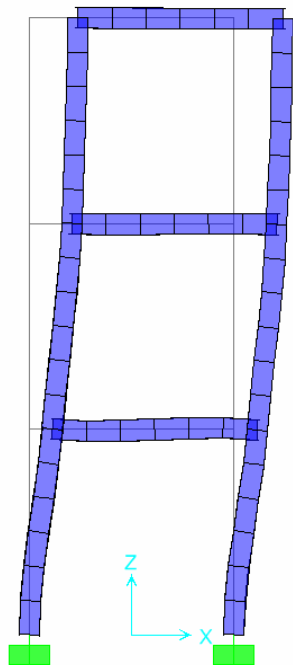
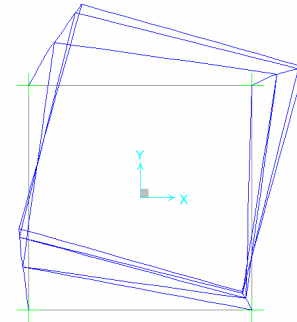
Figura 5.18 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 2 diagonais assimétricas (L=3, H=3).



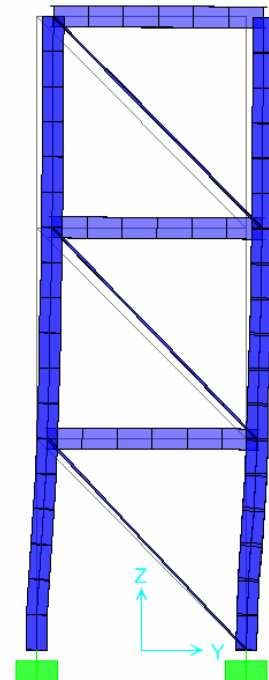
a) perspectiva



b) planta



c) alçado X-Y



d) alçado Y-Z

Figura 5.19 – Modo de instabilidade para o pórtico 3D com 3 diagonais assimétricas ($L=3$, $H=3$).

Observando os modos de instabilidade, constata-se que a estrutura perde a estabilidade apresentando simultaneamente translações (Δ_x , Δ_y) e rotação (θ_z) ao nível das lajes. Como seria de esperar, a assimetria do sistema de contraventamento influencia o modo de instabilidade, induzindo uma deformação assimétrica, com rotação das lajes. Os pórticos que possuem diagonais são mais rígidos, pelo que o centro de torção da estrutura se desloca na sua direcção, provocando a rotação do diafragma rígido (laje).

A estrutura com menor número de diagonais (primeiro piso) apresenta a maior deformação, exibindo uma configuração de nós móveis (grandes translações dos nós que definem as lajes).

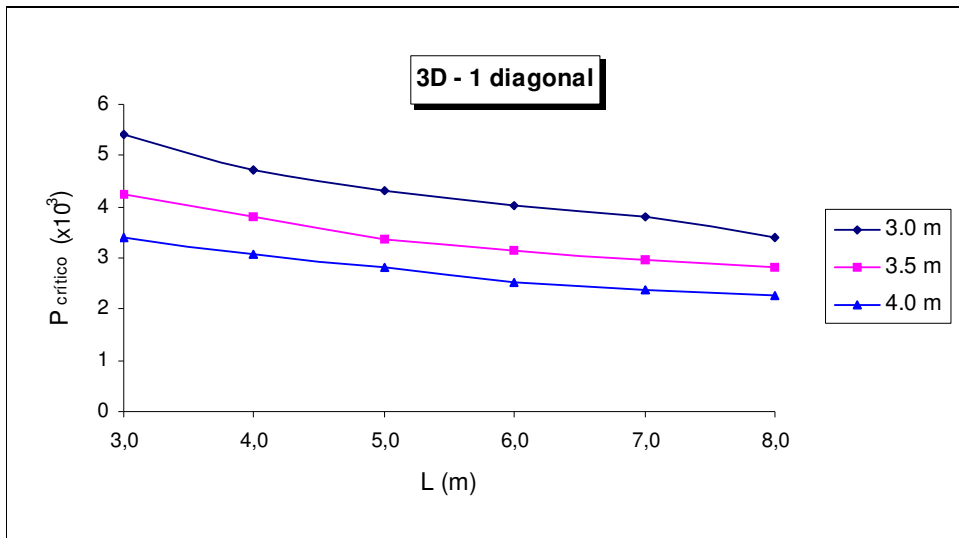


Gráfico 5.9 – Variação paramétrica (3D) – 1 diagonal assimétrica.

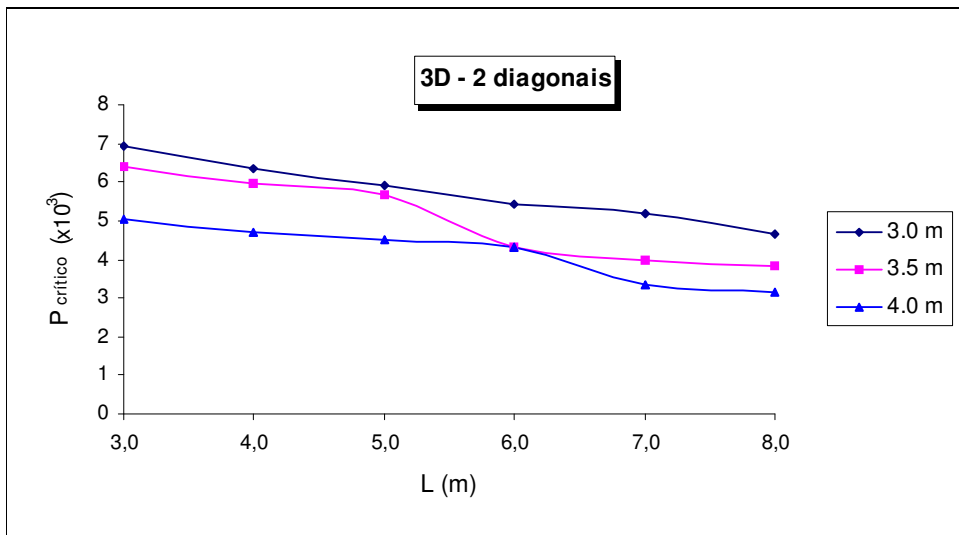


Gráfico 5.10 – Variação paramétrica (3D) – 2 diagonais assimétricas.

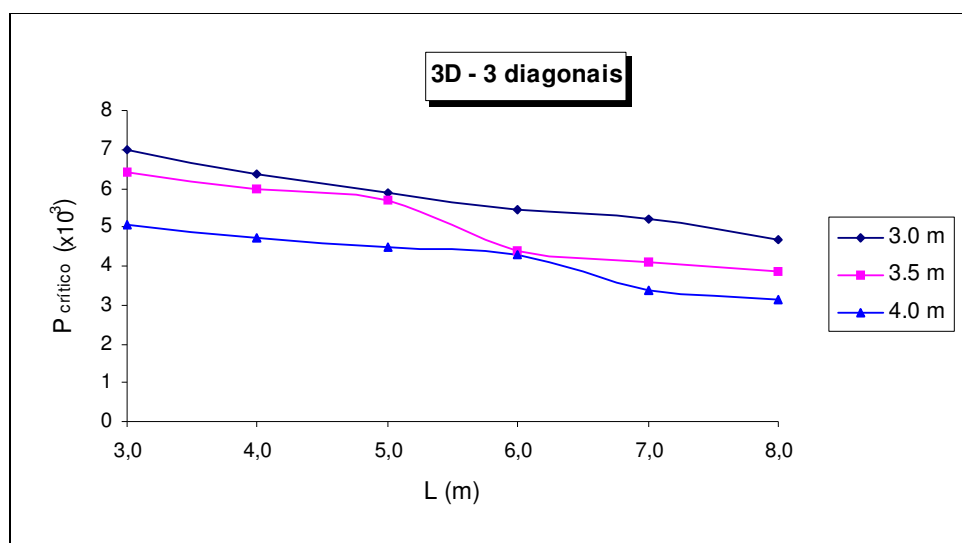


Gráfico 5.11 – Variação paramétrica (3D) – 3 diagonais assimétricas.

Pode-se também concluir que, quando existem 2 e 3 diagonais, as deformadas são coincidentes, indicando que não houve incremento da capacidade resistente com a introdução de diagonais no último piso. Esta conclusão é validada através dos resultados obtidos com a variação paramétrica (Gráficos 5.9, 5.10 e 5.11), verificando-se que as curvas relativas à variação do parâmetro crítico para estes dois casos são iguais (o gráfico 5.10 é praticamente igual ao 5.11). Assim, para a estrutura com este sistema de contraventamento, é indiferente ter dois ou três pisos contraventados.

Analisando as plantas das deformadas, nota-se que as rotações encontradas para os pisos que não possuem elementos de contraventamento (pisos superiores) são praticamente constantes, apresentando maior rotação as lajes que possuem diagonais nos pisos inferiores.

Recorrendo ao gráfico 5.9 (1 diagonal no piso inferior), verifica-se que o pórtico apresenta uma curva da variação paramétrica com evolução similar à apresentada para o caso do contraventamento simétrico (também com 1 diagonal no piso inferior), associando-a ao comportamento de um pórticos de nós móveis.

A elaboração da variação paramétrica, permitiu identificar um comportamento singular, quando a estrutura tem o primeiro e o segundo pisos com diagonais. Nos gráficos, verifica-se que para uma determinada distância entre pilares, a estrutura apresenta uma perda significativa da capacidade resistente, aparecendo um patamar no traçado da curva. Esta situação ocorre para duas alturas inter-pisos, $H = 3.5\text{m}$ e 4.0m , e respectivamente para distâncias entre pilares de $L = 5.0\text{m}$ e 6.0m , indicando uma relação entre H e L para que esta alteração na capacidade de carga aconteça.

Este comportamento pode ser explicado considerando que a transmissão de carga pelas diagonais para as lajes que se encontram entre dois pisos contraventados é alterada quando se atinge um determinado vão entre pilares (L), em função da altura entre pisos (H). Para justificar este comportamento, foi refinado o intervalo da variação paramétrica, analisando o pórtico para incrementos de 0,1m na distância entre pilares, tendo obtido resultados concordantes com a evolução das curvas observadas nos gráficos.

Nesta análise, pretende-se estudar o modo de instabilidade da estrutura (configuração das deformadas), Quadro 5.3, para encontrar alterações no comportamento que justifiquem a resposta da estrutura.

Lajes	L= 4.9m ($\lambda_{crit} = 5724,289$)			L= 5.0m ($\lambda_{crit} = 5697,800$)			L= 5.1m ($\lambda_{crit} = 4644,619$)		
	Δ_x	Δ_y	θ_z	Δ_x	Δ_y	θ_z	Δ_x	Δ_y	θ_z
3	-0,9555	0,5454	-0,8237	-0,9551	0,5509	-0,8294	-1,0000	0,4451	-0,6421
2	-1,0000	0,4819	-0,7228	-1,0000	0,4858	-0,7260	-0,7674	0,3729	-0,5335
1	-0,5688	0,2346	-0,3756	-0,5658	0,2352	-0,3752	-0,3730	0,1661	-0,2475

Quadro 5.3 – Modo de instabilidade (INST3D) com 2 diagonais assimétricas para H=3.5.

Para uma distância entre pilares inferior a 5.0m, a laje que apresenta maior translação no eixo x (Δ_x), é a do 2º piso. Quando se ultrapassa este vão, as lajes apresentam deformações crescentes com o aumento do número de pisos, sendo a laje do 3º piso a que tem maior translação Δ_x .

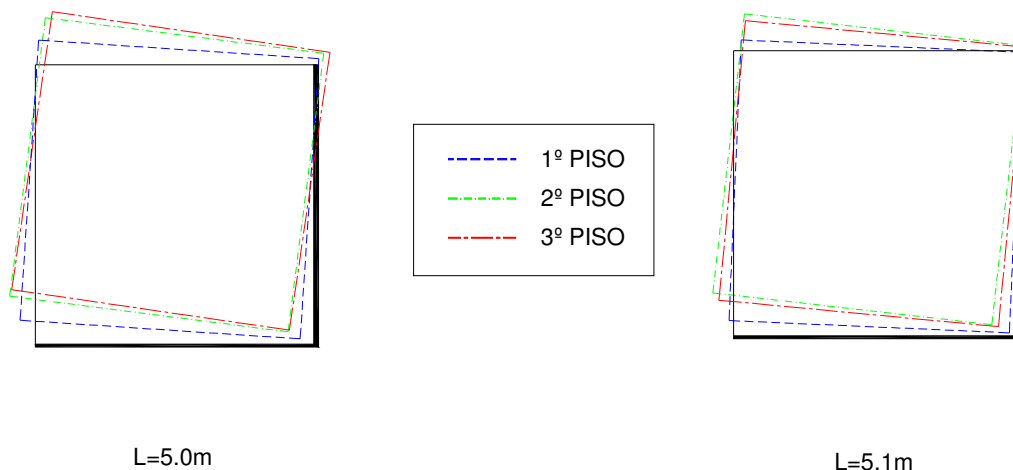


Figura 5.20 – Modos de instabilidade com 2 diagonais assimétricas (H=3.5).

Na Figura 5.20, elaborada com os valores obtidos para os deslocamentos das lajes (Quadro 5.3), estão representados os modos de instabilidade para $L = 5.0\text{m}$ e 5.1m . Nesta figura, verifica-se que as rotações e translações das lajes são mais homogéneas para $L = 5.1\text{m}$. O padrão de deformação é, no entanto, distinto nos dois casos. Para $L = 5.0\text{m}$ a estrutura tem maior rotação ao nível das lajes e menor translação da laje do 3º piso na direcção de Δ_x (direcção de menor inércia) do que no caso de $L = 5.1\text{m}$. Neste último caso, os deslocamentos das lajes do 2º e 3º pisos são praticamente coincidentes, sendo válido o raciocínio apresentado para o comportamento dos pisos que não possuem diagonais. A laje do piso superior tem um maior deslocamento relativo entre pisos, pelo que a estrutura apresenta um comportamento de pórtico de nós móveis mais evidente, justificando a perda de capacidade resistente. Desta forma, o piso que não apresenta diagonais, passa a ter um papel fundamental no desempenho estrutural.

Fazendo uma relação entre L e H , verifica-se que a perda de capacidade resistente ocorre para valores próximos de $L = 2/3 \cdot H$. Quando $L < 2/3 \cdot H$, as diagonais concentram a deformação na laje do segundo piso, provocando um maior deslocamento nesta laje comparativamente à laje do piso superior. Para $L > 2/3 \cdot H$, o efeito das diagonais é menos significativo e neste caso, a resposta da estrutura passa a ser comandada pela rigidez do 3º piso. Note-se que esta situação só acontece quando existem 2 e 3 pisos com diagonais, o que significa que, quanto mais indeformável for a estrutura (aproximação do pórtico de nós fixos), mais o seu comportamento depende da localização dos elementos de contraventamento.

Assim, conclui-se que na análise de instabilidade não se pode efectuar extrapolações sobre o comportamento de uma estrutura baseadas numa geometria inicial, sobretudo se essa geometria não for simétrica ou com contraventamento simétrico. O desempenho da estrutura deve ser analisado tendo em conta todos os parâmetros que definem o comportamento estrutural, determinando fenómenos pontuais que condicionam a capacidade resistente.

Embora algumas das conclusões apresentadas possam ser adaptadas à generalidade dos casos, convém referir que qualquer conclusão deve ser formulada com base nos resultados obtidos após análise criteriosa da estrutura.

5.4 PÓRTICO 3D COM 5 PISOS

5.4.1 Descrição da estrutura

O exemplo seguinte, refere-se a um edifício de habitação a realizar em estrutura metálica, para o qual se pretende determinar o parâmetro crítico e o modo de encurvadura (César e Barros 2004, 2004a).

A estrutura, embora não tenha sido construída, foi pré-dimensionada, utilizando a quantificação das acções preconizadas nos regulamentos RSA e EUROCÓDIGO 1, de forma a obter secções com características reais.

Foram consideradas as seguintes acções:

- Peso próprio dos elementos;
- Restantes cargas permanentes e paredes divisórias;

	R. C. P + P. D.
Habitação:	2.5 kN/m ²
Coberturas:	1.5 kN/m ²

Quadro 5.4 – Cargas permanentes e paredes divisórias.

- Sobrecarga;

	Sobrecarga
Habitação:	2.0 kN/m ²
Coberturas:	1.0 kN/m ²

Quadro 5.5 – Sobrecarga em edifícios – RSA.

e foram utilizadas a combinação de acções:

- 1.5 G + 1.5 Q

em que G corresponde às acções permanentes e Q à sobrecarga.

Não foi considerado o efeito do vento nem do sismo, uma vez que, introduzem acções horizontais que geram esforços de tracção nos pilares, aumentando o parâmetro de carga crítica. Azevedo (1993) estudou várias estruturas considerando a acção do vento, concluindo que, relativamente aos efeitos de segunda ordem, a combinação 1,5 (G + Q) corresponde à situação mais desfavorável (parâmetro crítico mais reduzido).

As lajes são consideradas como tendo comportamento de diafragma rígido no seu plano e supõe-se que não existe a possibilidade de qualquer perda de estabilidade local.

Foram consideradas também as acções referentes às paredes exteriores, divisórias e apoios do telhado e para o pré-dimensionamento utilizaram-se lajes maciças com 0.15 m de espessura.

Escolheram-se perfis da série HEA, usuais nos projectos de estruturas metálicas, quer para as vigas quer para os pilares de forma a minorar diversidades de interpretação de resultados. O aço utilizado possui um módulo de elasticidade de $E=210$ GPa.

	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 4	Piso 5
P1	200A	200A	180A	180A	160A
P2	220A	220A	200A	180A	140A
P3	220A	220A	200A	180A	140A
P4	200A	200A	180A	180A	160A
P5	220A	220A	200A	180A	140A
P6	240A	220A	200A	180A	140A
P7	220A	220A	200A	180A	140A
P8	200A	200A	180A	180A	160A
P9	200A	200A	180A	180A	160A
P10	200A	200A	180A	180A	160A

Quadro 5.6 – Secções dos pilares (perfis comerciais da série HEA).

No Quadro 5.6 estão indicadas as secções dos pilares. As vigas apresentam secção constante (HE 180A).

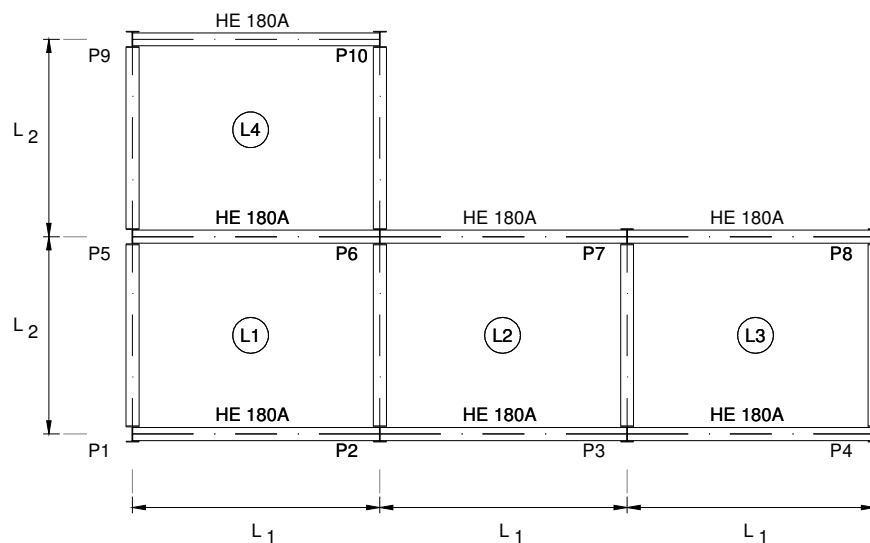


Figura 5.21 – Planta do pórtico 3D.

De acordo com as hipóteses formuladas no início deste capítulo, considera-se que a estrutura tem ligações rígidas entre vigas e pilares e que os pilares se encontram encastrados nas fundações.

Na Figura 5.21, está representada a planta do edifício, com a indicação da numeração dos pórticos 2D que compõem a estrutura tridimensional. A geometria 3D (perspectiva) do edifício é apresentada na Figura 5.22.

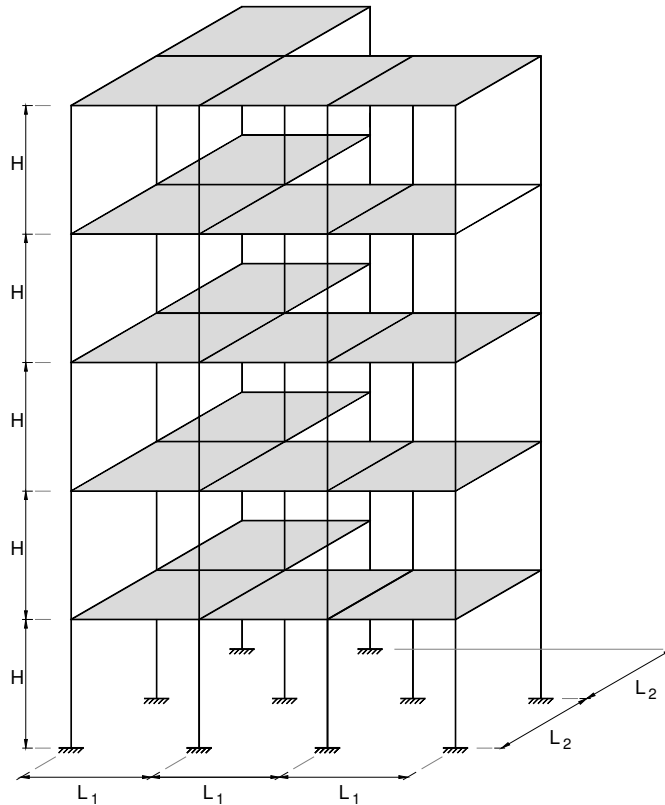


Figura 5.22 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Esquema estrutural.

Este pórtico foi estudado com grande pormenor, investigando a influência de vários parâmetros no seu desempenho não linear geométrico. Neste contexto, realizou-se uma análise paramétrica fundamentada na alteração do comprimento dos elementos e na definição da geometria espacial da estrutura (repetição do pórtico-base), mais concretamente:

- (i) Altura inter-pisos (H) e vão entre pilares (L);
- (ii) Número de pisos da laje $L3$ (variando L e H);
- (iii) Número de pisos das lajes $L2$ e $L3$ (variando L e H).

(i) Variação de L e H

Neste estudo, foram alterados realisticamente vários parâmetros relativos à geometria global do pórtico plano, nomeadamente o vão entre pilares (L) e a altura dos pisos (H). O parâmetro L varia entre 3m e 8m com incrementos de 1.0m enquanto o parâmetro H varia entre 3m e 4m, com incrementos de 0.5m. Para cada caso paramétrico foi determinada a carga crítica e os modos de encurvadura para o pórtico em estudo.

Em primeiro lugar, procedeu-se à determinação do parâmetro de carga crítica para cada um dos pórticos 2D, sem contraventamento, comparando os resultados obtidos com o SAP 2000 e o INST3D (sem variação paramétrica). De seguida, estudou-se o comportamento da estrutura 3D, com e sem contraventamento, realizando a referida variação paramétrica para duas situações de carga nos pilares: cargas unitárias e cargas definidas pelas áreas de influência.

(ii) Número de pisos da laje L3 (com variação de L e H)

Neste caso, alterou-se o número de pisos de uma das lajes (L3) que definem a planta do pórtico 3D, Figura 5.23, obtendo uma estrutura com assimetria em alçado. Com esta análise, pretende-se estudar a influência dessa assimetria no comportamento global da estrutura.

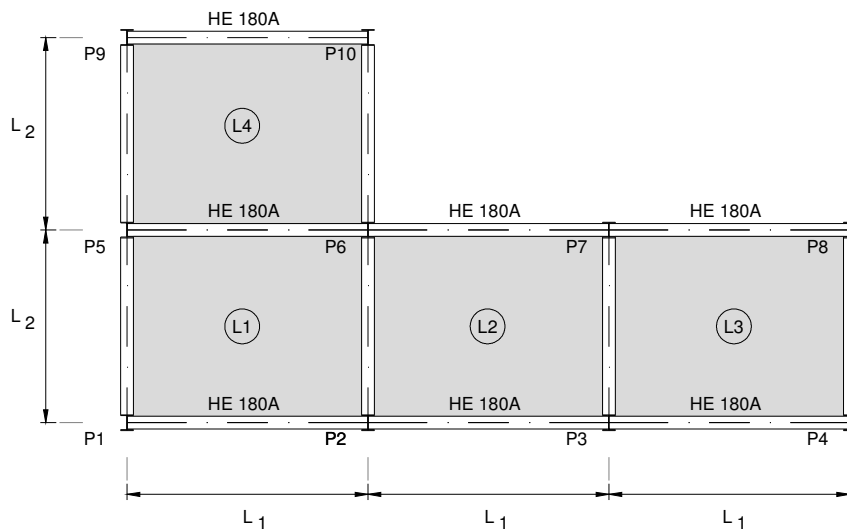


Figura 5.23 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Designação das lajes.

Iniciou-se o processo, eliminando a laje L3 do piso 5, determinando, para a referida variação paramétrica de L e H, o parâmetro de carga e o modo de instabilidade. Repetiu-se este procedimento, eliminando sucessivamente os pisos de L3 até obter um pórtico com 3 lajes em planta (L1, L2 e L4).

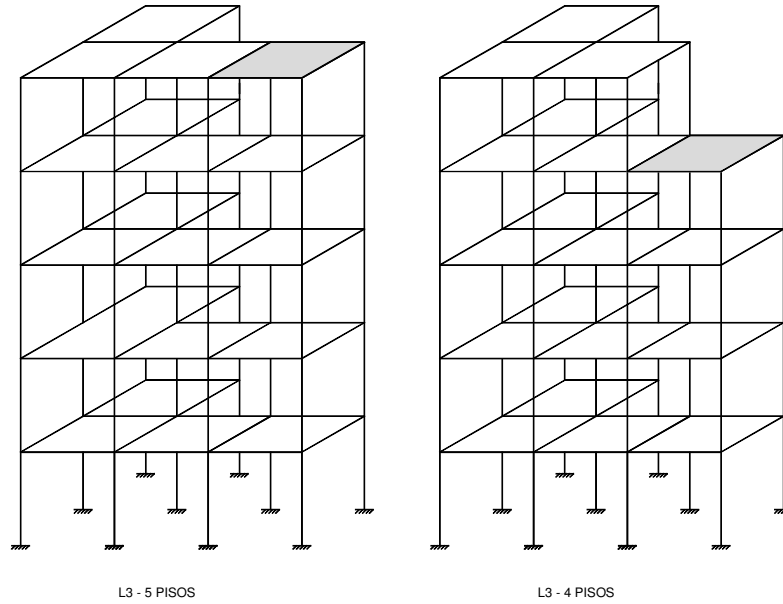


Figura 5.24 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Variação paramétrica (L3).

Os pórticos obtidos com supressão das lajes foram analisados para duas situações: sem contraventamento e com elementos diagonais de contraventamento.

(iii) Número de pisos da laje L2 e L3 (com variação de L e H)

Nesta análise procedeu-se da mesma forma que no caso anterior, mas variando o número de pisos das lajes L2 e L3 (Figura 5.25).

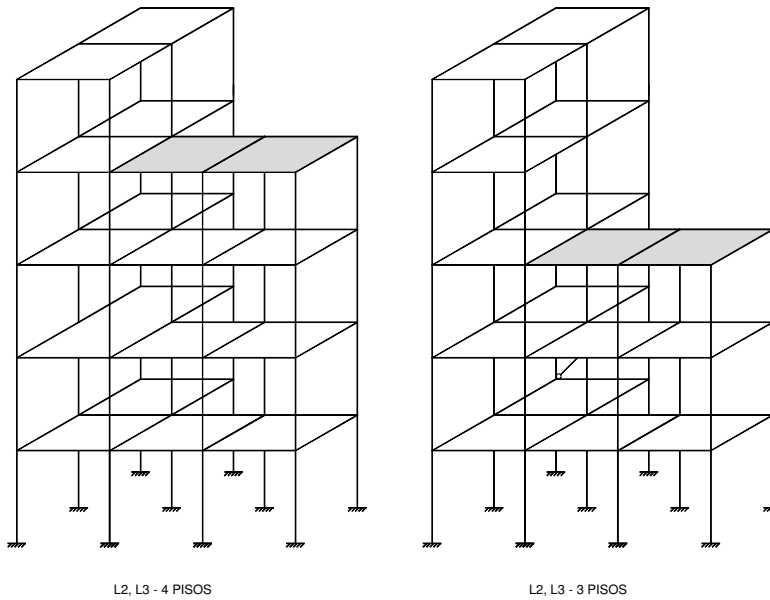


Figura 5.25 – Pórtico 3D com assimetria em planta. Variação paramétrica (L2 e L3).

5.4.2 Resultados

O estudo dos pórticos tridimensionais, envolve o conhecimento do desempenho dos pórticos 2D que associados formam a estrutura 3D.

Para verificar o nível de desempenho, e controlar o erro associado à modelação 3D comparativamente ao modelo 2D, foram estudados os pórticos bidimensionais constituintes da estrutura para as configurações de nós móveis e nós fixos, a cada uma das quais correspondem famílias de valores do parâmetro crítico.

No Quadro 5.7, estão representados os parâmetros críticos e os erros relativos associados aos pórticos 2D da Figura 5.26, para $L_1=L_2=4.0\text{m}$ e $H=3.0\text{m}$, com uma discretização de 4 elementos por barra e uma tolerância de $1e-6$.

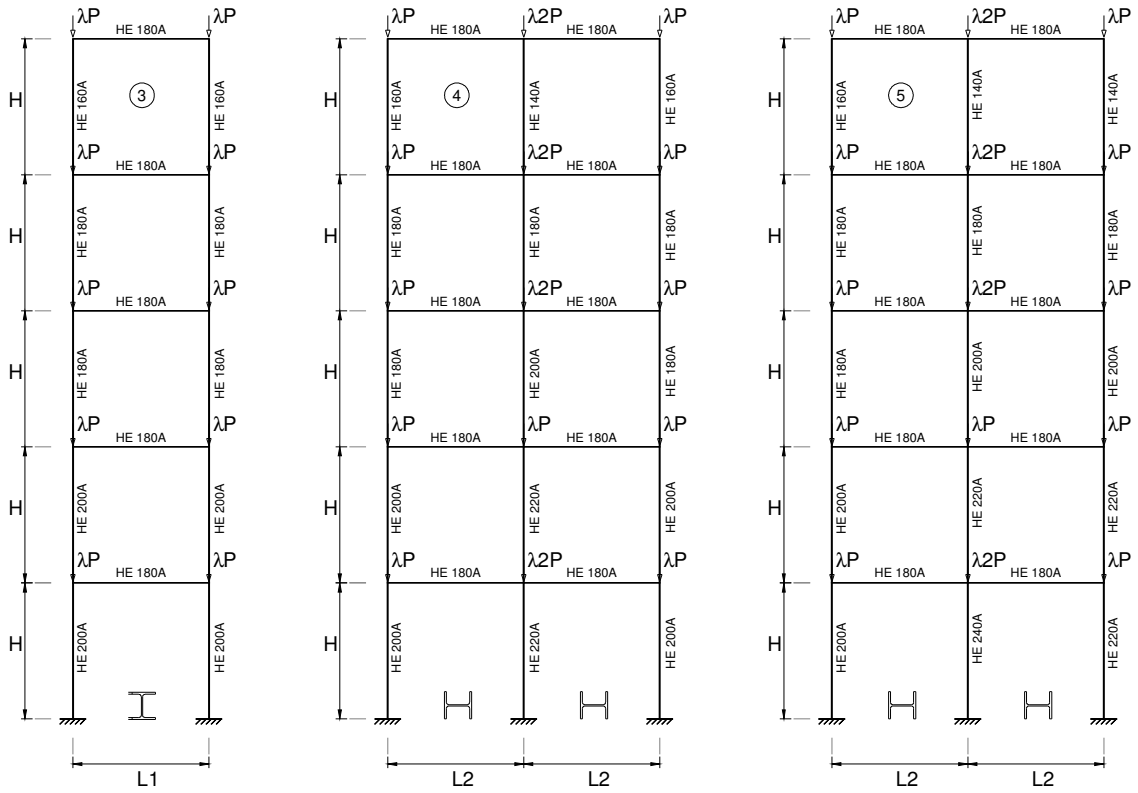
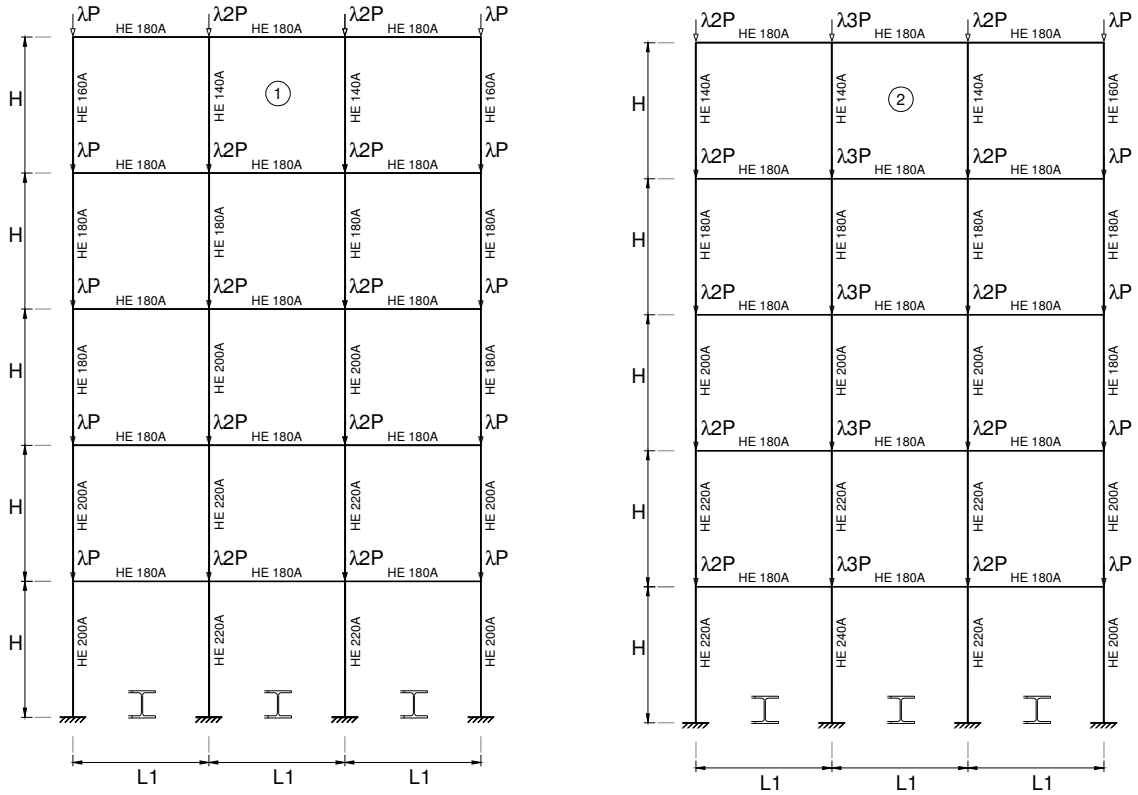
Pórtico	Nós Móveis			Nós Fixos		
	SAP2000	INST3D	Erro	SAP2000	INST3D	Erro
1	535.67	540.63	-0.91%	1563.43	1496.04	4.50%
2	568.10	608.75	-6.67%	1581.29	1533.12	3.14%
3	402.19	409.47	-1.77%	1380.67	1318.77	4.69%
4	782.68	830.75	-5.78%	2993.84	3206.13	-6.62%
5	828.85	860.25	-3.65%	3056.78	3267.11	-6.43%
6	713.02	761.39	-6.35%	3620.87	3859.97	-6.19%
7	624.62	665.26	-6.10%	2798.57	2978.42	-6.03%

Quadro 5.7 Parâmetros críticos dos pórticos e erros relativos associados ao modelo 2D.

Os erros associados à determinação dos parâmetros críticos dos pórticos resultam, como já foi referido, da utilização de uma formulação aproximada no SAP2000. Para os casos em estudo, considerou-se o erro relativo assim determinado como um valor de referência pouco significativo face à discretização utilizada, embora se saiba que o erro associado à linearização das funções de estabilidade com discretização de mais de 3 elementos por barra seja inferior a 3.00%.

No Quadro 5.7, as linhas assinaladas com sombreado indicam os pórticos que mobilizam a menor inércia dos pilares, correspondendo aos pórticos 2 e 3 respectivamente a maior e a menor capacidade resistente.

Como os pórticos (1, 2 e 3) são os que apresentam parâmetro crítico mais reduzido, espera-se que sejam estas subestruturas as que condicionem o desempenho da estrutura 3D.



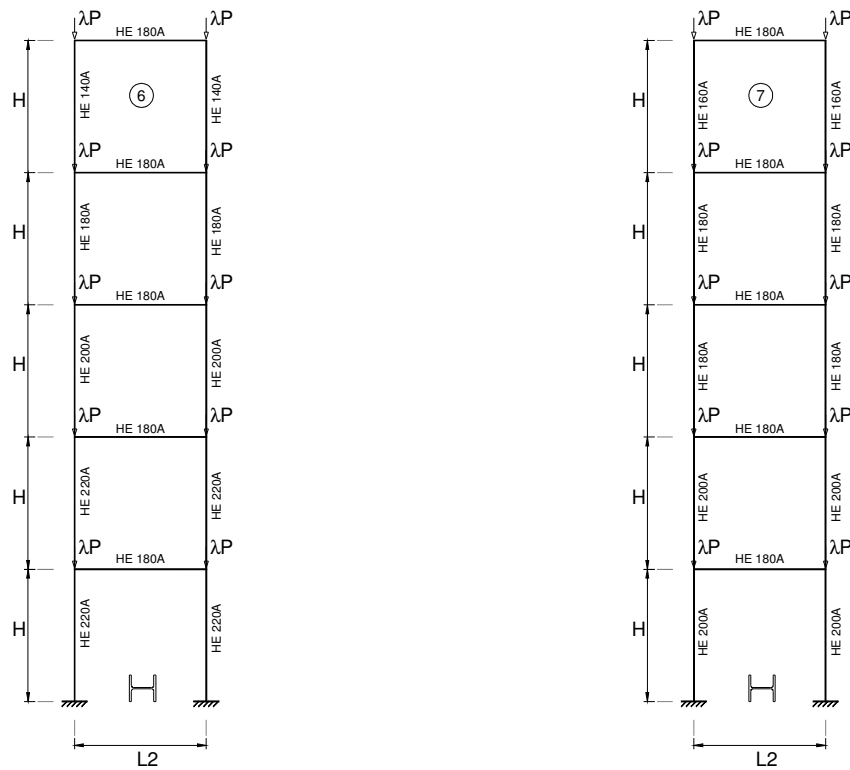


Figura 5.26 – Pórticos 2D associados ao pórtico 3D.

5.4.2.1 Variação de L e H

O passo seguinte consistiu na análise do pórtico tridimensional, no SAP 2000 e no INST3D. Para contraventar a estrutura, utilizaram-se diagonais com rigidez à flexão nula e uma área de 11cm^2 , inferior à adoptada para os pilares e vigas, e correspondente a perfis metálicos da série UPN (UPN80). A localização das diagonais foi estudada, de forma a maximizar o efeito de contraventamento, adoptando o esquema apresentado na variação paramétrica.

Foram consideradas duas situações de carga nos pilares (Figura 5.27):

- Caso 1: Cargas unitárias;
- Caso 2: Cargas proporcionais à área de influência dos pilares.

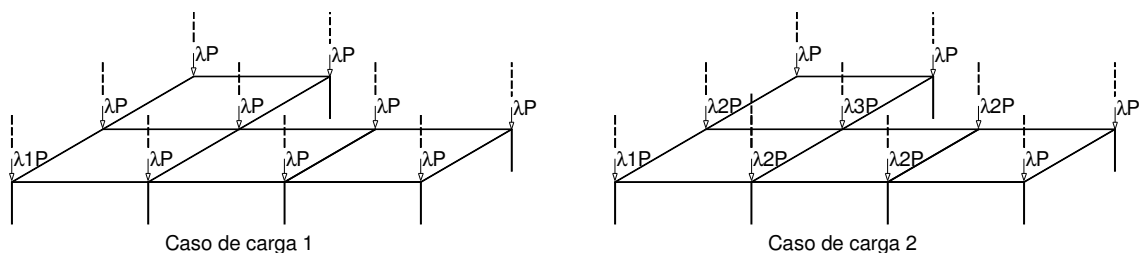


Figura 5.27 – Distribuição das cargas nos pilares.

a) Pórtico não contraventado

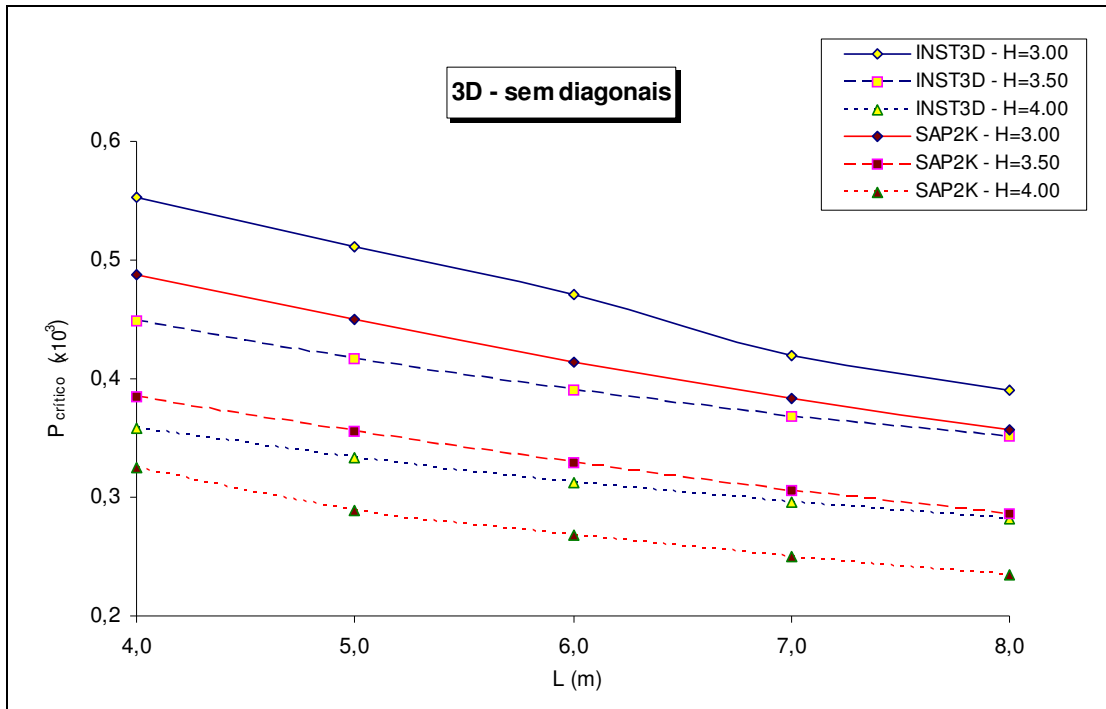


Gráfico 5.12 – Variação paramétrica (3D) sem contraventamento.

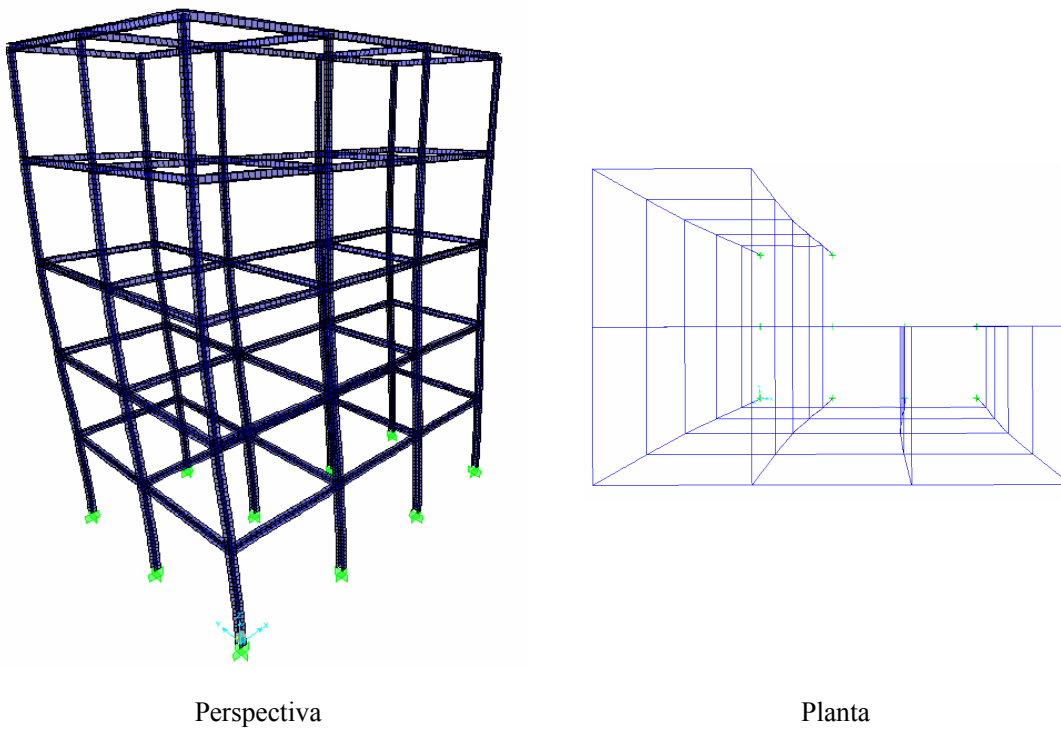


Figura 5.28 – Variação paramétrica (3D) sem contraventamento.

b) Pórtico contraventado (Caso 1: cargas unitárias)

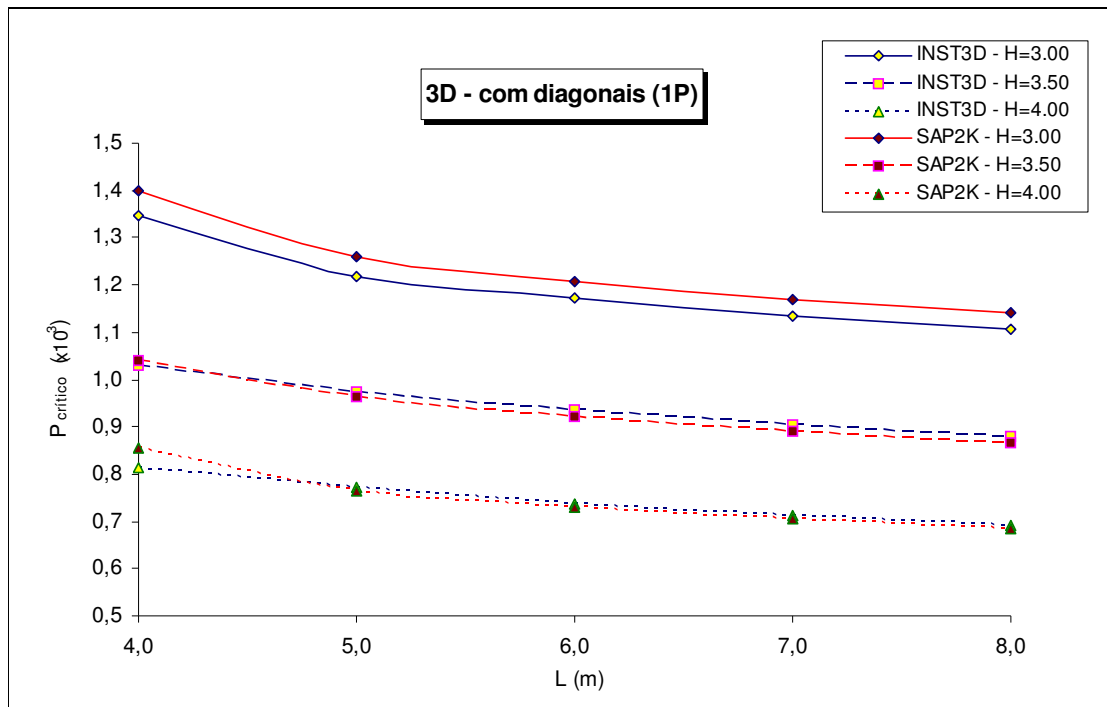


Gráfico 5.13 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento (λP).

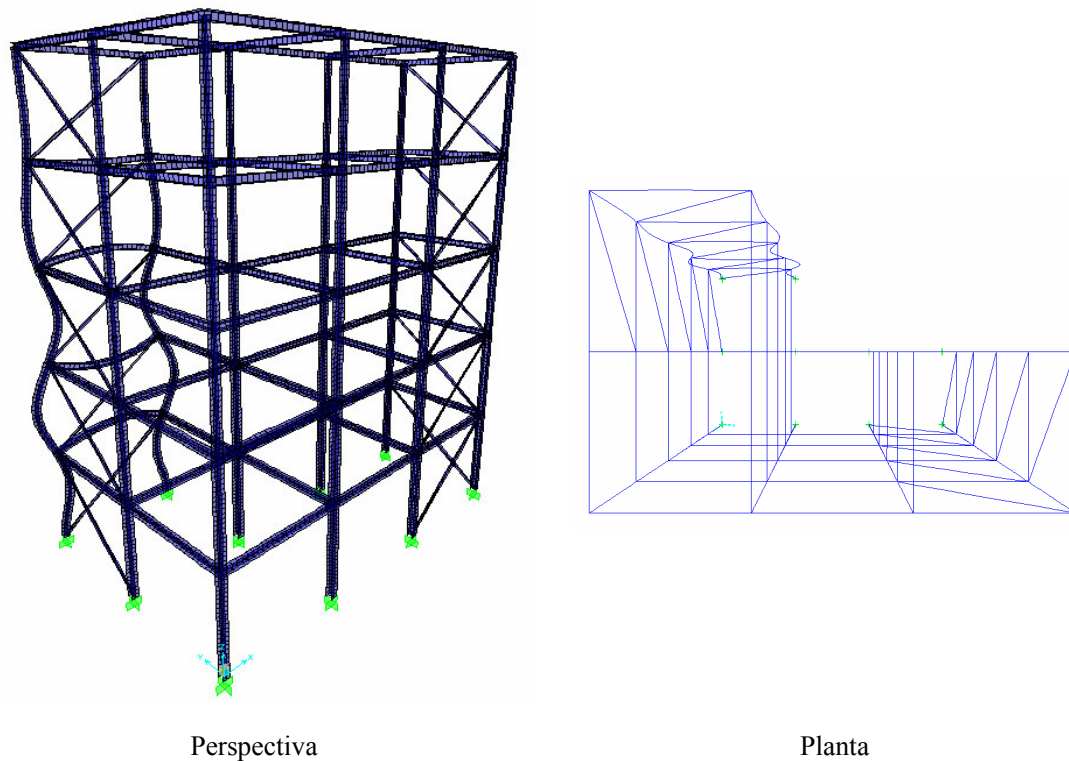


Figura 5.29 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento (λP).

c) Pórtico contraventado (Caso 2: cargas em função da área de influência)

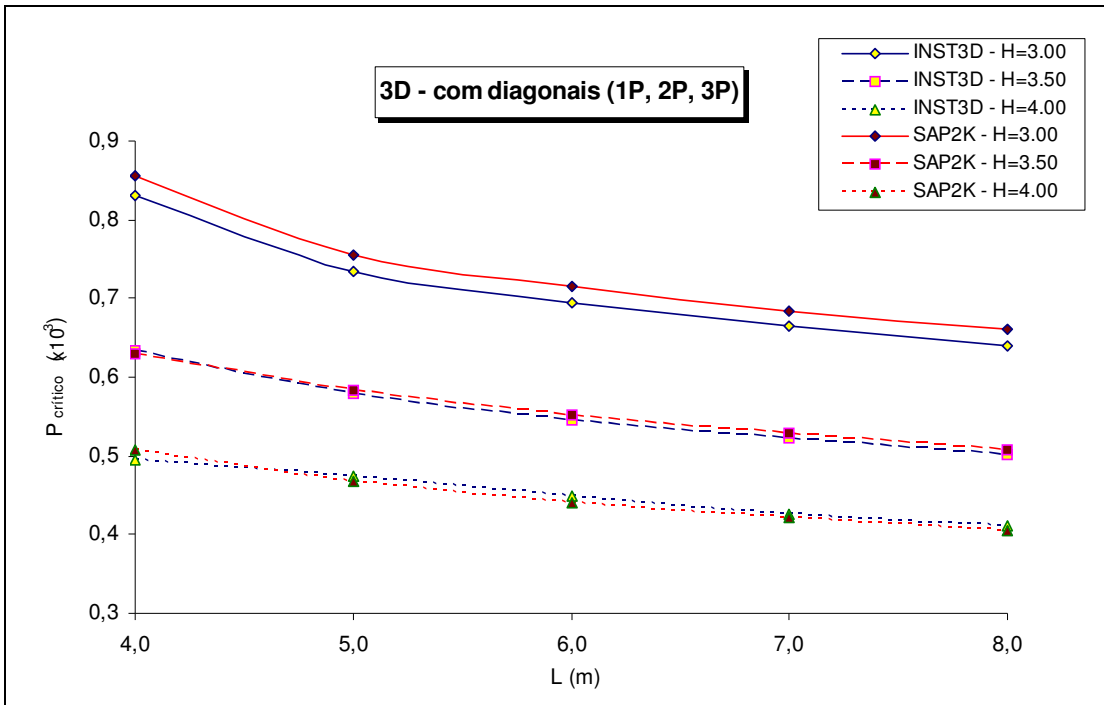


Gráfico 5.14 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento (λ_P , λ_{2P} , λ_{3P}).

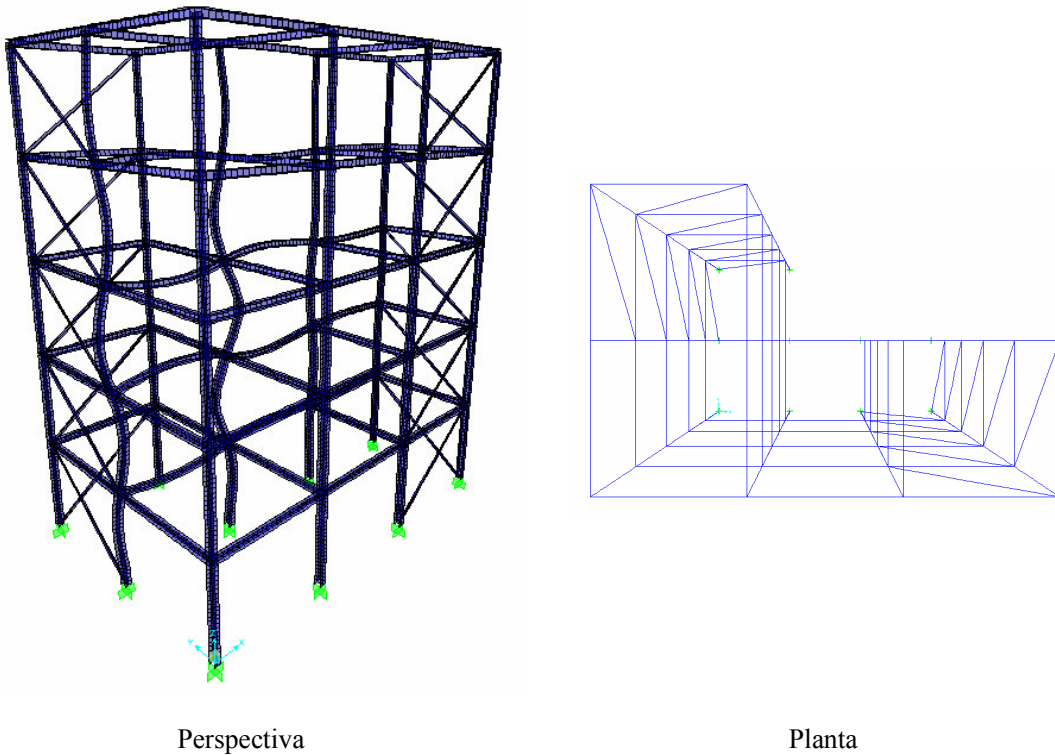


Figura 5.30 – Variação paramétrica (3D) com contraventamento (λ_P , λ_{2P} , λ_{3P}).

No pórtico não contraventado, a deformação ocorre no sentido da menor inércia, com translação das lajes (nós móveis). Nos pórticos contraventados, não há translação nem rotação das lajes, indicando um comportamento idêntico ao de uma estrutura de nós fixos e à medida que aumenta o vão (L) e a altura (H) diminui a capacidade resistente.

Os valores obtidos para o SAP 2000 e para o INST3D coincidem no caso do pórtico (nós fixos). Quando se analisa uma estrutura de nós móveis, aparecem erros de 10% entre a utilização do SAP 2000 e o INST3D, sugerindo alguma atenção na modelação deste tipo de estruturas.

Quando a carga é unitária, o pórtico 2D que condiciona a resposta da estrutura é o que apresenta menor carga crítica quando trabalha isolado (3), validando a hipótese apresentada aquando da análise dos pórticos 2D. No caso de carga 2 (em função das áreas), o pórtico que condiciona o desempenho da estrutura é o 2º, que corresponde ao pórtico que recebe maior carga axial total, apresentando maior capacidade resistente na direcção da menor inércia.

5.4.2.2 Número de pisos da laje L3 (com variação de L e H)

De seguida, estudou-se a alteração do número de pisos da laje L3 (Figura 5.31) variando a distância entre pilares (L) e a altura entre pisos (H) para o caso de carga 2.

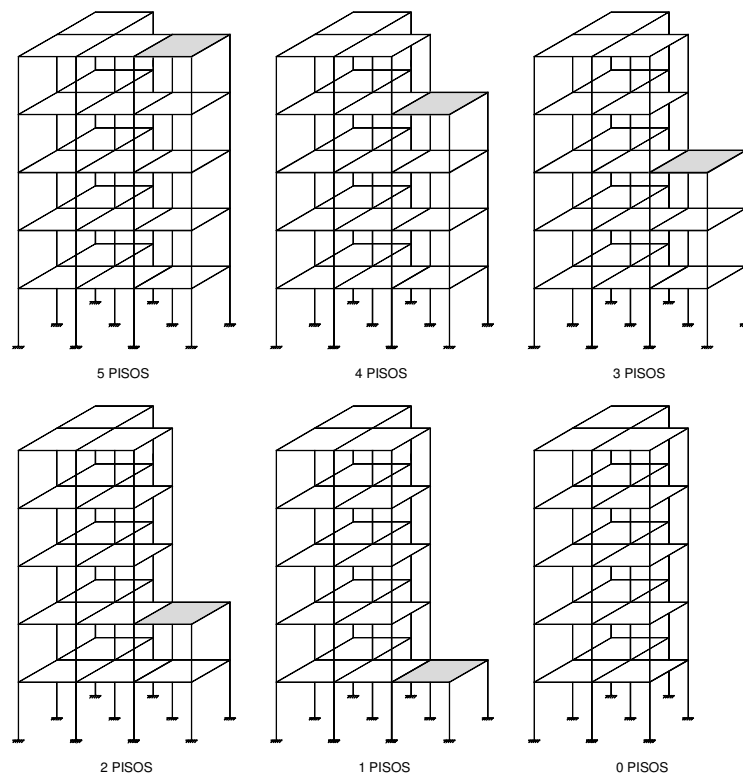


Figura 5.31 – L3 – Variação paramétrica sem contraventamento.

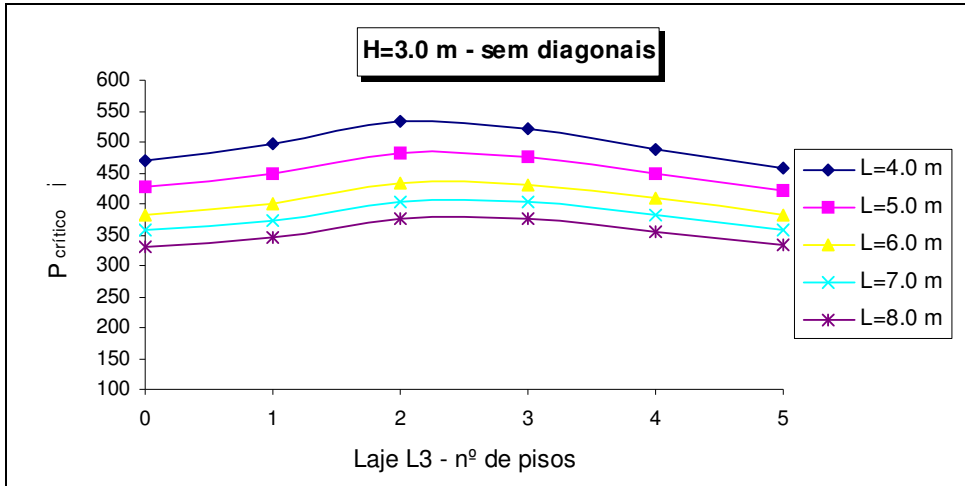


Gráfico 5.15 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.0).

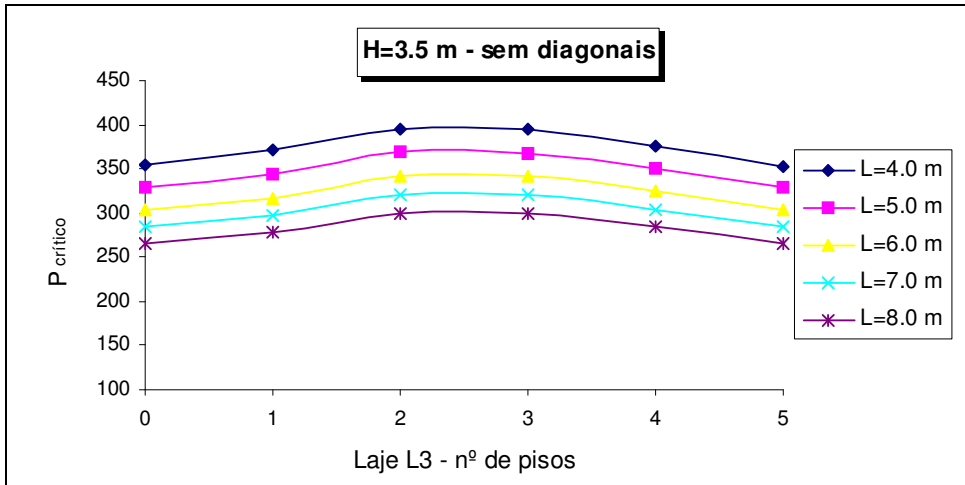


Gráfico 5.16 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.5).

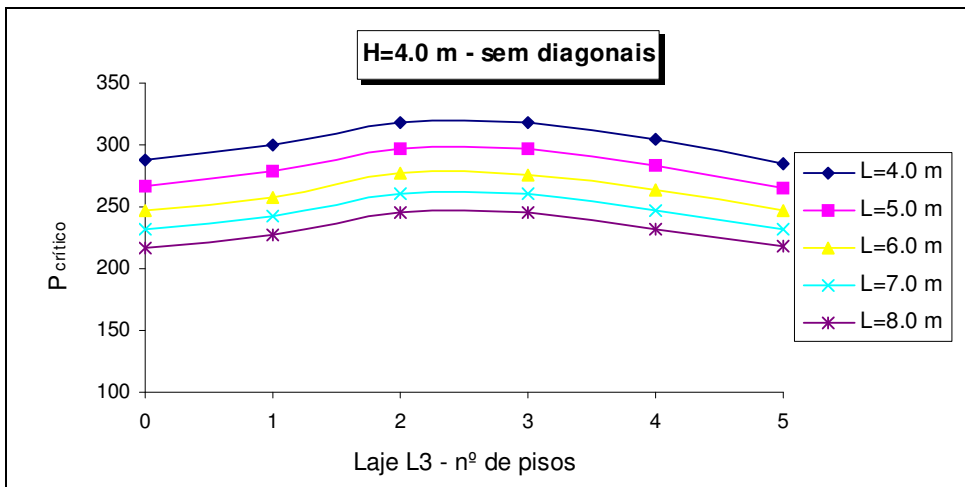


Gráfico 5.17 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=4.0).

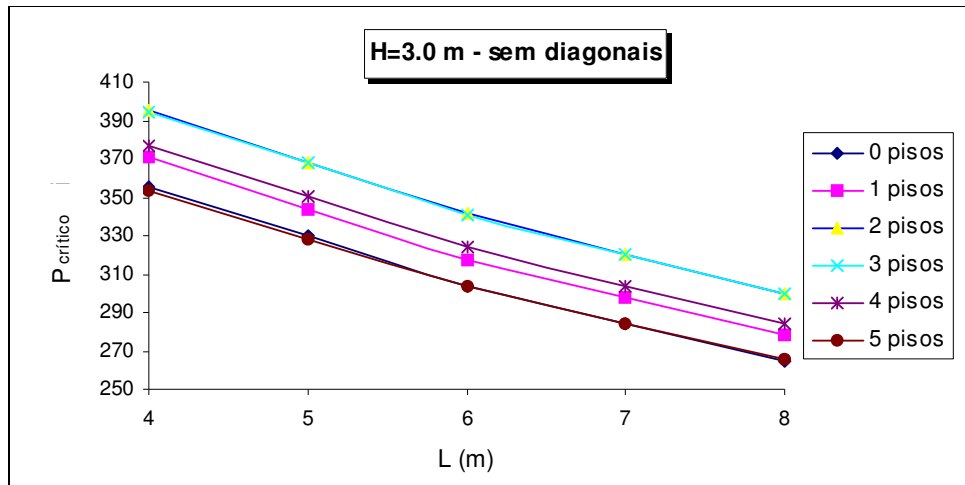


Gráfico 5.18 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.0).

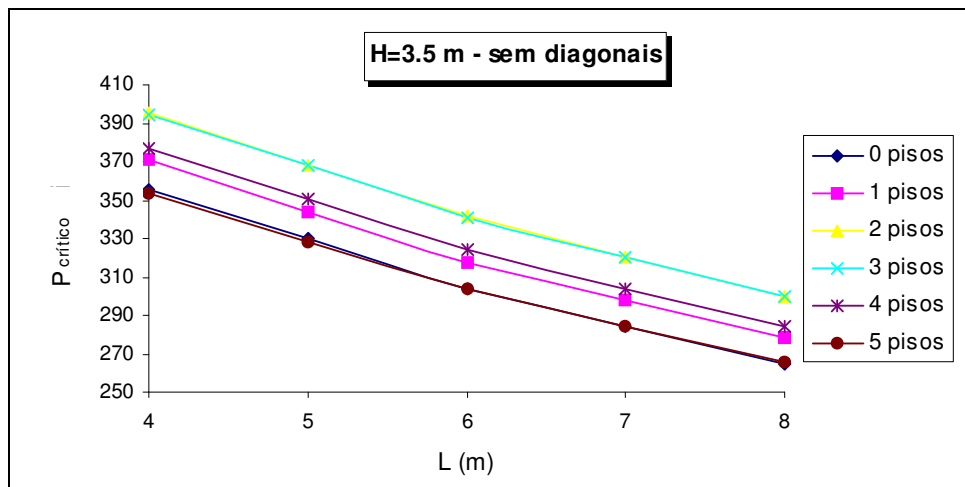


Gráfico 5.19 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.5).

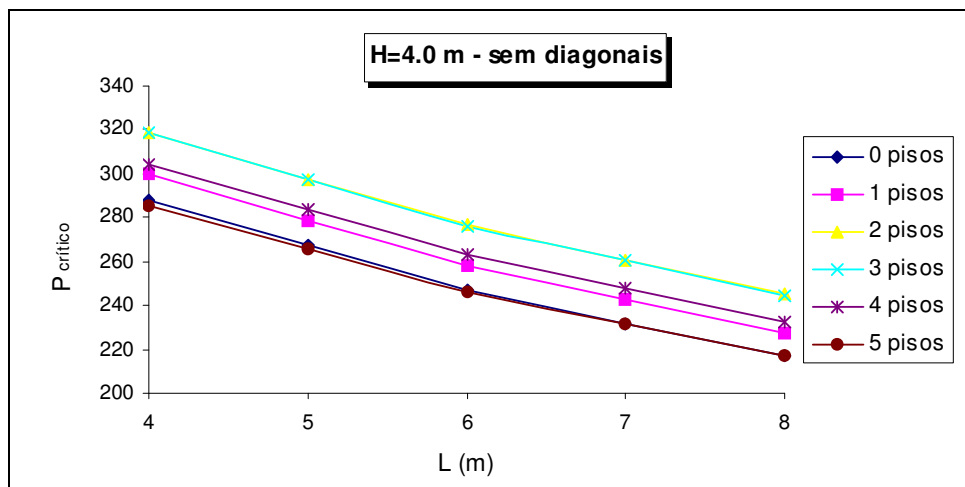


Gráfico 5.20 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=4.0).

Deformadas:

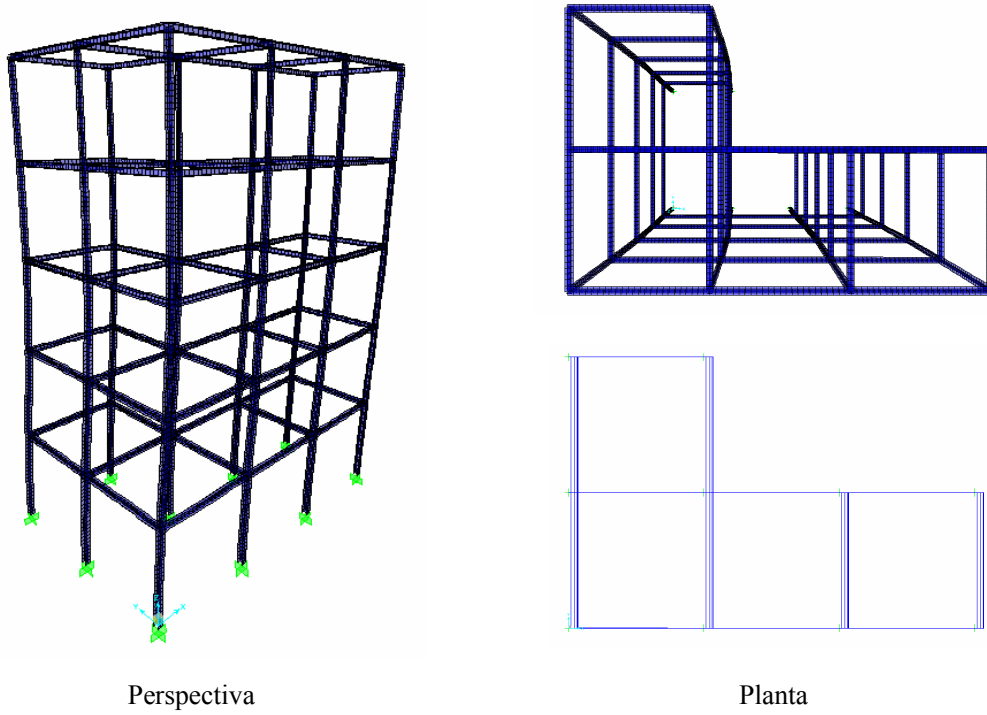


Figura 5.32 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 5 pisos.

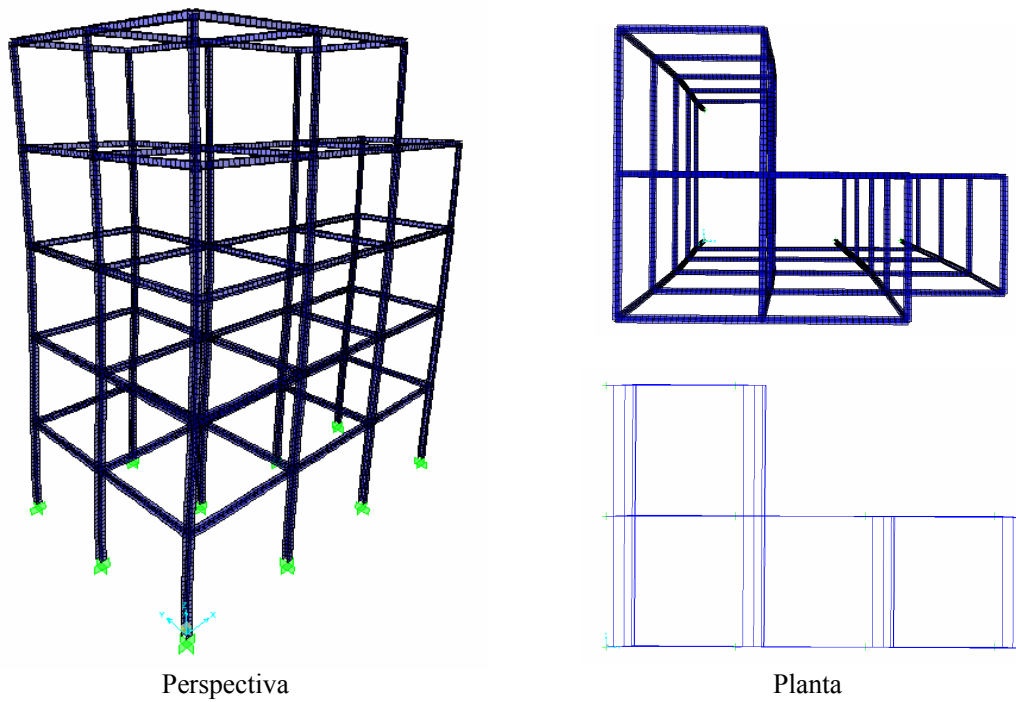


Figura 5.33 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 4 pisos.

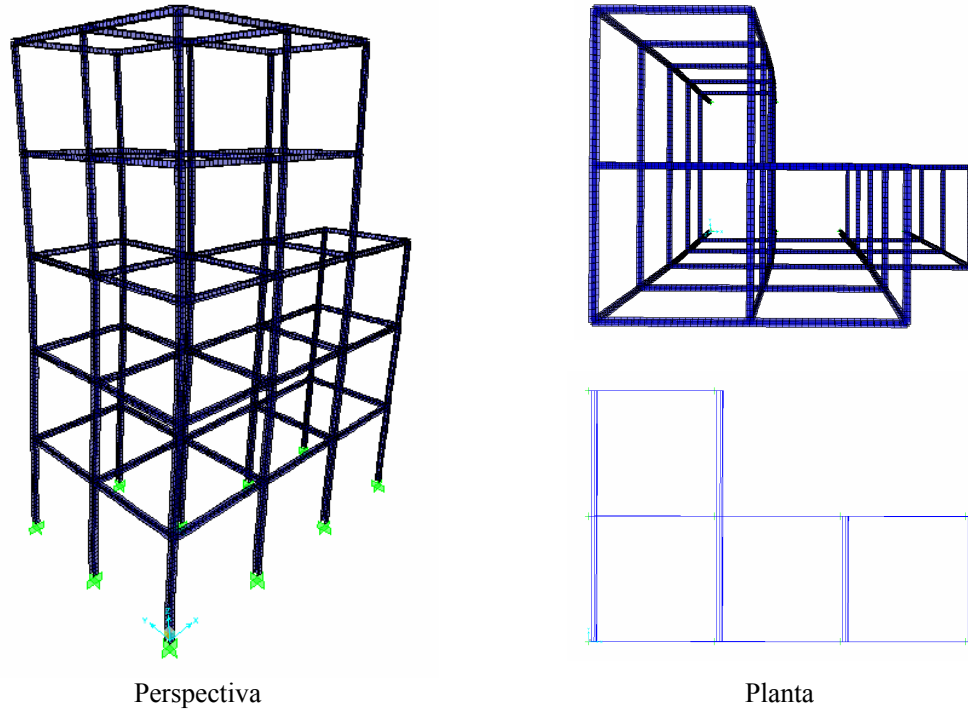


Figura 5.34 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 3 pisos.

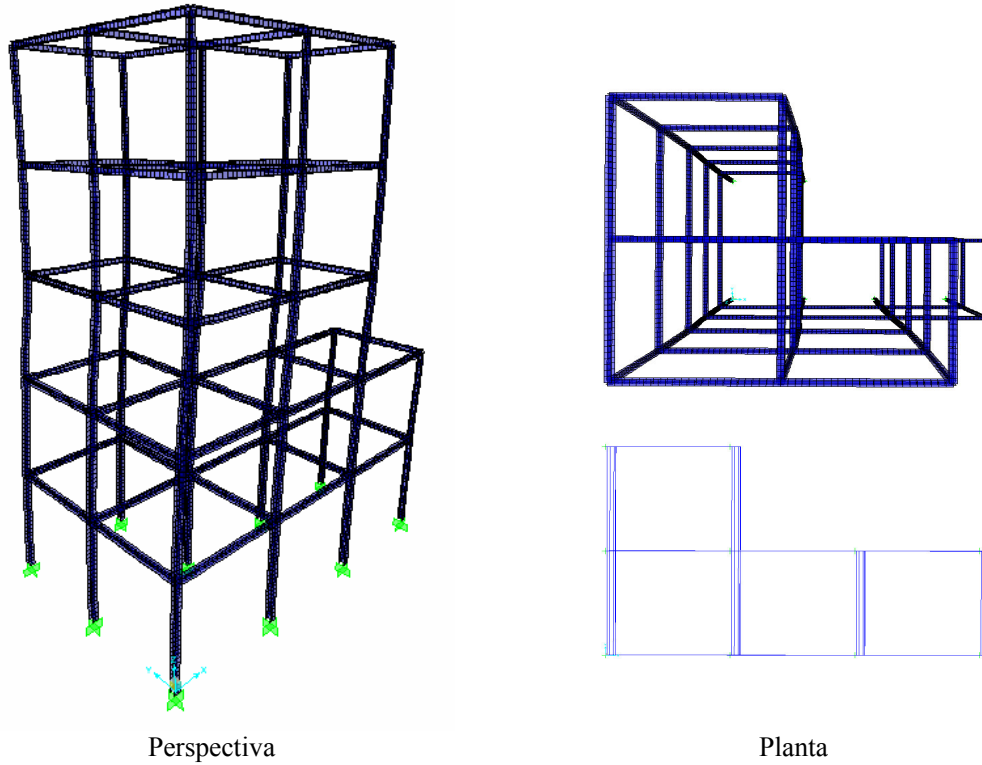


Figura 5.35 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 2 pisos.

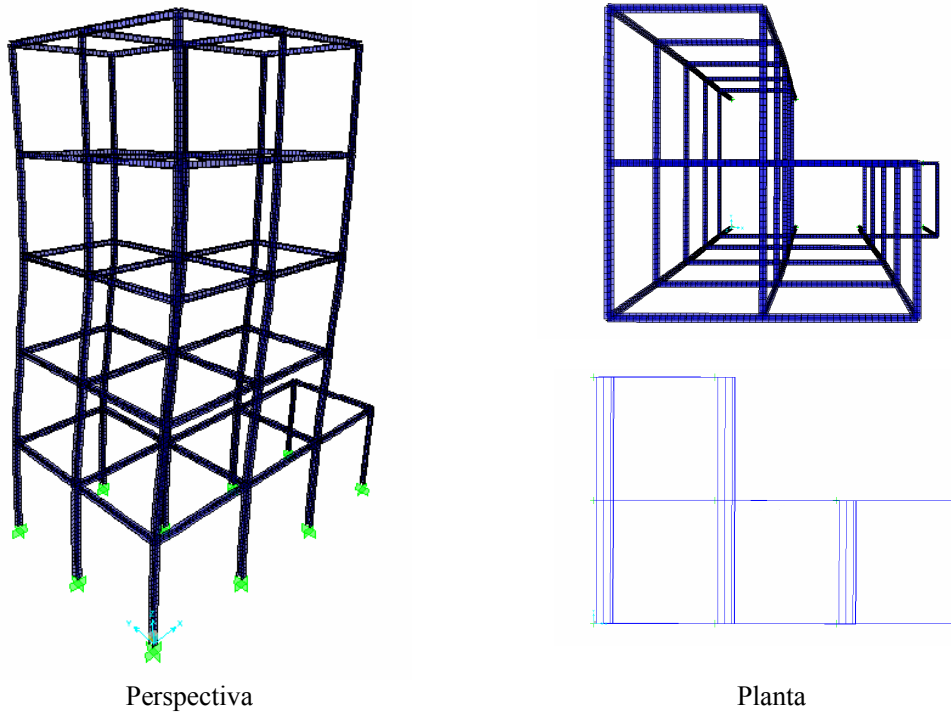


Figura 5.36 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 1 piso.

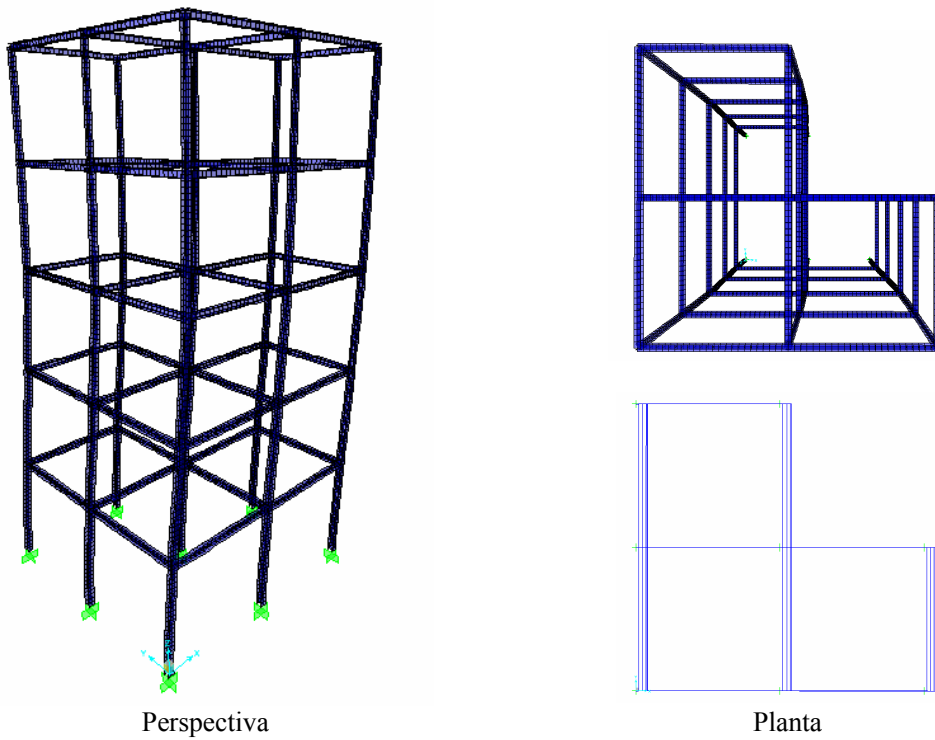


Figura 5.37 – L3 – Variação paramétrica sem diagonais – 0 pisos.

Da análise dos gráficos, conclui-se que o número de pisos da laje L3 altera a resposta da estrutura, influenciando a sua capacidade resistente.

Verifica-se que o valor do parâmetro crítico aumenta com o número de pisos da laje L3, até atingir o valor máximo quando existem 2 pisos de L3, obtendo-se praticamente o mesmo valor com a adição de mais um piso (Gráficos 5.15, 5.16 e 5.17). Quando o pórtico tem mais de 3 pisos da laje L3, e à medida que se aumenta o número de pisos, observa-se uma perda da capacidade resistente.

A justificação para este comportamento obtém-se estudando os modos de instabilidade associados à variação do número de pisos. Como o pórtico não possui elementos de contraventamento, a perda de estabilidade ocorre por deformação no sentido da menor inércia, com translação das lajes, ou seja, como um pórtico de nós móveis. A introdução dos pisos L3 induz um efeito estabilizador ao aumentar a rigidez no sentido da menor inércia dos pilares, garantindo, desta forma, um aumento de capacidade resistente (Figura 5.38).

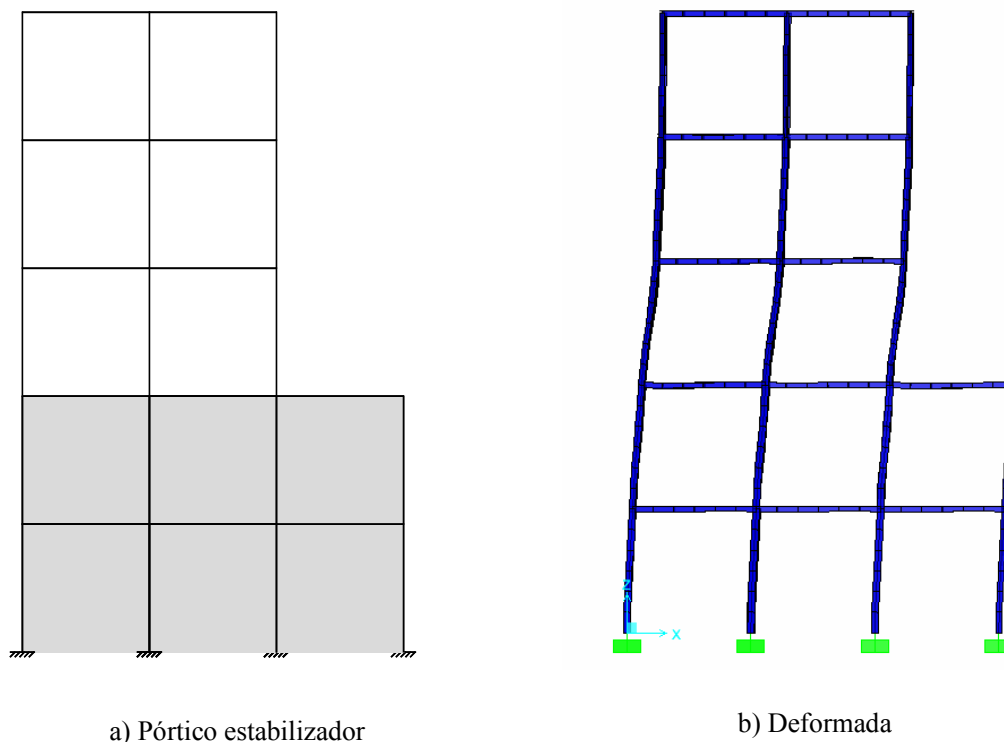


Figura 5.38 – Comportamento do pórtico com assimetria em alçado L3 (2 pisos).

No entanto, este aumento não é proporcional ao incremento do número de pisos da laje L3, verificando-se que, a partir do 3º piso, a estrutura diminui a capacidade de carga.

O efeito estabilizador está associado à geometria que a estrutura apresenta quando não existem lajes L3: sem assimetria em alçado. Com a introdução da laje L3, o pórtico deixa de ser simétrico em altura, e o comportamento fica definido em função da parte sobrelevada da estrutura (“torre”). A partir do 3º piso, a “torre” deixa de comandar a estabilidade da estrutura, passando a mesma a funcionar na sua totalidade, com a geometria inicial do pórtico, o que provoca a diminuição do parâmetro crítico.

Também é possível constatar que o aumento da distância entre pilares (L), produz uma redução do parâmetro de carga crítica. Como seria de esperar, a capacidade resistente diminui com o aumento de L e H, Gráficos 5.18, 5.19 e 5.20.

Com esta análise, é possível identificar a geometria espacial, relativamente ao número de pisos da laje L3, que promove um aumento da capacidade resistente no pórtico, concluindo que a melhor solução corresponde à introdução de 3 pisos, assegurando a melhor relação capacidade de carga/volumetria do edifício.

Repetiu-se este estudo, considerando que a estrutura possui elementos de contraventamento com a mesma disposição que a apresentada no pórtico original (5 pisos de L3), Figura 5.35.

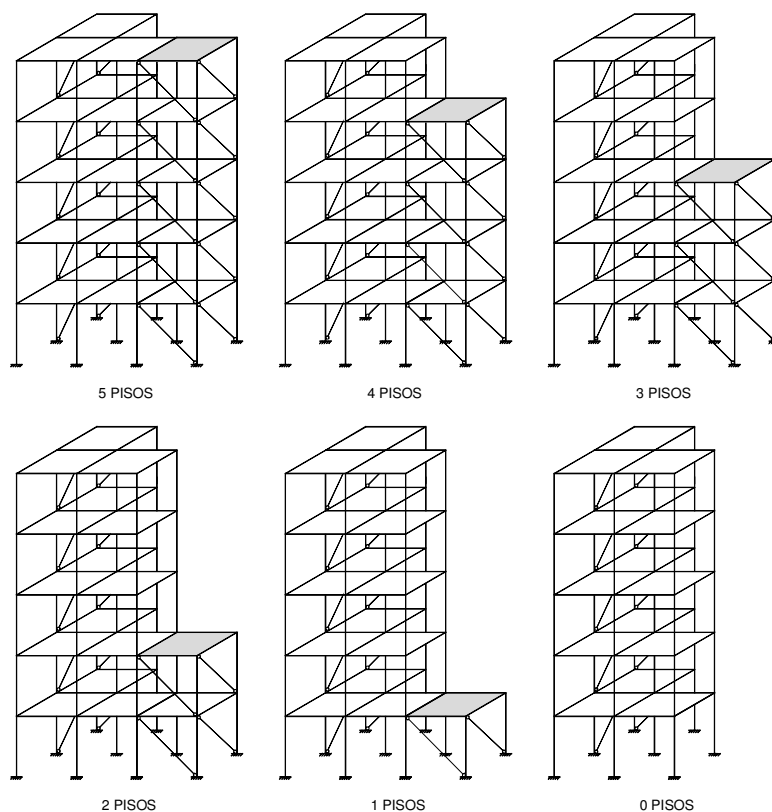


Figura 5.39 – L3 – Variação paramétrica com contraventamento.

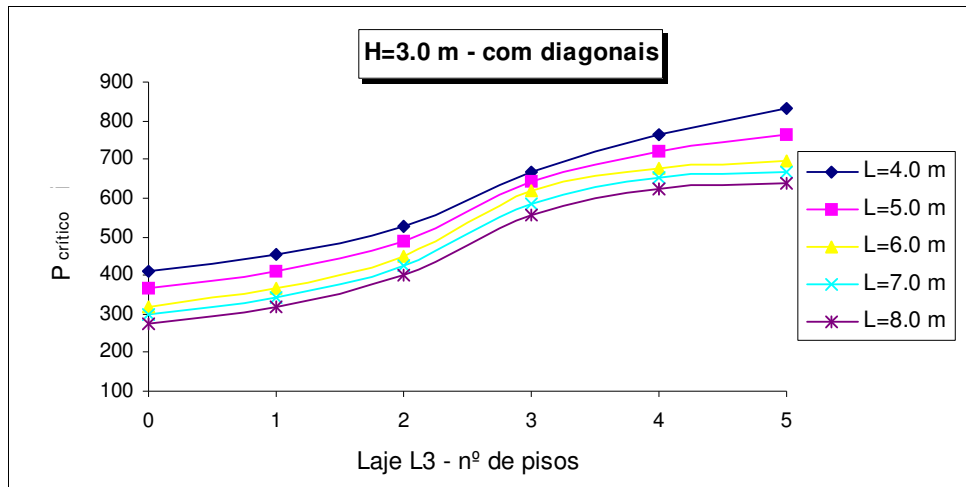


Gráfico 5.21 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.0).

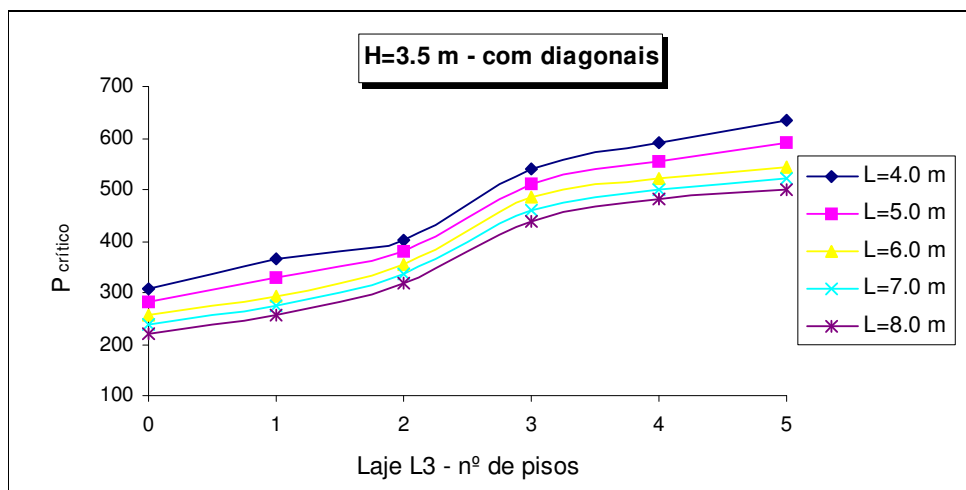


Gráfico 5.22 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.5).

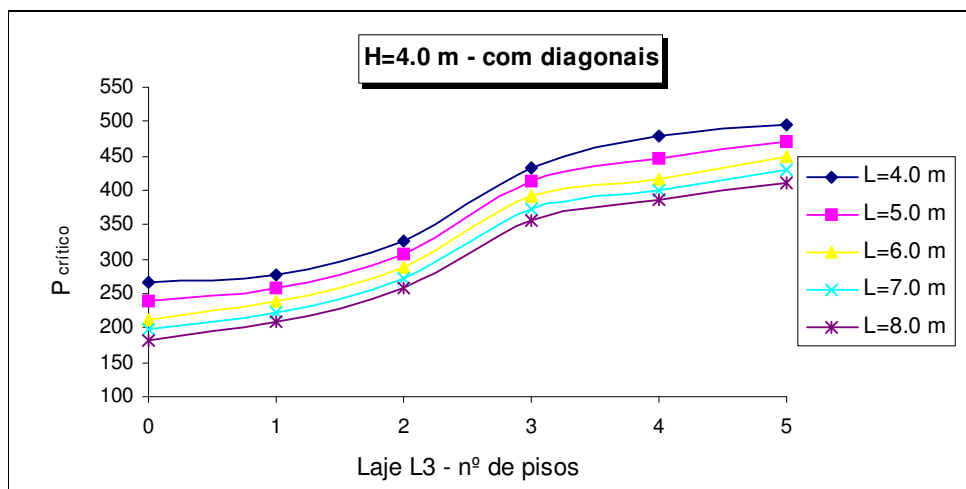


Gráfico 5.23 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=4.0).

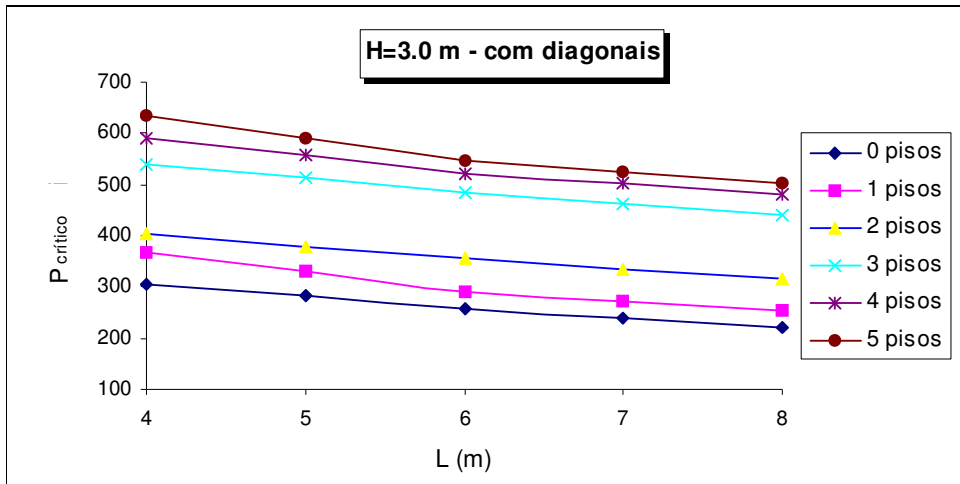


Gráfico 5.24 – L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.0).

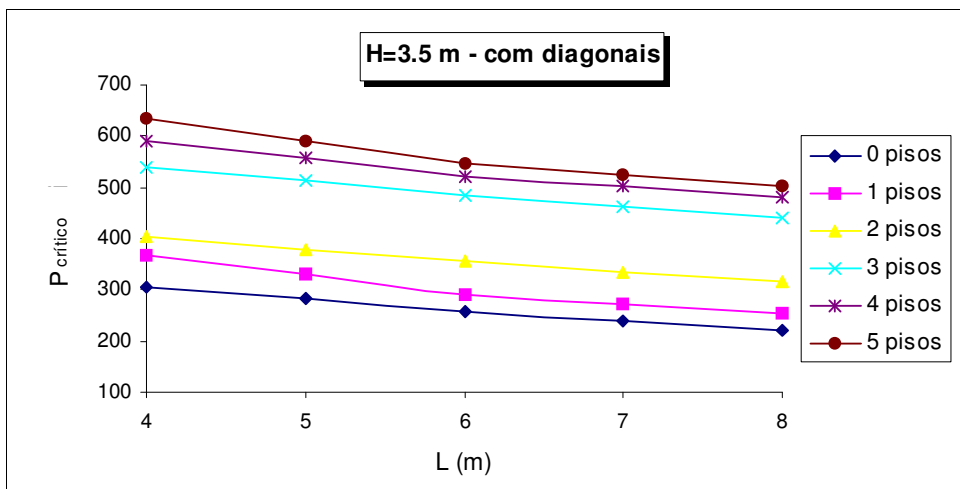


Gráfico 5.25 – L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.5).

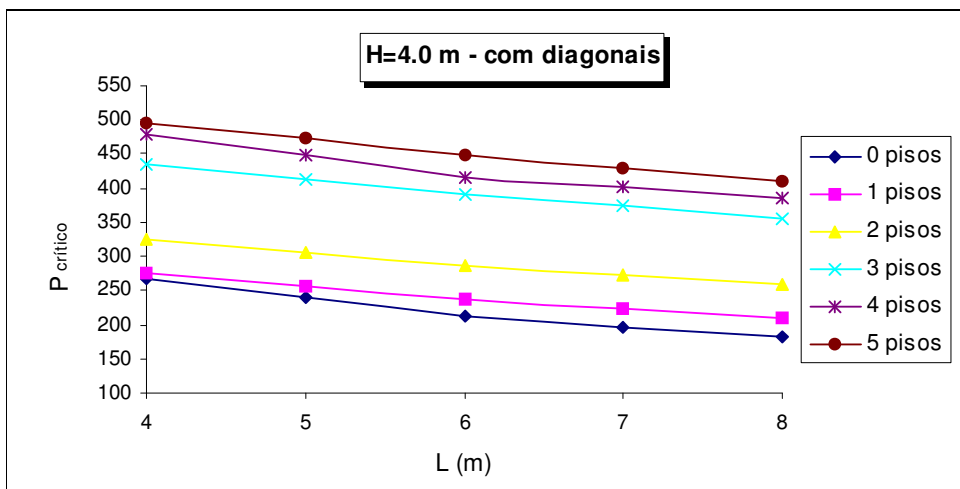


Gráfico 5.26 – L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=4.0).

Deformadas:

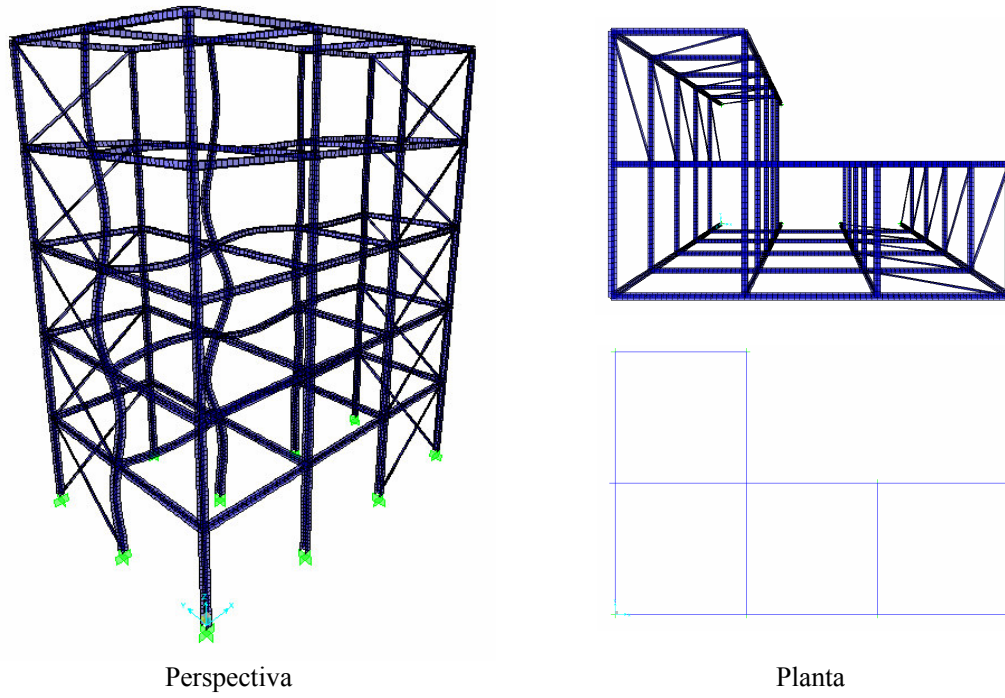


Figura 5.40 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 5 pisos.

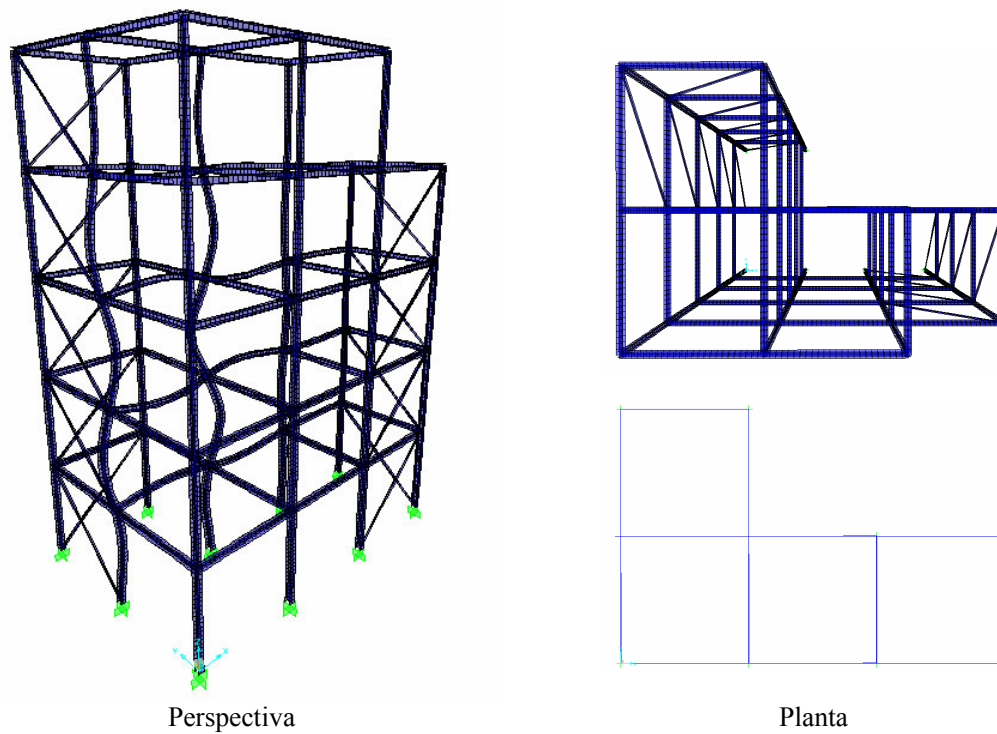
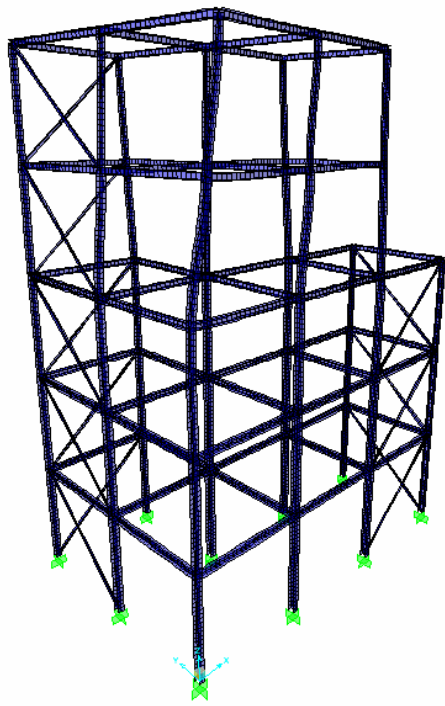
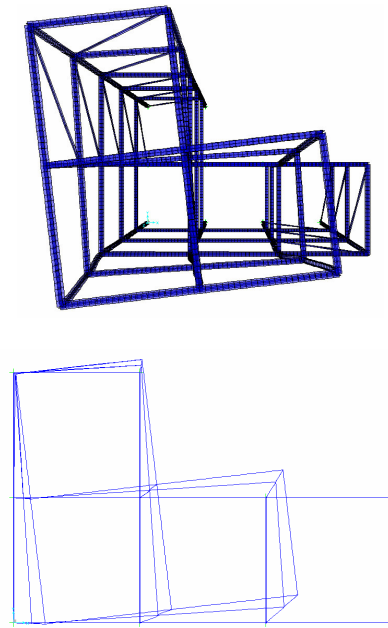


Figura 5.41 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 4 pisos.

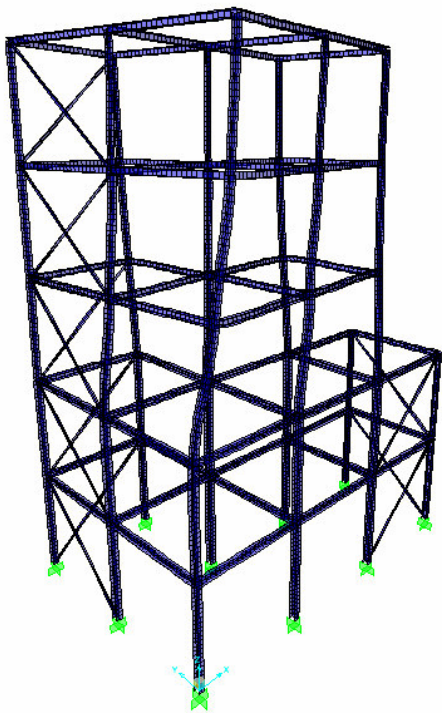


Perspectiva

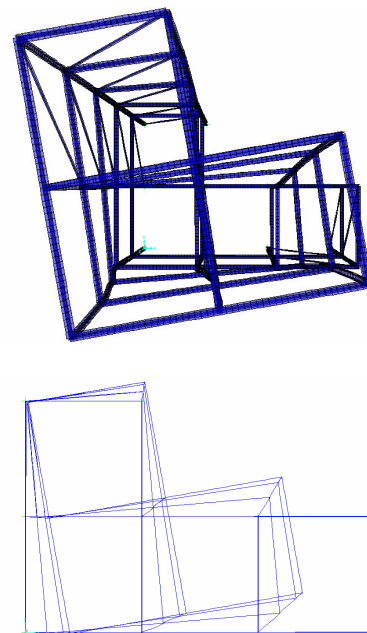


Planta

Figura 5.42 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 3 pisos.



Perspectiva



Planta

Figura 5.43 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 2 pisos.

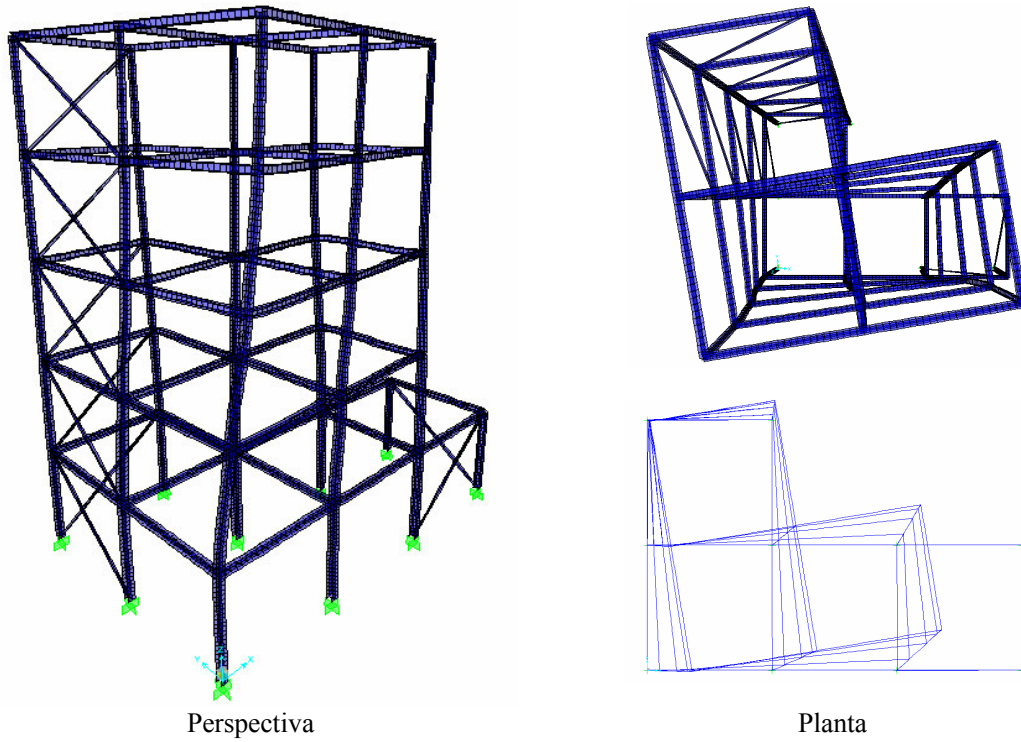


Figura 5.44 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 1 pisos.

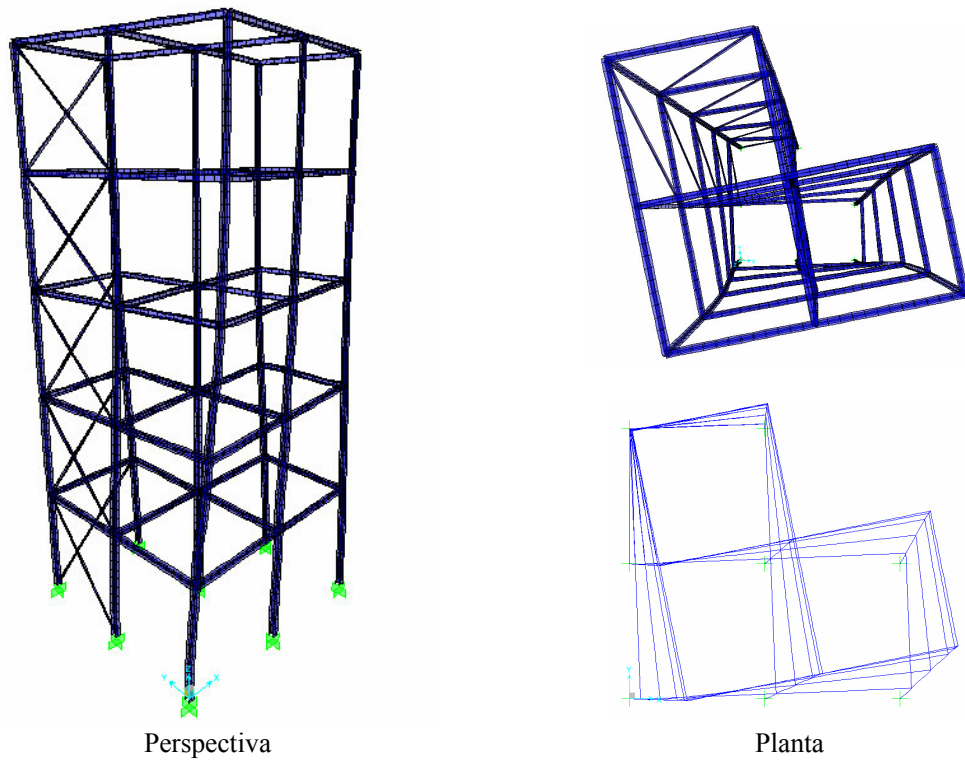


Figura 5.45 – L3 – Variação paramétrica com diagonais – 0 pisos.

Observando os gráficos 5.21, 5.22 e 5.23, verifica-se que a estrutura altera o seu desempenho relativamente à configuração não contraventada, com um aumento da capacidade resistente à medida que se incrementa o número de pisos da laje L3. A introdução de L3 no 1º e 2º pisos causa um ligeiro aumento do parâmetro crítico, sendo mais significativo quando se insere o 3º piso, voltando a um acréscimo menos evidente quando se introduzem o 4º e 5º pisos de L3.

Estudando as deformadas do modo de instabilidade (Figuras 5.37, 5.38, 5.39 e 5.40), conclui-se que quando existem 4 e 5 pisos de L3, a estrutura é comandada pelo pórtico 2D que possui maior capacidade resistente (2), sem translação ou rotação das lajes, ou seja, como um pórtico de nós fixos. Quando existem menos pisos, a deformação da estrutura é condicionada pela rotação do pórtico 3D que está sobrelevado em relação à laje L3 (“torre”), uma vez que esta estrutura possui diagonais que impelem a rotação por se situarem concentradas numa esquina do edifício, diminuindo a capacidade resistente (que fica condicionada pela rigidez desta “torre”). O acréscimo de capacidade de carga entre os pisos 2 e 3, é devido à diminuição da altura da “torre”, aumentando a sua rigidez (menor rotação), direccionando a estrutura para um comportamento de pórtico de nós fixos.

5.4.2.3 Número de pisos da laje L2 e L3 (com variação de L e H)

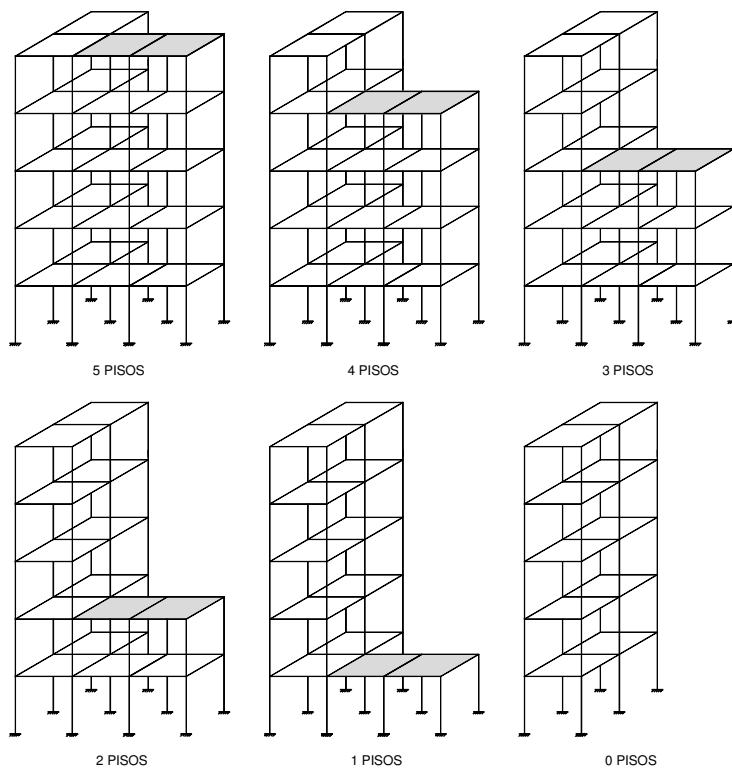


Figura 5.46 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem contraventamento.

Neste caso, estudou-se a influência da eliminação simultânea das lajes L2 e L3. Como o padrão da variação paramétrica é idêntica à do caso anterior, espera-se que a estrutura apresente um comportamento similar ao encontrado para a diminuição do número de pisos de L3.

Para os dois casos (variação de L3 e variação de L2 e L3), foram alteradas as características geométricas dos elementos verticais dos pórticos que constituem a estrutura, após ter elaborado o seu dimensionamento em função das cargas nodais verticais aplicadas, que obviamente dependem da área de influência de cada pilar. Desta forma, todas as estruturas obtidas na variação paramétrica estão dimensionadas para as cargas efectivamente actuantes.

De seguida, são apresentados os resultados da variação paramétrica (L2 e L3), quando o pórtico não tem elementos de contraventamento e quando se introduzem diagonais.

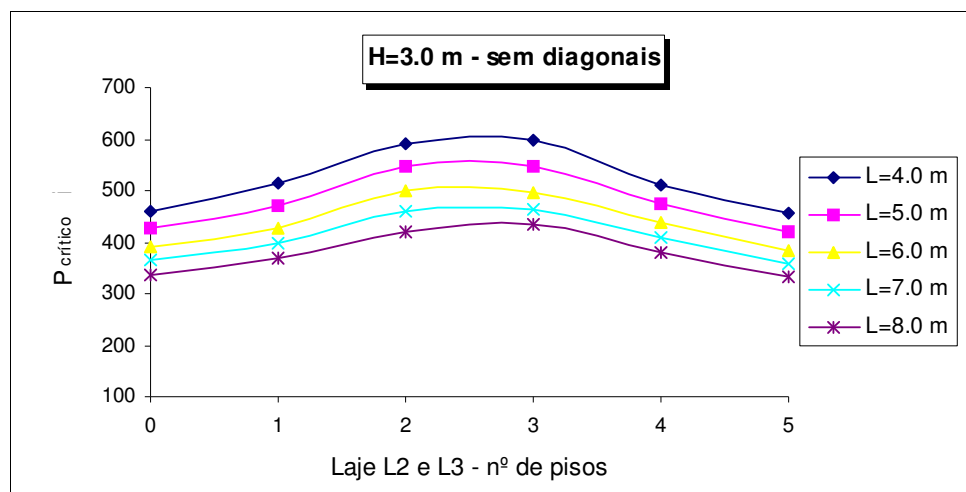


Gráfico 5.27 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.0).

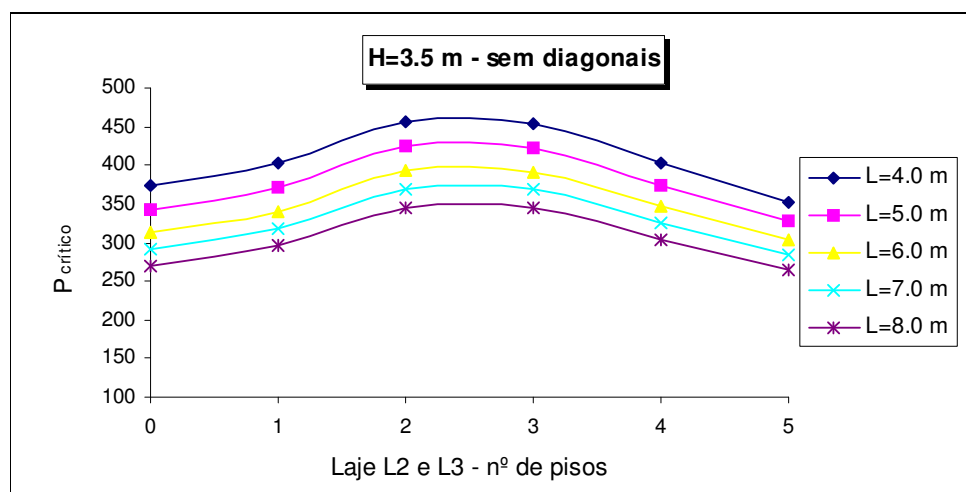


Gráfico 5.28 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=3.5).

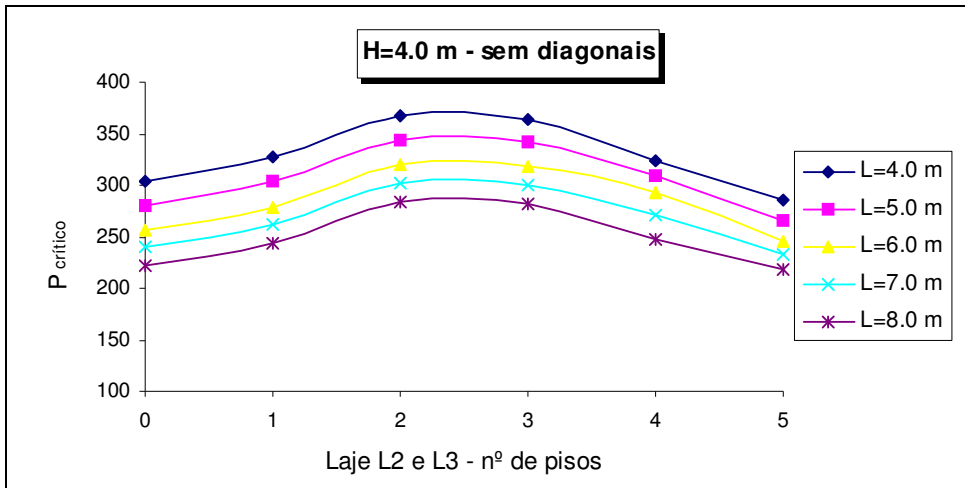


Gráfico 5.29 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais – (nº pisos, H=4.0).

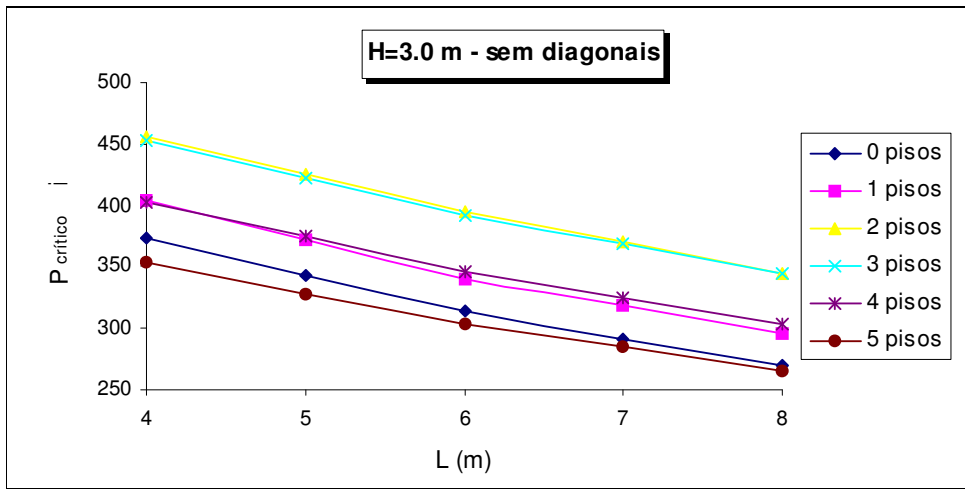


Gráfico 5.30 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.0).

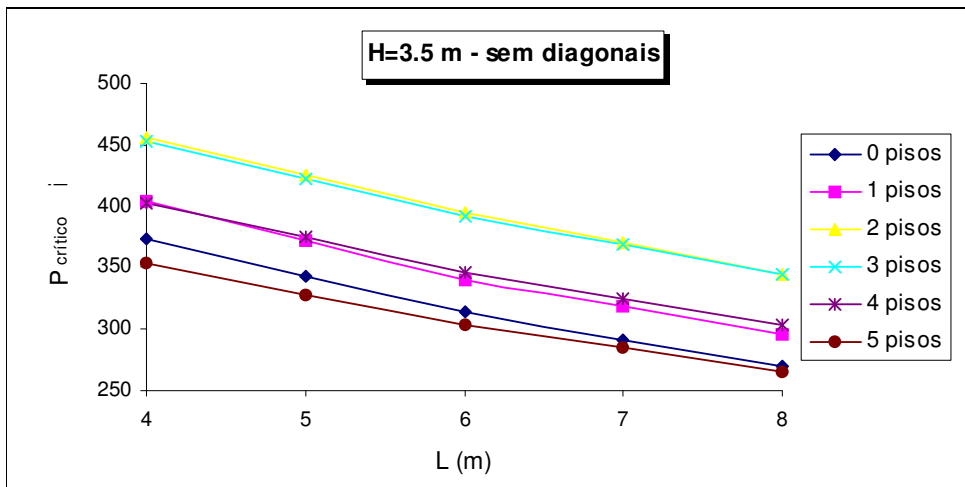


Gráfico 5.31 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=3.5).

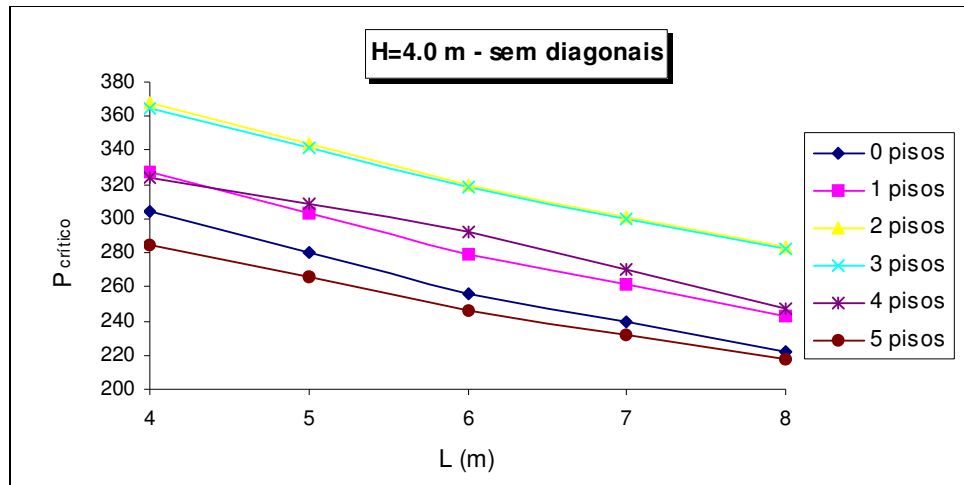


Gráfico 5.32 – L2 e L3 – Variação paramétrica sem diagonais (L, H=4.0).

Como era esperado, o comportamento da estrutura é idêntico ao apresentado quando se eliminam os pisos da laje L3. A variação da capacidade resistente em função do número de pisos (Gráficos 5.27, 5.28 e 5.29) é análoga à encontrada para L3, sendo neste caso mais evidente a importância da introdução do 2º e 3º pisos. Verifica-se que a eliminação do 4 e 5º pisos provoca um aumento da capacidade de carga, justificado pela diminuição da carga aplicada quando se eliminam estes pisos, em que a estrutura apresenta um comportamento comandado pelo pórtico 2 (2D). À medida que aumenta L e H, diminui o valor de λ .

As deformações (modos de instabilidade) das estruturas também são idênticas às encontradas para a variação de L3, pelo que não serão apresentadas.

Assim, conclui-se que as deduções apresentadas para a variação de L3 também são válidas para este caso.

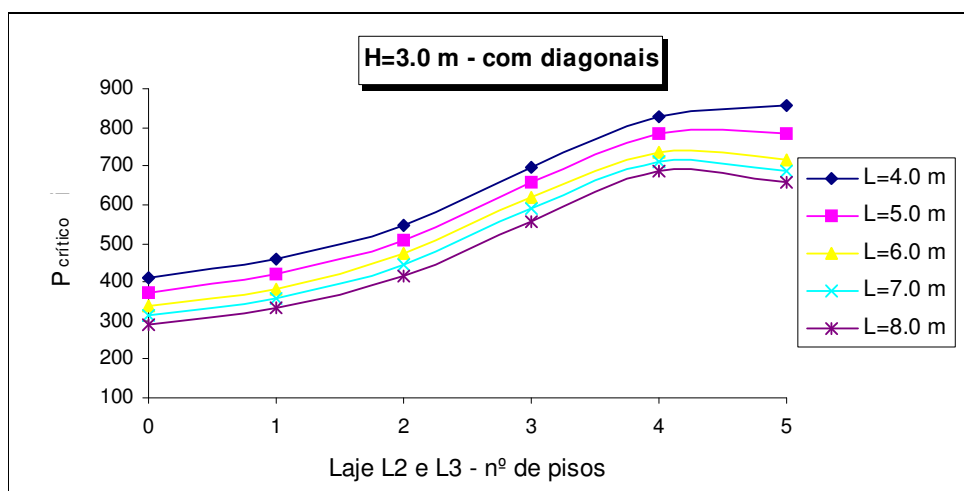


Gráfico 5.33 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.0).

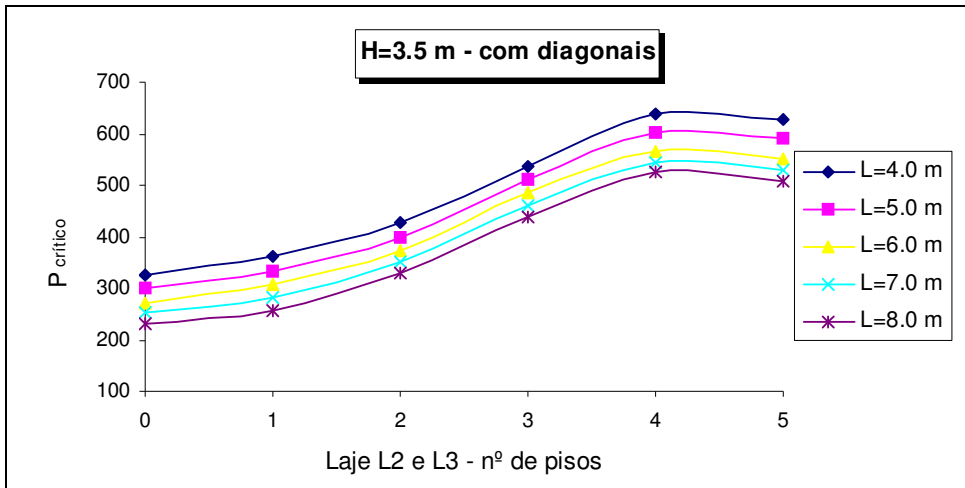


Gráfico 5.34 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=3.5).

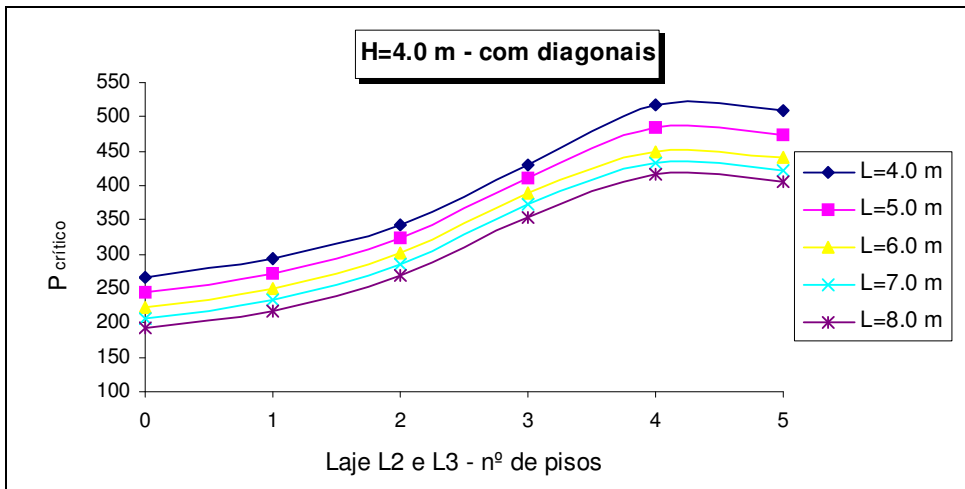


Gráfico 5.35 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais – (nº pisos, H=4.0).

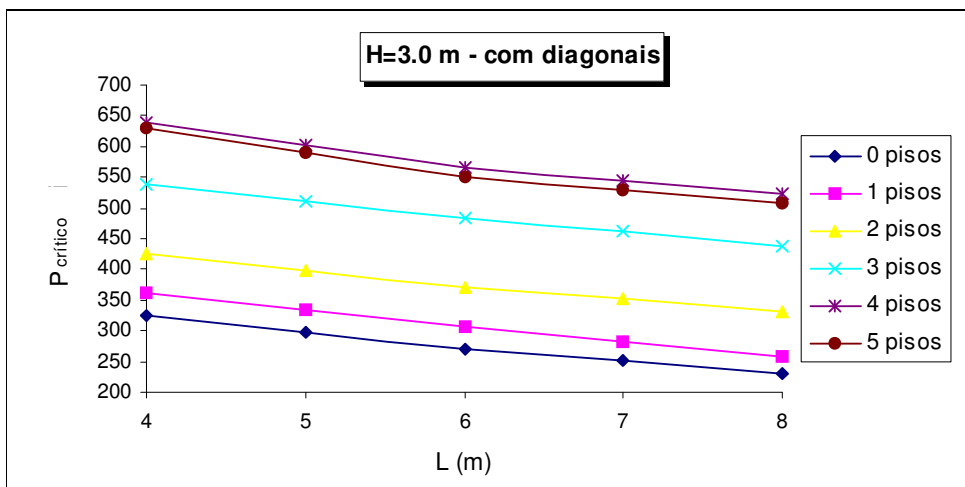


Gráfico 5.36 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.0).

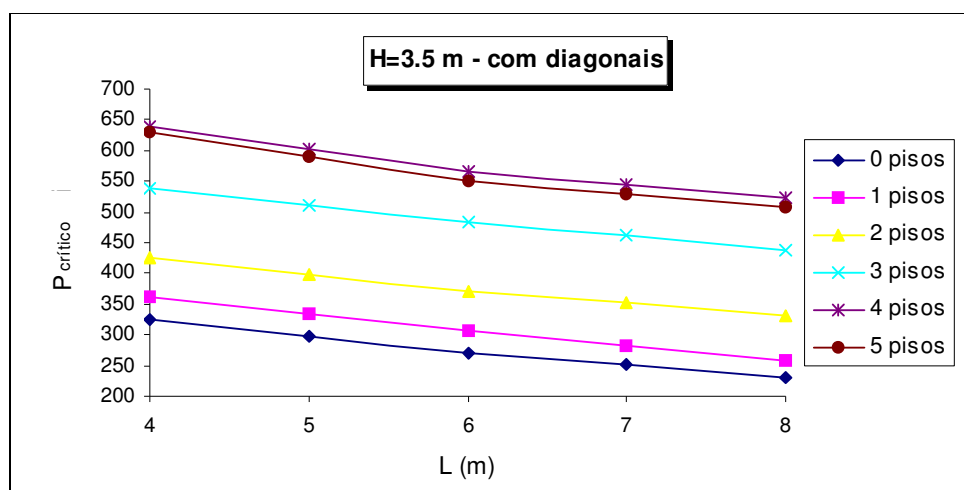


Gráfico 5.37 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=3.5).

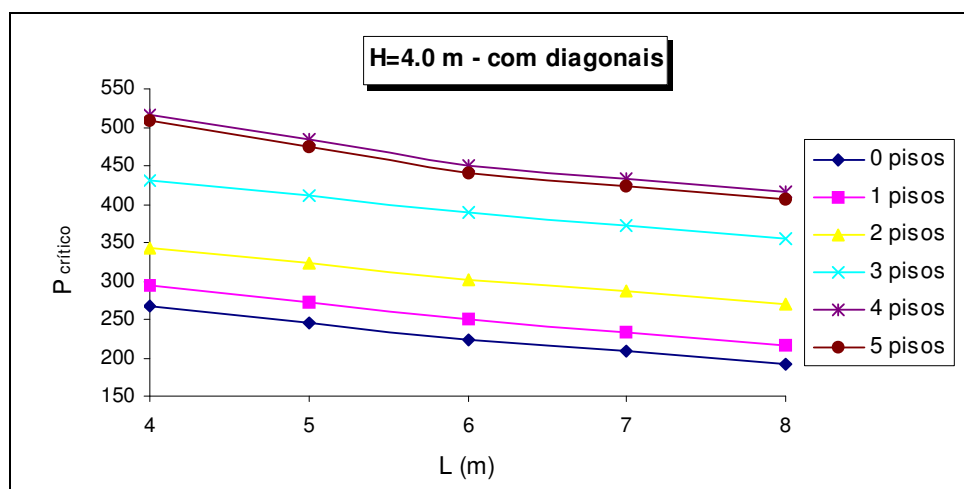


Gráfico 5.38 – L2 e L3 – Variação paramétrica com diagonais (L, H=4.0).

Comparativamente ao estudo anterior – variação da laje L3 – conclui-se que esta variação paramétrica é idêntica, verificando-se que a estrutura aumenta a capacidade resistente, com o aumento do número de pisos das lajes L2 e L3. A maior contribuição para o aumento da capacidade resistente, corresponde à introdução do 3º piso (Gráficos 5.36, 5.37 e 5.38), sendo pouco significativa a introdução do 5º piso. Mais uma vez se constata que o aumento de L e H provoca uma diminuição do parâmetro de carga crítico.

As deformadas dos modos de instabilidade são idênticas às apresentadas no caso anterior (variação do número de pisos de L3), pelo que não serão apresentadas.

Assim, as conclusões apontadas no caso da variação de L3 podem ser adoptadas para justificar o comportamento da estrutura quando se efectua a variação paramétrica de L2 e L3.

Para finalizar o estudo deste pórtico, convém elaborar um estudo relativamente à influência da “torre” no comportamento global da estrutura (Figura 5.47).

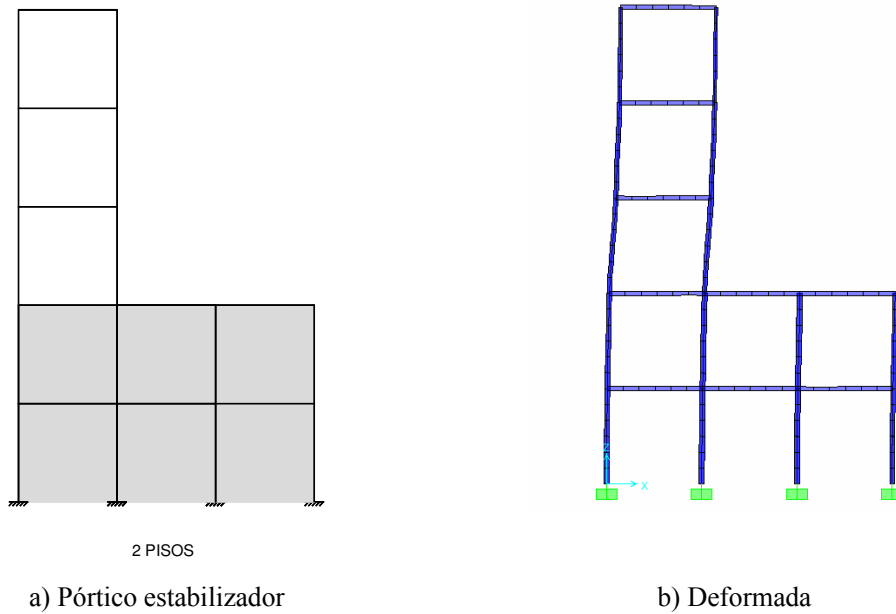


Figura 5.47 – Comportamento do pórtico com assimetria em alçado L2 e L3 (2 pisos).

Neste contexto, optou-se por analisar a o comportamento da parte sobrelevada da estrutura representada na Figura 5.48 (variação de L3 com $H=L= 4$), comparando o desempenho do conjunto (Figura 5.48a) com o desempenho da subestrutura (Figura 5.48b).

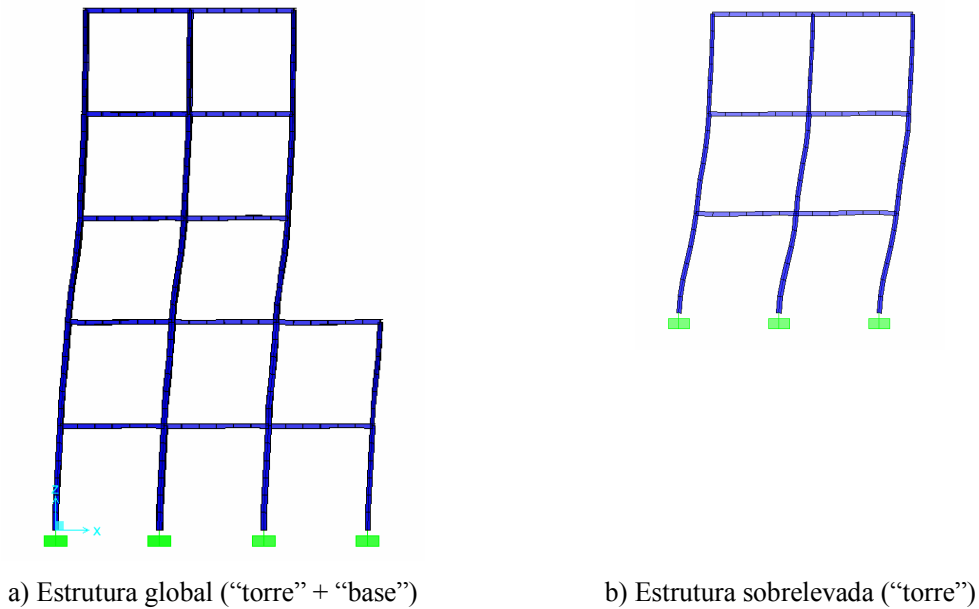


Figura 5.48 – Modos de instabilidade.

Para simplificar a análise do pórtico, será adoptada a designação “torre” para definir a estrutura sobrelevada e “base” para definir a parte inferior da mesma. As duas estruturas (global e sobrelevada) foram modeladas, sem qualquer elemento de contraventamento, determinando o parâmetro crítico e o respectivo modo de instabilidade. Desta análise resultou um parâmetro de carga para a estrutura sobrelevada ($\lambda= 248,31$), superior ao obtido para a estrutura global ($\lambda= 212,41$). Relacionando estes valores, verifica-se que a introdução da base reduz em 15% a capacidade resistente da estrutura (base + torre), justificando a importância da parte sobrelevada, no desempenho da estrutura (global).

Esta constatação é validada através da análise do modo de instabilidade (Figura 5.48), verificando-se que a resposta global da estrutura é maioritariamente comandada pela torre.

Com base nas análises realizadas nesta secção, pode concluir-se o seguinte:

- A disposição do sistema de contraventamento influencia significativamente o desempenho estrutural;
- Disposições assimétricas em planta e alçado, introduzem rotações ao nível das lajes, condicionando o desempenho da estrutura;
- O comportamento da estrutura 3D deve ser comandado pelo pórtico 2D que apresenta maior capacidade resistente. Neste caso, a estrutura deve apresentar um comportamento de nós fixos;
- O aumento do número de lajes, pode não implicar um aumento da capacidade resistente da estrutura;
- Se o pórtico apresentar partes sobrelevadas, a geometria destas subestruturas pode condicionar a capacidade resistente do conjunto, justificando uma análise criteriosa dessa geometria. A definição geométrica da parte sobrelevada é mais condicionante para o desempenho da estrutura, quando não existem elementos de contraventamento;
- A geometria que garante o melhor desempenho de um edifício corresponde, obviamente, à configuração em “pirâmide”, ou seja, mais largo na base e mais fino no topo.

5.5 PORTICO 3D COM 10 PISOS

5.5.1 Descrição da estrutura

A estrutura analisada neste caso, esquematicamente representada na Figura 5.49, é constituída por um pórtico 3D com dez pisos, apresentando assimetria geométrica em planta.

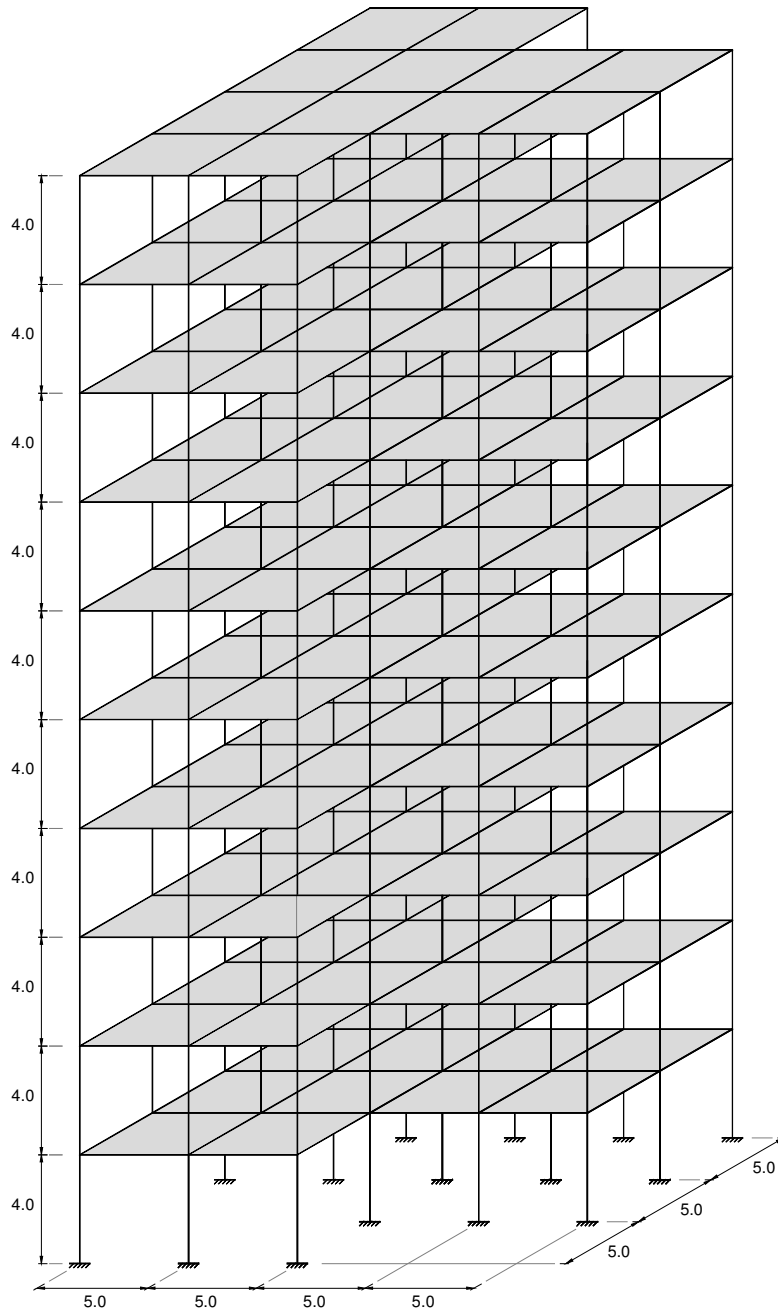


Figura 5.49 – Perspectiva do pórtico com 10 pisos e assimetria em planta.

Neste estudo, não será feita uma variação paramétrica do vão entre pilares (L) e da altura entre pisos (H), mas sim uma análise sobre a influência da localização dos elementos de contraventamento no desempenho da estrutura.

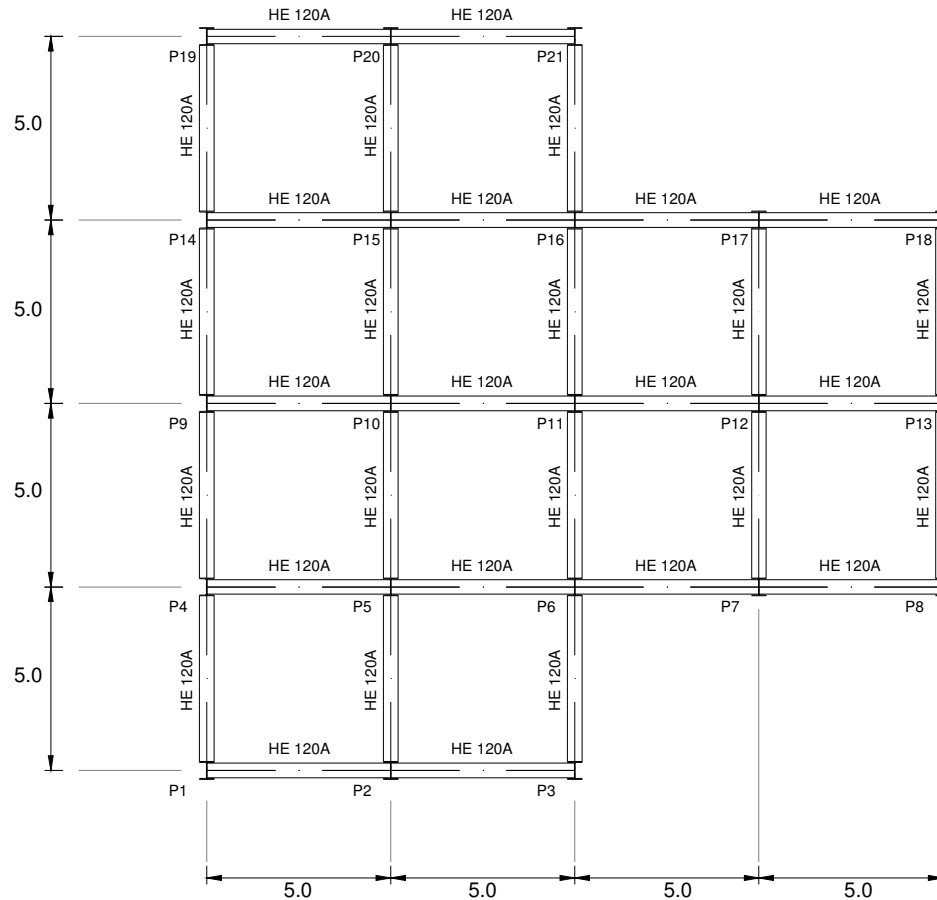


Figura 5.50 – Planta do pórtico com 10 pisos.

Os pilares e vigas são compostos por perfis metálicos comerciais da série HEA, com módulo de elasticidade $E=205$ GPa. Foram consideradas ligações contínuas entre as vigas e pilares e um comportamento de diafragma rígido no plano das lajes.

O pórtico foi dimensionado considerando as ações actuantes conforme estabelecido no RSA, sendo a estrutura solicitada por:

- Peso próprio;
- Sobrecarga (Pisos – 2.0 kN/m, Cobertura – 1.0 kN/m);
- Restantes cargas permanentes e paredes divisórias (Pisos – 2.5 kN/m, Cobertura 1.5 kN/m).

e sujeita às seguintes combinações de acções:

$$- 1.5 G + 1.5 Q$$

em que G representa as acções permanentes e Q a acção da sobrecarga. Foi desprezada a acção do vento e dos sismos. Não foi considerado o efeito do vento nem do sismo, uma vez que estas acções introduzem esforços de tracção nos pilares, aumentando o parâmetro de carga crítica. Azevedo (1993) estudou várias estruturas considerando a acção do vento, concluindo que, relativamente aos efeitos de segunda ordem, a combinação 1,5 (G + Q) corresponde à situação mais desfavorável (parâmetro crítico mais reduzido).

As vigas têm secção constante (HE 160A) e os pilares apresentam as características das secções indicadas no Quadro 5.8.

	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 4	Piso 5	Piso 6	Piso 7	Piso 8	Piso 9	Piso 10
P1	220A	220A	220A	220A	200A	200A	180A	180A	160A	140A
P2	300A	280A	280A	260A	240A	220A	220A	200A	180A	140A
P3	220A	220A	220A	220A	200A	200A	180A	180A	160A	140A
P4	300A	300A	280A	260A	260A	240A	220A	220A	200A	160A
P5	500A	500A	400A	340A	300A	280A	260A	240A	200A	160A
P6	450A	400A	340A	320A	300A	280A	260A	240A	200A	160A
P7	320A	300A	300A	280A	260A	240A	240A	220A	200A	160A
P8	220A	220A	220A	220A	200A	200A	180A	180A	160A	140A
P9	300A	300A	300A	280A	260A	240A	240A	220A	200A	160A
P10	550A	500A	450A	360A	320A	300A	260A	240A	220A	160A
P11	550A	500A	500A	400A	320A	300A	260A	240A	220A	160A
P12	500A	500A	360A	320A	300A	280A	240A	220A	200A	160A
P13	300A	280A	280A	260A	240A	240A	220A	200A	180A	140A
P14	300A	300A	280A	260A	260A	240A	220A	220A	200A	160A
P15	500A	500A	400A	340A	300A	280A	260A	240A	200A	160A
P16	450A	400A	340A	320A	300A	280A	260A	240A	200A	160A
P17	320A	300A	300A	280A	260A	240A	240A	220A	200A	160A
P18	220A	220A	220A	220A	200A	200A	180A	180A	160A	140A
P19	220A	220A	220A	220A	200A	200A	180A	180A	160A	140A
P20	300A	280A	280A	260A	240A	220A	220A	200A	180A	140A
P21	220A	220A	220A	220A	200A	200A	180A	180A	160A	140A

Quadro 5.8 – Secções dos pilares – Perfis HEA.

Para a determinação da carga nodal vertical que actua em cada pilar, foi utilizada uma distribuição de carga em função da área de influência, tendo-se obtido o carregamento apresentado na Figura 5.51.

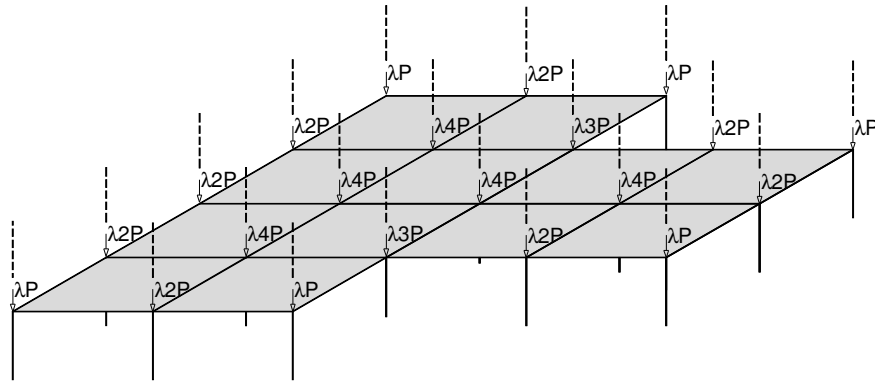


Figura 5.51 – Distribuição das cargas verticais.

Como já foi referido, neste caso procura-se estudar o comportamento do pórtico à medida que se altera a localização das diagonais, procurando uma disposição que garanta um comportamento de nós fixos, comandado pelo pórtico com maior capacidade resistente.

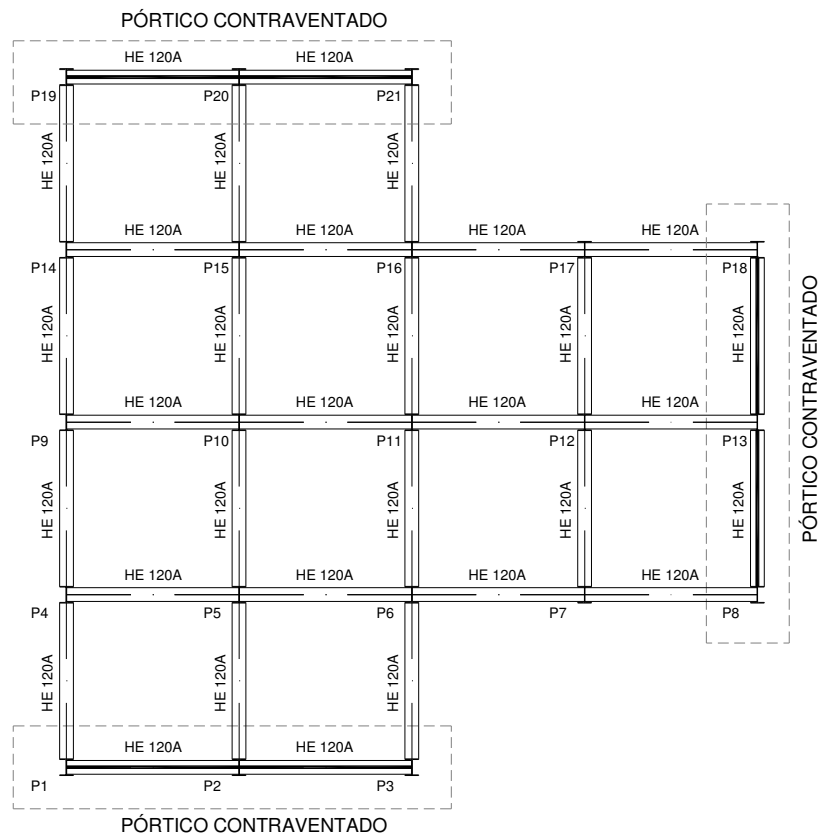


Figura 5.52 – Pórticos contraventados.

O primeiro sistema de contraventamento adoptado está representado na Figura 5.52, concretizado pela introdução de elementos diagonais nos pórticos da periferia do edifício.

5.5.2 Resultados

Iniciou-se o processo determinando o parâmetro crítico e o modo de instabilidade para o pórtico sem contraventamento, repetindo o processo para o pórtico contraventado.

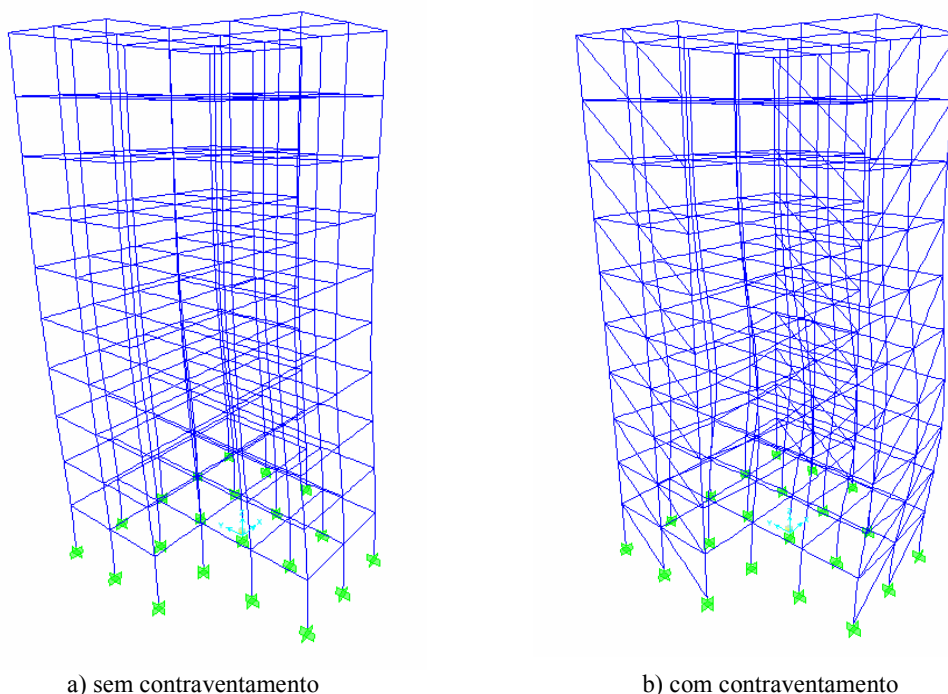


Figura 5.53 – Deformadas associadas ao modo de instabilidade.

No caso do pórtico não possuir elementos de contraventamento, obteve-se um parâmetro crítico $\lambda = 81,46$. A introdução do sistema de contraventamento implicou um aumento da capacidade resistente tendo-se obtido um parâmetro crítico $\lambda = 119,59$.

Observando o modo de estabilidade da estrutura contraventada (Figura 5.53), verifica-se que o sistema de contraventamento é insuficiente para garantir um comportamento de pórtico de nós fixos. A deformação da estrutura, para esta disposição dos elementos diagonais, não ocorre por translação dos pisos superiores, como no caso do pórtico não contraventado, mas por translação dos pisos inferiores, mostrando que a zona mais sensível se localiza entre o 2º e o 3º piso (maior translação nodal).

Como o pórtico não está suficientemente contraventado, a resposta da estrutura não é comandada pelo pórtico que possui maior capacidade resistente, concluindo que a capacidade resistente da estrutura não está devidamente aproveitada. Com base nesta conclusão, pode-se afirmar que este sistema de contraventamento não corresponde à configuração mais favorável, justificando a necessidade de proceder à sua alteração.

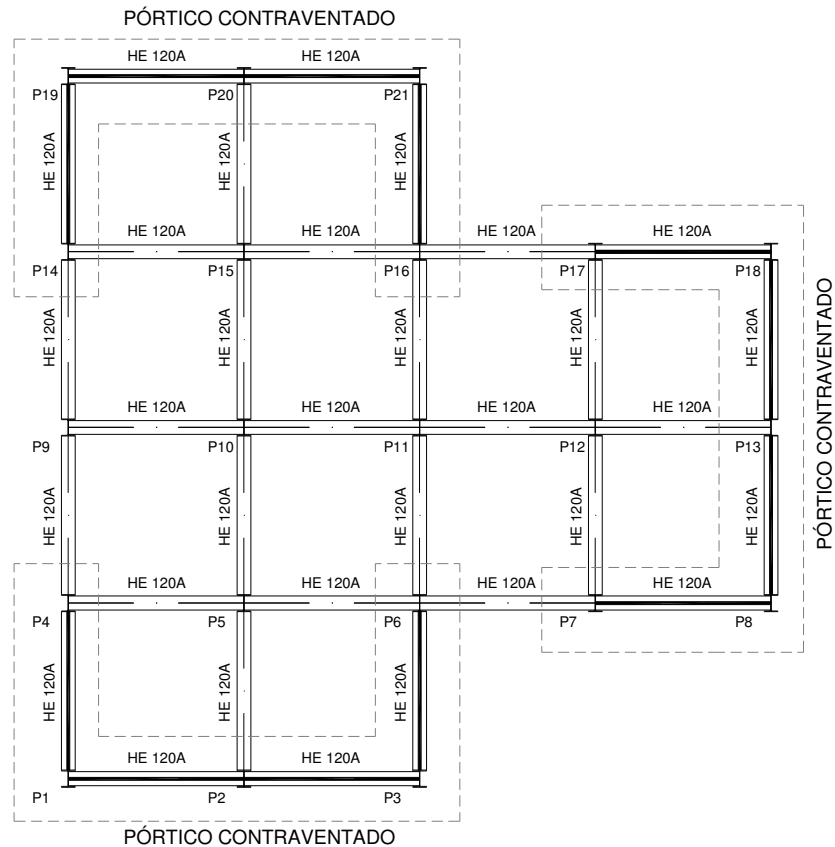


Figura 5.54 – 2ª disposição dos elementos de contraventamento.

Assim, introduziu-se um sistema de contraventamento na periferia dos pórticos que possuem elementos verticais pertencentes a dois planos, ou seja, nos cantos do edifício, de forma a garantir o aumento da rigidez nas direcções principais da estrutura (Figura 5.54).

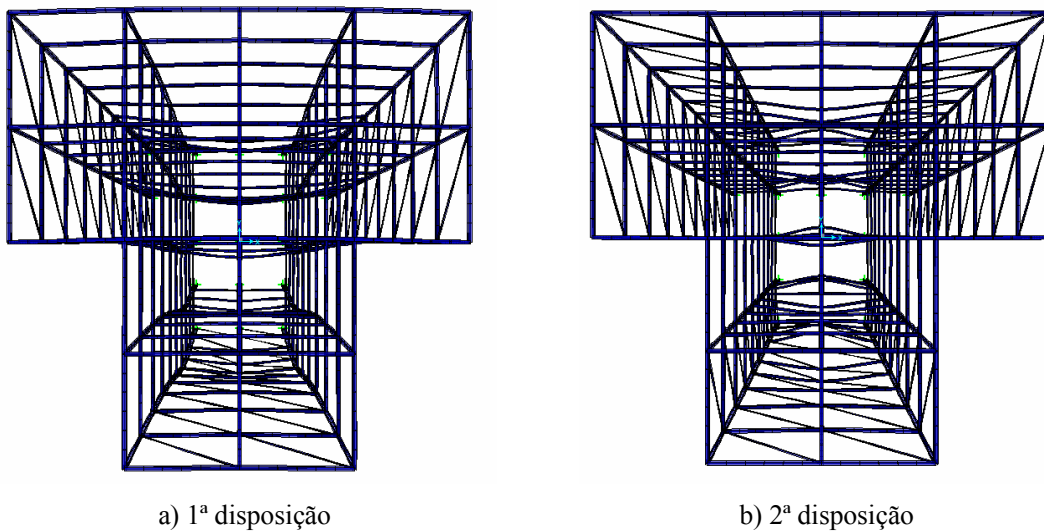


Figura 5.55 – Modos de instabilidade.

Modelou-se a nova disposição de contraventamento, determinando o parâmetro crítico e o modo de estabilidade. Como era esperado, a capacidade resistente aumentou significativamente ($\lambda= 159,54$) quando comparada com a obtida para a 1ª disposição dos elementos contraventamento ($\lambda= 119,59$). Note-se que este valor é duas vezes superior ao valor encontrado para o pórtico não contraventado (81,46).

Examinando o modo de instabilidade (Figura 5.55b), verifica-se que a deformação corresponde a um comportamento de nós fixos, sendo a resposta comandada pelo pórtico que tem maior capacidade resistente (P9 a P13).

Isolando o pórtico P9 a P13 (Figura 5.56), observa-se que os 3 últimos pisos praticamente não apresentam translações relativas (drift), sugerindo a possibilidade de supressão das diagonais introduzidas nesses pisos.

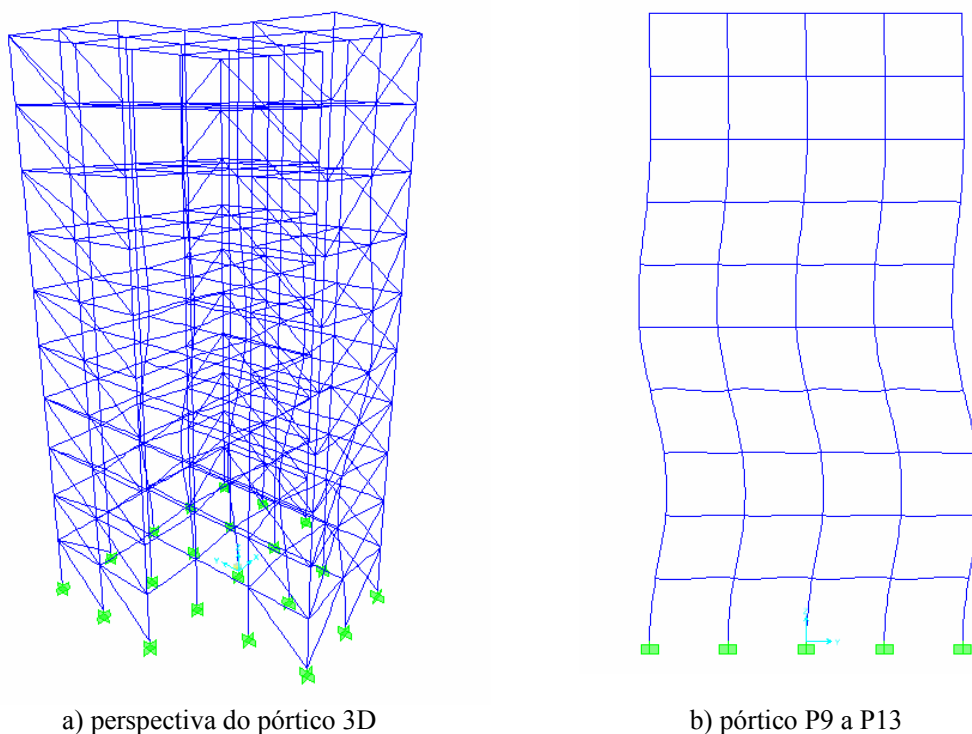
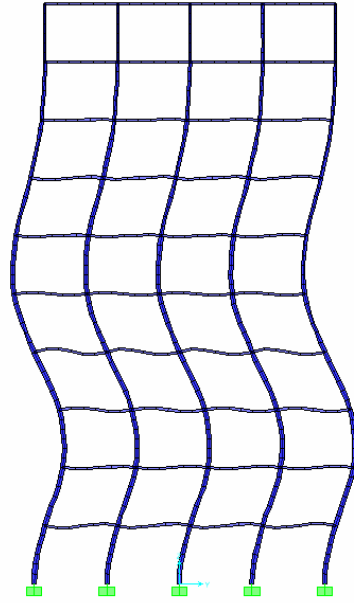


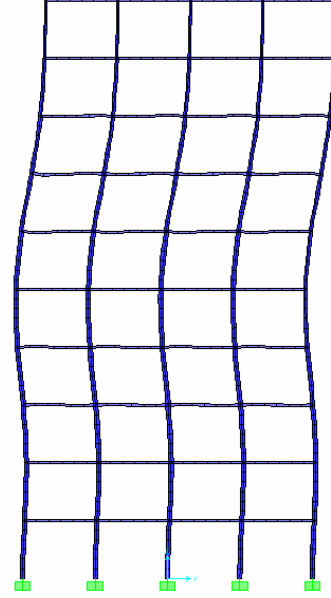
Figura 5.56 – Modo de instabilidade (2ª disposição de contraventamento).

Para estudar a influência da anulação das diagonais de contraventamento nos pisos superiores, no desempenho da estrutura, procedeu-se à sua modelação, eliminando os elementos de contraventamento sucessivamente desde o piso mais elevado (10º piso) até ao 5º piso.

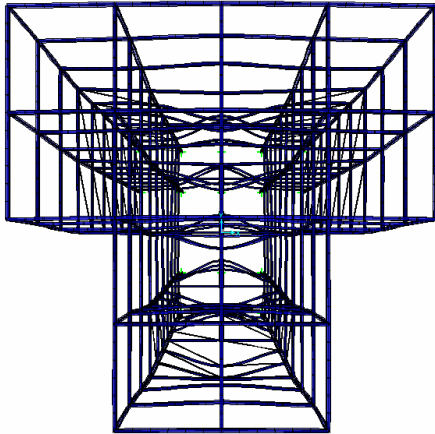
Eliminando o contraventamento nos 3 últimos pisos, verifica-se que o valor do parâmetro crítico ($\lambda= 158,05$), não se altera significativamente.



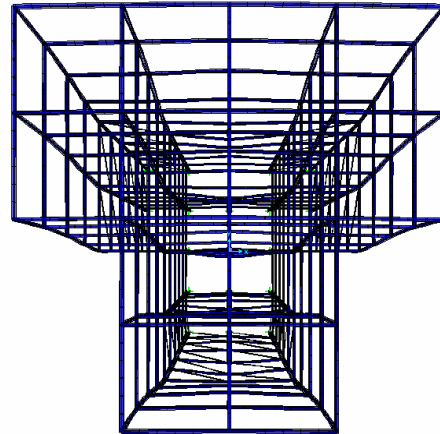
3 pisos eliminados (diagonais) - Alçado



4 pisos eliminados (diagonais) - Alçado



3 pisos eliminados (diagonais) - Planta



4 pisos eliminados (diagonais) - Planta

Figura 5.57 – Modos de instabilidade (eliminação de diagonais nos pisos superiores).

Quando se eliminam as diagonais nos 4 últimos pisos, observa-se uma diminuição mais acentuada no valor do parâmetro ($\lambda = 151,55$), sendo mais significativo quando se eliminam 5 pisos ($\lambda = 132,56$). Esta diminuição está associada ao modo de instabilidade da estrutura (nós móveis). Quando se retiram as diagonais nos 3 últimos pisos, a estrutura ostenta uma deformação de nós fixos, apresentando uma deformação parcial de nós móveis para uma supressão dos elementos diagonais nos 4 últimos pisos (Figura 5.57). Retirando mais um piso (5 últimos pisos), a estrutura deixa de ter um comportamento de nós fixos, apresentando translações ao nível das lajes dos pisos em que foram retirados os elementos diagonais.

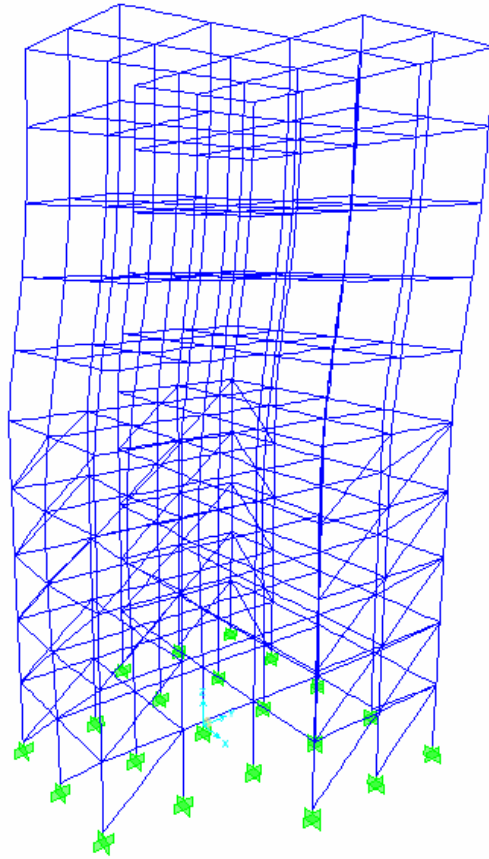


Figura 5.58 – Modos de instabilidade (eliminação de diagonais nos 5 pisos superiores).

Na Figura 5.58, está representado o modo de instabilidade deste pórtico (5 pisos sem diagonais), sendo visível a translação da parte da estrutura que não possui contraventamentos, passando a ser esta subestrutura a responsável pela resposta global do pórtico.

5.6 NOTA FINAL

Com base nos estudos elaborados nesta secção, pode-se concluir o seguinte:

- a) O contraventamento deve apresentar disposição simétrica em alçado e em planta;
- b) A secção dos elementos diagonais devem garantir suficiente capacidade resistente para impedir a translação dos nós;
- c) O modo de instabilidade tem de ser comandado pelo pórtico que apresenta maior capacidade resistente;

- d) O pórtico tem que apresentar um comportamento de nós fixos, sem significativas translações e/ou rotações das lajes;
- e) Colocar os elementos de contraventamento na periferia do edifício, preferencialmente nos planos que tenham pilares pertencentes a dois pórticos alinhados em planos diferentes (pilares de esquina);

Ainda com base neste estudo, pode-se enunciar um procedimento (simplificado) para a otimização da disposição de elementos diagonais, em estruturas porticadas com geometria regular:

1. Determinar o modo de deformação da estrutura sem a introdução de elementos de contraventamento;
2. Introduzir elementos de contraventamento na totalidade dos pisos, assegurando que a sua localização corresponde à introdução nas ligações entre pórticos pertencentes a dois planos distintos, com disposição simetria em planta e alçado, de forma a alterar o modo de instabilidade obtido para a estrutura sem contraventamento;
3. Introduzir novos planos de contraventamento (na totalidade dos pisos) até se obter um modo de estabilidade comandado pelo pórtico que apresenta maior capacidade resistente, de acordo com o dimensionamento da estrutura;
4. Observar o modo de instabilidade, retirando os elementos de contraventamento nos pisos superiores que apresentem deslocamentos relativos de andar pouco significativos (“drift” reduzido).

Para finalizar este capítulo, refere-se que as conclusões apresentadas, não devem ser adaptados à generalidade das estruturas porticadas, sobretudo se estas apresentarem elementos de ligação flexíveis ou lajes sem um comportamento de diafragma rígido. Se foram acauteladas as hipóteses que serviram de base a este estudo, então, é possível aplicar as deduções apresentadas de forma a maximizar o desempenho da estrutura.

6 - CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

6.1 CONCLUSÕES

No início desta dissertação referiu-se que se utilizaria software, com formulações exactas e aproximadas, para abordar o problema da não linearidade geométrica em estruturas constituídas por pórticos rectangulares, procedendo à determinação do parâmetro de carga crítico, estudando a influência da variação de parâmetros geométricos no desempenho estrutural.

Em primeiro lugar, compilou-se a informação necessária para avaliar as possibilidades de análise não linear geométrica de estruturas bidimensionais e tridimensionais, apresentando-se de seguida vários procedimentos para a determinação dos parâmetros de carga e modos de instabilidade, em particular o Método dos Elementos Finitos e o Método dos 3 Graus de Liberdade por Piso.

Foi desenvolvido um programa de cálculo automático, designado por INST3D, que permite determinar o parâmetro crítico e os modos de instabilidade para estruturas porticadas, através da análise exacta da instabilidade global e fez-se um estudo comparativo entre os resultados obtidos com este programa e os resultados obtidos com software comercial baseado em análises aproximadas.

Elaboraram-se vários estudos relacionados com a análise não linear geométrica, procedendo-se a referida variação paramétrica, abordando ainda a possibilidade de utilização de elementos de contraventamento.

Com base nos estudos realizados, podem-se identificar 4 factores que influenciam a elaboração de uma análise não linear geométrica e o desempenho estrutural. Os dois primeiros estão relacionados com a formulação e modelação do problema e os dois seguintes com o comportamento estrutural, concluindo-se o seguinte:

(i) Formulação da Matriz de Rigidez

A utilização de algoritmos com formulações exactas da matriz de rigidez, além de garantir a obtenção de um resultado rigoroso, torna desnecessária a discretização dos elementos que constituem a estrutura, simplificando o pré-processamento, a montagem estrutural e o pós-processamento de resultados da mesma. Quando se utilizam programas baseados em formulações aproximadas da matriz de rigidez, normalmente fundamentados no Método dos

Elementos Finitos, existe a necessidade de discretizar a estrutura para poder obter resultados próximos do valor exacto. Se a estrutura tiver um elevado número de barras, a discretização implica o aumento do número de incógnitas e de equações que definem o problema, com o consequente aumento dos meios computacionais necessários para obter o resultado final. Com a actual capacidade de processamento dos computadores, o problema da resolução de um grande número de equações não pressupõe um inconveniente, mas o pré-processamento, a edição e o pós-processamento da estrutura em estudo pode constituir um problema, sobretudo em estruturas de geometria complexa, nas quais existe a dificuldade da análise crítica dos resultados quando se pretende investigar o comportamento estrutural.

O principal inconveniente na utilização da formulação exacta está relacionado com o algoritmo de resolução. Enquanto na formulação aproximada é utilizado o algoritmo universal da análise de 1ª ordem, adicionando-lhe uma rotina que introduz a influência do esforço axial na configuração deformada, na formulação exacta é necessário desenvolver um algoritmo de maior complexidade. Desta análise, conclui-se que a utilização da matriz de rigidez exacta é vantajosa em relação à utilização da matriz de rigidez total aproximada, desde que sejam elaboradas as rotinas necessárias à sua utilização

(ii) Modelação Estrutural

O método dos elementos finitos (MEF) constitui a base para a maioria do software comercial existente. Este método permite estudar muitos problemas relacionados com a engenharia, mas consiste numa ferramenta numérica que utiliza a formulação aproximada da matriz de rigidez, apresentando os inconvenientes apontados no item anterior.

O software INST3D foi desenvolvido com base na formulação exacta da matriz de rigidez de um elemento de barra 2D, associando pórticos 2D no espaço, através do método dos 3 graus de liberdade por piso, para estudar estruturas tridimensionais.

Dos estudos realizados, conclui-se que as duas modelações (MEF e INST3D) fornecem bons resultados, em particular o INST3D que permite determinar o valor “exacto” do parâmetro crítico e do modo de instabilidade para estruturas 2D e 3D constituídas por pórticos rectangulares.

Aferiu-se o seu rigor, analisando estruturas 2D e 3D de solução analítica conhecida, verificando-se que o resultado é rigoroso, validando a sua utilização neste tipo de análise.

O recurso a modelos tridimensionais permite uma melhor interpretação da estrutura, nomeadamente na identificação de zonas críticas que condicionam o desempenho do sistema

estrutural, quando se efectua uma análise de instabilidade. A introdução de elementos de contraventamento alterou o comportamento das estruturas em estudo, modificando a mobilidade da estrutura, eliminando as zonas sensíveis ou reduzindo a sua importância na determinação da carga crítica.

No entanto, admitiram-se algumas simplificações para a utilização deste software, nomeadamente o tipo de ligação entre os elementos estruturais (vigas e pilares), a utilização de cargas concentradas nos nós, o comportamento de diafragma rígido para as lajes e a indeformabilidade axial dos pilares. Relativamente a cada um destes tópicos pode concluir-se o seguinte:

- Se o estudo da não linearidade geométrica incidir sobre estruturas metálicas, numa análise minuciosa, a ligação entre vigas e pilares nunca será perfeitamente rígida, pois há sempre um comportamento semi-rígido da mesma. Contudo, é comum considerar que as ligações têm um comportamento rígido, desde que no projecto se dimensionem sistemas de união entre os elementos que garantam a continuidade dos esforços.
- No desenvolvimento deste estudo, considerou-se que as cargas verticais se encontravam concentradas nos nós. Geralmente, numa análise de 1ª ordem, para estudar a distribuição das cargas, considera-se que as cargas das lajes são transmitidas para as vigas e posteriormente para os pilares, verificando-se que as vigas transmitem não só cargas verticais mas também momentos concentrados nas ligações com os pilares, pelo que se deviam ser introduzidos no modelo de cálculo. Porém, na análise não linear geométrica, as principais acções responsáveis pela perda de estabilidade são as cargas verticais, pelo que a introdução dos momentos concentrados não alteraria significativamente o valor do parâmetro crítico. Outra dificuldade, que contribui para não introduzir estes momentos no modelo, consiste na complexidade do cálculo necessário para processar a estrutura, já que estes momentos dependem do esforço axial, como se viu no capítulo 2.
- O comportamento de diafragma rígido das lajes pode ser considerado desde que este elemento seja suficientemente rígido no seu plano, como acontece no caso de lajes de betão armado. Se forem utilizados sistemas flexíveis, então o modelo idealizado deve ser alterado para introduzir este comportamento.
- Quando se estudam estruturas de pequeno porte, a consideração de indeformabilidade axial das barras constitui uma boa aproximação do comportamento real da estrutura. Para estruturas de elevado número de pisos, esta simplificação pode implicar a

obtenção de cargas críticas superiores ao valor real, pelo que se deve alterar o modelo de cálculo para introduzir a deformabilidade axial das barras. Para as estruturas estudadas, esta simplificação não altera o valor do parâmetro crítico.

(iii) Contraventamentos

A utilização de elementos de contraventamento influencia o comportamento estrutural, assim como a capacidade resistente em termos de carga última de instabilidade. Da utilização racional destes elementos depende o nível de desempenho dos esquemas estruturais utilizados.

A necessidade da utilização de contraventamentos em estruturas porticadas tridimensionais obriga a uma selecção criteriosa, por parte do projectista, das dimensões e da localização dos elementos estruturais de forma a garantir melhoria do comportamento local e global, assim como uma economia do material estrutural utilizado.

Para os casos em estudo não é necessário utilizar elementos de contraventamento na totalidade dos pisos, desde que se escolha uma relação de inércias em cada nó de forma a ocorrerem efeitos estabilizadores ao nível do piso ao qual pertencem, e também introduzindo elementos de contraventamento em locais apropriados que, em conjunto com os elementos resistentes, garantam o bom funcionamento em serviço da estrutura. Esta constatação torna-se mais óbvia para pórticos com maior número de pisos, uma vez que estes pórticos estão mais dependentes da sua configuração para assegurar a estabilidade global. No caso das estruturas tridimensionais o efeito dos elementos de contraventamento é ainda mais significativo, e a determinação de configurações melhoradas é baseada em combinações da posição geométrica e propriedades seccionais desses elementos estruturais.

A utilização de estruturas com igual relação entre o vão entre pilares e a altura inter-pisos (diagonais a 45°), garante o melhor desempenho dos sistemas de contraventamento.

O recurso a uma análise de segunda ordem permite verificar a funcionalidade do esquema de contraventamento adoptado e optimizá-lo na perspectiva eficiência *versus* custo.

(iv) Variação Paramétrica

Foi realizado um estudo paramétrico de várias estruturas 2D e 3D que permitiu comparar o rigor das formulações exacta e aproximada utilizadas. Foi determinado o parâmetro crítico de estruturas sem e com contraventamento, segundo determinado esquema, justificando a utilização de elementos de contraventamento na optimização do comportamento estrutural,

assim como no aumento da capacidade resistente em termos de carga última de instabilidade. A introdução de elementos de contraventamento em locais apropriados, em conjunto com os elementos resistentes, garante o bom funcionamento em serviço da estrutura maximizando o seu desempenho.

Estudou-se a influência da alteração da volumetria da estrutura, mais concretamente a assimetria em alçado, no seu comportamento, identificando o modo de deformação. Alterou-se o modo de instabilidade, melhorando o seu desempenho, através da introdução de elementos estabilizadores (diagonais). Com base neste estudo, identificaram-se soluções estruturais que permitem aumentar a sua capacidade resistente.

Relativamente à variação do número de pisos das lajes, ou seja, a alteração da geometria em altura, verificou-se que a solução óptima corresponde a uma situação intermédia, em que a estrutura tem um alçado que se desenvolve em pirâmide. Neste caso, os pórticos inferiores funcionam como subestruturas estabilizadoras, melhorando o comportamento do conjunto. Neste caso, a parte sobrelevada da estrutura condiciona a resposta global do pórtico, sendo necessário estudar o seu comportamento para garantir um funcionamento não linear geométrico.

6.2 DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Para prosseguir o estudo iniciado nesta dissertação, podem-se identificar duas componentes que devem ser desenvolvidas, numa abordagem qualitativa, para garantir uma análise completa dos sistemas estruturais. Uma das componentes está associada ao software INST3D e a outra está relacionada com o estudo paramétrico desenvolvido, pelo que os desenvolvimentos futuros serão definidos em função destas componentes.

No caso do INST3D, pretende-se alterar o software para permitir elaborar estudos mais completos e complexos, eliminando as limitações associadas ao seu modelo de cálculo. Neste contexto, pretende-se alterar o algoritmo de resolução para introduzir a formulação exacta de um elemento de barra 3D, garantindo desta forma a utilização de um método de cálculo tridimensional, permitindo um estudo mais rigoroso do comportamento da estrutura. Também se pretende implementar a possibilidade de efectuar uma análise não linear material, de modelar ligações semi-rígidas e de estudar estruturas com qualquer tipo de carregamento.

Na componente associada ao estudo paramétrico, pretende-se elaborar gráficos e ábacos que permitam, para geometrias pré-definidas, determinar o valor da carga crítica e o modo de

instabilidade. Para cada geometria identificar-se-á a melhor solução de contraventamento, especificando o aumento de capacidade resistente e garantindo a melhor relação entre a eficiência e o custo.

Com estes estudos pretende-se simplificar o processo de obtenção da carga crítica e minimizar a complexidade da análise não linear geométrica, garantindo o desenvolvimento de ferramentas de fácil aplicação no projecto de estruturas de engenharia civil.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, R. F.; CARASLINDAS, H. P.; BARROS, R. C. (2003) – *O Efeito da Não-Linearidade Geométrica P-Δ em Análises Estáticas Inelásticas de Pórticos Metálicos*, Ed: J. Infante Barbosa, Vol. II, Mecânica dos Sólidos e Estrutural, pp.731-742, Évora, Portugal.

ANSYS (2001) – *ANSYS, Inc. Theory Manual – Release 5.7, Twelfth Edition*, Swanson Analysis Systems Inc.

ANSYS (2003) – *ANSYS Release 8.0 Documentation*, ANSYS inc., Canonsburg – PA, USA.

ARISTIZÁVAL-OCHOA, J. D. (2001) – *Nonlinear Large Deflection-Small Strain Elastic Analysis of Beam-Column with Semi-Rigid Connections*, Journal of Structural Engineering, Vol. 127, No 1, pp 092-096, ASCE – American Society of Civil Engineers, USA.

ARISTIZÁVAL-OCHOA, J. D. (2002) – *Classic Buckling of Three-Dimensional Multicolumn Systems Under Gravity Loads*, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 128, No 6, pp 613-624, ASCE – American Society of Civil Engineers, USA.

AZEVEDO, A. F. F. L. C. (1993) – *Análise Tridimensional de Estruturas Metálicas Incluindo os Efeitos de Segunda Ordem*, Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal.

BARROS, R. C. (1983) – *Buckling Analysis of End Restrained Imperfect Tubular Beam-Columns*, Ph.D. Dissertation in Civil Engineering, The University of Akron, Ohio, USA.

BARROS, R. C. (1986) – *Elasto-Plastic Buckling Analysis of End Restrained Spatial Tubular Beam-Columns*, In *Numerical Methods for Nonlinear Problems* (Edited by C. Taylor, D.R.J. Owen, E. Hinton, F.B. Damjanic), pp. 419-431, Pineridge Press, Swansea, UK.

- BARROS, R. C. (1988) – *Improved Convergence of the Influence Coefficient Method*, Computers & Structures, Vol. 30, No. 3, pp. 697-704, Civil-Comp Ltd and Pergamon Press, Great Britain.
- BARROS, R. C. (1999-2000) – *Apontamentos sobre Instabilidade de Estruturas*, Conjunto de trabalhos impressos e manuscritos de apoio ao Mestrado em Estruturas de Eng^a Civil, Secção de Estruturas, Departamento de Engenharia Civil, F.E.U.P., Porto, Portugal.
- BATHE, K. J. (1996) – *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- BATHE, K. J.; WILSON, E. L. (1976) – *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. (1991) – *Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, New York, USA.
- BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. (1975) – *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill, Kogakusha, Ltd.
- CEN (1992) – *Eurocode 3: Design of Steel Structures, Part 1.1: General Rules and Rules for Buildings*, European Committee of Standardization.
- CÉSAR, M. B.; BARROS, R. C. (2003) – *Desempenho não linear geométrico de pórticos metálicos contraventados sob acções verticais*, 4^o Congresso de Construção Metálica e Mista, Tema 4 – Análise e Verificação da Segurança, pp.367-378, Lisboa, Portugal.
- CÉSAR, M. B.; BARROS, R. C. (2003a) – *Manual de utilização do programa INST3D para a instabilidade de pórticos rectangulares tridimensionais sob acções verticais*, Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, FEUP, Porto, Portugal.

- CÉSAR, M. B.; BARROS, R. C. (2004) – *Modelos de Comportamento Não Linear Geométrico de Pórticos Assimétricos Tridimensionais*, in “Proceedings of the Conference Métodos Computacionais em Engenharia”, APMTAC, Lisboa, Portugal.
- CÉSAR, M. B.; BARROS, R. C. (2004a) - *Non-Linear Carrying Capacity of Asymmetric Three-Dimensional Braced Steel Frames*, in “Proceedings of The Seventh International Conference on Computational Structures Technology”, Paper 145, pp. 325-326, Civil-Comp Press, Lisbon, Portugal.
- CHAGES, A. (1974) – *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA.
- CHAMPION, E. R. JR (1993) – *Numerical Methods for Engineering Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York, USA. Chen, W. F.; Atsuta, T. (1976) – *Theory of Beam-Columns: In-Plane Behavior and Design*, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, USA.
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. (1988) – *Structural Stability - Theory and Implementation*, Elsevier Inc., New York, USA.
- CHEN, W. F.; LUI, E. M. (1991) – *Stability Design of Steel Frames*, CRC Press, Florida, USA.
- CHEN, W. F.; SEUNG-EOCK, K. (1997) – *LRFD Steel Design using Advanced Analysis*, CRC Press, Florida, USA.
- CHEN, W. F.; SEUNG-EOCK, K.; SE-HYU, C. (2001) – *Practical Second-Order Inelastic Analysis for Three-Dimensional Steel Frames*, Steel Structures 1, pp 213-223, Korea.
- CHEN, W. F.; SOHAL, I. (1995) – *Plastic Design and Second-Order Analysis of Steel Frames*, Springer-Verlag, New York, USA.
- CLOUGH, R.; PENZIEN, J. (1993) – *Dynamics of Structures, Second Edition*, McGraw-Hill.

Referências Bibliográficas

- COATES, R. C.; COUTIE, M. J.; KONG, F. K. (1988) – *Structural Analysis*, Van Nostrand Reinhold, 3rd edition.
- ECCS (1976) – *Manual on The Stability of Steel Structures*, 2nd Colliq. Stab. Struc. Liege.
- ECCS (1991) – *Essentials of Eurocode 3 Design Manual for Steel Structures in Buildings*, ECCS – Advisory Committee.
- EKHANDE, G. S.; SELVAPPALAM, M.; MADUGULA, M. K. S. (1989) – *Stability Functions for Three-Dimensional Beam-Columns*, Journal of Structural Engineering Vol. 115, No. 2, 1989, pp 467-479.
- GERARD, G. (1962) – *Introduction to Structural Stability Theory*, McGraw-Hill.
- GOLDBERG, J. E. (1968) – *Lateral Buckling of Braced Multistory Frames*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, ST12.
- GOTO, Y.; Chen, W. F. (1987) – *Second-order Elastic analysis for Frame Design*, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, ST7, pp 1501-1519.
- HALDORSSON, O. P.; WANG, C. K. (1968) – *Stability Analysis of Frameworks by Matrix Methods*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, ST7.
- HORNE, M. R.; MERCHANT, W. (1965) – *The Stability of Frames*, Pergamon Press, New York, USA.
- HUSEYIN, K. (1975) – *Nonlinear Theory of Elastic Stability*, Noordhoff International Publishers, Leiden, The Netherlands.
- JOHNSON, D. E. (1960) – *Lateral Stability of Frames by Energy Methods*, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 86, EM4.
- KIRBY, P. A.; NETHCORT, D. A. (1979) – *Desing for Structural Stability*, Granada Publishing.

- KOLLÁR, L. (1999) – *Structural Stability in Engineering Practice*, E & FN Spon, London, UK.
- KUW, C. T.; JU, S. H. (2001) – *Developing a Three-Dimensional Nonlinear Beam Element for Static and Dynamic Analyses*, Department of Civil Engineering, National Cheng-Kung University, Tainan, Taiwan.
- KWAN, A. S. K. (2004) – *Mechanics and Structure of Spider Webs*, in “Proceedings of The Seventh International Conference on Computational Structures Technology”, Paper 216, pp. 483-484, Civil-Comp Press, UK.
- LEIPHOLZ, H. (1970) – *Stability Theory: An Introduction to the Stability of Dynamic Systems and Rigid Bodies*, Academic Press, New York, USA.
- LIVESLEY, R.K., CHANDLER, D.B. (1956) – *Stability Functions for Structural Frameworks*, Manchester University Press, Manchester, UK.
- LUSAS (2004) – *Powerful FE Technology for Specialist Applications : (Theory Manual 1 , Theory Manual 2 , Verification Manual), Version 13*, UK.
- LUSAS (2004a) – *Powerful FE Technology for Specialist Applications – Verification Manual Version 13*, UK.
- MAJID, K. I. (1972) – *Matrix Methods of Analysis and Design by Computers: Nonlinear Structures*, Butterworths, London, UK.
- MCGUIRE, W.; GALLAGER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. (2000) – *Matrix Structural Analysis, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc.
- MEEK, J. L. (1971) – *Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, USA.
- MERCHANT, W (1955) – *Critical Loads of Tall Building Frames*, Estructural Engineer, p 85.

- MIJALKOVIĆ, M. (1999) – *Second-Order Analysis of Space Beam Structures*, Facta Universitatis, Series: Architecture and Civil Engineering, Vol. 2, N° 1, pp 53-60, Presented at the 5th YUSNM Niš 2000, Nonlinear Science at The Threshold of The Third Millenium, Faculty of Mechanical Engineering, University of Niš, YU.
- NAIEM, F. (1989) – *Design for Drift and Lateral Stability, The Seismic Design Handbook*, Structural Engineering Series, Van Nostrand Reinhold, New York, USA.
- NARAYANAN, R. (1983) – *Beams and Beam Columns: Stability and Strength*, Applied Science Publishers, UK.
- NARAYANAN, R. (1989) – *Structural Connections – Stability and Strenght*, Elsevier, New York, USA.
- PRZEMIENIECKI, J. S. (1968) – *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, USA.
- RAZZAQ, Z.; NAIM, M. M. (1980) – *Elastic Instability of Unbraced Frames*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 106, ST7, PP 1389-1400.
- REAE (1985) – *Regulamento de Estruturas de Aço para Edifícios*, Ministério do Equipamento Social, Conselho Superior de Obras Públicas e Transportes, Lisboa, Portugal.
- REIS, A. J.; CAMOTIM, D. (2001) – *Estabilidade Estrutural*, McGraw-Hill, Portugal.
- ROSENBLUETH, E. (1965) – *Slenderness Effects in Buildings*, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, ST1.
- SAEED, M. (1999) – *Finite Element Analysis: Theory and Application With ANSYS*, Prentice Hall, New Jersey, USA.
- SAP2000 (2002a) – *SAP 2000 - Integrated Structural Analysis & Design Software – Analysis Reference Manual*, CSI – Computer and Structures, Inc., Berkeley, California, USA.

- SAP2000 (2002b) – *SAP 2000 – Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design of Three-Dimensional Structures – Basic Analysis Reference*, CSI – Computer and Structures, Inc., Berkeley, California, USA.
- SAP2000 (2002c) – *SAP 2000 – Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design of Three-Dimensional Structures – Introductory Tutorial*, CSI – Computer and Structures, Inc., Berkeley, California, USA.
- SCHIMIZZE, A. M. (2001) – *Comparison of P-Delta Analyses of Planar Frames Using Commercial Structural Analysis Programs and Current AISC Design Specifications*, MSc thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA.
- SEUNG-EOCK, K.; MOON-HO, P.; SE-HYU, C. (2001) – *Direct Design of Three-Dimensional Frames Using Practical Advanced Analysis*, Engineering Structures 23, pp 1491-1502, Elsevier Science, Ltd.
- SEUNG-EOCK, K.; MOON-HO, P.; SE-HYU, C. (2001a) – *Practical Advanced Analysis and Design of Three-Dimensional Truss Bridges*, Journal of Constructional Steel Research 57, pp 907-923, Elsevier Science, Ltd.
- SEUNG-EOCK, K.; SE-HYU, C. (2001b) – *Practical Advanced Analysis for Semi-Rigid Space Frames*, International Journal of Solids and Structures 38, pp 9111-9131, Elsevier Science, Ltd.
- SEUNG-EOCK, K.; YOSUK, K.; SE-HYU, C. (2001c) – *Nonlinear Analysis of 3-D Steel Frames*, Thin-Walled Structures 39, pp 445-461, Elsevier Science, Ltd.
- TARANATH, B. S. (1988) – *Structural Analysis and Design of Tall Buildings*, McGraw-Hill, Singapore.
- TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. (1961) – *Theory of Elastic Stability, Second Edition*, McGraw-Hill, New York, USA.

Referências Bibliográficas

TORREALBA, J. M. A.; RAMOS, A. J. M.; MCWILLIAMS, P. M. (1992) – *Un Programa de Elementos Finitos: SAP 90*, CEDEX - Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas, Madrid, España.

VOGEL, U. (1985), *Calibrating Frames*, Stahlbau.

WEAVER JR, W. (1967) – *Computer Programs for Structural Analysis*, D. Van Nostran Co. Inc.

WILSON, E. L. (2000) – *Three Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A physical Approach With Emphasis on Earthquake Engineering*, CSI, Computer and Structures, Inc., California, USA.

XU, L. (2000) – *Critical Buckling Loads of Semi-Rigid Steel Frames*, Department of Civil Engineering, University of Waterloo, Ontario, Canada.

YEONG-BIN, Y.; SHYH-RONG, K. (1994) – *Theory and Analysis of Nonlinear Structures*, Prantice Hall.

ZALKA, K. A. (2000) – *Global Structural Analysis of Buildings*, E & FN Spon, London, UK.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. (1989) – *The Finite Element Method, Vol. 1 – Basic Formulation and Linear Problems, Fourth Edition*, McGraw-Hill, London, UK.

ANEXO A

A.1 ALGORITMO – MÉTODO DE JACOBI

```

SUBROUTINE JACOBI (A , V NEQ , TL)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H , OZ)
      DIMENSION A (NEQ , NEQ) , V (NEQ , NEQ)
      EIGENVALUE SOLUTION BY JACOBI METHOD -
C      WRITTEN BY ED WILSON DEC. 25, 1990
C      A – MATRIX (ANY RANK) TO BE SOLVED -----
C      EIGENVALUES ON DIAGONAL
C      V – MATRIX OF EIGENVECTORS PRODUCED
C      TL – NUMBER OF SIGNIFICANT FIGURES
C ----- INITIALIZATION -----
      ZERO = 0.0D0
      SUM = ZERO
      TOL = DABS ( TL )
C ----- SET INITIAL EIGENVECTORS -----
      DO 200 I = 1 , NEQ
      DO 190 J = 1 , NEQ
      IF (TL.GT.ZERO) V (I , J) = ZERO
190  SUM = SUM + DABS (A (I , J))
      IF (TL.GT.ZERO) V (I , J) = 1.0
200  CONTINUE
C ----- CHECK FOR TRIVIAL PROBLEM -----
      IF (NEQ.EQ.1) RETURN
      IF (SUM.LE.ZERO) RETURN
      SUM = SUM / DFLOAT (NEQ*NEQ)
C -----
C ----- REDUCE MATRIX TO DIAGONAL -----
C -----
      400  SSUM = ZERO
      AMAX = ZERO
      DO 700 J = 2 , NEQ
      IH = J - 1
      DO 700 I = 1 , IH
C ----- CHECK IF A (I , J) IS TO BE REDUCED -----
      AA = DABS (A (I , J))
      SSUM = SSUM + AA
      IF (AA.LT.0.1*AMAX) GO TO 700
C ----- CALCULATE ROTATION ANGLE -----
      AA = ATAN2 (2.0*A (I , J) , A (I , I) - (J , J) / 2.0

```

```
SI = DSIN (AA)
CO = DCOS (AA)
C ----- MODIFY "I" AND "J" COLUMNS -----
DO 500 K = 1 , NEQ
TT = A (K , I)
A (K , I) = CO*TT + SI*A (K , J)
A (K , J) = -SI*TT + CO*A (K , J)
TT = V (K , I)
V (K , I) = CO*TT + SI*V (K , J)
500 V (K , J) = -SI*TT + CO*V (K , J)
C ----- MODIFY DIAGONAL TERMS -----
A (I , I) = CO*A (I , I) + SI*A (J , I)
A (J , J) = -SI*A (I , J) + CO*A (J , J)
A (I , J) = ZERO
C ----- MAKE "A" MATRIX SYMMETRICAL -----
DO 600 K = 1 , NEQ
A (I , K) = A (K , I)
A (J , K) = A (K , J)
600 CONTINUE
C ----- A (I , J) MADE ZERO BY ROTATION -----
700 CONTINUE
C ----- CHECK FOR CONVERGENCE -----
IF (DABS (SUM) / SUM.GT.TOL) GO TO 400
RETURN
END
```