Pires, M. V. (1995). *Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6.º ano: Concepções e processos de resolução de problemas* (colecção TESES). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Teses

Os conceitos de perímetro e área em alunos do 6º ano:

concepções e processos de resolução de problemas

Manuel Celestino Vara Pires

1995

Com a colecção *Teses* a Associação de Professores de Matemática pretende contribuir para a divulgação de trabalhos de investigação realizados ao nível de provas de mestrado e de doutoramento por autores de língua portuguesa

Instituto Politécnico de Bragança
Escola Superior de Educação

OS CONCEITOS DE PERÍMETRO E ÁREA EM ALUNOS DO 6º ANO: CONCEPÇÕES E PROCESSOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Manuel Celestino Vara Pires
Licenciado em Engenharia Electrotécnica
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Trabalho apresentado no âmbito da prestação de provas públicas para professor-adjunto previstas no Estatuto da Carreira Docente do Ensino Superior Politécnico

Professor Orientador: Domingos Fernandes

Bragança, 1995

MANUEL CELESTINO VARA PIRES

Os Conceitos de Perímetro e Área em Alunos do 6º Ano: Concepções e Processos de Resolução de Problemas.
(sob a orientação do Prof. Dr. Domingos Manuel Barros Fernandes)

O presente estudo incide sobre as concepções de perímetro e de área e os processos de resolução de problemas desenvolvidos por alunos do 6º ano, num contexto de utilização de materiais manipulativos. O estudo foi orientado por três questões principais: (a) Como encaram alunos do 6º ano de escolaridade a utilização de materiais concretos na sua aprendizagem matemática?; (b) Que concepções acerca dos conceitos de área e perímetro são reveladas por alunos do 6º ano de escolaridade?; e (c) Que processos/ abordagens de resolução são utilizados por alunos do 6º ano de escolaridade em tarefas que envolvam os conceitos de área e/ou perímetro?

Atendendo à natureza do problema em estudo, optou-se por uma abordagem essencialmente interpretativa. O investigador assistiu como observador participante à totalidade das aulas de uma unidade didáctica sobre o perímetro e a área decorrente do desenvolvimento habitual do programa da disciplina de Matemática. Para além do registo de notas e comentários efectuado durante a observação, os dados foram recolhidos através de: (a) um teste de papel e lápis, referido a um domínio; (b) um questionário; e (c) entrevistas.

Relativamente à utilização de materiais manipulativos na aprendizagem matemática, os participantes consideraram que essa utilização: (a) proporcionou aprendizagens mais significativas e mais próximas da realidade; (b) favoreceu a comunicação e partilha dos raciocínios e processos desenvolvidos; e (c) permitiu o desenvolvimento de atitudes mais positivas em relação aos outros e a si próprios, estimulando o trabalho em grupo e a autoconfiança.

Quanto às concepções de perímetro e de área manifestadas pelos participantes, salientam-se os seguintes aspectos: (a) o perímetro foi associado à "soma de lados", à linha fronteira e ao exterior; (b) a área foi associada ao "produto de lados", a espaço ou superfície, ao interior, à medida e ao comprimento; (c) dos dois conceitos, a área revelou-se o mais complexo; (d) os participantes não apresentaram concepções únicas de cada conceito; e (e) essas concepções foram influenciadas por processos simbólicos habitualmente utilizados no cálculo de perímetros de polígonos e na determinação da área de rectângulos.

No que respeita aos processos de resolução, é de salientar o seguinte: (a) para o perímetro, foram identificadas abordagens concretas (utilização de instrumentos de medida) e simbólicas (aplicação de fórmulas); (b) para a área, foram seguidas abordagens concretas (utilização de unidades físicas), figurativas (divisão da figura em quadrículas) e simbólicas (aplicação de fórmulas); (c) os processos mais simbólicos foram associados a operações numéricas, isto é, os participantes estabeleceram ligações do perímetro com a adição e da área com a multiplicação; (d) os processos de resolução utilizados para a área foram mais diversificados e complexos; e (e) a área foi expressa frequentemente através de unidades de medida unidimensionais.

Palavras-chave: Área, Perímetro, Materiais Manipulativos, Concepções, Processos de Resolução.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Doutor Domingos Fernandes, meu orientador e mestre, pelo estímulo, sugestões, críticas e partilha de saberes.

Aos meus colegas, em especial à Julieta Aragão, pela colaboração e confronto de ideias.

Aos alunos participantes, pela disponibilidade e entusiasmo.

À minha família, pelo apoio, confiança e tantas outras coisas.

À São, minha companheira, por tudo ...

ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Este capítulo discute tendências actuais da Educação Matemática, que constituiram referências permanentes no desenvolvimento da investigação, bem como a formulação do problema em estudo. Encontra-se dividido em duas secções: (a) perspectivas actuais em educação matemática; e (b) formulação do problema.

Perspectivas Actuais em Educação Matemática

Muitos dos conflitos e tensões na educação escolar resultam de desajustamentos entre as suas finalidades e funcionamento e as reais necessidades sentidas por alunos, professores e sociedade em geral. Por isso, o desenvolvimento de um sistema educativo deve atender e corresponder a essas necessidades e exigências devendo a sua organização constituir um sólido recurso para o indivíduo durante a sua vida.

Novos objectivos sociais da educação devem enfrentar e responder a esse desafio. Para o *National Council of Teachers of*

Mathematics (1991), estes objectivos devem permitir que todos os estudantes: (a) tenham oportunidade de se tornar matematicamente alfabetizados; (b) sejam capazes de prolongar a sua aprendizagem ao longo da sua vida; (c) tenham iguais oportunidades de aprender; e (d) se tornem cidadãos aptos a intervir na vida social.

Na educação matemática, esta situação, necessariamente complexa porque influenciada por múltiplos factores, tem suscitado fundamentadas preocupações por parte de educadores e de organizações profissionais traduzidas no desenvolvimento e produção de muitos estudos e trabalhos que têm sustentado variadas recomendações e/ou propostas de acção (Abrantes, 1994; APM, 1988; Fernandes, 1989; Guimarães, 1990; NCSM, 1989; NCTM, 1985, 1991; Ponte, 1990).

> "O período posterior a 1975 é marcado pelo surgimento de diversos relatórios e tomadas de posição de influentes organizações, que procuraram numa primeira fase reagir às tendências conservadoras e num segundo momento, começar a encarar de forma mais cuidada o problema da renovação do ensino da Matemática" (Ponte, 1990, p.1).

Em 1980, o NCTM faz a publicação da *Agenda para a Acção* onde se apresentam recomendações para o ensino da Matemática nos anos 80.

É dada uma ênfase especial à resolução de problemas que, constituindo o foco do ensino, deverá atravessar e orientar todo o currículo. Aceitando a transformação social, é recomendado fortemente, a par da utilização de materiais manipulativos, o recurso a calculadoras e a computadores nas actividades matemáticas em todos os anos de escolaridade. É encorajada a diversificação de técnicas e processos de avaliação do desempenho dos alunos e dos programas curriculares. São ainda feitas recomendações para a organização escolar, para a formação inicial e contínua dos professores e para a participação da comunidade.

Este documento aponta claramente para uma renovação curricular realçando a necessidade de uma mudança efectiva nos conteúdos e nos métodos de ensino-aprendizagem.

Considerando que qualquer recomendação é sempre temporal, o NCTM (1991) produz, na mesma linha, *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar* traçando um quadro de orientação para esta década. São definidos novos objectivos educacionais e estabelece-se um conjunto de normas (*standards*) curriculares e de avaliação para a matemática escolar desde a educação pré-escolar até ao 12º ano de escolaridade. Enquadrados nos objectivos sociais já referidos, os objectivos educacionais devem, então, reflectir a relevância da alfabetização matemática, ou seja, propiciar o desenvolvimento de capacidades de enfrentar problemas ou situações problemáticas, de conhecer técnicas para os abordar, de compreeender os seus aspectos matemáticos, de trabalhar em grupo para os resolver e de reconhecer a aplicabilidade de ideias matemáticas na sua resolução.

Nesse sentido, são definidos cinco objectivos gerais para *todos* os alunos: (a) aprender a dar valor à Matemática; (b) adquirir confiança na sua capacidade de fazer matemática; (c) tornar-se apto a resolver problemas matemáticos; (d) aprender a comunicar matematicamente; e (e) aprender a raciocinar matematicamente.

As normas curriculares apresentam e discutem, em cada nível de escolaridade, o conteúdo matemático, o que se espera dos alunos na aprendizagem desse conteúdo e aquilo que o professor deve fazer para os ajudar nessa aprendizagem. As normas para a avaliação apresentam e discutem os processos de recolha de informação para avaliar a aprendizagem dos alunos e os programas de Matemática.

Na apresentação das normas curriculares, feita de modo análogo para todas, refere-se a ênfase que o ensino deve ter e enquadram-se as actividades que devem ser desenvolvidas. Tomando como exemplo a Norma 13, referente à medida para os anos de escolaridade 5-8, indica-se o *conteúdo matemático* a ser abrangido, faz-se a listagem de *objectivos* a serem atingidos pelos alunos (ver Quadro 1) e apresenta-se a *incidência principal* e a *discussão*; ou seja, são debatidas abordagens de carácter pedagógico e metodológico e discutidos exemplos concretos de actividades e situações de aprendizagem.

Quadro 1

Norma 13: Medida (NCTM, 1991, p.138)

NORMA 13:
MEDIDA

Nos anos de escolaridade 5-8, o currículo de Matemática deve incluir muitas experiências concretas usando medidas, de tal forma que os alunos

- aumentem a compreensão do processo de medida;
- estimem, construam, e usem medidas, para descrever e comparar fenómenos;
- seleccionem unidades adequadas e instrumentos de medida com o grau de aproximação requerido para uma dada situação particular;
- compreendam a estrutura dos sistemas de medidas e os utilizem;
- aumentem a compreensão dos conceitos de perímetro, área, volume, medida de ângulo, capacidade, peso e massa;
- desenvolvam o conceito de taxa de variação, e de outras medidas derivadas e indirectas;
- desenvolvam fórmulas e procedimentos para a determinação de medidas, com o objectivo de resolver problemas.

Este documento apresenta uma visão global de toda a matemática escolar. Mantém a ênfase na resolução de problemas quer como conteúdo matemático quer como contexto de aprendizagem. Reforça a importância da integração de materiais manipulativos, calculadoras e computadores nas actividades, avançando que estes recursos deveriam estar permanentemente ao dispor dos alunos, constituindo equipamento imprescindível em qualquer sala de aula. Valoriza a aprendizagem matemática como um processo activo, construtivo e significativo, recomendando que as experiências desenvolvidas pelos alunos -- por exemplo: explorando, conjecturando e testando hipóteses; lendo, escrevendo e discutindo matemática -- sejam interessantes, diversificadas, numerosas e adaptadas ao seu nível de desenvolvimento.

> "(...) estas actividades devem dar ênfase aos aspectos mais conceptuais em detrimento dos aspectos mais mecânicos, valorizando a observação, manipulação, a utilização de materiais concretos, de situações reais, de aspectos do mundo real e do contexto social dos alunos" (Guimarães, 1990, p.25).

Deste modo, os alunos sentem-se mais confiantes nas suas próprias capacidades e desenvolvem atitudes mais positivas contribuindo para que se tornem alfabetizados em Matemática adquirindo *poder matemático.*

> "Este termo [poder matemático] refere-se às capacidades de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como à sua aptidão para usar [com eficácia] uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas não rotineiros" (NCTM, 1991, p.6).

Em Portugal, as preocupações com a renovação curricular generalizam-se no período pré-Reforma Educativa. A *Associação de Professores de Matemática* surge como um "espaço" privilegiado de debate, especialmente nos seus encontros regionais e nacionais. Em 1988, publica para discussão *Renovação do Currículo de Matemática* onde se apresentam e enquadram pressupostos, princípios e orientações para um novo currículo.

É defendido que os novos objectivos curriculares devem: (a) exprimir as finalidades do ensino da Matemática privilegiando os seus aspectos formativos; (b) contemplar equilibradamente os vários domínios cognitivo, afectivo e social; (c) apontar para os níveis mais elevados de cada um deles; e (d) dar ênfase aos processos e actividades matemáticas.

> "Dirigir o ensino da Matemática para objectivos gerais de "ordem superior", como a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação, e fazê-lo numa perspectiva de Matemática para todos, corresponde hoje a uma necessidade tanto da sociedade como dos indivíduos, na óptica dos ideais democráticos" (Abrantes, 1994, p.604).

As orientações metodológicas devem, então, adequar-se ao nível de desenvolvimento dos alunos e proporcionar-lhes experiências matemáticas significativas. Assim, recomenda-se que estas propostas contemplem os aspectos cognitivos, afectivos e sociais da aprendizagem; enfatizem as situações concretas, a intuição matemática e o raciocínio indutivo; privilegiem actividades de exploração, conjecturação e prova, bem como as aplicações e a resolução de problemas; estimulem a comunicação oral e escrita, a discussão e a reflexão, a troca e o confronto de ideias, experiências e processos de trabalho; diversifiquem as abordagens, as situações e os materiais de apoio.

> "A experiência matemática deve constituir o paradigma das actividades escolares nesta disciplina. Desde o princípio da escolaridade até ao fim do ensino secundário, e de acordo com o nível de desenvolvimento e maturidade dos alunos, estes deverão estar mergulhados num ambiente intelectualmente estimulante, no qual experimentar e fazer matemática sejam actividades naturais e desejadas" (APM, 1988, p.40).

Assume-se a resolução de problemas e as aplicações da matemática como linhas orientadoras no desenvolvimento curricular constituindo elementos de integração e de significado. Reconhece-se como necessário propiciar novos conteúdos programáticos -- por exemplo, a Estatística e aspectos da actividade e do raciocínio matemáticos (explorar, demonstrar, etc.) -- e reformular outros, como a Geometria, já tradicionais. Devido às suas potencialidades educativas, o recurso a materiais manipulativos e tecnológicos deve ser generalizado. Os processos de avaliação para serem coerentes com o ensino-aprendizagem terão de ser diversificados privilegiando a sua componente formativa e integrando vários desempenhos (orais e escritos, individuais e de grupo) e instrumentos. Neste cenário, atribui-se grande relevância ao papel do professor pois, além de habitual fornecedor da informação, passará a ser "*um organizador das actividades, um facilitador da aprendizagem, um dinamizador do trabalho, um companheiro de descoberta*" (APM, p.58). Assim, a formação de professores deverá constituir uma prioridade essencial quer motivando-os para a mudança quer ajudando-os a enfrentar situações pouco familiares.

> "Deveremos preparar os futuros professores utilizando os processos, as técnicas e os materiais que queremos que eles utilizem com os seus alunos [e] a ensinar matemática aos alunos nos contextos em que esta naturalmente lhes surge. (...) Os novos professores de matemática, os professores do futuro, têm de estar preparados para a mudança que é, ou deveria ser, o estado natural de todo o processo educativo" (Fernandes, 1989, p.13-14).

Pela análise destes documentos, é possível detectar diversas preocupações e orientações comuns, tais como a definição de objectivos curriculares, a resolução de problemas, a exploração e experimentação associadas a aspectos intuitivos da Matemática, a utilização de materiais manipulativos e tecnológicos, a diversificação de técnicas e processos de avaliação e a formação de professores.

É de destacar igualmente que muitas destas perspectivas ficaram consagradas nos programas da disciplina de Matemática decorrentes da Reforma Educativa, notando-se um reconhecimento "oficial" de algumas das tendências actuais da educação matemática.

Concluindo, parece existir uma aceitação generalizada de que o ensino-aprendizagem da Matemática pode e deve ser uma experiência com significado e valor próprio tanto para os alunos como para os professores.

Formulação do Problema

Se, por um lado, existe este consenso relativamente a alguns dos desafios e tendências actuais da educação matemática, por outro lado, são também reconhecidas as dificuldades que geralmente os alunos sentem e revelam na aprendizagem da Matemática, em especial da Geometria, e que muito têm contribuído para níveis bastante preocupantes de insucesso escolar.

Utilização de Materiais Manipulativos

O sucesso dos alunos é condicionado por diferentes aspectos, sendo um deles certamente o contexto em que decorre a aprendizagem. Há fortes evidências, realçadas por investigadores de inspiração cognitivista (Bruner, 1960; Dienes, 1970; Post, 1992; Reys, 1974), que permitem afirmar que ambientes onde se faça uso de materiais manipulativos favorecem essa aprendizagem e desenvolvem nos alunos atitudes mais positivas. Todavia, essas evidências nem sempre têm sido confirmadas pela investigação (Fennema, 1974; Fernandes, 1990; Sowell, 1989; Suydam & Higgins, 1977; Vance & Kieren, Friedman e Wilkinson, citados por Sowell, 1989), verificando-se igualmente que muitos professores não integram esses materiais nas actividades da aula (Fernandes, 1984; Monteiro, Fernandes, Guimarães & Matos, 1985; Raphael & Wahlstrom, 1989).

De uma maneira geral, a investigação desenvolvida sobre a eficácia de materiais concretos tem recorrido à comparação de diferentes métodos de ensino: o ensino tradicional, baseado no livro de texto, e o ensino utilizando materiais manipulativos. Desta forma têm sido produzidos resultados (e conclusões) muito diversos, em alguns casos favorecendo significativamente o ensino tradicional e em outros o ensino com materiais.

Suydam e Higgins (1977) consideram que os materiais manipulativos permitem aos alunos conseguir melhores rendimentos em todos os anos e em todas as idades. Outros autores concordam com esta conclusão apenas para os alunos mais novos, referindo que a eficácia dos materiais é atenuada (Fennema, 1974) ou é irrelevante (Vance & Kieren, Friedman e Wilkinson, citados por Sowell, 1989) para os alunos mais velhos. Sowell (1989) acrescenta ainda que essa eficácia é mais evidente quando os materiais são utilizados em períodos de duração longa.

Evidentemente, na comparação com cenários mais tradicionais, a integração de materiais concretos na sala de aula acarreta dificuldades originadas por uma nova organização do espaço e uma outra gestão do tempo. Fernandes (1990) alerta que, nestas circunstâncias, não tem sido prestada a necessária atenção à oportunidade para aprender e ao tempo indispensável para o aluno efectuar a tarefa. Também concordando com estas preocupações, Raphael e Wahlstrom (1989) reconhecem e reforçam a importância do papel do professor nesse processo, tendo verificado que, em alguns casos, as diferenças detectadas na aprendizagem dos alunos relacionaram-se especialmente com as abordagens dos conteúdos feitas pelos professores e não tanto com a utilização, ou não, de materiais manipulativos.

Refira-se ainda que muitos professores raramente proporcionam aos seus alunos possibilidades de trabalhar com materiais na resolução das tarefas escolares. Esta atitude resulta mais da pouca familiaridade com os materiais e da falta de oportunidades para os utilizar (Fernandes, 1984) do que de uma recusa pedagogicamente fundamentada (Monteiro, Fernandes, Guimarães & Matos, 1985).

Perímetro e Área

Outro aspecto que cada vez mais se considera como influenciador do desempenho dos alunos prende-se com as atitudes e concepções que eles desenvolvem em relação à Matemática, à sua aprendizagem ou aos diversos tópicos curriculares (Matos, 1991, 1992; Matos, 1992).

> "(...) para compreender as atitudes dos alunos em relação à Matemática necessitamos de compreender as definições e os processos pelos quais a sua representação da Matemática é construída, isto é, a avaliação e explicação das atitudes dos alunos reside na interpretação das suas representações da Matemática" (Matos, 1991, p.89).

Assim, torna-se claro que a aprendizagem de um assunto num dado momento é condicionada por concepções e atitudes anteriores na medida em que os alunos as utilizam para interpretar a nova informação (Almeida, 1992). Estas observações tornam-se particularmente significativas para o perímetro e a área, pois o seu estudo é feito em níveis diversos ao longo da escolaridade.

A investigação associada a estes dois conceitos tem sido enquadrada no problema mais geral do estudo dos sistemas de medida (Carpenter & Osborne, 1976; Macias, 1976; Osborne, 1976; Wilson & Osborne, 1992); tem identificado e analisado, em todos os níveis etários, dificuldades específicas dos alunos com cada um deles e/ou problemas de confusão entre ambos (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988; Costa, 1985; Douady & Perrin, 1986; Hierstein, Lamb & Osborne, 1978; Szetela & Owens, 1986; Wilson & Osborne, 1992); e tem estudado ainda a sua aplicação em outros contextos (Lesh, Landau & Hamilton, 1983).

De uma maneira geral, estes estudos têm confirmado que muitas das dificuldades sentidas pelos alunos resultam de uma fraca compreensão conceptual. É o que acontece, por exemplo, quando exprimem o perímetro através de uma unidade de medida bidimensional ou a área através de uma unidade linear (Costa, 1985) ou ainda quando dizem não poder determinar a área de uma figura após esta ter sido decomposta e separada em partes (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988). Esta fraca compreensão conceptual verificada em todos os níveis etários tem originado, mais do que os erros de cálculo, confusões entre o perímetro e a área (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988; Costa, 1985; Szetela & Owens, 1986). Também há algumas indicações no sentido da associação das concepções acerca destes conceitos a operações numéricas ou, de uma forma mais genérica, a processos algorítmicos e computacionais (Battista, citado por Costa, 1985).

A variedade de experiências de aprendizagem e a diversificação de abordagens e processos de resolução têm sido recomendações usuais, pois parecem assegurar uma aprendizagem mais eficaz e corrigir concepções erróneas acerca do perímetro e da área. Para os dois conceitos, o recurso a instrumentos de medida de comprimentos ou o trabalho com unidades de medida arbitrárias e a sua contagem (Hierstein, Lamb & Osborne, 1978; Wilson & Osborne, 1992) têm sido processos bastante usados. Particularmente para a área, a divisão de figuras em quadrículas e respectiva contagem, a decomposição em rectângulos, e a aplicação de fórmulas (Douady & Perrin, 1986; Lesh, Landau & Hamilton, 1983; Wilson & Osborne, 1992) foram alguns dos processos identificados.

Questões de Investigação

A investigação sobre o uso de materiais manipulativos tem sido desenvolvida basicamente através da utilização dos chamados métodos quantitativos (por exemplo, comparando as médias obtidas pelos alunos de dois grupos após um ensino com materiais e um ensino com livro de texto) e baseada nas opiniões dos professores. Esta orientação metodológica tem sustentado conclusões muito diversas, mesmo contraditórias. Para uma melhor compreensão da integração de materiais manipulativos no ensino-aprendizagem da Matemática dever-se-ão ter em conta as diversas contribuições do movimento cognitivista. Assim, será relevante seguir abordagens metodológicas mais qualitativas e conhecer e respeitar o(s) ponto(s) de vista dos alunos.

Os estudos sobre o perímetro e a área têm procurado detectar eventuais dificuldades com os dois conceitos, identificar os processos de resolução desenvolvidos pelos alunos em situações particulares e ainda avaliar a eficácia de diferentes métodos de ensino. Neste sentido, para um ensino e uma aprendizagem mais eficazes do perímetro e da área, será relevante identificar e interpretar concepções dos alunos acerca destes dois conceitos, bem como continuar a estudar os processos de resolução desenvolvidos.

Decorrente destes pressupostos, este estudo pretende dar respostas às seguintes questões principais:

(1) Como encaram alunos do 6º ano de escolaridade a utilização de materiais concretos na sua aprendizagem matemática?

(2) Que concepções acerca dos conceitos de área e perímetro são reveladas por alunos do 6º ano de escolaridade?

(3) Que processos/abordagens de resolução são utilizados por alunos do 6º ano de escolaridade em tarefas que envolvam os conceitos de área e/ou perímetro?

CAPÍTULO II

REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo referenciam-se diversos trabalhos e resultados de investigações que orientaram o desenvolvimento do estudo. Encontra-se dividido em cinco secções: (a) a aprendizagem matemática; (b) os materiais manipulativos na educação matemática; (c) os sistemas de medida; (d) a aprendizagem dos conceitos de perímetro e de área; e (e) a grandeza comprimento e a grandeza área.

Na primeira secção aborda-se a aprendizagem matemática, perspectivando a necessidade da utilização de materiais concretos e fazendo referência ao trabalho de Zoltan Dienes e de Jerome Bruner e ao modelo de Richard Lesh.

Na segunda secção descrevem-se e discutem-se estudos e trabalhos envolvendo a utilização de materiais manipulativos.

Na terceira secção abordam-se os sistemas de medida em geral.

Na quarta secção discutem-se investigações sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de perímetro e de área.

Finalmente, na quinta secção são tratados os conceitos de grandeza, quantidade, medida e apresentadas definições de comprimento, perímetro e área.

A Aprendizagem Matemática

A aprendizagem é um processo complexo e dependente de numerosos factores. Apesar das diversas teorias do desenvolvimento e da aprendizagem terem contribuído para um maior conhecimento no que respeita à forma como o aluno aprende, a verdade é que ainda não possibilitam a formulação de um quadro teórico que clarifique de vez todo o processo (Monteiro, Fernandes, Guimarães & Matos, 1985).

Geralmente, as várias teorias surgem agrupadas em torno de duas grandes correntes: a corrente behaviorista e a corrente cognitivista (Post, 1992). A perspectiva behaviorista interessa-se primeiramente com *o que* o aluno aprende. O ponto de vista cognitivista realça a importância de *como* o aluno aprende, enfocando muitas vezes as condições físicas em que se desenvolve o processo de aprendizagem. Para os behavioristas, a aprendizagem acontece em situações altamente controladas, centradas no professor e com objectivos comportamentais muito explicitados. Para os cognitivistas, a aprendizagem é pessoal por natureza e implica mais do que a consecução de objectivos e/ou comportamentos observáveis. Os indivíduos interagem uns com os outros e com o contexto envolvente.

A corrente cognitivista fornece um quadro teórico que justifica o envolvimento activo do aluno na construção da sua aprendizagem de modo a que esta se torne mais significativa. Reys (1974) considera que a defesa da utilização de materiais manipulativos se pode apoiar nas seguintes afirmações, resultantes de uma síntese de diferentes teorias da aprendizagem: (a) a formação de conceitos é a essência da aprendizagem matemática; (b) a aprendizagem baseia-se na experiência; (c) a aprendizagem sensorial é a base de toda a experiência e, assim, o cerne da aprendizagem; (d) a aprendizagem é um processo de crescimento e é, por natureza, desenvolvimento; (e) a aprendizagem caracteriza-se por estádios distintos de desenvolvimento; (f) a aprendizagem é estimulada pela motivação; (g) a aprendizagem constrói-se do concreto para o abstracto; (h) a aprendizagem requer participação activa do aluno; e (i) a formação de uma abstracção matemática é um processo longo.

Dienes (1970), investigador de formação cognitivista, propõe quatro princípios básicos que devem ser tidos em conta em situações de ensino-aprendizagem: (a) princípio dinâmico; (b) princípio da variabilidade perceptiva; (c) princípio da variabilidade matemática; e (d) princípio da construtividade.

O princípio dinâmico, entendido como um autêntico ciclo de aprendizagem, refere-se a uma organização geral na qual a aprendizagem matemática pode ocorrer. Sugere que a compreensão de um determinado conceito se desenvolve em três estádios temporalmente ordenados: (a) estádio preliminar; (b) estádio estruturado; e (c) estádio de prática - reaplicação ao mundo real. Por outro lado, Dienes considera que a realização completa deste ciclo é necessária para que um novo conceito matemático se torne operacional para o aluno.

O princípio da variabilidade perceptiva sugere que a aprendizagem de um conceito é maximizada quando o aluno o aborda através de uma variedade de ambientes ou contextos físicos. A essência da abstracção de uma ideia é retirar propriedades comuns de diferentes tipos de situações. Assim, múltiplas experiências com a mesma estrutura básica conceptual, e não a mesma experiência repetida muitas vezes, usando materiais diversificados estimulam a abstracção do conceito.

O princípio da variabilidade matemática sugere que a generalização de um conceito matemático é realçada quando as variáveis irrelevantes para o conceito são alteradas sistematicamente mantendo constantes as variáveis relevantes.

Para Dienes, estes dois princípios da variabilidade devem ser utilizados conjuntamente pois favorecem os processos complementares de abstracção e de generalização, processos cruciais no desenvolvimento de conceitos.

O princípio da construtividade sugere que um aluno pode pensar construtivamente antes de poder pensar logicamente devendo, então, a construção preceder sempre a análise. Neste sentido se refere Post (1992) ao afirmar que um dos maiores problemas na sala de aula é o facto de se exigir ao aluno a abstracção das ideias matemáticas antes de ter tido oportunidade de as experimentar de forma concreta.

Bruner (1960) estabelece um importante modelo para descrever níveis ou modos de representação do pensamento (ver Figura 1).

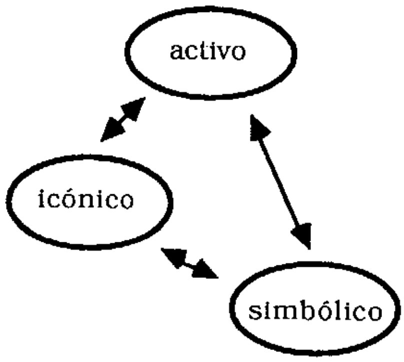


Figura 1. Modelo de Bruner para os modos de representação do pensamento

Pode-se experimentar e consequentemente pensar sobre um conceito particular em três estádios diferentes: (a) estádio da representação activa ou através da acção; (b) estádio da representação icónica; e (c) estádio da representação simbólica.

No primeiro estádio, o da representação activa, predomina a acção. A aprendizagem envolve manipulação ou experiência directa. No segundo estádio, o da representação icónica, o aluno representa o mundo circundante através de imagens. É baseado na utilização de meios visuais, tais como filmes, gravuras e diagramas. No terceiro estádio, o da representação simbólica, usam-se símbolos abstractos para representar a realidade. Bruner considera os três tipos de interpretação importantes e ordenados. São interactivos por natureza podendo o aluno mover-se livremente de um para outro. Bruner considera também que o desenvolvimento intelectual é a chave para a maturidade na aprendizagem dependendo quer da interacção eficaz dos três modos de representação quer de ambientes motivantes e significativos.

A este propósito, Post (1992) argumenta que um livro de texto não pode prever experiências activas mas apenas e exclusivamente icónicas e simbólicas, isto é, um livro contém figuras de objectos e os símbolos associados a esses objectos mas não contém os próprios objectos.

> "(...) programas de matemática que são dominados por livros de texto criam inadvertidamente uma má ligação entre a natureza das necessidades dos alunos e o modo no qual o conteúdo matemático é assimilado ou aprendido (...) um programa que não atenda ao ambiente no qual são desenvolvidos os conceitos matemáticos elimina o primeiro e talvez o mais crucial dos três modos de representação de uma ideia" (Post, 1992, p.12).

Por isso, um programa matemático mais compatível com a natureza do aluno deve, então, recorrer mais a materiais manipulativos e a mais experiências aplicando ideias matemáticas no mundo real. Tal como Dienes e Bruner, também Post recomenda fortemente a utilização de materiais pois a sua manipulação ajuda o aluno a mover-se de situações concretas para ideias abstractas.

No entanto, estas ajudas manipulativas são apenas uma das componentes no desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Outros modos de representação -- verbal, simbólico, figurativo e situações da vida real, por exemplo -- desempenham também uma função importante na aquisição e tratamento de conceitos (Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lesh, Landau & Hamilton, 1983).

Nesse sentido e partindo do modelo de Bruner, Lesh reconceptualizou o modo de representação activa, dividiu o modo icónico em ajudas manipulativas e modelos figurativos estáticos (figuras) e separou o modo simbólico em símbolos falados e símbolos escritos. Na Figura 2 apresenta-se uma versão modificada do modelo de Lesh e adoptada pelo *Rational Number Project* (1983).

A relevância deste modelo interactivo para a prática pedagógica é evidente, pois realça as várias transferências dentro do mesmo modo (transformações) e entre modos de representação diferentes (traduções). Estas traduções só se tornam possíveis quando o aluno compreende o conceito num dado modo. Assim, quer a compreensão quer a reinterpretação são processos cognitivos importantes precisando de ser estimulados no processo de ensino-aprendizagem.

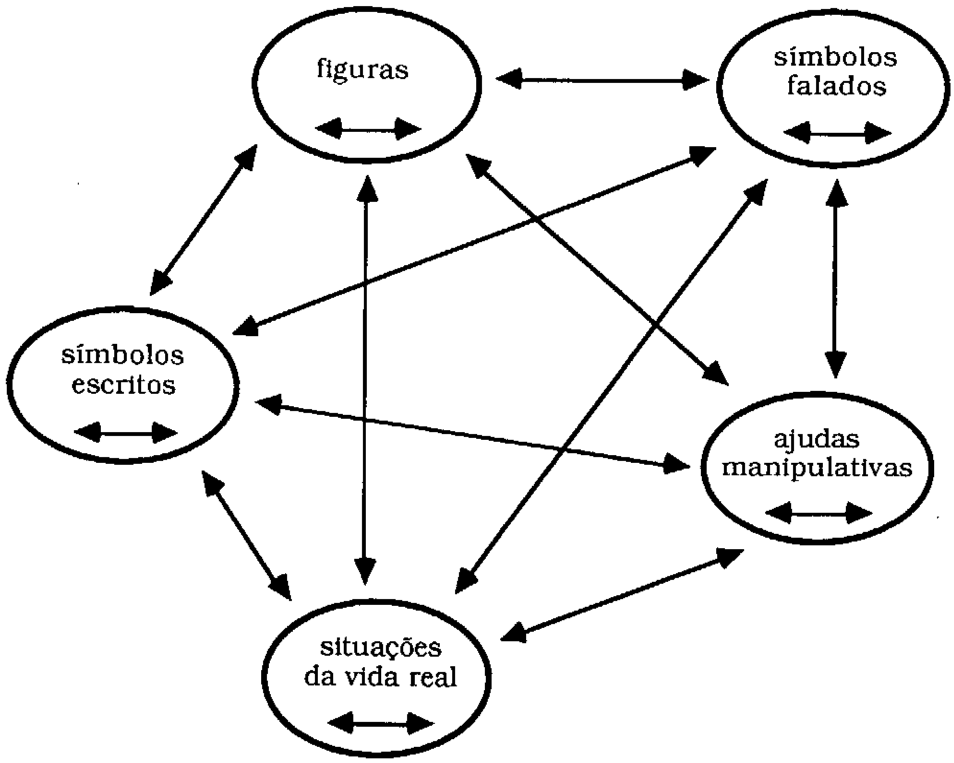


Figura 2. Modelo adaptado de Lesh para traduções entre modos de representação.

Os Materiais Manipulativos na Educação Matemática

Materiais manipulativos são aqueles materiais que o aluno é capaz de sentir, tocar, mexer e moldar (Reys, 1974), ajudando-o a suscitar perguntas, sugerir conceitos ou materializar ideias matemáticas (Muro, 1989).

Reys (1974) considera estes materiais imprescindíveis na aprendizagem pois, quando convenientemente seleccionados e utilizados, permitem: (a) diversificar as actividades de ensino; (b) realizar experiências em torno de situações problemáticas; (c) representar concretamente ideias abstractas; (d) fornecer bases para analisar sensorialmente dados, tão necessários à formação de conceitos; (e) dar oportunidade aos alunos de descobrir relações e formular generalizações; (f) envolver activamente os alunos na aprendizagem; (g) respeitar diferenças individuais; e (h) aumentar a motivação.

Fennema (1974) analisou 16 estudos que comparavam o rendimento dos alunos utilizando um grupo de controlo usando o ensino tradicional e outro recorrendo a materiais manipulativos. Os resultados favoreceram significativamente o ensino com materiais para os alunos mais novos atenuando-se essas diferenças para os alunos mais velhos. Fennema concluiu que um ambiente de aprendizagem envolvendo modelos concretos de representação adaptados ao nível de desenvolvimento cognitivo do aluno favorece mais a aprendizagem do que um ambiente que ignore esse nível de desenvolvimento. Assim, a aprendizagem de conceitos matemáticos parece ser facilitada pela predominância de modelos concretos nos anos iniciais seguida de uma gradual introdução de modelos simbólicos.

Conclusões um pouco diferentes foram expressas por Vance & Kieren, Friedman e Wilkinson (citados por Sowell, 1989) que consideraram que os materiais manipulativos eram benéficos para os alunos mais novos mas irrelevantes para os mais velhos e que os alunos aprendem bem em cenários laboratoriais, onde os materiais são comuns, mas também em outras situações de ensino significativo.

No entanto, Suydam e Higgins (1977), numa ampla revisão sobre o uso e os efeitos dos materiais manipulativos no rendimento dos alunos, contestaram as opiniões anteriores. Analisando 40 estudos em aprendizagem matemática baseada em actividades desde o jardim de infância até ao 8º ano puderam verificar efeitos positivos significativos no aproveitamento escolar dos alunos em 24 desses estudos, embora refiram problemas de natureza metodológica em alguns deles; 12 não registaram diferenças e 4 favoreciam significativamente os grupos que não utilizaram materiais manipulativos. Suydam e Higgins concluiram que o uso de materiais manipulativos produz nos alunos maiores rendimentos que a não utilização, em todos os anos e em todas as idades da escola elementar.

Sowell (1989), através de uma meta-análise, estudou 60 trabalhos de investigação para determinar a eficácia do ensino da Matemática com materiais manipulativos. Foram considerados três métodos: (a) método concreto: os alunos trabalharam directamente com materiais, tais como geoplanos, barras Cuisenaire e dobragens em papel; (b) método figurativo: os alunos foram colocados perante representações audio-visuais, usaram figuras impressas em materiais e observaram demonstrações com materiais concretos; e (c) método abstracto ou simbólico: os alunos utilizaram livros de texto e efectuaram trabalhos com papel e lápis. Estes três processos foram comparados relativamente à consecução de objectivos gerais e de objectivos específicos, retenção, transferência e atitudes em relação à matemática.

Os 60 trabalhos abrangeram todos os níveis etários desde o pré-escolar até ao secundário: 17 foram conduzidos no pré-escolar, 1º e 2º anos de escolaridade; 17 nos 3º e 4º anos; 9 nos 5º e 6º anos; 11 nos 7º, 8º e 9º anos e 6 no secundário. A duração da administração dos tratamentos variou de 1 a 72 semanas: 12 estudos duraram um ano ou mais; 5 entre 20 e 24 semanas; 7 entre 15 e 16 semanas; 10 entre 6 e 8,5 semanas e 26 entre 1 e 5,8 semanas. Como esta duração foi bastante diversificada, também o alcance e os tópicos matemáticos abordados variaram: 12 trabalhos usaram o programa durante um ano inteiro ou mais; 7 incidiram sobre grande parte do programa e os restantes, por vezes, apenas focaram um tópico.

Na comparação entre o método concreto e o método abstracto verificou-se que o tempo de duração dos tratamentos se relacionou com o aproveitamento dos alunos tendo os resultados favorecido significativamente o ensino com materiais manipulativos nos tratamentos mais longos. Nos tratamentos mais curtos os resultados não foram estatisticamente significativos. As medidas de retenção e de transferência não produziram resultados significativos. Quando os alunos ou os tratamentos foram distribuídos aleatoriamente, as medidas de atitude favoreceram significativamente o ensino com materiais concretos; caso contrário, as atitudes foram negativas e favoreceram o ensino abstracto ou simbólico.

Na comparação entre o método figurativo e o método abstracto não foram encontradas diferenças significativas.

Na comparação entre o método concreto e o método figurativo também não se verificaram diferenças significativas. Na consecução de objectivos específicos, apesar de algum efeito, este não foi significativo.

Sowell concluiu que a eficácia dos materiais manipulativos se torna mais evidente quando se utilizam em períodos de duração longa. No entanto, não foi possível descobrir a natureza das situações às quais os materiais podem ser apropriados, bem como os materiais adequados a situações particulares.

Raphael e Wahlstrom (1989) num estudo decorrente do 2º *Estudo Internacional de Matemática* procuraram relacionar a utilização de materiais manipulativos com abordagens e tratamentos de conteúdos do programa feitas pelos professores e com o aproveitamento dos alunos, essencialmente em três áreas: (a) geometria; (b) razão, proporção e percentagem; e (c) medida. Pretendia-se ainda verificar se o efeito dos materiais permanecia após o tratamento dos diferentes temas.

A investigação decorreu durante um ano lectivo envolvendo professores do Ensino Básico de 120 escolas. Foram distribuídos diversos materiais de apoio que poderiam ser utilizados na sala de aula, tais como réguas, esquadros, compassos, transferidores, geoplanos, espelhos, diferentes tipos de papel e modelos de sólidos. Os professores responderam a inquéritos informando da sua experiência profissional, abordagens de ensino e métodos utilizados. Referiram ainda se a matemática exigida para responder correctamente aos itens tinha sido tratada e aplicaram, no início e no final, testes de avaliação para determinar o aproveitamento médio dos alunos. O estudo baseou-se nas respostas de 156 professores em geometria; de 163 em razão, proporção e percentagem; de 160 em medida e de 103 para a associação do uso de materiais com o aproveitamento dos alunos. Verificou-se que régua e esquadro, transferidor e papel gráfico foram os materiais básicos utilizados. Materiais de ensino laboratorial como espelhos e modelos foram usados ocasionalmente e os materiais mais especializados raramente foram utilizados na sala de aula.

No ensino-aprendizagem da geometria, o uso ocasional de vários materiais, relatado pelos professores com mais experiência, conjuntamente com a ênfase tradicional na régua, compasso e transferidor pareceu ser o método mais eficaz em influenciar o aproveitamento dos alunos.

No estudo da razão, proporção e percentagem, a utilização extensiva de materiais de apoio, relatada pelos professores com mais experiência, influenciou significativamente o aproveitamento dos alunos. Em ambos os casos, os professores referiram terem feito abordagens profundas dos conteúdos. Assim, a associação entre o uso de materiais e o aproveitamento foi influenciada pela maneira como o professor tratou o assunto: professores com mais experiência profissional apresentaram uma maior capacidade de selecção e utilização dos diferentes tipos de materiais.

Relativamente ao estudo da medida, os resultados foram inconclusivos devido à sistemática variação da opinião dos professores. Embora o uso de materiais e a abordagem do tópico se relacionassem com o aproveitamento dos alunos, a associação aos materiais não se manteve, na generalidade dos casos, após terem desaparecido os efeitos dessa abordagem.

Raphael e Wahlstrom referem que, por vezes, se negligencia o papel do tempo para a tarefa, nem é dada a oportunidade para aprender. Por outro lado, afirmam que o aproveitamento em Matemática está fortemente relacionado com a abordagem dos tópicos, sugerindo que as diferenças dos alunos na aprendizagem podem não ser devidas ao uso dos materiais *per se* mas à abordagem do conteúdo feita pelo professor. Assim, uma utilização eficiente de materiais na sala de aula pode não estar relacionada apenas com o seu uso extensivo, pois uma confiança excessiva nos materiais pode conduzir a abordagens pobres dos conteúdos.

Fernandes (1990) investigou a eficácia relativa de três métodos de ensino na aquisição do conceito de número racional: (a) método tradicional: os alunos desenvolveram actividades de papel e lápis e usaram o compêndio escolar; (b) método dos materiais manipulativos: os alunos utilizaram barras Cuisenaire, tiras de papel, barras e círculos fracção; e (c) método dos materiais e computador: os alunos, além de materiais manipulativos, trabalharam com o computador. Todos os métodos ocuparam o mesmo número de sessões.

Para avaliar a eficácia dos métodos foi aplicado aos alunos um teste referido a objectivos usado como pré-teste, pós-teste e teste de retenção. Não foram encontradas diferenças significativas entre os três métodos tendo a grande maioria dos alunos atingido um elevado número de objectivos. Apenas na retenção, os resultados favoreceram significativamente o método tradicional.

No entanto, Fernandes alerta para outros factores que podem afectar a comparação entre os diversos métodos de ensino: (a) a ênfase tradicional nos aspectos procedimentais e algorítmicos; (b) o tempo para a tarefa, pois nos métodos não tradicionais o aluno necessita mais tempo para se familiarizar com os materiais, experimentar estratégias e avaliar resultados; (c) a avaliação do desempenho, dado que, por vezes, o tipo de testes não reflecte os ambientes da aprendizagem; e (d) a pouca confiança dos professores na utilização de materiais devida à inexistência de formação nesta área.

Deste modo, os materiais e a sua utilização devem ser áreas a contemplar em programas de formação de professores.

> " (...) os materiais (...) raramente são utilizados nas nossas escolas, não porque haja uma atitude pedagógica fundamentada nesse sentido, mas porque são mal conhecidas as suas potencialidades (ou limitações) didácticas" (Monteiro et al., 1985, p.41).

De facto, Fernandes (1984), num estudo sobre as necessidades de formação de professores do Ensino Primário, aplicou um questionário abrangendo diversas áreas e ao qual responderam 294 professores. Nos itens referentes à utilização de materiais, era pedida a opinião relativamente à familiaridade com materiais didácticos e às oportunidades de os utilizar. Os materiais apresentados eram as barras Cuisenaire, os blocos Dienes, o ábaco, os blocos lógicos, o geoplano, o quadro magnético, o flanelógrafo, o retroprojector, o projector de diapositivos e o projector de filmes. Verificou-se que os professores não estavam familiarizados com a maioria dos materiais e que tinham poucas oportunidades para os utilizar. Assim, os materiais mais usados foram o flanelógrafo (91%), as barras Cuisenaire (79%) e os blocos lógicos (50%). Em contrapartida, poucos afirmaram utilizar os blocos Dienes (8%) e o geoplano (4%).

Da análise global do questionário, Fernandes concluiu que a utilização de materiais constituía a área mais problemática, contribuindo para esse facto: (a) deficiências ao nível das formações inicial e contínua que tendem a privilegiar aspectos teóricos do ensino e a ignorar os seus aspectos práticos; e (b) falta de materiais nas escolas.

Desta revisão de literatura pode constatar-se que a maioria das investigações sobre a utilização de materiais manipulativos se enquadra numa perspectiva essencialmente quantitativa. Consequentemente, não investigaram processos utilizados por professores e por alunos no desenvolvimento de conceitos matemáticos.

De um modo geral, os estudos referenciados seguiram o modelo processo-produto comparando o aproveitamento dos alunos sujeitos a diferentes situações de ensino-aprendizagem, uns trabalhando basicamente com papel e lápis -- situação tradicional -- e outros desenvolvendo actividades utilizando materiais concretos. Para fundamentar essa comparação, era aplicado um teste de avaliação geralmente referido a objectivos considerados relevantes, no início (pré-teste) e no final (pós-teste) do tratamento, sendo os respectivos resultados analisados estatisticamente para detectar eventuais diferenças significativas.

Esta abordagem metodológica tem suportado conclusões bastante diversas, mesmo contraditórias, não confirmando, de maneira clara, potencialidades evidentes da utilização de materiais no processo de ensino-aprendizagem.

Assim, podem ser apontadas a esta abordagem algumas desvantagens e/ou limitações especialmente na avaliação quer dos processos quer dos produtos de aprendizagem com reflexo evidente na avaliação dos desempenhos dos alunos.

Reconhece-se a diferença de processos mas avaliam-se os respectivos produtos atendendo essencialmente a características "tradicionais". De facto, (a) os testes, traduzindo um cenário tradicional, não reflectem a especificidade e a riqueza do ambiente proporcionado pelos materiais; (b) os testes, não recorrendo à utilização de materiais, não permitem identificar os processos desenvolvidos; e (c) os testes, geralmente orientados para o domínio cognitivo, não permitem detectar e avaliar outras capacidades, também importantes na aprendizagem de conceitos matemáticos, que a manipulação de materiais propicia.

Os Sistemas de Medida

O *National Council of Supervisors of Mathematics* (1989) considera a "medida" como uma das doze competências essenciais a desenvolver pelos cidadãos adultos no próximo século.

> "Os alunos devem aprender os conceitos fundamentais da medida através de experiências concretas [e] calcular perímetros, áreas e volumes. Devem ser capazes de utilizar (...) instrumentos e níveis de precisão apropriados" (NCSM, 1989, p.45).

De acordo com Wilson e Osborne (1992), os três grandes objectivos do estudo de sistemas de medida são propiciar ao aluno: (a) competências (*skills*) de medição a usar no dia-a-dia; (b) uma compreensão da medida para alargar a sua aprendizagem científica; e (c) bases conceptuais para desenvolver o seu conhecimento matemático.

Mas, um sistema de medida é uma estrutura complexa de ideias (Carpenter & Osborne, 1976; Osborne, 1976). Segundo estes autores, cada sistema é baseado numa função característica que liga duas estruturas matemáticas, a que chamam espaços, possuindo operações análogas: o domínio (*domain space*) e a extensão (*range space*).

Considere-se, por exemplo, o sistema de medida de área e o seu estudo para regiões poligonais. Neste caso, o domínio é o conjunto das regiões poligonais e a operação é a reunião de regiões poligonais não sobrepostas. A extensão é o conjunto dos números reais não negativos e a operação é a adição. Então, no estudo de um sistema particular dever-se-á ter em conta: (a) as características do domínio; (b) as características da extensão; e (c) a associação homomórfica dos dois espaços.

O processo psicológico em consideração é um processo de transferência de conhecimento, pois o aluno usa a estrutura de um espaço para suportar e conduzir a aprendizagem do outro espaço e, assim, captar o sentido da própria função.

Deste modo, dentro do próprio sistema, pode surgir um primeiro problema, problema de transferência interna (*within transfer problem*).

Alguns sistemas de medida, apesar de diferentes, apresentam aspectos semelhantes. No entanto, como geralmente o aluno revela dificuldades na transferência de propriedades de uma função característica de um sistema para beneficiar a aprendizagem de outros sistemas, pode ocorrer um segundo problema, problema de transferência entre sistemas (*across transfer problem*).

Por outro lado, é frequentemente reconhecida a adequação da "geometria da medida", através dos seus modelos, em abordagens intuitivas de outros tópicos matemáticos (número, álgebra, ...) utilizando-se, desta forma, elementos de um sistema num outro contexto, que não o da medida. Um terceiro problema, problema de transferência externa (*outside transfer problem*), pode então verificar-se.

Osborne (1976) adianta que, em certos aspectos, o problema de transferência externa faz parte do problema de transferência interna diferindo apenas nos objectivos de ensino. Na "transferência interna" o objectivo é ensinar o próprio sistema de medida ao passo que na "transferência externa" o objectivo é aplicar os efeitos dessa aprendizagem num outro contexto.

Além destes problemas de transferência, também a linguagem -- por exemplo, a palavra *comprimento* é usada para designar quer a grandeza quer as respectivas quantidades -- e o contexto em que ela é utilizada -- a medida é interpretada de maneira diversa quer pela matemática quer pela ciência -- podem perturbar a aprendizagem dos vários sistemas.

É, então, importante distinguir as duas interpretações: uma ligada ao mundo ideal dos modelos matemáticos e outra ligada a um processo não exacto de observação (Osborne, 1976; Wilson & Osborne, 1992).

Quando se utiliza uma régua para medir o comprimento de um objecto ter-se-á de (a) escolher uma unidade; (b) comparar essa unidade com o objecto; e (c) exprimir o resultado dessa comparação através de um número (Caraça, 1984; NCTM, 1991). Ora, este processo exige tomadas de posição que afectam a precisão e a fidelidade da medida; enquanto processo baseado na percepção e na observação envolve necessariamente uma margem de erro. Do ponto de vista matemático, medir esse comprimento corresponde a atribuir-lhe um número real não negativo dependendo apenas da unidade escolhida. Assim, esta medida é "limpa", precisa e não sujeita a erros de observação (Wilson & Osborne, 1992).

Osborne (1976) considera problemático o estabelecimento, de forma apropriada e definitiva, destas interpretações e distinções. No entanto, facilmente se reconhece que muitas das actividades de ensino-aprendizagem envolvem um pouco destas duas situações. Por isso, o aluno deve efectuar medições manipulando materiais que lhe permitam uma boa base perceptual para a formação e compreensão do conceito.

Diversos autores (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988; Macias, 1976; Wilson & Osborne, 1992) referem que as abordagens dos sistemas de medida devem ser diversificadas e atender a princípios gerais que proporcionem ao aluno uma compreensão conceptual e um domínio dos vários procedimentos de cálculo. Assim, na planificação de ensino, a ênfase deve recair no tratamento das ideias fundamentais que caracterizam e distinguem os diversos sistemas. O aluno deve enfrentar situações de aprendizagem experimentando e discutindo, em vez de observar passivamente. Deve realizar medições frequentemente, mais em tarefas da vida real do que em exercícios do livro. A aprendizagem das fórmulas, sendo importante, não deve acontecer antes do aluno ter uma adequada compreensão conceptual. Deste modo, propõe-se uma sequência de ensino em cinco passos: (a) realizar tarefas de medição, livres de comparação numérica, focando a atenção no atributo a ser medido; (b) usar, inicialmente, unidades arbitrárias; (c) desenvolver actividades para as ideias fundamentais; (d) utilizar unidades padrão, necessárias à comunicação humana; e (e) promover actividades em que o aluno siga os procedimentos e aplique os conceitos.

A Aprendizagem dos Conceitos de Perímetro e de Área

O ensino tradicional do perímetro e da área tem-se revelado ineficaz na correcção das concepções erróneas que os alunos desenvolvem acerca dos conceitos de área e perímetro.

A noção de unidade de medida é importante no processo de medição. Assim, usar diversas unidades em diferentes sistemas, bem como medir o mesmo item com várias unidades e utilizar a mesma unidade para medir diferentes itens, ajuda o aluno a estabilizar o conceito (Wilson & Osborne, 1992). Por outro lado, é também recomendado o recurso a unidades arbitrárias, especialmente em actividades iniciais (Hirstein, Lamb & Osborne, 1978). No entanto, muitas vezes, o aluno não considera a unidade de medida como uma entidade única. Por exemplo, parece revelar algumas dificuldades em reconhecer que "2 quadrículas" ou "3 pés" possam funcionar como uma unidade.

A aprendizagem de fórmulas é também importante, pois permite uma maior rapidez de cálculo. Todavia, a manipulação de fórmulas não deve ser entendida como a compreensão do conceito, pois nem sempre evidencia o conhecimento que o aluno possui (Hirstein, Lamb & Osborne, 1978). Este aspecto é particularmente relevante no estudo da área porque, embora a área de uma figura seja o número de unidades necessárias para a "cobrir" totalmente, o aluno calcula-a frequentemente através de medições lineares que estão inseridas numa fórmula. Battista (citado por Costa, 1985) refere que este processo indirecto desenvolve no aluno noções extremamente vagas acerca do conceito de área, não contribuindo para a sua interiorização, levando-o a pensar que a área é obtida através de um processo algorítmico e computacional. Por estas razões, a área deve ser abordada de diferentes maneiras e, além da manipulação física de unidades de medida, outras estratégias devem ser seguidas, tais como contagem de unidades, decomposição e recombinação de figuras.

Num estudo sobre números racionais, Lesh, Landau e Hamilton (1983) realizaram entrevistas a 80 alunos, 16 por cada ano de escolaridade do 4º ao 8º ano. Nestas entrevistas era proposta a resolução de diversas situações associadas à noção de número racional. Algumas dessas situações tratavam o cálculo de áreas de figuras não rectangulares através da contagem de quadrículas. Na primeira situação, apresentavam-se ao aluno duas figuras desenhadas em papel quadriculado (ver Figura 3(a)) e era pedida a indicação do número de quadrados para cada uma delas. Na segunda situação, o entrevistador sobrepunha e ajustava de maneira conveniente uma transparência quadriculada sobre um triângulo desenhado em papel branco (ver Figura 3(b)), questionando o aluno sobre o número de quadrados. Para a terceira situação formulava-se a mesma pergunta mas apenas era fornecido um trapézio desenhado em papel branco e a transparência quadriculada, devendo o aluno seguir um processo de resolução (ver Figura 3(c)).

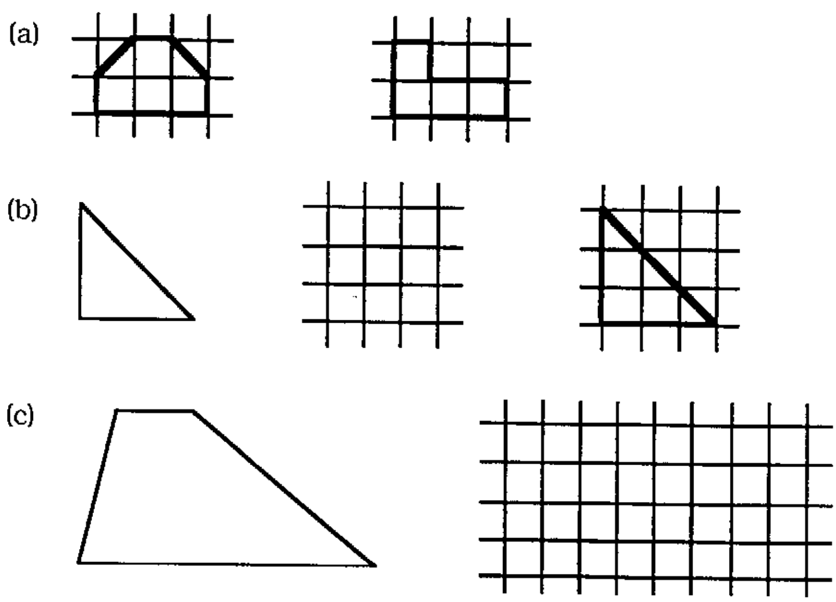


Figura 3. Figuras usadas por Lesh, Landau e Hamilton.

Os alunos realizaram melhor a tarefa do triângulo (73%) do que a tarefa do trapézio (26%). Também se verificou uma melhoria dos resultados à medida que se avançava nos anos de escolaridade. Assim, as percentagens dos alunos que indicaram uma resposta correcta para o triângulo foram 63%, 63%, 75%, 81% e 81% para o 4º, 5º, 6º, 7º e 8º anos, respectivamente. Para o trapézio, e mantendo a mesma sequência, essas percentagens foram 13%, 19%, 25%, 38% e 38%. Lesh, Landau e Hamilton referem ainda que, de uma maneira geral, os alunos começaram por contar os quadrados inteiros e, em seguida, tentaram obter outros juntando ou compensando as partes restantes.

Douady e Perrin (1986), trabalhando com 49 alunos dos 4º e 5º anos com idades compreendidas entre 9 e 11 anos, observaram estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos, bem como conflitos e mudanças de estratégia originadas por respostas diferentes. Assim, era proposto, em entrevistas a pares de alunos, a comparação das áreas das figuras geométricas S1 (rectângulo), S2 (paralelogramo não rectângulo), S3 (rectângulo) e S4 (triângulo) desenhadas em papel branco (ver Figura 4). Se solicitado pelos alunos era fornecido papel quadriculado.

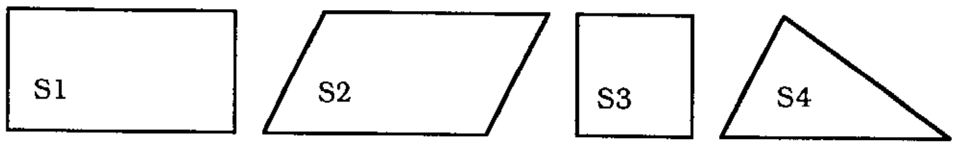


Figura 4. Figuras geométricas utilizadas por Douady e Perrin.

Foram observadas essencialmente quatro estratégias: (a) comparação de áreas como comparação de números quer (i) usando uma grelha e contando quadrículas -- quadriculando as figuras no papel branco com quadrados ou com rectângulos ou, ainda, desenhando as figuras em papel quadriculado -- quer (ii) multiplicando a medida dos comprimentos para calcular a área, inventando fórmulas, muitas vezes erradas, para o triângulo e para o paralelogramo não rectângulo; (b) comparação de áreas como comparação do comprimento dos lados -- entre S1 e S2; (c) comparação de áreas quer (i) cortando e sobrepondo duma maneira apropriada -- entre S1 e S2 ou entre S3 e S4 -- quer (ii) pavimentando S1 com S3 ou S2 com S4; e (d) para S2, "endireitar" o paralelogramo transformando-o num rectângulo ou "inclinar" ainda mais.

A estratégia (c) por um lado e as estratégias (b) e (d) por outro originaram conflitos e mudanças de abordagem sempre que os alunos, esperando obter os mesmos resultados, chegavam a conclusões diferentes. Mediam a altura do paralelogramo e surpreendiam-se com o facto de encontrar um valor menor que o obtido para o lado. Tentavam pavimentar os rectângulos e o paralelogramo com os mesmos quadrados. Ainda, relativamente ao paralelogramo, a mudança de estratégia acontecia quando lhes era pedido para "o inclinar mais e mais", até que ficava claro que a área se tinha tornado muito pequena.

Douady e Perrin consideraram que, neste caso, os alunos misturavam três transformações: (a) a "inclinação" do paralelogramo que mantém o comprimento dos lados, mas não as áreas; (b) o deslizar de um lado na linha que o conduz que mantém as áreas, mas não o comprimento dos lados; e (c) a rotação em torno de um vértice que mantém os comprimentos e as áreas.

Costa (1985) analisou a compreensão do conceito de área junto de 93 alunos do Magistério Primário, futuros professores do Ensino Primário. Os alunos, com uma idade média de 21 anos, pertenciam a turmas do 1º ano (40) e do 3º ano (53). Os dados foram recolhidos através da aplicação de um teste escrito onde se propunham sete tarefas.

Na tarefa 1 -- aplicação de fórmulas -- os alunos determinavam a área de um polígono sendo fornecidas as medidas relevantes, e só essas. Na tarefa 2 -- contagem de unidades -- os alunos calculavam a área de uma figura apresentada em papel ponteado. Na tarefa 3 -- extra medidas -- era pedido para determinar a área de uma figura sendo dadas medidas, relevantes ou não. Na tarefa 4 -- régua -- os alunos calculavam a área utilizando a régua para efectuar as medições lineares necessárias. Para a tarefa 5 -- igual perímetro, igual área -- eram apresentadas regiões isoperimétricas devendo reconhecer-se que não eram equivalentes. Igualmente, eram dadas regiões com perímetros diferentes para concluir que eram equivalentes. Na tarefa 6 -- decomposição no papel ponteado -- os alunos determinavam a área de uma região por subtracção. Finalmente, na tarefa 7 -- régua / decomposição -- os alunos traçavam e mediam os comprimentos necessários para calcular a área quer por decomposição quer por subtracção.

A classificação da compreensão que cada aluno tinha do conceito de área foi baseada em três níveis: (a) nível 1 -- conceito básico de área -- respostas satisfatórias às tarefas 1, 2 e 3; (b) nível 2 -- conceito intermédio de área -- respostas satisfatórias às tarefas 1, 2, 3, 4 e 5; e (c) nível 3 -- conceito completo de área -- respostas correctas em todas as tarefas.

Os resultados do teste revelaram que grande parte dos participantes não possuiam conhecimentos seguros acerca dos conceitos envolvidos. De facto, os melhores resultados foram conseguidos na tarefa 2 (52%) e na tarefa 3 (59%). Na tarefa 1 apenas 35% dos alunos responderam satisfatoriamente e nas restantes tarefas as percentagens oscilaram entre 10% e 15%. Notou-se ainda que os alunos, sistematicamente, apresentavam a medida da área ou sem indicação de unidades ou expressa em unidades unidimensionais.

Face a estes desempenhos, verificou-se que: (a) cerca de 80% dos alunos não atingiram o nível mínimo de compreensão; (b) o conceito básico foi atingido por 18 alunos; (c) apenas um aluno atingiu o conceito intermédio; e (d) o conceito completo de área não foi atingido por qualquer aluno.

Além das dificuldades específicas na aprendizagem quer do perímetro quer da área, os alunos de todos os níveis etários permanentemente confundem os dois conceitos, não tanto devido a erros de cálculo, mas essencialmente a erros de compreensão (Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver & Swafford, 1988; Costa, 1985; Hirstein, Lamb & Osborne, 1978; Szetela & Owens, 1986; Wilson & Osborne, 1992).

Szetela e Owens (1986) consideram que muitos alunos, devido a uma fraca compreensão de conceitos, confundem o perímetro e a área. Assim, num estudo com alunos do 7º e 8º anos, 54 de 94 alunos (57%) responderam que um hexágono regular e um triângulo equilátero com o mesmo perímetro eram ainda equivalentes, apesar do hexágono ter uma área 1,5 vezes superior. Referiram ainda um trabalho realizado por Woodward e Byrd em que os resultados foram semelhantes. Neste estudo, 157 de 258 alunos (61%) do 8º ano e futuros professores concluiram que a área de cinco quadriláteros, diferentes e isoperimétricos, era a mesma apesar de um deles ter uma área quase cinco vezes maior que um outro.

Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver e Swafford (1988) apresentaram os resultados das respostas dos alunos relativos ao 4º *National Assessment of Educational Progress* (NAEP) desenvolvido e administrado pelo *Educational Testing Service* em 1986 em escolas dos Estados Unidos da América. O teste, aplicado a alunos dos 3º, 7º e 11º anos de escolaridade, abordou diversas áreas dos programas --

número, operações, geometria, medida, ... -- e a maioria dos itens foram apresentados na forma de resposta múltipla com quatro hipóteses.

Os itens correspondentes à medida incidiram sobre três aspectos: (a) unidade de medida; (b) utilização de instrumentos de medida; e (c) perímetro, área e volume.

Os alunos pareceram mais familiarizados com unidades "pequenas" do que com unidades "maiores": 60% dos alunos do 3º ano indicaram uma unidade apropriada para medir o comprimento de uma caneta, mas apenas 35% responderam correctamente para o comprimento do "lado" de uma casa; no 7º ano, os resultados foram 87% e 67%, respectivamente. Cerca de 90% dos alunos do 3º e 60% do 7º consideraram que, para medir a altura de uma porta utilizando várias unidades de medida, quanto mais unidades fossem necessárias maior seria essa unidade.

Cerca de 75% dos alunos do 7º ano mediram correctamente quando o zero da régua estava alinhado com o objecto mas apenas 50% -- e no 3º ano somente 14% -- escolheram a resposta adequada quando esse alinhamento não era directo.

Mais de metade dos alunos do 7º ano responderam erradamente aos itens envolvendo conhecimentos de perímetro e área, denotando confusões entre os dois conceitos. Por exemplo, apenas 46% deles calcularam o perímetro, e 56% a área, de um rectângulo sendo dadas as respectivas dimensões. Cerca de 33% dos alunos confundiram perímetro com área e no 11º ano esta confusão não foi inteiramente eliminada. O erro mais comum foi calcular o perímetro quando era pedida a área e vice-versa.

Cerca de 40% dos alunos do 7º ano e 55% do 11º ano calcularam bem a área de uma figura irregular apresentada numa grelha de unidades quadradas, mas apenas 13% do 7º e 45% do 11º determinaram a área de um quadrado sendo dada a medida de um lado. Também, só 45% dos alunos do 11º calcularam correctamente a área de um quadrado quando conhecido o respectivo perímetro.

Os alunos revelaram, ainda, falhas na compreensão conceptual de área. De facto, 25% dos alunos do 7º ano indicaram que a área de um rectângulo não pode ser determinada após ter sido decomposto e separado em partes, mesmo sendo dadas as dimensões do rectângulo original.

De uma maneira geral, verificou-se que os alunos obtiveram melhores resultados em itens familiares, simples e relacionados com a sua experiência física ou visual do que em itens não familiares, mais complexos e abstractos e demonstraram não possuir uma compreensão de conceitos fundamentais.

Assim, Brown, Carpenter, Kouba, Lindquist, Silver e Swafford recomendam que os alunos deveriam: (a) ter oportunidade de resolver problemas diversificados; (b) ter tempo para aprender e compreender os conceitos antes dos procedimentos da prática -- os alunos são introduzidos nos procedimentos antes de terem compreendido os conceitos, por exemplo, calcular áreas antes de terem compreendido o conceito de área e as unidades utilizadas na medida; (c) beneficiar de mais tempo na utilização de modelos físicos e figurativos e discutir como esses materiais estão relacionados com os procedimentos simbólicos e abstractos; e (d) dispor de mais tempo para pensarem nas situações propostas antes de produzirem respostas.

Conceito de Grandeza

Os conceitos de grandeza, quantidade e medida têm motivado diferentes interpretações sendo frequentemente confundidos. Era habitual afirmar-se que grandeza "é uma quantidade que pode aumentar e diminuir" e definia-se quantidade como "tudo aquilo que se pode medir" caindo-se deste modo num círculo vicioso (Macias, 1976).

No estudo, seguir-se-á a seguinte definição de grandeza: "uma grandeza $G = (C,+,\mathcal{T})$ é um semigrupo comutativo e ordenado" (Macias, 1976). Assim, para o estudo de uma grandeza ter-se-á de definir, sucessivamente,

(a) um conjunto C, suporte da grandeza;

(b) uma operação adição (+) que transforme (C,+) num semigrupo comutativo, ou seja, uma operação que seja

. sempre possível, $\forall\ a, b \in C\ \exists^1\ c \in C : c = a + b$

. associativa, $(a + b) + c = a + (b + c)\ ,\ \forall\ a, b, c \in C$

. comutativa, $a + b = b + a\ ,\ \forall\ a, b \in C$

(c) uma relação de ordem ($\mathcal{T}$) total lata verificando as propriedades

. reflexiva, $a\,\mathcal{T}a\ ,\ \forall\ a \in C$

. anti-simétrica lata, $a\,\mathcal{T}b \wedge b\,\mathcal{T}a \Rightarrow a = b\ ,\ \forall\ a, b \in C$

. transitiva, $a\,\mathcal{T}b \wedge b\,\mathcal{T}c \Rightarrow a\,\mathcal{T}c\ ,\ \forall\ a, b, c \in C$

. todos os elementos de C comparáveis dois a dois

e compatível com a adição

$$a\,\mathcal{T}b \wedge c\,\mathcal{T}d \Rightarrow (a + c)\,\mathcal{T}(b + d)\ ,\ \forall\ a, b, c, d \in C$$

Nestas condições, os elementos de C chamam-se quantidades.

Seguidamente, definem-se as grandezas comprimento e área atendendo à definição geral de grandeza.

Grandeza Comprimento

(a) definição do conjunto suporte Σ

Dois pontos quaisquer A e B, distintos, determinam uma única recta r no plano (ver Figura 5).

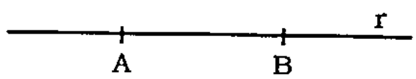


Figura 5. Recta r determinada pelos pontos A e B.

O ponto A determina em r duas semi-rectas com origem nesse ponto: uma a que pertence B -- $\dot{A}B$ -- e outra a que não pertence B. A mesma situação é verificada pelo ponto B. Chama-se segmento de recta [AB] à intersecção de $\dot{A}B$ com $\dot{B}A$, isto é, $[AB] = \dot{A}B \cap \dot{B}A$. Designe-se por S o conjunto de todos os segmentos de recta do plano.

Dois segmentos de recta [AB] e [CD] são geometricamente iguais -- $[AB] \cong [CD]$ -- se e só se for possível aplicar um no outro através de um número finito de deslocamentos. É então possível definir no conjunto S a relação binária $\mathcal{R}$

$$x \,\mathcal{R}\, y \underset{x,\, y \in S}{\Leftrightarrow} x \text{ é geometricamente igual a } y \quad \text{ou} \quad x \,\mathcal{R}\, y \underset{x,\, y \in S}{\Leftrightarrow} x \cong y$$

que é uma relação de equivalência pois verifica as propriedades

. reflexiva, $x \cong x \ , \ \forall\, x \in S$

. simétrica, $x \cong y \Rightarrow y \cong x \ , \ \forall\, x, y \in S$

. transitiva, $x \cong y \wedge y \cong z \Rightarrow x \cong z \ , \ \forall\, x, y, z \in S$

Sendo assim, $\mathcal{R}$ produz em S uma partição em subconjuntos não vazios e disjuntos entre si chamados classes de equivalência. Cada uma destas classes é um comprimento. Assim, cada segmento de recta [AB] define uma classe c_1 formada por todos os segmentos que são geometricamente iguais a [AB], isto é, $c_1 = \{\, x \in S : x \cong [AB] \,\}$.

Designe-se por Σ -- conjunto quociente $S/\cong$ -- o conjunto de todas as classes de equivalência: $\Sigma = S/\cong = \{ c_1, c_2, c_3, \ldots \}$. Este conjunto Σ é então um conjunto de comprimentos e não um conjunto de segmentos de recta.

(b) definição da operação adição +

Dois segmentos de recta [AB] e [BC] dizem-se consecutivos se e só se têm um ponto comum (extremo) e estão contidos na mesma recta r (ver Figura 6).

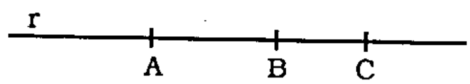


Figura 6. [AB] e [BC] como segmentos de recta consecutivos.

Considerem-se, então, dois segmentos de recta consecutivos [AB] e [BC], respectivamente, representantes de c_1 e c_2. Então o segmento de recta [AC], resultante da reunião de [AB] com [BC], será o representante de uma outra classe $c_1 + c_2$:

$$\begin{array}{rcl} c_1 & \rightarrow & [AB] \\ c_2 & \rightarrow & [BC] \\ c_1 + c_2 & \leftarrow & [AB] \cup [BC] = [AC] \end{array}$$

Fica assim definida uma operação adição em Σ:

$$\begin{array}{rcl} \Sigma \times \Sigma & \rightarrow & \Sigma \\ (c_1, c_2) & \rightarrow & c_1 + c_2 \end{array}$$

Como esta operação verifica as propriedades

. sempre possível, $\forall\, c_1, c_2 \in \Sigma\ \exists^1\, c_3 \in \Sigma : c_3 = c_1 + c_2$

. associativa, $(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)\ ,\ \forall\, c_1, c_2, c_3 \in \Sigma$

. comutativa, $c_1 + c_2 = c_2 + c_1\ ,\ \forall\, c_1, c_2 \in \Sigma$

conclui-se que $(\Sigma,+)$ é um semigrupo comutativo.

(c) relação de ordem $\leq$

Um comprimento c_1 é menor ou igual a um comprimento c_2 se e só se existe um outro comprimento c_3 que adicionado com c_1 é igual a c_2, isto é, $c_1 \leq c_2 \Leftrightarrow \exists\, c_3 \in \Sigma : c_1 + c_3 = c_2$

Esta relação, verificando as propriedades

. reflexiva, $c_1 \leq c_1 \ , \forall\, c_1 \in \Sigma$

. anti-simétrica lata, $c_1 \leq c_2 \wedge c_2 \leq c_1 \Rightarrow c_1 = c_2 \ , \forall\, c_1, c_2 \in \Sigma$

. transitiva, $c_1 \leq c_2 \wedge c_2 \leq c_3 \Rightarrow c_1 \leq c_3 \ , \forall\, c_1, c_2, c_3 \in \Sigma$

e sendo possível comparar todos os elementos de Σ dois a dois, é uma relação de ordem total lata. Esta relação é ainda compatível com a adição pois

$$c_1 \leq c_2 \wedge c_3 \leq c_4 \Rightarrow c_1 + c_3 \leq c_2 + c_4 \ , \forall\, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \Sigma$$

Deste modo, verificou-se que $(\Sigma,+,\leq)$ é uma grandeza, chamada grandeza comprimento, sendo as quantidades -- os elementos de Σ -- geralmente chamadas comprimentos.

Grandeza Área

(a) definição do conjunto suporte $\mathcal{A}$

Traçando no plano uma linha fechada fica definido um conjunto de pontos chamado superfície (ver Figura 7).

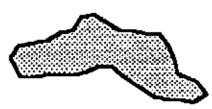


Figura 7. Superfície como conjunto de pontos do plano.

Designe-se por T o conjunto de todas as superfícies do plano.

Duas superfícies M e N são geometricamente iguais se e só se for possível fazê-las coincidir através de um número finito de deslocamentos (ver Figura 8).

Figura 8. Superfícies geometricamente iguais.

As superfícies P e Q (ver Figura 9) não são geometricamente iguais.

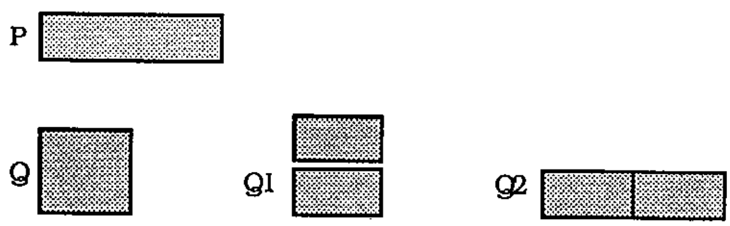


Figura 9. Superfícies equivalentes.

No entanto, decompondo Q e alterando a sua forma ($Q \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$) é possível, através de deslocamentos, sobrepor P e Q_2. Por isso, as superfícies P e Q dizem-se equivalentes. Note-se que as superfícies M e N, sendo geometricamente iguais, são também equivalentes.
Assim, no conjunto T, pode ser definida a relação binária $\mathcal{S}$

$$x\,\mathcal{S}\,y \underset{x,\,y\,\in\,T}{\Leftrightarrow} x \text{ é equivalente a } y \qquad \text{ou} \qquad x\,\mathcal{S}\,y \underset{x,\,y\,\in\,T}{\Leftrightarrow} x \cong y \; ^{*}$$

que, verificando as propriedades

. reflexiva, $x \cong x\ ,\ \forall\, x \in T$

. simétrica, $x \cong y \Rightarrow y \cong x\ ,\ \forall\, x, y \in T$

. transitiva, $x \cong y \wedge y \cong z \Rightarrow x \cong z\ ,\ \forall\, x, y, z \in T$

é uma relação de equivalência.

Esta relação $\mathcal{S}$ produz em T uma partição em classes de equivalência. Cada uma destas classes é uma área. Assim, cada superfície M define uma classe a_1 formada por todas as superfícies equivalentes a M, isto é, $a_1 = \{ x \in T : x \cong M \}$.

---

* Por comodidade, utilizar-se-á o sinal $\cong$ para a equivalência de superfícies.

Designe-se por $\mathcal{A}$ -- conjunto quociente $T/\cong$ -- o conjunto de todas as classes de equivalência: $\mathcal{A} = T/\cong = \{ a_1, a_2, a_3, \ldots \}$. Este conjunto $\mathcal{A}$ é então um conjunto de áreas e não um conjunto de superfícies.

(b) definição da operação adição +

Duas superfícies M e N dizem-se contíguas se e só se a sua intersecção for uma linha (ver Figura 10).

Figura 10. Superfícies contíguas.

Considerem-se, então, duas superfícies contíguas M e N, respectivamente, representantes de a_1 e a_2. Assim, a reunião de M com N, será o representante de uma outra classe $a_1 + a_2$:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \rightarrow & M \\ a_2 & \rightarrow & N \\ a_1 + a_2 & \leftarrow & M \cup N \end{array}$$

Definiu-se então uma operação adição em $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{A} \\ (a_1, a_2) & \rightarrow & a_1 + a_2 \end{array}$$

Sendo esta operação

. sempre possível, $\forall\, a_1, a_2 \in \mathcal{A}\ \exists^1\, a_3 \in \mathcal{A} : a_3 = a_1 + a_2$

. associativa, $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$, $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$

. comutativa, $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$, $\forall\, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$

pode-se concluir que $(\mathcal{A},+)$ é um semigrupo comutativo.

(c) relação de ordem $\leq$

Uma área a_1 é menor ou igual a uma área a_2 se e só se existe uma outra área a_3 que adicionada com a_1 é igual a a_2, isto é,

$$a_1 \leq a_2 \Leftrightarrow \exists\, a_3 \in \mathcal{A} : a_1 + a_3 = a_2$$

Como esta relação verifica as propriedades

. reflexiva, $a_1 \leq a_1$, $\forall\, c_1 \in \mathcal{A}$

. anti-simétrica lata, $a_1 \leq a_2 \wedge a_2 \leq a_1 \Rightarrow a_1 = a_2$, $\forall\, a_1, a_2 \in \mathcal{A}$

. transitiva, $a_1 \leq a_2 \wedge a_2 \leq a_3 \Rightarrow a_1 \leq a_3$, $\forall\, a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}$

e é possível comparar todos os elementos de $\mathcal{A}$ dois a dois, diz-se que é uma relação de ordem total lata. Esta relação é ainda compatível com a adição pois

$$a_1 \leq a_2 \wedge a_3 \leq a_4 \Rightarrow a_1 + a_3 \leq a_2 + a_4 \text{ , } \forall\, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{A}$$

Deste modo, verificou-se que $(\mathcal{A},+,\leq)$ é uma grandeza, chamada grandeza área, sendo as quantidades -- os elementos de $\mathcal{A}$ -- geralmente chamadas áreas.

Medida de Quantidades

Com as quantidades de uma grandeza apenas se podem efectuar adições algébricas. Não se podem multiplicar ou dividir nem operar com quantidades de outras grandezas distintas. Para ultrapassar este inconveniente recorre-se ao conceito de medida.

Considere-se, por exemplo, a grandeza comprimento $(\Sigma,+,\leq)$. Por "medir um comprimento" entende-se atribuir-lhe um número real não negativo, resultado da medida. Então, a medida é uma aplicação *med* que associa a cada comprimento um número real não negativo:

$$\Sigma \underset{med}{\longrightarrow} \mathbb{R}_o^+$$

Ao medir um determinado comprimento c_1, faz-se corresponder a esse comprimento um número -- *med* c_1 -- que depende de um comprimento c_u tomado para unidade a que corresponde o número 1 -- *med* $c_u = 1$ --, ou seja, $\forall\, c_1 \in \Sigma : med\; c_1 = k \Leftrightarrow c_1 = k\, c_u$.

A aplicação *med* é uma bijecção pois é

. injectiva, $\forall\, c_1, c_2 \in \Sigma : c_1 \neq c_2 \Rightarrow med\,(c_1) \neq med\,(c_2)$

. sobrejectiva, $\forall\, k \in \mathbb{R}_o^+ \, \exists\, c_1 \in \Sigma : k = med\,(c_1)$

Por outro lado, esta bijecção respeita a adição pois

$$c_1 + c_2 \longrightarrow med\,(c_1) + med\,(c_2)$$

Assim, atendendo a esta aplicação *med*, não sendo possível multiplicar dois comprimentos, pode-se contudo multiplicar as respectivas medidas porque a multiplicação em $\mathbb{R}_o^+$ é sempre possível.

Definições de Comprimento, Perímetro e Área

As definições por abstracção -- em que se definem conjuntos ou propriedades a partir de relações de equivalência -- podem ser explicitadas dos pontos de vista da extensão ou da compreensão (Silva, 1975).

Em termos da extensão, o comprimento de um segmento de recta [AB] é a classe de equivalência constituída por todos os segmentos de recta que são geometricamente iguais a [AB] e a área de uma superfície F é a classe de equivalência constituída por todas as superfícies equivalentes a F.

Mas usualmente prefere-se o ponto de vista da compreensão: o comprimento de um segmento de recta [AB] é a propriedade comum que possuem todos os segmentos geometricamente iguais a [AB] e só esses. Analogamente, a área de uma superfície F é a propriedade comum a todas as superfícies equivalentes a F e só essas.

O perímetro de uma figura é, então, o comprimento da sua linha fronteira.

Estas definições levam a outras mais informais. Assim, o comprimento de um segmento de recta é a distância entre os seus extremos (Jacobs, 1974) ou o perímetro é a distância à volta de uma figura (Thiessen et al., 1989) ou a área de uma figura é o número de unidades necessárias para a cobrir totalmente (Bennett & Nelson, 1985).

Ideias Fundamentais da Medida

A um determinado sistema de medida podem ser associadas ideias fundamentais que o caracterizam e o distinguem dos outros sistemas (Wilson & Osborne, 1992). Estas ideias ajudam o aluno: (a) a construir a sua própria compreensão de um sistema de medida; e (b) a transferir conceitos e situações de um sistema para outro.

Deste modo, Wilson e Osborne definiram seis ideias fundamentais para o comprimento (ver Quadro 2) e para a área (ver Quadro 3) reforçando que todas são importantes para o aluno, pois permitem-lhe adquirir competências básicas para uma efectiva compreensão dos diferentes sistemas.

Quadro 2

Comprimento: ideias fundamentais (I.F.)

I.F.1: *Atribuição numérica.*
Dado um par de pontos A e B, há exactamente um e um só número não negativo -- $d(A,B) \geq 0$ -- que é a medida do comprimento do segmento de recta [AB] (significando $d(A,B)$ a distância entre A e B).

I.F.2: *Comparação.*
Se o segmento de recta [AB] está contido no segmento de recta [AC], conclui-se que $d(A,B) < d(A,C)$.

I.F.3: *Igualdade geométrica.*
O segmento de recta [AB] é geometricamente igual ao segmento de recta [CD] se e só se $d(A,B) = d(C,D)$, isto é, [AB] e [CD] têm o mesmo comprimento.

I.F.4: *Unidade.*
Existe um segmento de recta ao qual pode ser atribuído o comprimento um.

I.F.5: *Propriedade aditiva.*
Um segmento de recta formado pela reunião de dois segmentos distintos tem um comprimento igual à soma dos comprimentos dos segmentos distintos.

I.F.6: *Iteração.*
Um segmento de recta pode ser coberto, sem falhas e sem sobreposições, por repetição de unidades unidimensionais. Contando estas unidades, pode obter-se a medida do comprimento do segmento.

Quadro 3

Área: ideias fundamentais (I.F.)

I.F.1: *Atribuição numérica.*
Para uma região R existe um e um só número não negativo -- $a(R) \geq 0$ -- chamado medida da área de R.

I.F.2: *Comparação.*
Se uma região R pode ser coberta por uma outra região S, então a área de R é menor ou igual à área de S.

I.F.3: *Igualdade geométrica.*
Se duas regiões são geometricamente iguais, então têm a mesma área.

I.F.4: *Unidade.*
Existe uma região à qual se pode atribuir a área um.

I.F.5: *Propriedade aditiva.*
A área da reunião de duas regiões não sobrepostas R e S é igual à soma das áreas de cada uma das regiões.

I.F.6: *Iteração.*
Uma região pode ser coberta, sem falhas e sem sobreposições, por repetição de unidades bidimensionais. Contando estas unidades, pode obter-se a medida da área da região.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentados os aspectos epistemológicos e metodológicos assumidos no desenvolvimento da investigação. Encontra-se dividido em oito secções: (a) nota prévia; (b) opções metodológicas; (c) participantes; (d) contexto; (e) instrumentos de recolha de dados; (f) materiais de ensino utilizados; (g) as aulas; e (h) análise dos dados.

Nas duas primeiras secções explicitam-se as grandes opções metodológicas do estudo enquadradas no debate paradigmático da investigação educacional.

Nas secções seguintes referem-se os procedimentos seguidos, indicam-se os participantes e descreve-se o contexto em que decorreu o estudo, bem como os instrumentos utilizados na recolha de dados.

Finalmente, na última secção menciona-se como foi feita a análise dos dados.

Nota Prévia

Durante as últimas décadas assistiu-se ao surgimento de múltiplas linguagens científicas, de pluralidade de posições epistemológicas e de novas perspectivas de investigação englobadas na denominação de paradigmas de investigação.

Guba e Lincoln (1994) definem paradigma como um sistema de concepções básicas que um indivíduo possui permitindo-lhe uma dada visão do mundo e da sua natureza. É através desse sistema que o indivíduo percebe o seu lugar no mundo e o tipo de relações possíveis que pode estabelecer com ele e com as suas partes.

Essas concepções básicas que definem um paradigma de investigação podem ser sintetizadas através das respostas dadas a três questões fundamentais e interdependentes: (a) uma questão ontológica: Qual é a forma e a natureza da realidade e o que se pode conhecer acerca dela?; (b) uma questão epistemológica: Qual é a natureza das relações entre aquele que conhece, ou quer conhecer, e aquilo que pode ser conhecido?; e (c) uma questão metodolológica: Como procede aquele que quer conhecer para descobrir o que crê poder ser conhecido?

No discurso científico, são nomeados essencialmente dois paradigmas: o positivista e o interpretativo (Arnal, Rincón & Latorre, 1992; Borg & Gall, 1983; Entonado, 1991; Erickson, 1986).

O paradigma positivista, também referenciado como quantitativo, racionalista, experimental ou empírico-analítico, parte do pressuposto que os fenómenos podem ser estudados de modo objectivo mediante análises empíricas e desenhos experimentais. Assim, aspira basicamente a objectivar, quantificar e formular princípios ou leis explicativas dos fenómenos educativos ou dos processos de ensino-aprendizagem a partir de dados estatísticos.

O paradigma interpretativo, também referenciado como qualitativo, fenomenológico, naturalista, humanista ou etnográfico, penetra no mundo pessoal dos participantes verificando como interpretam as situações, o que significam para eles, quais as suas intenções. Enfatiza a compreensão e interpretação da realidade educativa a partir dos significados das pessoas implicadas e estuda as suas crenças, intenções, motivações e outras características não observáveis directamente, nem susceptíveis de experimentação. Assim, os investigadores de orientação interpretativa centram-se na descrição e na compreensão do que é único e particular para o sujeito em vez da procura de generalizações. Analisam a prática educativa a partir do contexto, sentido, história e intencionalidade com dados observados.

É ainda referido em estudos do currículo e da formação de professores um terceiro paradigma, chamado paradigma da "teoria crítica" (Arnal, Rincón & Latorre, 1992; Entonado, 1991). Pretende superar o que considera o reducionismo da corrente positivista e o conservadorismo da corrente interpretativa, admitindo a possibilidade de uma ciência social que não seja puramente empírica nem somente interpretativa. Nas dimensões conceptual e metodológica existem bastantes semelhanças com o paradigma interpretativo, mas ao introduzir a ideologia de forma explícita, pretende-se transformar a realidade educativa e não só descrevê-la e compreendê-la.

Guba e Lincoln (1994) caracterizam quatro paradigmas especialmente dirigidos às ciências sociais: (a) o positivismo; (b) o neo-positivismo; (c) a teoria crítica; e (d) o construtivismo.

Ao construtivismo podem ser associadas muitas das características já apontadas para o paradigma interpretativo. Assim, de acordo com Schwandt (1994), também os construtivistas argumentam que para compreender o mundo torna-se necessário interpretá-lo. O conhecimento é criado e construído, não é descoberto. É realçado o mundo da experiência tal como é vivida, sentida e realizada pelos sujeitos. Estes inventam conceitos, modelos e esquemas para explicar essa experiência e, a seguir, testam e modificam continuamente essas construções à luz das novas experiências.

Os construtivistas enfatizam, assim, o carácter pluralista e maleável da realidade (Schwandt, 1994): pluralista, porque é expressa numa diversidade de sistemas de linguagens e de símbolos; maleável, porque é modificada e moldada para se adaptar a actos significativos e intencionais dos sujeitos.

Este estudo desenvolveu-se tendo presentes os contornos do debate paradigmático acima referido que, naturalmente, em muito contribuiu para que se reconhecessem as limitações dos estudos revistos no capítulo "Revisão de Literatura". Consequentemente, uma das preocupações fundamentais deste estudo foi a de procurar perceber como os alunos interpretam as suas experiências e que significados lhes atribuem.

Opções Metodológicas

Como referem Guba e Lincoln (1994), um dado paradigma representa a visão mais completa e sofisticada desenvolvida pelos seus proponentes através das respostas às questões ontológica, epistemológica e metodológica. Em todos os casos, estas respostas são sempre "construções" humanas sujeitas a erro e, por isso, não são, nem podem vir a ser, consideradas inequivocamente certas. Assim, só a persuasão e a utilidade, em vez da demonstração, poderão servir para argumentar na defesa de uma determinada perspectiva.

Deste modo, a opção por um dos paradigmas da investigação educacional não é fácil pois, cada vez mais, há consciência de que cada um deles revela vantagens e limitações.

A escolha do método -- procedimentos ou conjunto de passos sucessivos para atingir um determinado fim -- deve fazer-se tendo em conta a natureza do problema em estudo (Arnal, Rincón & Latorre, 1992; Borg & Gall, 1983; Erickson, 1986; Evertson & Green, 1994).

Com este estudo pretende-se investigar atitudes, concepções e práticas de alunos do 6º ano de escolaridade procurando responder a três questões principais: (a) Como encaram alunos do 6º ano de escolaridade a utilização de materiais concretos na sua aprendizagem matemática?; (b) Que concepções acerca dos conceitos de área e perímetro são reveladas por alunos do 6º ano de escolaridade?; e (c) Que processos/abordagens de resolução são utilizados por alunos do 6º ano de escolaridade em tarefas que envolvam os conceitos de área e/ou perímetro? Assim, o propósito geral do estudo é o de conhecer, descrever e interpretar o que os alunos fazem e compreender porque o fazem, através do significado que atribuem ao que os rodeia.

Deste modo, atendendo à natureza do problema em estudo e não pretendendo obter generalizações de resultados mas basicamente descrever e compreender situações particulares, como os alunos as interpretam e que significado têm para eles, optou-se por uma abordagem de natureza essencialmente interpretativa.

Os processos de recolha de dados foram adaptados à natureza do estudo. Do ponto de vista prático, alguns métodos, técnicas e instrumentos próprios de um paradigma podem ser utilizados eficazmente em estudos conduzidos segundo um outro, pois cada um deles capta e regista apenas parte da realidade.

> "Parece-nos evidente que há vantagens e desvantagens em cada um dos paradigmas da investigação e que dados de natureza quantitativa e qualitativa podem ser recolhidos, com claras vantagens, no processo de resolução do mesmo problema" (Fernandes, 1991, p.66).

Os instrumentos utilizados para a recolha dos dados foram: o teste de papel e lápis, o questionário, a entrevista e a observação.

Teste de papel e lápis. Os testes são instrumentos de grande utilidade para avaliar a aprendizagem, pois fornecem boas indicações sobre o desempenho dos alunos. Os testes podem ser referidos: (a) a uma norma; (b) a um critério; (c) a objectivos; e (d) a um domínio (Borg & Gall, 1983; Fernandes, 1992).

O teste referido a uma norma permite comparar o desempenho de um aluno com o de outros a quem foi aplicado o mesmo teste. O teste referido a um critério permite a comparação dos resultados dos alunos com critérios absolutos previamente definidos. Com estes dois tipos de testes é possível fazer julgamentos acerca de desempenhos dos estudantes.

Quando se pretende estudar e compreender esse desempenho recorre-se a testes referidos a objectivos ou a um domínio. No primeiro caso, o desempenho é estudado relativamente a um conjunto de objectivos comportamentais. No segundo caso, utiliza-se o desempenho dos alunos num conjunto de questões de um preciso domínio ou área para estimar o seu desempenho num universo de itens semelhantes. Estes testes são bastante apropriados para diagnosticar dificuldades ou deficiências específicas no domínio abrangido.

No estudo optou-se, então, por um teste referido a um domínio constituído por dezasseis questões. Pretendia-se, assim, recolher mais informações sobre o desempenho dos alunos na aprendizagem do perímetro e da área.

Questionário. Com os questionários obtêm-se informações sobre opiniões ou apreciações dos alunos de modo a poder avaliar o nível de desenvolvimento de determinados valores e atitudes (Lemos, 1993). Os questionários permitem quantificar as observações, interpretações e atitudes do colectivo a estudar ainda que, preferencialmente, em combinação com outras técnicas de natureza qualitativa mais abertas e menos estruturadas.

No estudo optou-se por um questionário constituído por oito questões. Na maioria delas, os alunos escolhiam uma de quatro hipóteses apresentando razões da respectiva opção. O questionário pretendia recolher opiniões dos alunos sobre a sua aprendizagem matemática recorrendo à manipulação de materiais.

Entrevista. As entrevistas visam obter informação sobre concepções, atitudes e conhecimentos do entrevistado, bem como clarificar o sentido das suas opiniões. Podem ser muito úteis para avaliar processos de pensamento dos alunos no cumprimento de uma tarefa (Fernandes, 1991).

Relativamente ao nível de estruturação, as entrevistas podem ser: (a) estruturadas; (b) semi-estruturadas; e (c) abertas ou livres

(Zabalza, 1992). Na entrevista estruturada, os propósitos, perguntas e formas de relação estão previstas de antemão. As questões são previamente sequenciadas e escritas e a sua redacção cuidadosamente ponderada tendo o entrevistador pouca liberdade para modificar ou alterar o questionário. Na semi-estruturada, existe uma maior flexibilidade quanto ao desenvolvimento previsto. Assinalam-se as linhas gerais a explorar, sem contudo concretizar ou precisar muito os aspectos a analisar. Na entrevista aberta ou livre, a relação em si mesma aparece como objectivo prioritário. Pode não haver ideias claras dos temas concretos a tratar, bem como das etapas a percorrer.

Flexibilidade, adaptabilidade e interacção humana são algumas das vantagens das entrevistas permitindo uma profundidade na obtenção de informação pouco possível com outras técnicas. Contudo, esta interacção pessoal pode gerar, além de uma grande subjectividade, influências e distorções (efeitos de resposta) devidas quer às predisposições do entrevistador e do entrevistado quer aos processos utilizados na condução do estudo (Borg & Gall, 1983).

Assim, além de uma cuidada preparação da entrevista, deverá ter-se em conta que é mais fácil obter informação relevante se o entrevistado tiver conhecimento do objectivo do diálogo, se o entrevistador inspirar confiança e criar uma relação de credibilidade com o entrevistado e se este tiver oportunidade de responder de forma independente e espontânea (Erasmie & Lima, 1989).

No estudo optou-se por entrevistas de dois tipos: entrevistas muito pouco estruturadas em articulação com o teste de papel e lápis e entrevistas semi-estruturadas em que eram propostas tarefas abordando o perímetro e a área.

Observação. As observações permitem um contacto pessoal e directo com os participantes e o fenómeno a estudar.

No entanto, apesar desta forte vantagem, é necessário atender a diversos factores que interferem no processo de observação e que constituem a *estrutura de referência* do observador (Evertson & Green, 1994). Por um lado, o propósito da observação influencia o que, como, quando e onde se observa e, por outro, está relacionado com a teoria, crenças, suposições e experiências de quem a realiza.

As observações podem ser: (a) casuais ou não sistemáticas, registando factos "soltos" significativos; e (b) sistemáticas, realizadas através de instrumentos intencionalmente organizados para a análise e valoração das condutas, tais como listas de verificação e grelhas de análise (Lemos, 1993; Zabalza, 1992).

Evertson e Green (1994) identificam quatro sistemas de observação: (a) de categorias; (b) descritivos; (c) narrativos; e (d) tecnológicos.

Os sistemas de categorias são sistemas fechados em que se definem *a priori* categorias mutuamente exclusivas permitindo, através de listas de verificação e outros instrumentos estruturados, obter dados normativos e identificar leis gerais de ensino.

Os sistemas descritivos são sistemas abertos em que as categorias, apesar de poderem ser definidas previamente, resultam essencialmente dos dados observados. Parte-se de padrões de comportamento a serem identificados num contexto específico e a observação é normalmente acompanhada com gravação (audio, vídeo) dos acontecimentos. Estes sistemas recorrem a análises descritivas estruturadas e utilizam-se quando se pretende obter uma descrição detalhada do fenómeno observado, identificar princípios gerais na exploração de situações específicas e obter generalizações dentro de casos, bem como entre casos.

Os restantes sistemas são sistemas abertos não utilizando categorias previamente definidas.

Nos sistemas narrativos, o observador faz as suas descrições de uma situação específica usando a linguagem escrita ou falada e recorrendo a diários, notas de campo e comentários significativos. O observador pretende não só compreender o que ocorre mas também identificar factores que influenciam essas ocorrências. Estes sistemas permitem obter descrições detalhadas do fenómeno observado de modo a explicar processos manifestados e identificar princípios gerais e padrões de comportamento em acontecimentos específicos. O objectivo da observação é compreender um caso específico e fazer comparações com outros casos.

Nos sistemas tecnológicos, a observação é feita através de instrumentos tecnológicos, tais como gravadores vídeo e audio. Pretende-se, assim, obter um registo permanente do fenómeno para que, mais tarde, possa ser estudado profundamente.

Dependendo do tipo de envolvimento e interacção com os sujeitos e da clarificação dos objectivos do estudos, o investigador pode intervir como: (a) só observador; (b) observador-participante; (c) participante-observador; e (d) só participante.

No estudo optou-se por uma observação do tipo narrativo em que o investigador assumiu o papel de observador-participante. Foram registadas notas descritivas e comentários ao longo das sessões.

Participantes

Os 23 alunos -- 10 raparigas (43,5%) e 13 rapazes (56,5%) -- intervenientes no estudo integravam e constituiam uma turma do 6º ano de escolaridade. Todos frequentavam este ano pela primeira vez.

As suas idades variavam entre os 10 e os 14 anos com uma média de 11,3 anos -- 11,5 para as raparigas e 11,1 para os rapazes -- notando-se uma grande concentração nos 11 anos (ver Tabela 1).

Tabela 1

Distribuição dos alunos por idade

Idade	Raparigas n	Rapazes n	Total n	Total %
10	0	2	2	9
11	7	9	16	70
12	2	1	3	13
13	0	1	1	4
14	1	0	1	4

Quanto ao local de residência, 19 alunos -- 8 raparigas e 11 rapazes -- moravam na cidade (83%) e os restantes -- 2 raparigas e 2 rapazes -- viviam na aldeia (17%).

Relativamente às classificações obtidas no ano lectivo anterior apenas um aluno obteve nível 2. Os restantes obtiveram níveis iguais ou superiores a 3 (ver Tabela 2).

Quanto à qualificação académica dos pais verifica-se que a maioria ultrapassou a escolaridade obrigatória, tendo 22% concluído cursos médios ou superiores (ver Tabela 3).

Tabela 2

Distribuição dos alunos por nível obtido no 5º ano

Nível	Raparigas n	Rapazes n	Total n	%
2	0	1	1	4
3	6	4	10	44
4	2	4	6	26
5	2	4	6	26

Tabela 3

Distribuição dos pais por qualificação académica

Qualificação Académica	Pais n	Mães n	Total n	%
Ensino Primário	3	5	8	17
Ensino Preparatório	7	4	11	24
Ensino Unificado	3	1	4	9
Ensino Secundário	5	8	13	28
Curso Médio	0	3	3	7
Curso Superior	5	2	7	15

A actividade profissional dos pais é bastante diversificada; cerca de 43% das mães trabalham em casa (ver Tabela 4).

Assim, a turma pode considerar-se uma turma *típica* para o 6º ano de escolaridade, com alunos de 11 ou 12 anos residindo num meio urbano de razoável nível sócio-económico e sem problemas significativos de aprendizagem.

Tabela 4

Distribuição dos pais por categoria sócio-profissional

Categ. Sócio-Profissional	Pais n	Mães n	Total n	%
Agricultores	3	0	3	7
Empres. Ind. Comércio	4	0	4	9
Quadros Técnicos	2	0	2	4
Empreg. Com. Serviços	5	7	12	26
Trabalhadores Produção	7	1	8	17
Professores	2	5	7	15
Outras (Domésticas)	0	10	10	22

Contexto

A investigação decorreu na sequência da leccionação de uma unidade didáctica, referente aos tópicos *Área* e *Perímetro*, que faz parte do desenvolvimento normal do programa da disciplina de Matemática do 2º Ciclo do Ensino Básico. Embora o contexto em que o presente estudo se desenvolveu seja objecto de um maior detalhe na secção "As Aulas", importa indicar desde já, ainda que genericamente, alguns aspectos relacionados com a unidade didáctica abordada: "Unidade Didáctica: Área e Perímetro".

Habitualmente prevista para o 5º ano de escolaridade, esta unidade didáctica foi leccionada, devido à programação bienal, no início do 6º ano ao longo de treze aulas: as primeiras dez para o tratamento dos tópicos e as três últimas para a administração do teste de papel e lápis e do questionário.

Os alunos trabalharam e discutiram situações abordando o perímetro e/ou a área e utilizaram frequentemente diversos materiais concretos, tais como geoplanos, modelos em cartolina, "puzzles" e instrumentos de medida de comprimentos.

No final da unidade didáctica, pretendia-se que os alunos, entre outros aspectos, fossem capazes de: (a) indicar unidades de medida adequadas; (b) reconhecer que a medida do comprimento (ou da área) depende da unidade escolhida; (c) estimar resultados; (d) utilizar instrumentos de medida de comprimentos; (e) verificar se duas figuras são geometricamente iguais; (f) distinguir figuras equivalentes de figuras geometricamente iguais; (g) calcular perímetros; (h) calcular áreas de rectângulos utilizando unidades físicas, contando quadrículas ou aplicando a fórmula; (i) calcular áreas de figuras planas simples utilizando unidades físicas ou efectuando uma decomposição; (j) indicar, por enquadramento, valores aproximados da área de figuras não poligonais; (l) distinguir área de perímetro; (m) resolver problemas que envolvam os conceitos de área e/ou perímetro; e (n) discutir processos utilizados na resolução de problemas.

Instrumentos de Recolha de Dados

Procedimento

Uma versão inicial dos instrumentos -- teste de papel e lápis, questionário, entrevistas -- resultou da consulta de literatura diversa (Brown et al., 1988; Douady & Perrin, 1986; Macias, 1976; NCTM, 1991; Szetela & Owens, 1986; Wilson & Osborne, 1992), da troca de opiniões com professores e da experiência profissional do investigador.

Estas versões foram testadas no final do ano lectivo de 1992/93 em duas turmas, uma do 5º e outra do 6º ano de escolaridade, com características similares às da turma utilizada no estudo.

Paralelamente, foram submetidos à apreciação de um painel de docentes dos Ensinos Universitário, Politécnico e Preparatório, todos eles com grande experiência de ensino. Foi solicitado que se pronunciassem sobre: (a) se a linguagem utilizada era adequada e clara para os alunos; (b) se as questões estavam bem formuladas; (c) se, com as questões apresentadas, eram atingidos os objectivos dos vários instrumentos; e (d) outros aspectos que considerassem relevantes.

Após as indicações decorrentes da aplicação experimental aos alunos e dos diversos comentários do painel de docentes, obteve-se a versão final dos vários instrumentos.

Todos os dados foram recolhidos directa e pessoalmente pelo investigador. A administração dos instrumentos aos alunos implicados no estudo foi realizada numa Escola Preparatória do Nordeste Transmontano. Os alunos resolveram o teste e responderam ao questionário no horário lectivo correspondente à disciplina de Matemática. As entrevistas decorreram em tempo extra lectivo na sala dos Directores de Turma.

Teste de Papel e Lápis

O teste (ver Anexo A), referido a um domínio, foi administrado no final da "Unidade Didáctica: Área e Perímetro" e pretendia verificar o desempenho dos alunos num conjunto de itens abordando o perímetro e a área.

Era constituído por itens objectivos, subjectivos, de resposta aberta e fechada, num total de dezasseis questões.

As primeiras três questões tratavam a noção de unidade de medida: escolha de uma unidade de medida adequada (Questão 1), utilização de unidades de medida diferentes para o mesmo comprimento (Questão 2) e indicação de medidas diferentes para o mesmo comprimento (Questão 3).

As cinco questões seguintes referiam-se ao comprimento e ao perímetro: definição de perímetro (Questão 4), estimativa de um perímetro (Questão 5), indicação da distância à volta de uma figura (Questão 6), utilização da régua como instrumento de medida (Questão 7) e cálculo do perímetro de um rectângulo (Questão 8).

Seguidamente, havia cinco questões, algumas divididas em alíneas, em que se abordava a área: definição de área (Questão 9), cálculo da área de um rectângulo por indicação das suas dimensões lineares (Questão 10a) e por contagem de quadrículas (Questão 10b), utilização de unidades físicas de medida (Questão 11), cálculo da área de uma figura representada em papel ponteado (Questão 12a) e através da decomposição (Questão 12b) e cálculo da área de uma figura por enquadramentos (Questão 13).

Finalmente, eram apresentadas três questões que relacionavam a área e o perímetro: construção de figuras diferentes mas isoperimétricas ou equivalentes (Questão 14), situação de área máxima (Questão 15) e utilização de um "puzzle" (Questão 16).

Os alunos realizaram o teste em duas aulas: na primeira responderam até à Questão 11 e na segunda às restantes.

Se assim o entendessem, os alunos poderiam recorrer a diversos materiais que se encontravam disponíveis na sala, tais como geoplanos, modelos em cartolina, réguas e esquadros. Para as

Questões 11 e 16 foram distribuídos, por cada aluno, envelopes contendo o material necessário.

Questionário

O questionário (ver Anexo B) foi aplicado na última aula e pretendia recolher apreciações dos alunos sobre a sua aprendizagem matemática recorrendo à manipulação de materiais.

Este questionário era constituído por oito questões.

As Questões 1 e 5 focavam a adequação dos materiais utilizados à aprendizagem dos conceitos abordados.

As Questões 2 e 3 referiam-se aos materiais usados e eventuais dificuldades experimentadas na sua manipulação.

Nas Questões 4, 6 e 8 abordavam-se ambientes da aprendizagem: a utilização de materiais, o trabalho em grupo e as aulas de Matemática, em geral.

Finalmente, a Questão 7 era dedicada às atitudes desenvolvidas pelo aluno relativamente a si próprio e aos outros.

Na maioria das questões (1, 3, 4, 5 e 6) era feita uma pergunta tendo os alunos de optar por uma de quatro situações e apresentar razões da respectiva escolha. Na Questão 2, era apresentada uma listagem de materiais utilizados nas aulas tendo os alunos de referir e justificar as suas preferências. Na Questão 7 apenas assinalavam uma das quatro hipóteses. Na Questão 8, os alunos exprimiam as suas preferências sobre diferentes tipos de aulas de Matemática.

Entrevistas

Foram efectuadas entrevistas de dois tipos: as entrevistas *genéricas* que serviram de complemento ao teste de papel e lápis e as entrevistas *particulares* em que eram propostas três tarefas.

Entrevistas genéricas. Estas entrevistas foram audio-registadas e realizadas com dezoito alunos com o objectivo de esclarecer e/ou explorar respostas dadas no teste, nomeadamente quando os processos de resolução e/ou os resultados não eram os esperados ou quando os alunos não tinham respondido a alguma questão.

As questões mais focadas foram, por ordem decrescente, as seguintes: 12b, 7, 10a, 6, 10b, 8, 12a, 14, 3, 5 e 13.

Devido aos seus objectivos, as entrevistas foram muito pouco estruturadas, tendo sido feitas perguntas do género "como interpretaste a questão?", "porque respondeste desta maneira?", "porque fizeste assim?", "o que é, para ti, o perímetro e/ou a área?".

Além disso, só para as Questões 7 -- utilização da régua -- e 12b -- cálculo da área por decomposição -- foram previstas estratégias particulares.

Para a Questão 7 adoptou-se o procedimento seguinte:

> Era fornecida ao aluno uma folha branca onde estava representada uma linha poligonal aberta (ver Figura 11) e era pedido para determinar o seu comprimento.

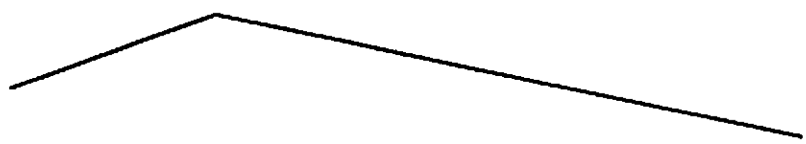


Figura 11. Linha poligonal aberta apresentada na entrevista.

> Primeiro, o aluno utilizava uma régua que estava graduada a partir de 4 cm (a graduação desde a origem tinha sido coberta com uma fita branca) e depois repetia a medição com uma régua normal com a referência inicial em 0.
>
> No caso de resultados contraditórios, era discutido qual o processo correcto.

Para a Questão 12b era realizada a Tarefa 2 das entrevistas *particulares* (ver Anexo C).

Estas entrevistas *genéricas* oscilaram entre 3 e 11 minutos com uma duração média de 7 minutos.

Entrevistas particulares. Estas entrevistas, semi-estruturadas, foram audio-registadas e posteriormente transcritas na íntegra.

Tentando recolher opiniões o mais diversificadas possível, foram seleccionados seis alunos: dois considerados estavelmente bons no desempenho em Matemática, dois estavelmente regulares e dois estavelmente fracos. Esta escolha, feita pelo investigador em colaboração com a professora da turma, teve em conta o passado escolar dos alunos e as respostas dadas no teste de papel e lápis.

Os alunos tinham conhecimento dos objectivos da actividade e sabiam que o diálogo seria gravado. Foi-lhes dito que podiam utilizar, sempre que quisessem e o entendessem, qualquer material existente na mesa de trabalho.

Para a exploração das opiniões dos alunos não se elaborou um guião rígido prevendo-se, no entanto, algumas perguntas e procedimentos que permitissem alcançar os objectivos das tarefas.

Nestas entrevistas era proposta a realização de três tarefas (ver Anexo C). Com a primeira tarefa pretendia-se investigar eventuais dificuldades dos alunos com os conceitos de perímetro e de área.

A situação -- um processo de cálculo da área -- era exposta oralmente e exemplificada passo a passo. Para isso, o investigador utilizou a figura representada em papel branco, um pedaço de fio, uma tesoura, uma régua e um rectângulo de 15x5 em papel branco. O aluno só começava a responder após ter ficado claro que havia compreendido completamente a situação. Por vezes, ele próprio repetia o processo.

Em seguida, era colocada a questão "estás de acordo com o teu colega? Consideras que é um bom processo para determinar a área de figuras daquele tipo?". Se a resposta fosse afirmativa, o aluno era confrontado com outras formas usando o mesmo fio, sucessivamente, rectângulos de 10x10 e 2x18 até à situação limite de sobreposição. Para cada uma delas, o aluno calculava a respectiva área.

Eram feitas perguntas do tipo "utilizando a mesma unidade de medida pode-se chegar a resultados diferentes? Porquê?", "relativamente à figura, o que representa o fio?", "aplicando este processo, o que medimos?", "o que é, para ti, a área e/ou o perímetro?".

Além do material também usado pelo investigador, o aluno tinha à sua disposição uma grelha quadriculada (cm^2) em acetato, uma grelha ponteada (cm^2) em acetato e diversas unidades físicas em cartolina: quadrados de 5x5 e quadrados de 2x2.

Com as outras tarefas pretendia-se observar estratégias de resolução desenvolvidas pelos alunos no cálculo de perímetros e de áreas. Na segunda tarefa era apresentada uma figura que se podia decompor em rectângulos podendo os alunos, assim, calcular a área recorrendo a uma fórmula conhecida. Na terceira tarefa, não era previsível seguirem este processo pois, por se tratar de um paralelogramo não rectângulo, não conheciam um procedimento imediato.

Para a Tarefa 2 era entregue ao aluno uma folha branca onde estava representada uma figura com a indicação de algumas dimensões lineares e era-lhe pedido para determinar o perímetro e a área.

Os alunos tinham à disposição o seguinte material: geoplano 10x10 e elásticos, tesoura, régua e esquadro, grelha quadriculada (cm^2) em acetato e em papel, grelha ponteada (cm^2) em acetato e em papel e diversas unidades físicas em cartolina: quadrados de 2x2.

No desenvolvimento da actividade eram pedidas justificações para os sucessivos passos, tais como "porque fazes assim?", "porque fazes esta decomposição?", "qual a medida?", "qual a unidade de medida?", "porque multiplicas e/ou adicionas?", "o que é, para ti, o perímetro e/ou a área?".

Para a realização da Tarefa 3 era dada ao aluno uma folha branca onde estava representado um paralelogramo não rectângulo sem indicações das respectivas dimensões lineares e era-lhe pedido para calcular o perímetro e a área.

Estava disponível o seguinte material: modelo da figura em cartolina, geoplano 10x10 e elásticos, tesoura, fio, régua e esquadro, grelha quadriculada (cm^2) em acetato e em papel, grelha ponteada (cm^2) em acetato e em papel e diversas unidades físicas em cartolina: metades de quadrados de 5x5 (corte ao longo de uma das diagonais), metades de quadrados de 2,5x2,5 e quadrados de 2x2.

A exploração era feita de modo análogo à da Tarefa 2 com perguntas, tais como "porque fazes assim?", "porque aplicas essa fórmula?", "porque fazes esta decomposição?", "qual a medida?", "qual a unidade de medida?", "porque multiplicas e/ou adicionas?", "o que é, para ti, o perímetro e/ou a área?".

Estas entrevistas *particulares* tiveram a duração de 11 e 12 minutos para os alunos considerados estavelmente bons, 13 e 19 minutos para os estavelmente regulares e 20 e 30 minutos para os estavelmente fracos.

Observação das Aulas

O investigador assistiu como *observador-participante* a todas as aulas da "Unidade Didáctica: Área e Perímetro".

As observações foram realizadas sem recurso a grelhas ou outros instrumentos específicos de observação. No entanto, foram registadas, por aula, notas e comentários sobre o que acontecia como, por exemplo, estratégias desenvolvidas e dificuldades sentidas pelos alunos na resolução das tarefas, maneira como comunicavam e discutiam as opiniões, tipo de materiais usados e modo de utilização desses materiais.

Materiais de Ensino Utilizados

Durante a "Unidade Didáctica: Área e Perímetro", os alunos trabalharam com materiais de uso corrente, modelos em cartolina, instrumentos de medida de comprimentos (régua e esquadro), geoplanos e "puzzles" tangram. Resolveram, também, fichas de trabalho.

Materiais de Uso Corrente

Entende-se por materiais de uso corrente aqueles materiais que, não tendo sido concebidos expressamente como material didáctico, podem ajudar a concretizar ideias matemáticas. Por exemplo, paus de gelado podem ser usados para medir o comprimento de um objecto (ver Figura 12).

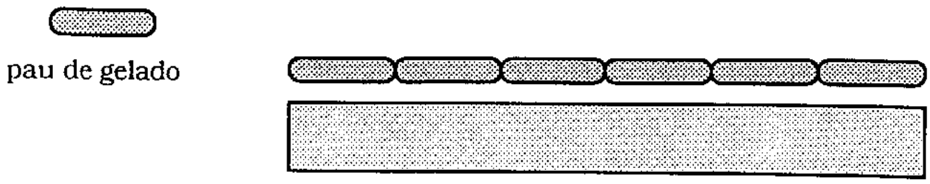


Figura 12. Medida do comprimento de um objecto utilizando como unidade de medida o comprimento de um pau de gelado.

Com paus de gelados, paus de giz, palmos, lápis e canetas, os alunos efectuaram medições de comprimentos e verificaram a relação entre a unidade e o número de unidades necessárias. Com papel vegetal, verificaram se duas figuras eram, ou não, geometricamente iguais.

Modelos em Cartolina

Recorrendo a quadrados de cartolina pode pavimentar-se uma superfície sendo, assim, possível calcular a respectiva área (ver Figura 13).

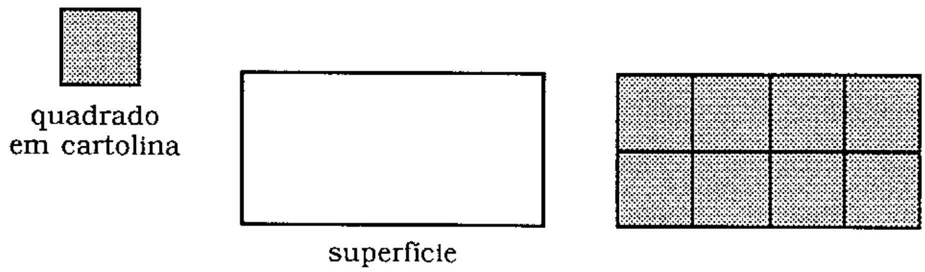


Figura 13. Medida da área de uma superfície utilizando como unidade de medida a área de um quadrado em cartolina.

Com os modelos em cartolina, os alunos efectuaram medições de áreas, verificaram a relação entre a unidade e o número de unidades necessárias, trabalharam a noção de figuras equivalentes e, genericamente, a noção de área.

Geoplano

O geoplano é um recurso didáctico para o tratamento de variados conceitos geométricos revelando-se muito apropriado para o estudo da área.

Consiste numa base quadrada, geralmente em madeira, onde se espetam pregos de modo a formarem uma malha. Conforme a textura desta malha, o geoplano é considerado: (a) quadrado, (b) isométrico, ou (c) circular. Colocando elásticos na malha de pregos é possível criar fronteiras de figuras e explorar propriedades e relações.

O geoplano quadrado foi o tipo utilizado no estudo. A designação deste geoplano depende do número total de pregos usados. Assim, o geoplano 5x5 tem uma malha quadrada com 5 pregos em cada lado, num total de 25 (ver Figura 14).

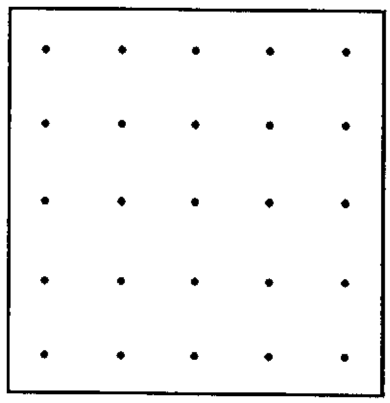


Figura 14. Representação de um geoplano 5x5.

Como grandes vantagens do geoplano apontam-se a sua maleabilidade e flexibilidade permitindo ver as figuras em diversas posições e o seu aspecto dinâmico pois, "*desenhando*" e "*apagando*" com facilidade, possibilita a aferição rápida de conjecturas (Serrazina & Matos, 1986). Para não se perder este fazer e desfazer das figuras é de grande utilidade complementar a utilização do geoplano com papel ponteado para efectuar esses registos.

Nas actividades, os alunos utilizaram geoplanos quadrados 9x9 e 10x10 calculando áreas, estudando a equivalência de figuras, fazendo decomposições e trabalhando situações envolvendo o perímetro e a área.

Puzzle Tangram

O "puzzle" tangram é um quebra-cabeças chinês. Existem vários tipos, sendo o mais comum constituído por sete peças: cinco triângulos de três tamanhos, um quadrado e um paralelogramo não rectângulo (ver Figura 15). O objectivo é utilizar, sem sobreposição, todas as peças para formar figuras, chamadas figuras tangram.

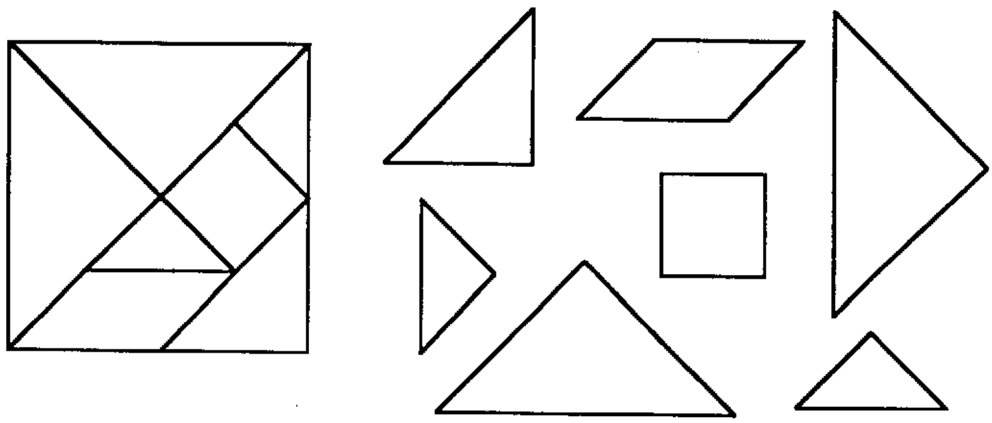


Figura 15. Puzzle tangram.

A manipulação de "puzzles" é bastante útil pois permite tratar a decomposição e a recombinação de figuras de forma dinâmica e verificar, por exemplo, que figuras com a mesma área (todas as figuras construídas com as mesmas peças são equivalentes) podem ter diferentes perímetros.

Cada aluno construiu o seu "puzzle" em cartolina a partir do quadrado da Figura 15 cujo comprimento do lado era 15 cm. Depois, os alunos exploraram relações entre as diversas peças, verificaram que algumas delas eram equivalentes, reproduziram e inventaram figuras tangram.

Fichas de Trabalho

As fichas de trabalho serviram de apoio à abordagem e exploração dos assuntos ao longo da "Unidade Didáctica: Área e Perímetro".

Os alunos resolveram dez Fichas de Trabalho, numeradas de 1 a 10 (ver Anexo D), anotando os cálculos e registando as definições e conclusões.

As Aulas

A turma, com três novos alunos, e a professora mantinham-se do ano lectivo anterior.

A professora pertence ao quadro de nomeação definitiva da Escola e tem uma larga experiência de ensino. Na sala de aula proporciona um ambiente de responsabilidade e tolerância, demonstrando preocupação com a aprendizagem dos seus alunos.

Assim, registou-se uma boa relação professora/alunos e um clima de camaradagem entre os alunos. Estes aderiam com entusiasmo às actividades propostas verificando-se, no entanto, ainda pouco à vontade por parte dos novos alunos da turma. Alguns alunos distraíam-se frequentemente e outros destacavam-se pela positiva na maneira como expunham e defendiam as suas opiniões. Como geralmente trabalhavam aos pares, preocupavam-se em ajudar o companheiro no ultrapassar de dificuldades.

Planificação

A professora da turma tinha conhecimento dos diversos instrumentos a aplicar pois havia sido solicitada a sua opinião relativamente às versões iniciais. Assim, a planificação da unidade didáctica foi feita conjuntamente pelo investigador e pela professora de modo a contemplar as preocupações e os interesses de ambos.

Discutiram-se, então, princípios pedagógicos gerais que deveriam orientar toda a unidade. Reconheceram-se como aspectos importantes a desenvolver pelos alunos: (a) a manipulação de materiais concretos; (b) a resolução de situações problemáticas; (c) a comunicação e discussão das suas opiniões; (d) o trabalho em pequeno e em grande grupo; e (e) o trabalho de casa.

Seleccionaram-se e sequenciaram-se as actividades a realizar. Definiram-se as estratégias a desenvolver e os materiais a utilizar e elaboraram-se as fichas de trabalho.

Organização

A organização das aulas obedeceu a um esquema geral: (a) introdução do assunto e proposta de uma actividade; (b) resolução da actividade pelos alunos, trabalhando aos pares; (c) discussão em grande grupo a partir de uma possível solução; (d) estabelecimento de conclusões; (e) síntese final; (f) marcação do trabalho de casa (a ser corrigido na aula seguinte); e (g) registo do sumário.

No início da aula, um aluno verificava se todos tinham feito o trabalho de casa e um outro resolvia-o no quadro. Sendo necessário, era feita a respectiva correcção.

Depois, a professora introduzia o assunto a tratar e propunha a actividade a realizar. Alguns alunos distribuiam os materiais pelos grupos.

Durante a realização das tarefas, a professora e o investigador percorriam os grupos dando pistas de trabalho, esclarecendo dúvidas e fazendo perguntas do tipo "porque fazes assim?", "poderás resolver de outra maneira?", "porque não estás de acordo com o teu colega?". Havia a preocupação de acompanhar mais de perto os grupos que apresentavam mais dificuldades.

Após este trabalho em grupo, um aluno apresentava a sua solução no quadro. Seguia-se um período de discussão, em que se encorajava a participação de todos os alunos, após o que se concordava numa possível solução para o problema. A professora, sempre que fossem apresentados vários processos correctos, reforçava esse aspecto. Os grupos que apresentassem respostas incorrectas faziam a respectiva correcção. Quando as actividades previam o estabelecimento de definições ou conclusões, estas eram registadas no quadro por um aluno e em seguida todos procediam ao registo na folha de trabalho. Se se verificassem dificuldades generalizadas, a discussão fazia-se em grande grupo com a professora a apresentar pistas de resolução.

No final, a professora, com o apoio dos alunos, fazia uma síntese do assunto realçando os aspectos mais relevantes.

A aula terminava com a marcação do trabalho de casa e o registo do sumário.

Desenvolvimento

Nas duas primeiras aulas, os alunos desenvolveram actividades centradas nos atributos a medir (comprimento, área), na utilização de unidades físicas arbitrárias e unidades padrão, na estimativa dos resultados, na relação entre a unidade de medida e o número de unidades necessárias, na utilização da régua e na determinação de perímetros e áreas. Discutiram a vantagem da utilização de quadrados como unidade de medida de áreas. Resolveram na aula as Fichas de Trabalho (Anexo D) nº 1 e nº 2 e, como trabalho de casa, a Ficha de Trabalho nº 3. Utilizaram materiais de uso corrente (paus de giz, paus de gelado, lápis), instrumentos de medida de comprimentos (régua, esquadro) e modelos em cartolina.

Nas terceira, quarta e quinta aulas, abordou-se a distinção entre figuras geometricamente iguais e figuras equivalentes, o cálculo de áreas no geoplano, em papel ponteado e por contagem de quadrículas. Os alunos trabalharam situações em que a área se mantinha, mas o perímetro podia variar. Resolveram na aula as Fichas de Trabalho nº 4, nº 5 e nº 6 e, como trabalho de casa, a Ficha de Trabalho nº 7. Utilizaram papel vegetal, papel ponteado, régua e esquadro. Trabalharam ainda com o geoplano, o "puzzle" tangram e modelos em cartolina.

As sexta e sétima aulas foram reservadas para tratar o cálculo de áreas por decomposição da figura. Os alunos discutiram maneiras de realizar essa decomposição e a vantagem de decompor a figura em rectângulos. Resolveram a Ficha de Trabalho nº 8 e utilizaram o geoplano, a régua e o esquadro.

Na oitava aula, os alunos determinaram, por enquadramento, valores aproximados da área de uma figura. Discutiram em que situações é útil este processo, bem como a relação entre a precisão dos enquadramentos e a unidade de medida escolhida. Foi feita uma exploração dos enquadramentos interior e exterior através de transparências. Os alunos resolveram a Ficha de Trabalho nº 9.

Nas nona e décima aulas, os alunos resolveram actividades que relacionavam a área e o perímetro e exploraram situações problemáticas (Ficha de Trabalho nº 10). Utilizaram o geoplano e papel e lápis.

Nas duas aulas seguintes, os alunos responderam ao teste e na última, ao questionário.

Análise dos Dados

A análise dos dados foi feita tendo em conta as principais questões em estudo, optando-se, predominantemente, pela análise de conteúdo.

Iniciou-se com uma *análise especulativa* (Woods, citado por Entonado, 1991) resultante do primeiro contacto com os dados recolhidos: leitura e audição. Esta análise revelou-se bastante útil permitindo uma visão global dos dados e sugerindo linhas de reflexão. Seguiu-se uma cada vez maior sistematização procurando dar aos diversos materiais uma ordenação coerente, completa e lógica e levando, consequentemente, ao estabelecimento de *classificações* e *categorias* (Bogdan & Biklen, 1994; Woods, citado por Entonado, 1991).

> "A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Biklen, 1994, p.205).

Para cada uma das questões do questionário, registou-se o número e a percentagem das respostas em cada uma das hipóteses apresentadas. As razões adiantadas pelos alunos foram transcritas para uma folha de papel para permitir uma melhor identificação de padrões de resposta. Destacaram-se opiniões consideradas interessantes e relevantes para o estudo. Atendeu-se ainda às notas e comentários elaborados na observação-participante.

As respostas ao teste de papel e lápis -- processos de resolução, justificações, resultados -- foram passadas, questão a questão, para uma folha de papel. Este registo foi complementado com informações obtidas através da observação-participante e das entrevistas *genéricas*. Para isso, ouviu-se a respectiva gravação audio diversas vezes reformulando-se, quando necessário, a resposta já transcrita para o papel. Posteriormente, estas respostas foram classificadas e categorizadas.

As entrevistas *particulares*, transcritas integralmente, foram ouvidas e lidas várias vezes tanto horizontal como verticalmente, ou seja, por tarefa e por aluno. Esta consulta foi acompanhada pelos registos escritos produzidos pelos alunos durante a realização das tarefas. Ao longo dos diálogos foram assinaladas e destacadas algumas passagens consideradas representativas da opinião dos alunos, nomeadamente, aquelas que permitiam identificar e categorizar concepções de perímetro e de área e os processos de resolução utilizados.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

Este capítulo apresenta e discute os resultados do estudo e encontra-se dividido em três secções: (a) questionário; (b) teste de papel e lápis e entrevistas *genéricas*; e (c) entrevistas *particulares*.

Na primeira secção indicam-se e discutem-se, questão a questão, as respostas e as opiniões dos alunos expressas no questionário sendo ainda adiantados alguns comentários, sobre a utilização de materiais, registados durante a observação das aulas.

Na segunda secção referem-se e discutem-se os resultados, questão a questão, do teste de papel e lápis complementados com opiniões recolhidas nas entrevistas *genéricas* e com notas obtidas a partir da observação aquando da realização das tarefas da aula.

Finalmente, na terceira secção descrevem-se as reacções dos alunos perante as tarefas desenvolvidas nas entrevistas *particulares*.

Questionário

Os alunos exprimiram opiniões sobre a utilização de materiais concretos na sua aprendizagem matemática respondendo a um questionário (Anexo B) constituído por oito questões.

As Questões 1 e 5 estavam orientadas para a adequação dos materiais utilizados à aprendizagem dos conceitos abordados.

Na Questão 2, os alunos indicavam os materiais da sua preferência e na Questão 3, referiam eventuais dificuldades sentidas na sua manipulação.

Nas Questões 4, 6 e 8, os alunos davam opinião sobre ambientes da aprendizagem: a utilização de materiais, o trabalho em grupo e as aulas de Matemática, em geral.

Finalmente, a Questão 7 era dedicada às atitudes desenvolvidas pelos alunos relativamente a si próprios e aos outros.

Questão 1. Para os alunos, os materiais utilizados constituiram uma boa ajuda na realização das actividades propostas tendo 91% deles optado por "muitas vezes" ou "sempre" (ver Tabela 5).

Tabela 5

Questionário: respostas à Questão 1 - "Os materiais que utilizaste ajudaram-te na realização das actividades propostas nas aulas?"

Questão 1	n	%
nunca	0	0
poucas vezes	2	9
muitas vezes	12	52
sempre	9	39

Embora os alunos que assinalaram a opção "poucas vezes" tivessem referido dificuldades de compreensão devido aos materiais,

> "havia certos problemas que já tinha aprendido sem materiais (...) para mim, outros problemas eram mais difíceis de compreender com materiais" (Alda),

esta opinião não foi partilhada pela generalidade dos alunos. A estes, a manipulação de materiais permitiu-lhes ultrapassar dificuldades, compreendendo e resolvendo melhor as situações e tornando as actividades mais fáceis:

> "os materiais ajudaram-me muito quando estava com dificuldade (...) era mais fácil de ver e de verificar" (Susana),
>
> "com os materiais (...) resolvemos melhor qualquer problema e acima de tudo tiramos dúvidas" (David).

Alguns alunos destacaram o aspecto "prático" dos materiais:

> "se [o material] foi feito para ser utilizado é para nos ajudar" (Eduardo),
>
> "sempre se faz melhor o trabalho com coisas do que sem nada" (Jorge).

O trabalho com materiais permitiu, também, uma maior troca de opiniões e de impressões na resolução dos problemas,

> "[os materiais] ajudam-nos a facilitar discussões com os colegas" (Gil).

Este aspecto, também referido em outras questões, foi claramente visível na realização das tarefas da aula. De facto, a manipulação de materiais proporcionou aos alunos mais possibilidades de comunicar os seus pontos de vista, ajudando-os a estruturar e verbalizar as suas ideias.

Esta necessidade de comunicação talvez seja devida ao próprio envolvimento físico com os materiais. Isto quer dizer que, os alunos, mesmo sentindo que expressavam opiniões pouco claras e até incompletas, revelaram uma maior confiança em discuti-las pois, sendo baseadas na sua própria experiência, tinham significado para eles.

Questão 2. Os alunos gostaram da generalidade dos materiais utilizados (ver Tabela 6). O geoplano (78%) e os "puzzles" (70%) foram os materiais mais mencionados.

Tabela 6

Questionário: respostas à Questão 2 - "Quais os materiais que gostaste mais de utilizar?"

Questão 2	n	%
régua e esquadro	4	17
geoplano	18	78
puzzles	16	70
modelos em cartolina	9	39
materiais de uso corrente	6	26
outros (calculadora)	1	4

Todos os alunos consideraram os materiais "interessantes", "engraçados" e/ou "divertidos", realçando deste modo a sua natureza lúdica. À excepção de uma aluna, que referiu este aspecto como negativo,

> "aprendo mais com a professora a explicar do que eu a trabalhar com os materiais porque [quando os utilizo] divirto-me, rio-me e não aprendo" (Zita),

os restantes alunos enquadraram esta vertente lúdica de forma adequada nas suas aprendizagens atribuindo-lhe significado:

> "tanto o geoplano como os puzzles são materiais com os quais se brinca e também se aprende" (Bruno),
>
> "(...) aprender a brincar também é giro" (Quim).

A utilidade, a adequação aos conteúdos e à respectiva aprendizagem e o apelo à imaginação, à criatividade e à descoberta foram outras razões adiantadas pelos alunos para justificarem as suas preferências:

> "a régua e o esquadro, em qualquer trabalho, ajudam-me a fazer figuras rectas. Já os modelos em cartolina e os materiais de uso corrente ensinaram-me que quanto maior a unidade de medida, menor o resultado do que medimos" (David),
>
> "com eles [os puzzles] podia descobrir muitas mais coisas, aprender e arranjar soluções mesmo que não dêem certo" (Teresa),
>
> "[eu gostei dos puzzles] porque se criava imaginação e faziam-se coisas giras" (Jorge),
>
> "com o geoplano podíamos fazer figuras engraçadas e ajudava a resolver alguns problemas da área porque as figuras eram um pouco esquisitas. Os puzzles eram divertidos porque nos ajudavam a descobrir as figuras geométricas e a desenvolver a inteligência" (Maria),
>
> "com o geoplano aprendemos a área e o perímetro" (Helder),
>
> "o geoplano é um material interessante, nele podíamos criar e desenhar e simplificava a maior parte dos problemas, casos e situações" (Alda).

Questão 3. Os alunos não revelaram dificuldades significativas na manipulação de materiais tendo todos eles optado por "nunca" ou "poucas vezes" (ver Tabela 7).

Tabela 7

Questionário: respostas à Questão 3 - "Tiveste dificuldades em utilizar os materiais?"

Questão 3	n	%
nunca	11	48
poucas vezes	12	52
muitas vezes	0	0
sempre	0	0

No entanto, foi observado que em certas tarefas os alunos fizeram uma utilização dos materiais de uma maneira não esperada, parecendo resultar de esquemas mentais muito próprios.

Por exemplo, era previsível que os alunos ao pretenderem determinar a área do tampo da mesa de trabalho, utilizando uma folha de cartolina como unidade de medida, tentassem fazer a sua pavimentação obtendo, assim, o número de unidades necessárias. Contudo, um aluno utilizou essa folha adaptando-a à sua interpretação de área bastante associada ao comprimento dos lados: contou o número de unidades, não por pavimentação, mas deslocando a folha de cartolina ao longo do "comprimento" e da "largura", como se se tratasse de uma unidade de comprimento.

Outra situação foi verificada quando os alunos utilizaram o "puzzle" tangram. Era esperado que tentassem reproduzir "figuras tangram", representadas numa folha de papel, usando as próprias peças. Todavia, para alguns alunos não pareceu necessário trabalhar concretamente tendo recorrido a formas mais abstractas, como o desenho directo na representação da folha.

Questão 4. Grande parte dos alunos (92%) considerou que, quando se recorre à utilização de materiais, as aulas de Matemática transformam-se "muitas vezes" ou "sempre" em aulas mais interessantes (ver Tabela 8).

Tabela 8

Questionário: respostas à Questão 4 - "Consideras as aulas de Matemática mais interessantes quando trabalhas com materiais?"

Questão 4	n	%
nunca	1	4
poucas vezes	1	4
muitas vezes	9	40
sempre	12	52

Para os alunos, a aula com materiais é mais divertida criando um ambiente onde se aprende e convive mais e melhor,

> "a aula fica mais divertida e também aprendemos" (Luisa),
>
> "sempre que trabalhamos com materiais nós aprendemos um pouco mais do que aquilo que está previsto" (Teresa),
>
> "[com os materiais] é mais fácil resolver os problemas. Aprendemos, brincando e construindo (...) figuras geométricas" (Maria).

Questão 5. A maioria dos alunos (87%) considerou que a utilização de materiais facilitou "muitas vezes" ou "sempre" a aprendizagem dos conteúdos matemáticos (ver Tabela 9).

Tabela 9

Questionário: respostas à Questão 5 - "A matéria é mais fácil de aprender quando usas materiais?"

Questão 5	n	%
nunca	0	0
poucas vezes	3	13
muitas vezes	11	48
sempre	9	39

Embora, para alguns alunos, também seja fácil aprender em outros contextos,

> "se uma pessoa estiver com atenção nas aulas e (...) à professora, tudo é fácil de aprender" (Vasco),

a generalidade deles considerou que um ambiente de aprendizagem que faça uso de materiais, dado ter mais a ver com a realidade, permite aprender de uma forma mais rápida, mais fácil e mais correcta:

> "a matéria aprende-se mais rápido e não se demora tanto a fazer os problemas" (Pedro),

> "(...) porque se vê como as coisas são em realidade e fazemos as coisas mais correctas" (Jorge).

Alguns alunos referiram que, quando trabalham com materiais, sentem uma maior necessidade de partilhar e comunicar os raciocínios que fazem e os processos que utilizam,

> "podemos falar com o colega e pedir a opinião à professora" (Maria),

> "para compreender é preciso explicar [aos outros]" (Quim),

podendo conduzi-los a melhores retenções das aprendizagens. É exemplo desta situação a "ajuda" que alguns alunos sentiram no teste:

> "o material (...) ajuda mais nos problemas e questões difíceis. Também nos ajuda no teste porque temos as coisas mais esclarecidas, ou seja, bem explicadas e entendêmo-las melhor" (Olga),
>
> "(...) sentia-me à vontade, por exemplo, no teste em situações difíceis de entender, resolver, calcular" (Alda).

A este propósito, refira-se que no teste, apesar de não haver questões que solicitassem expressamente a utilização do geoplano, praticamente todos os alunos o usaram.

Questão 6. Quando realizam actividades utilizando materiais, grande parte dos alunos (83%) prefere trabalhar em grupo (ver Tabela 10).

Tabela 10

Questionário: respostas à Questão 6 - "Quando utilizas materiais preferes trabalhar sozinho ou em grupo?"

Questão 6	n	%
sozinho	4	17
em grupo	19	83

Os alunos referiram que, quando trabalham em grupo, discutem e aprofundam mais os assuntos, têm mais ideias e existe um maior espírito de interajuda permitindo-lhes ultrapassar diversas dificuldades,

> "há mais imaginações (...)" (Luisa),
>
> "temos sempre mais ideias e desenvolvemos mais as coisas" (Ilda),

> "em grupo ajudamo-nos uns aos outros" (Carlos),
>
> "em grupo trabalhamos muito mais porque cada um diz sua coisa e o trabalho sai melhor" (Urbano).

No entanto, há alunos que preferem o trabalho individual pois, desta maneira, sentem mais confiança em si próprios e evitam as "complicações" do trabalho em grupo:

> "sozinha uma pessoa pensa e aprende mais às suas custas e em grupo só está à espera que alguém responda e não se pensa tanto" (Susana),
>
> "uma pessoa está mais concentrada e quando é em grupo há complicações porque um gosta disto e outro daquilo e não se chega a uma conclusão" (Nuno).

Questão 7. O uso de materiais na realização das actividades permitiu, na opinião dos alunos, desenvolver atitudes muito positivas relativamente a si próprios e aos outros (ver Tabela 11).

Tabela 11

Questionário: respostas à Questão 7 - "A utilização de materiais na aula de Matemática: (a) facilita a minha relação com os colegas; (b) facilita a minha relação com o professor; (c) ajuda-me a respeitar a opinião dos outros; (d) ajuda-me a pensar por mim próprio; (e) ajuda-me a ter confiança nas minhas capacidades; e (f) faz-me sentir mais seguro nas minhas opiniões."

Questão 7	(a)		(b)		(c)		(d)		(e)		(f)	
	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%
nunca	1	4	1	4	0	0	1	4	0	0	0	0
poucas vezes	6	26	2	9	6	26	0	0	1	4	0	0
muitas vezes	9	39	11	48	7	31	5	22	7	31	8	35
sempre	7	31	9	39	10	43	17	74	15	65	15	65

De facto, os alunos reconheceram que a relação com os colegas (70%) e com a professora (87%) é facilitada e que o respeito pelas opiniões dos outros é favorecido (74%). Por outro lado, os alunos revelaram uma elevada autoconfiança referindo que o trabalho com materiais geralmente os ajuda a pensar por eles próprios (96%), a ter confiança nas suas capacidades (96%) e a sentir-se seguros nas opiniões que emitem (100%).

Observou-se que, devido ao envolvimento físico com os diversos materiais, os alunos demonstraram maior atenção, concentração e empenhamento na realização das actividades podendo, por isso, experimentar mais vezes situações de aprendizagem bem sucedidas.

Questão 8. Embora alguns alunos (17%) não tivessem optado claramente por uma das duas situações propostas (ver Tabela 12), a maioria (57%) mostrou preferência por aulas em que se utilizam materiais para realizar as actividades (situação A). Cerca de 26% deles preferiram aulas em que o professor explica a matéria e depois resolvem exercícios ou fichas (situação B).

Tabela 12

Questionário: respostas à Questão 8 - "Que tipo de aulas de Matemática preferes?"

Questão 8	n	%
situação A (com materiais)	13	57
situação B (sem materiais)	6	26
ambas as situações	4	17

Os alunos, ao optar pela situação A, pareceram dar mais valor à maneira como aprendem Matemática considerando que a manipulação de materiais tornou as aulas mais interessantes e divertidas e proporcionou aprendizagens "melhores" e mais activas,

> "com os materiais aprende-se de uma forma mais interessante" (Bruno),
>
> "é chato fazer fichas (...) é mais divertido realizar actividades" (Fernando),
>
> "com os materiais fica mais fácil de organizar as tarefas e também de aprender melhor porque tem o material à sua frente" (Susana),
>
> "trabalhamos e fazemos as coisas melhor porque temos os materiais em que podemos tocar e facilita o nosso raciocínio" (Teresa).

Por outro lado, os alunos, optando pela situação B, pareceram dar mais importância aos conteúdos que aprendem para poderem, assim, obter melhores resultados nos testes,

> "para mim, é mais importante saber achar a área e o perímetro (...) e depois fazer fichas" (Vasco),
>
> "aprende-se melhor a matéria e assim fixamos o que a professora diz e depois mostramos a nossa capacidade de audição e escrevemos o que sabemos nos exercícios e nas fichas" (Eduardo),
>
> "porque assim sabemos [a matéria] e já estamos preparados para fazer [o teste]" (Rosa).

Houve ainda um grupo de alunos que gostou de trabalhar em ambas as situações reconhecendo vantagens nos dois processos,

> "gosto de trabalhar com materiais e que a professora explique quando tenho dificuldades" (Xana),
>
> "aprende-se tão bem numa [situação] como na outra" (Luisa).

Síntese. Não foram mencionadas dificuldades significativas na utilização dos diversos materiais. O geoplano e os "puzzles", na perspectiva dos alunos, são materiais bastante adequados ao estudo do perímetro e da área. Refira-se ainda que as razões de preferência de um determinado material ultrapassaram claramente o aspecto lúdico, tendo as justificações adiantadas atravessado os campos cognitivo, social, afectivo e psicomotor.

Os materiais responderam às necessidades sentidas na aprendizagem dos conceitos matemáticos e proporcionaram contextos mais interessantes e significativos. De facto, os alunos, nas suas opiniões, referiram que a manipulação de materiais lhes possibilitou aprender e compreender melhor os conteúdos, discutir e resolver mais facilmente os problemas e partilhar com mais confiança os raciocínios e os processos desenvolvidos.

Por outro lado, os alunos reconheceram que a utilização de materiais na aula de Matemática lhes permitiu desenvolver atitudes muito positivas relativamente a si próprios e aos outros. Admitiram ter desenvolvido uma elevada autoconfiança e um melhor relacionamento com a professora e os colegas, o que favoreceu o trabalho em grupo.

Teste de Papel e Lápis e Entrevistas Genéricas

As respostas às dezasseis questões do teste (Anexo A) são complementadas com opiniões recolhidas nas entrevistas *genéricas* e com notas obtidas observando a realização das tarefas da aula.

As questões apresentam-se agrupadas em quatro domínios: (a) unidade de medida: Questões 1, 2 e 3; (b) perímetro: Questões 4, 5, 6, 7 e 8; (c) área: Questões 9, 10, 11, 12 e 13; e (d) área e perímetro: Questões 14, 15 e 16.

Unidade de Medida

A noção de unidade de medida era abordada nas três primeiras questões.

Na Questão 1, os alunos escolhiam unidades de medida adequadas quer para comprimentos (altura de um castelo e largura da porta da sala de aula) quer para áreas (área de um campo de andebol e área de um postal de correio).

Na Questão 2, era apresentada uma situação em que três crianças mediram, em palmos, o mesmo comprimento chegando a resultados diferentes. Os alunos indicavam, justificando, qual das crianças tinha o palmo com maior comprimento.

Na Questão 3, duas crianças mediram o comprimento de um lápis e indicaram duas medidas diferentes (1 e 2). Era perguntado qual delas tinha razão e pedido para justificar a resposta.

Questão 1. Os alunos apresentaram escolhas mais adequadas (ver Tabela 13) para as unidades de medida de comprimento (56%) do que para as unidades de área (22%).

As unidades de medida mais referidas foram o metro (m) para a altura do castelo, o metro e o centímetro (cm) para a largura da porta, o metro quadrado (m^2) para a área do campo de andebol e o centímetro quadrado (cm^2) para a área do postal. No entanto, foram também indicadas unidades de medida pouco adequadas, tais como o decímetro (dm) para a altura do castelo, o m^2 para a área do postal ou o cm^2 para a área do campo de andebol.

Dois alunos identificaram a medida (número) com unidade. Por exemplo, indicaram 120 como unidade de medida da altura do castelo. Esta confusão foi verificada em outras questões.

Tabela 13

Teste: respostas à Questão 1 - "Escolha de unidades de medida adequadas"

Questão 1	Compr.		Área	
	n	%	n	%
ambas as unidades adequadas	13	56	5	22
uma das unidades pouco adequada	2	9	4	17
indicação da medida (número)	2	9	2	9
pelo menos, uma unidade de área	6	26	-	-
pelo menos, uma unidade de comprimento	-	-	12	52

Resultante de uma forte identificação da área com dimensões unidimensionais, já haviam sido observadas, durante as aulas, dificuldades na indicação de unidades de medida para a área sendo frequentemente expressa através de unidades lineares. Também, no teste, mais de metade dos alunos indicou, pelo menos uma vez, uma unidade unidimensional para a área. Essa troca, não sendo tão significativa, também se verificou para o comprimento sendo indicado, por exemplo, o m^2 para medir a altura do castelo.

Embora para o estabelecimento das categorias não se tivesse atendido a esse aspecto, a generalidade dos alunos fez estimativas tendo em conta a unidade escolhida apresentando respostas surpreendentes como, por exemplo, 2500m ou 3,5m para a altura de um castelo, 5m para a largura da porta da sala de aula, $7m^2$ ou $2cm^2$ para a área de um postal e $2m^2$ para a área de um campo de andebol.

Questão 2. Apenas 35% dos alunos (ver Tabela 14) aceitaram a relação inversa entre a unidade de medida e o número de unidades necessárias, apresentando respostas do tipo:

"é a Rita, porque quando tem menor número de palmos é porque tem o palmo maior e quanto maior for a unidade menor é o número" (Bruno).

Tabela 14

Teste: respostas à Questão 2 - "Utilização de unidades de medida diferentes para o mesmo comprimento"

Questão 2	n	%
resposta e justificação correctas	8	35
justificação pouco precisa	5	22
maior número de unidades - maior unidade	9	39
outras	1	4

Outras respostas, parecendo aceitar essa relação, apresentaram justificações pouco precisas:

"é a Rita, porque o palmo da Rita é maior e assim mede a mesa mais rápido" (Nuno).

Finalmente, cerca de 39% dos alunos consideraram erradamente essa relação como directa, isto é,

"é a Inês, porque tem três palmos e meio, a Susana tem três palmos que é menos e a Rita tem quase três palmos ainda é menos que os palmos da Susana" (Luisa).

Nas aulas, os alunos efectuaram medições utilizando unidades físicas. Para o comprimento, não foram detectadas dificuldades especiais tendo a generalidade dos alunos efectuado correctamente essas medições. Em contrapartida, para a área, observaram-se já alguns processos incorrectos como, por exemplo, a pavimentação de rectângulos com sobreposição de unidades ou a contagem de unidades ao longo do comprimento e da largura numa clara confusão entre área e perímetro.

Foi ainda constatada uma certa relutância por parte de alguns alunos em aceitar unidades de medida do tipo "2 quadrículas" como entidades únicas. Este aspecto foi observado com clareza numa tarefa em que era pedida a medida da área de figuras representadas em papel quadriculado para duas unidades: uma, constituída por uma quadrícula e outra, constituída por duas quadrículas. Alguns alunos indicaram a mesma medida tendo contado, em ambos os casos, o número total das quadrículas das figuras.

Questão 3. Esta pergunta provocou dificuldades generalizadas aos alunos (ver Tabela 15) pois apenas três alunos responderam bem, embora recorrendo a algum vocabulário incorrecto,

> "eu acho que eram os dois, por poderem medir com a área [unidade de medida] diferente e a um podia dar 1 e ao outro 2" (Zita).

Tabela 15

Teste: respostas à Questão 3 - "Indicação de medidas diferentes para o mesmo comprimento"

Questão 3	n	%
resposta e justificação correctas	3	13
justificação pouco precisa	7	30
"não pode medir tão pouco"	6	27
outras	7	30

Outros alunos, embora parecendo ter alguma ideia, recorreram a justificações pouco claras,

> "não sei, porque para dizer que um deles tem razão (...) tenho de saber se é cm, dm ou m" (Jorge).

Esta associação das medidas a unidades padrão, especialmente ao centímetro, foi bastante usual,

> "eu acho que é o Rui, porque normalmente os lápis são medidos em cm" (Quim),

originando muitas respostas do tipo "*nenhum, um lápis não pode medir tão pouco*" (Teresa).

Devido à incompreensão da pergunta formulada, alguns alunos deram respostas incoerentes como, por exemplo,

> "o Rui, porque um lápis novo tem de ter maior comprimento que um lápis já usado" (Olga).

Síntese. Os alunos sentiram e revelaram algumas dificuldades com a noção de unidade de medida. Estas dificuldades, mais pronunciadas na área do que no perímetro, passaram pela escolha pouco adequada de unidades de medida, pela indicação de unidades unidimensionais para a área ou de unidades bidimensionais para o comprimento, pela confusão entre unidade e medida e pela aceitação de uma relação directa entre a unidade de medida e o número de unidades necessárias.

Perímetro

O comprimento e o perímetro eram tratados especialmente da Questão 4 à Questão 8.

Na Questão 4, os alunos apresentavam as suas definições de perímetro.

Na Questão 5, era pedida a estimativa do perímetro do quadro da sala de aula.

Nas Questões 6 e 8, os alunos calculavam a distância à volta e o perímetro de um rectângulo sendo dadas as respectivas dimensões.

A Questão 7 abordava a utilização da régua. Era pedido para indicar o comprimento de uma barra que não estava alinhada directamente com a régua (referência inicial em 4).

Questão 4. Termos, tais como *soma*, *mais*, *lados*, *linha*, *fora* e *exterior*, foram frequentemente utilizados pelos alunos nas suas definições e/ou interpretações de perímetro dando origem a três padrões principais de resposta (ver Tabela 16).

Tabela 16

Teste: respostas à Questão 4 - "Definição de perímetro"

Questão 4	n	%
perímetro associado a soma de lados	16	70
perímetro associado a linha ou lados	5	22
perímetro associado ao exterior	1	4
outras	1	4

A definição mais usual, referida por 70% dos alunos, identificou o perímetro com "soma de lados", "o perímetro é a soma de todos os lados" (Ilda),

"o perímetro é a soma de todos os lados de fora" (Gil),

"o perímetro é o lado mais lado mais os outros lados que é para fazer o total" (Helder).

Cerca de 22% deles identificaram o perímetro com "linha fronteira" ou "lados",

"o perímetro é a linha que separa áreas ou corpos" (David),

"o perímetro é as linhas de fora dum quadrado" (Fernando),

"o perímetro são os lados de uma coisa [figura] qualquer" (Urbano).

Houve ainda uma aluna que o identificou com "exterior"

"o perímetro é o que está fora" (Rosa),

e um aluno que considerou dois padrões como sinónimos,

"o perímetro é a soma de todos os lados, ou então é a linha exterior que delimita a área" (Vasco).

Nas suas opiniões, os alunos referenciaram muitas vezes os lados de figuras denotando que o perímetro foi entendido como o perímetro de polígonos. Esta situação poderá ter decorrido da ênfase dada nas aulas a este tipo de figuras geométricas.

Ressalta, também, das opiniões dos alunos que o perímetro foi associado à operação adição -- operação bastante utilizada nos processos de determinação do perímetro de polígonos -- e à linha fronteira.

As entrevistas permitiram confirmar que muitos alunos não apresentam interpretações únicas do conceito de perímetro pois, em diferentes situações, movimentaram-se através dos padrões identificados. Por exemplo, o David interpretou o perímetro como linha (no teste) e como soma (na entrevista).

Questão 5. Quase metade dos alunos (48%) fizeram estimativas adequadas do perímetro do quadro da sala de aula (ver Tabela 17).

Tabela 17

Teste: respostas à Questão 5 - "Estimativa do perímetro de um rectângulo"

Questão 5	n	%
estimativa adequada	11	48
indicação da medida	3	13
indicação da área	3	13
estimativa das dimensões	4	17
outras	2	9

Alguns outros (17%) apenas apresentaram estimativas para as suas dimensões não calculando o perímetro.

Foram dadas umas respostas com a indicação do metro quadrado (m^2) como unidade de medida (13%) e outras em que esta não foi assinalada (13%).

Questão 6. A "distância à volta" de uma figura apenas foi identificada com o seu perímetro por 43% dos alunos (ver Tabela 18).

Três alunos não determinaram completamente o perímetro, tendo considerado apenas as medidas indicadas "9 + 3".

A "distância à volta" foi também associada à área através do produto "9 x 3" (22%) e ainda, devido ao termo "à volta", à amplitude de cada um dos ângulos internos do rectângulo: "90 graus" (4%).

Tabela 18

Teste: respostas à Questão 6 - "Indicação da distância à volta de um rectângulo"

Questão 6	n	%
resposta correcta	10	43
apenas "9 + 3"	3	13
indicação da área	5	22
indicação da amplitude de ângulo	1	4
outras	4	18

Questão 7. Cerca de 57% dos alunos indicaram correctamente o comprimento da barra preta (ver Tabela 19).

Tabela 19

Teste: respostas à Questão 7 - "Utilização da régua"

Questão 7	n	%
resposta correcta	13	57
"6 cm" ou "6"	10	43

Como o alinhamento da régua com a barra era indirecto -- a referência inicial da régua começava em 4 -- os restantes alunos fizeram a contagem, não a partir de 5, mas incluindo o 4.

Este processo -- contagem a partir da referência inicial -- foi confirmado nas entrevistas genéricas. Estes alunos repetiram-no na determinação do comprimento da linha poligonal aberta quando a régua tinha a graduação acessível a partir de 4cm:

"(...) contei do 4 ao 9" (Fernando).

No entanto, quando usaram uma régua com a referência inicial em 0, os mesmos alunos (à excepção de uma aluna que utilizou a referência inicial em 1, repetindo a contagem) seguiram o processo "normal": alinhamento de um dos extremos do segmento de recta com o 0 da régua e indicação, como medida, do número alinhado com o outro extremo.

Face aos resultados obtidos, os alunos reconheceram o engano na aplicação do primeiro processo.

Nas aulas, observaram-se mais duas situações em que a régua não foi convenientemente utilizada.

Numa delas, alguns alunos fizeram o ajustamento do objecto com o início material da régua e não com o 0 da escala graduada.

A outra situação, mais geral, prendeu-se com a precisão das leituras. Quando, na escala, não há coincidência com números inteiros -- por exemplo, 3,2cm -- alguns alunos aproximam este valor por defeito para a respectiva característica -- neste caso, 3cm -- evidenciando alguns problemas em trabalhar com partes fraccionárias da unidade.

Questão 8. A maioria dos alunos (73%) calculou correctamente o perímetro de um rectângulo sendo dadas as respectivas dimensões lineares (ver Tabela 20).

A adição da medida dos comprimentos dos lados foi o processo mais seguido, ou seja, "7 + 7 + 4 + 4 = 22". Este processo de resolução revelou-se bastante consistente com as interpretações que os alunos, na sua generalidade, fizeram da noção de perímetro.

Houve quatro alunos (18%) que confundiram o perímetro com a área ou calculando-a "7 x 4 = 28" ou indicando no resultado uma unidade de área.

Tabela 20

Teste: respostas à Questão 8 - "Cálculo do perímetro de um rectângulo"

Questão 8	n	%
resposta correcta	17	73
cálculo da área	2	9
indicação de unidade de área	2	9
outras	2	9

Finalmente, os restantes dois alunos desenvolveram um outro processo (não correcto) multiplicando as medidas (iguais) dos comprimentos dos lados e depois ou adicionando os resultados ou indicando o maior deles:

"4 x 4 = 16 ; 7 x 7 = 49 ; resposta: 16 + 49" (Gil),

"4 x 4 = 16 ; 7 x 7 = 49 ; resposta: 49" (Rosa).

Síntese. Os alunos associaram o perímetro de uma figura essencialmente à "soma de lados" e à linha fronteira.

Não revelaram dificuldades significativas na determinação (e estimativa) de perímetros de rectângulos, sendo a adição da medida dos comprimentos dos lados o processo de resolução mais seguido. Quando recorreram a estratégias incorrectas, os alunos fizeram ligações à área: multiplicando as medidas e/ou indicando unidades de medida bidimensionais.

A utilização da régua ou do esquadro, como instrumentos de medida de comprimentos, não constituiu problema, exceptuando casos de alinhamento indirecto com o objecto ou de precisão das medições.

Área

A área era tratada mais profundamente da Questão 9 à Questão 13.

Na Questão 9, os alunos apresentavam as suas definições de área.

As restantes questões incidiam sobre o cálculo de áreas em diversas situações.

Na Questão 10, era apresentado um rectângulo em que se indicavam as respectivas dimensões lineares (alínea a)) e se assinalavam as quadrículas (alínea b)). Na Questão 11, os alunos utilizavam unidades físicas. Na Questão 12, a primeira figura estava representada em papel ponteado (alínea a)) e a segunda, apesar de não ser rectangular, podia ser decomposta em rectângulos (alínea b)). Finalmente, na Questão 13, era pedido o cálculo aproximado da área de uma figura não poligonal utilizando dois enquadramentos.

Questão 9. Nas suas definições e/ou interpretações de área, os alunos recorreram a palavras, tais como *multiplicação, vezes, espaço, superfície, interior, dentro, comprimento, lados, medida, medição* e *unidade*, originando essencialmente cinco padrões de resposta (ver Tabela 21).

Seis alunos (nas entrevistas muitos mais revelaram esta identificação) definiram a área como "produto",

> "a área é a multiplicação de todos os lados [da figura]" (Ilda),
>
> "a área é o comprimento vezes a largura" (Jorge),
>
> "a área é a altura vezes a largura" (Helder).

Tabela 21

Teste: respostas à Questão 9 - "Definição de área"

Questão 9	n	%
área associada ao produto	6	26
área associada a espaço, superfície	6	26
área associada ao interior	2	9
área associada a comprimento, lados	2	9
área associada a medida, medição	4	17
outras	3	13

Seis alunos estabeleceram identificações com "espaço" e "superfície",

> "a área é um espaço que está por dentro de uma figura" (Urbano),
>
> "a área é uma superfície interior" (Eduardo).

Apesar de vários alunos se referirem à ideia de "interior", apenas dois deles a identificaram com a área,

> "a área é tudo o que está dentro da figura" (Luisa),
>
> "a área é o que tem dentro de coisas, por exemplo, quadrados ou rectângulos" (Rosa).

Também dois deles definiram área como "comprimento" ou "conjunto de lados",

> "a área é o comprimento da superfície interior" (Gil),
>
> "(...) a área é o conjunto de todos os lados" (Xana).

Quatro alunos interpretaram a área como "medida", "medição" ou mesmo "unidade", "a área é a medição que a figura mostra por dentro" (Teresa),

"a área é a unidade que diz os resultados do interior" (Nuno),

"a área é o número de quadrados que tem" (Fernando).

Finalmente, três alunos apresentaram definições pouco claras:

"a área é a parte que suporta a figura geométrica" (Quim),

"a área é a área que ocupa o objecto" (Pedro),

"a área é um quadrado que só pode ter dentro seis pontos" (Carlos),

tendo sido objecto de uma maior precisão nas entrevistas. Assim, o Quim e o Pedro associaram a área ao produto: "*a área é o comprimento vezes a largura*" e "*a área é a multiplicação dos lados*", respectivamente.

Para a opinião do Carlos não foi possível conseguir uma maior precisão devido a grandes problemas de comunicação sentidas e reveladas pelo aluno. No entanto, a associação da noção de área a "seis pontos" -- possível ligação ao geoplano? -- é repetida pelo Carlos quando, na resposta a uma outra questão, refere: "*a área é dentro de uma figura qualquer e tem de ter seis pontos por dentro. Se não tivesse estes pontos por dentro não era área*".

As categorias identificadas não surgiram de uma maneira tão clara como a verificada para o perímetro, tendo os alunos revelado mais dificuldades em exprimir, quer escrita quer oralmente, as suas ideias sobre o conceito de área.

Também se observou que, tal como verificado para o perímetro, os alunos não revelaram interpretações únicas do conceito de área atravessando, conforme as situações, várias categorias.

Face ao que os alunos escreveram e disseram, pode afirmar-se que a maioria deles estabeleceu associações da área com a operação multiplicação -- operação bastante usada nos processos de cálculo da área de rectângulos -- e com as noções de superfície (ou espaço) e de interior.

Questão 10a). A maioria dos alunos (66%) calculou correctamente a área de um rectângulo sendo dadas as respectivas dimensões lineares (ver Tabela 22).

Tabela 22

Teste: respostas à Questão 10a) - "Cálculo da área de um rectângulo sendo dadas as suas dimensões lineares"

Questão 10a)	n	%
resposta correcta	15	66
cálculo do perímetro	3	13
indicação de unidade de comprimento	1	4
contagem de quadrículas	3	13
outras	1	4

A multiplicação da medida dos comprimentos dos lados não geometricamente iguais, "5 x 6 = 30", foi o processo mais utilizado. Este processo era o mais esperado face às opiniões referidas pelos alunos na questão anterior. Evidentemente, os restantes processos de resolução seguidos foram ainda reflexo dessas interpretações.

Quatro alunos confundiram área com perímetro ou calculando-o "5 + 5 + 6 + 6 = 22" ou exprimindo o resultado através de uma unidade de medida de comprimento.

Três alunos recorreram à contagem de quadrículas dividindo o rectângulo em quadrados, mas cometendo alguns erros. Dois deles apresentaram resultados sem atender às dimensões lineares fornecidas:

"9 (3 x 3)" (Gil) e "16 (4 x 4)" (Rosa),

e o outro marcou, no interior do rectângulo, cinco traços paralelos aos lados de comprimento 5 e seis traços paralelos aos lados de comprimento 6, tendo originado seis colunas e sete linhas:

"42 (6 x 7)" (Pedro).

Na aula, os alunos revelaram grandes dificuldades no cálculo da área de um quadrado sendo dada a medida do comprimento do lado (25cm). Praticamente todos eles determinaram o perímetro, apesar de terem optado por um produto: "4 x 25".

Questão 10b). A indicação da área de um rectângulo dividido em quadrados não constituiu dificuldades especiais pois 91% dos alunos responderam acertadamente (ver Tabela 23).

Tabela 23

Teste: respostas à Questão 10b) - "Cálculo da área de um rectângulo por contagem de quadrículas"

Questão 10b)	n	%
resposta correcta	21	91
outras	2	9

Estes alunos seguiram basicamente dois processos: (a) contando todas as quadrículas: "32"; ou (b) contando os quadrados numa coluna e numa linha e depois multiplicando: "8 x 4 = 32".

Uma aluna contou consecutivamente os quadrados apenas ao longo de uma linha e de uma coluna: "4 + 7 = 11" e outro aluno, para além dos quadrados do interior, contou também à volta, no exterior do rectângulo: "32 + 20 = 52".

Questão 11. Todos os alunos calcularam bem a área do rectângulo usando unidades de medida físicas.

Muitos deles (61%) apresentaram conclusões bem formuladas como, por exemplo,

> "o cálculo da área depende da unidade escolhida. Quanto mais pequena for a unidade maior é o número de vezes e quanto maior é a unidade menor é o número de vezes" (Gil),

> "a conclusão que eu tirei foi que na mesma área se usarmos uma figura grande como a cor de rosa dá menos número de unidades e se usarmos uma figura mais pequena dá mais número de unidades" (Urbano).

Quando os alunos resolveram a Ficha de Trabalho nº2, determinando a área de figuras utilizando diversas unidades físicas, foram observados dois processos.

A maioria dos alunos seguiu a sugestão do quadro de registos determinando a área das figuras por pavimentação sucessiva com as várias unidades.

Outros alunos pavimentaram as figuras com a unidade "maior" e indicaram a respectiva medida. Seguidamente, "cobriram" a unidade maior com outra unidade, retiraram a relação entre elas e, a partir dessa relação, calcularam a área. Apresentam-se justificações referidas por dois alunos:

> "como o rectângulo (c) é metade do quadrado grande (d) então, usando o rectângulo, a medida da área da figura é o dobro",
>
> "a medida da área quando uso o triângulo (a) tem de ser o dobro da medida da área quando uso o quadrado (b), porque dois triângulos dão um quadrado".

Questão 12a). Cerca de 35% dos alunos calcularam bem a área de uma figura representada em papel ponteado (ver Tabela 24).

Tabela 24
Teste: respostas à Questão 12b) - "Cálculo da área de uma figura representada em papel ponteado"

Questão 12a)	n	%
resposta correcta	8	35
só metades de quadrados e quadrados inteiros	9	39
só quadrados inteiros	6	26

Os oito alunos calcularam correctamente a área da figura decompondo-a em oito quadrados inteiros, cinco metades de quadrados e uma metade de um rectângulo.

Os restantes alunos determinaram erradamente a área desta metade de rectângulo (não a considerando como metade da área de um rectângulo 3x1) e seis deles apenas calcularam bem a área dos quadrados inteiros.

Na primeira situação de cálculo da área de figuras representadas no geoplano, uma estratégia seguida por bastantes alunos foi associar essa área ao número de pregos que eram tocados pelo elástico representativo da fronteira. As justificações então comunicadas foram do tipo "*porque acho que é assim*" ou "*porque quantos mais pregos temos, maior é a área*". Confrontados com outras figuras que contrariavam essa conjectura, os alunos concluiram que essa estratégia era inadequada.

Questão 12b). Os alunos revelaram muitas dificuldades (ver Tabela 25) na determinação da área da figura não rectangular, mas possível de decompor em rectângulos, pois somente dois deles (9%) utilizaram um processo correcto.

Tabela 25

Teste: respostas à Questão 12b) - "Cálculo da área de uma figura através da decomposição"

Questão 12b)	n	%
decomposição e resposta correctas	2	9
decomposição correcta e "4 x 2 + 6 x 1"	5	22
multiplicação das dimensões aos pares	3	13
multiplicação das dimensões fornecidas	6	26
divisão em quadrados	2	9
cálculo do perímetro	4	17
outras	1	4

Estes alunos fizeram a decomposição da figura em dois rectângulos e calcularam a área aplicando a fórmula "A = c x l" (em que "c" e "l" são, respectivamente, as medidas do comprimento e da largura de um rectângulo qualquer) e recorrendo às medidas resultantes da decomposição:

"4 x 2 + 4 x 1" ou "3 x 2 + 6 x 1".

Cinco alunos (22%) também assinalaram uma decomposição correcta mas mantiveram as dimensões iniciais:

"4 x 2 + 6 x 1".

Outros três alunos (13%) determinaram as restantes dimensões e multiplicaram as medidas (fornecidas ou não) aos pares considerando os rectângulos independentes:

"4 x 2 + 6 x 1 + 4 x 3" ou "4 x 2 + 3 x 2 + 4 x 1 + 4 x 6".

A multiplicação das dimensões lineares assinaladas na figura foi uma estratégia seguida por seis alunos (26%):

"6 x 4 x 2 x 1" ou "(4 x 2) x (6 x 1)".

Dois alunos dividiram a figura em quadrados mas sem atender às dimensões fornecidas e depois contaram esses quadrados.

Houve quatro alunos que calcularam o perímetro:

"6 + 4 + 2 + 3 + 4 + 1".

Alguns destes processos já haviam sido identificados durante as aulas quando se abordou a decomposição de figuras. Os alunos discutiram e estabeleceram bem as razões que conduzem à decomposição mas, ao efectuá-la, geralmente mantiveram as dimensões iniciais.

Observou-se, também, que os alunos, em situações de impasse, se sentiram "obrigados" a apresentar um número como solução. Nos problemas tratando a noção de área, este número resultou quase sempre de uma multiplicação de medidas de comprimento fornecidas, todas ou parte delas; para o perímetro, a adição foi a operação mais escolhida.

Questão 13. Os alunos trabalharam melhor com o enquadramento interior do que com o exterior (ver Tabela 26).

Tabela 26

Teste: respostas à Questão 13 - "Cálculo aproximado da área de uma figura através de enquadramentos"

Questão 13	e. interior		e. exterior	
	n	%	n	%
resposta correcta	22	96	12	52
outras	1	4	11	48

Praticamente todos os alunos fizeram bem o enquadramento interior, contando os quadrados inteiros existentes no interior da figura. Um aluno, para além destes quadrados, contou ainda aqueles que tocavam a figura, não tendo feito compensações.

Cerca de 52% dos alunos fizeram um enquadramento exterior da figura através de um rectângulo 6x5 contando todos os quadrados.

Outros alunos enquadraram bem, geralmente através de um rectângulo 8x7, mas contando apenas os quadrados do exterior e/ou aqueles que tocavam a figura, esquecendo os quadrados inteiros do interior. Esta estratégia também foi observada na aula, tendo os alunos associado o enquadramento exterior ao exterior da figura.

A maioria deles (70%) concluiu com acerto que a área da figura estava compreendida entre os valores encontrados para os enquadramentos interior e exterior.

Síntese. De uma maneira geral, o conceito de área revelou-se mais complicado do que o conceito de perímetro (ou de comprimento), tendo os alunos, relativamente à área, reflectido concepções e processos de resolução mais diversificados.

A área de uma figura foi associada às noções de produto, espaço-superfície, interior, medida e comprimento, dando origem essencialmente a cinco padrões de resposta.

Na determinação de áreas de rectângulos, dadas as respectivas dimensões, a multiplicação da medida dos comprimentos dos lados não geometricamente iguais foi o processo de resolução mais utilizado. Outro processo usado, nem sempre adequadamente, por vários alunos foi a contagem de quadrículas após a divisão do rectângulo em quadrados. Também se verificaram ligações ao perímetro: adicionando as medidas e/ou indicando unidades de medida unidimensionais.

O cálculo da área de rectângulos, sendo indicada a divisão em quadrículas ou recorrendo a unidades físicas, não levantou dificuldades especiais.

Os alunos enfrentaram mais problemas com figuras poligonais não rectangulares e com figuras não poligonais. Quando utilizaram a decomposição, foram identificados diversos processos, incorrectos na sua maioria. Quando recorreram ao enquadramento, verificou-se uma incompreensão generalizada do enquadramento exterior.

Área e Perímetro

As três últimas questões apresentavam situações que, de algum modo, relacionavam a área e o perímetro.

Na Questão 14, era pedida a construção de figuras diferentes mas isoperimétricas ou equivalentes a um quadrado representado em papel ponteado.

Na Questão 15, os alunos indicavam as possibilidades de colocação de grades para "vedar" um canteiro e seleccionavam aquela a que correspondia a maior área.

Na Questão 16, os alunos trabalhavam com um "puzzle" e discutiam se, por modificação da posição das peças, a área e/ou o perímetro se mantinham.

Questão 14. Os alunos obtiveram resultados semelhantes quer para o perímetro (alínea a)) quer para a área (alínea b)) tendo a maioria deles construído figuras de acordo com as condições exigidas (ver Tabela 27).

Tabela 27

Teste: respostas à Questão 14 - "Construção de figuras diferentes mas isoperimétricas ou equivalentes"

Questão 14	igual perím.		igual área	
	n	%	n	%
resposta correcta	14	60	13	56
figuras equivalentes	5	22	-	-
figuras isoperimétricas	-	-	6	26
outras	4	18	4	18

Na alínea a), os alunos que responderam correctamente (60%) representaram rectângulos isoperimétricos -- P = 16cm -- de dimensões 1x7, 2x6 ou 3x5. Cinco alunos apresentaram rectângulos equivalentes (2x8) e os restantes construiram outros rectângulos (4x9, 2x7, 2x5 ou 3x4).

Na alínea b), 56% dos alunos indicaram acertadamente rectângulos equivalentes -- A = $16cm^2$ -- de dimensões 1x16 ou 2x8. Seis alunos construiram rectângulos isoperimétricos (2x6 ou 3x5) e os restantes apresentaram outros rectângulos (7x4, 3x4 ou 2x10). É de notar que os alunos que confundiram área com perímetro nesta alínea não são os mesmos que fizeram tal confusão na alínea a).

Na aula, em situações semelhantes, os alunos aceitaram a existência de diversas soluções e justificaram as suas respostas afirmando, por exemplo, "*para a área, conto os quadrados*" e "*para o perímetro, conto os traços à volta*".

Questão 15. Apesar de apenas um aluno ter apresentado todas as possibilidades de resposta (que conduziam a "rectângulos" 1x10, 2x8, 3x6, 4x4 e 5x2), a maioria dos alunos abordou sem grandes dificuldades a situação proposta representando pelo menos uma possibilidade correcta (ver Tabela 28).

Tabela 28

Teste: respostas à Questão 15 - "Situação de área máxima"

Questão 15	n	%
pelo menos três situações correctas	6	26
uma ou duas situações correctas	10	43
área constante	4	18
outras	3	13

Houve, no entanto, quatro alunos que associaram as grades à área "construindo" os canteiros de modo a mantê-la constante.

De uma maneira geral, os alunos face às soluções encontradas indicaram com segurança qual a que correspondia à situação de área máxima.

Questão 16. Cerca de 26% dos alunos consideraram correctamente que, com outras disposições das peças de um "puzzle", a área se mantinha mas o perímetro podia variar (ver Tabela 29).

Tabela 29

Teste: respostas à Questão 16 - "Utilização de um puzzle"

Questão 16	n	%
mesma área, perímetro diferente	6	26
mesma área, mesmo perímetro	4	17
mesma área	8	35
outras	5	22

Contudo, a conservação da área foi reconhecida por mais alunos (78%, no total) afirmando, por exemplo,

> "porque as figuras têm o mesmo número de triângulos (têm a mesma a área), ou seja, as figuras são equivalentes" (Olga),
>
> "porque [as figuras] tendo as mesmas dimensões e as mesmas medidas têm de ter a mesma área" (Teresa).

Síntese. Os alunos responderam, com bastante segurança, a situações envolvendo apenas um dos atributos, por exemplo, na representação de figuras isoperimétricas ou de figuras equivalentes.

Contudo, as situações em que o perímetro e a área eram abordados conjuntamente originaram mais confusões entre os dois conceitos. Assim, muitos alunos aceitaram que, por exemplo, se duas figuras tinham a mesma área, teriam igualmente o mesmo perímetro.

Entrevistas Particulares

As entrevistas *particulares* foram realizadas a seis alunos: Alda e David considerados estavelmente bons no desempenho em Matemática, Helder e Jorge considerados estavelmente regulares e Pedro e Susana considerados estavelmente fracos.

Nestas entrevistas eram propostas três tarefas (Anexo C).

Na primeira tarefa, os alunos davam as suas opiniões sobre o desenvolvimento de um processo de cálculo da área de uma figura não poligonal.

Na segunda tarefa, era pedida a determinação do perímetro e da área de um hexágono não convexo que se podia decompor em rectângulos.

Na terceira tarefa, os alunos calculavam o perímetro e a área de um paralelogramo não rectângulo, situação que não foi tratada nas actividades da aula.

Nos diálogos apresentados, os nomes serão substituídos pelas letras iniciais, ou seja, Alda por A, David por D, Helder por H, Jorge por J, Pedro por P, Susana por S e Entrevistador por E. Sempre que possível, seguir-se-á a ordem alfabética no registo das opiniões dos alunos.

Tarefa 1. Apenas o Jorge colocou inicialmente algumas reservas ao processo seguido (transformação num rectângulo 15x5):

J : A mim parece-me que não, porque isto tem estas formas circulares e um rectângulo tem os lados todos rectos (...) os dois lados e estes aqui ... para estas formas não deve dar.
E : Mas repara que também pode ser dada ao fio uma outra forma "circular". Simplesmente, foi dada a forma de um rectângulo ...
J : Se o fio dá ... não sobra e dá para contornar a área toda à medida, então acho que sim.

Os restantes alunos começaram por considerá-lo adequado. Por exemplo, o Pedro referiu:

P : É porque se o fio ... também coincidia aqui na figura e não sobrava nada, era 75 porque o fio aqui deu 15x5, mas como na figura dada, já não define tão bem os lados, é a mesma área (...) utilizando o método do fio, se não sobrar nada e não sobrou nada, portanto é $75cm^2$.

As opiniões divergiram bastante quando os alunos foram confrontados com a segunda forma (transformação num rectângulo 10x10).

A Alda reconheceu imediatamente que, com esta estratégia, não se mantinha a área mas sim o perímetro, considerando que era um bom processo para a determinação do perímetro:

E : Num caso dá $75cm^2$ e no outro dá $100cm^2$ ...
A : Não, não pode dar bem aí, conforme a forma que tiver, conforme a forma que dermos para a área. Porque o que ele fez foi o perímetro aqui da figura (...) daqui, pronto, do fio (...) ele só fez o perímetro.

O David, embora afirmando que a área não podia ter dois (ou mais) valores diferentes pois a unidade de medida era a mesma, revelou algumas dúvidas e hesitações na validação, ou não, do processo:

E : Achas que poderá a área ter dois valores diferentes [$75cm^2$ e $100cm^2$] utilizando a mesma unidade?
D : Deixou-me confuso agora (...) o fio dá exactamente esta figura, pois.
E : Mas dando outra forma ao fio ...
D : Pois, porque pode ter a mesma área, mas o mesmo perímetro não.
E : Então o que é que representa o fio?
D : Representa só a área.
E : Portanto, quando ele pôs o fio à volta da figura ...
D : Representou só a área.

No entanto, acabou por concluir que a estratégia seguida estava adequada ao perímetro:

E : Então num caso dá 75, noutro 100, noutro 36 ...
D : Ou então só se será o mesmo (...) não.
E : Repara, se fizer assim apenas fica um segmento de recta. Qual será a área?
D : É zero.
E : Então, podemos associar este fio à área?
D : Não (...) ao perímetro. É o perímetro.

Nas suas opiniões, o Helder denotou algumas dificuldades com o vocabulário utilizado,

E : Então, a área desta figura pode ser $75cm^2$, $100cm^2$ e $36cm^2$?
H : Depende da unidade.
E : Mas, nós utilizamos sempre a mesma unidade, o cm^2...
H : (...)

e um forte entendimento de área como um processo de cálculo de dimensões unidimensionais:

E : Utilizando o fio desta maneira permite-nos determinar a área da figura?
H : Eu acho que não (...) Depende da forma.
E : Neste rectângulo, o fio percorre o quê?

H : Os lados.
E : Por isso, representa o quê?
H : A forma.
E : A área tem a ver com os lados?
H : Tem.
E : De que maneira?
H : Porque sem sabermos quantos centímetros medem os lados, não podemos fazer a área.

Também aceitou resultados diferentes para a área apesar de utilizar a mesma unidade de medida. Finalmente, o Helder considerou o processo inadequado para a determinação da área mas não fez qualquer referência ao perímetro, afirmando mesmo que a utilização do fio nada tinha a ver com a figura:

E : Quando utilizas o fio desta maneira, achas que está a trabalhar a área?
H : Acho que não.
E : E pensas que poderás estar a trabalhar alguma coisa relacionada com a figura?
H : Não (...) acho eu.

O Jorge, associando a área ao cálculo, manteve sempre uma certa reserva ao processo apresentado. Primeiro, devido à variação das medidas e da forma (de "circular" para rectangular) e depois, ao aparecimento de valores diferentes para a área utilizando a mesma unidade de medida:

E : Qual a área deste novo rectângulo [10x10]?
J : 10 vezes 10 vezes os três lados.
E : E porquê os três lados?
J : (...)
E : Repara no caso anterior ...
J : 10 x 10 = 100cm^2.
E : Neste caso deu 100cm^2 e no anterior 75cm^2, um valor diferente.
J : Porque aqui as medidas são diferentes. Aqui tem 5 a mais e aqui tem 5 a menos.
E : Mas deu valores diferentes.
J : Então depende da forma da figura.
E : Mas a área da figura será 100cm^2 ou será 75cm^2? Achas que poderá dar os dois valores?

J : Não, dois valores não.
(...)
E : Então achas que é um bom processo para determinar a área?
J : O do fio? (...) não me parece, se dá três valores diferentes ...

O aluno, só depois de alguma insistência, associou o fio ao perímetro:

E : Achas que o fio tem relação com a área?
J : Não, o que importa é as medidas de ..., como é que hei-de dizer (...)
E : Quando contornamos com o fio ...
J : O fio é só para contornar a ... (...)
E : A linha fronteira da figura.
J : Portanto, o fio tem a ver com ... o perímetro da figura.

Seguidamente, o Jorge confirmou esta afirmação calculando o perímetro de todos os rectângulos e verificando que, de facto, eram todos isoperimétricos.

O Pedro, apesar de obter sucessivamente resultados diferentes, apenas reconheceu que a área não se mantinha à terceira configuração,

E : Repara, num caso dá $75cm^2$, noutro $100cm^2$ e noutro $36cm^2$. Continuas a achar que a área é sempre a mesma?
P : Não (...), varia conforme a figura.

propondo, nesta altura, a utilização de papel quadriculado para a determinação da área da figura inicial (estabelecendo, assim, ligações da área com o interior da figura):

P : (...) ou com o papel quadriculado.
E : Podíamos utilizar esta grelha quadriculada. Como fazias?
P : Contávamos os quadrados inteiros que estavam dentro e depois (...)

E : (...) enquadrávamos exteriormente e (...) concluíamos que a área estava compreendida entre esses dois valores (...)

Posteriormente, associou o fio à linha fronteira e ao perímetro da figura:

E : Relativamente a esta figura, o que representa o fio?
P : (...) a linha de fronteira, acho eu.
E : Então quando percorremos essa linha fronteira, estamos a calcular a área?
P : Eu acho que não. Estamos a calcular o perímetro (...) o método é bom para calcular o perímetro porque o fio dá para fazer outras (...) formas e não têm a mesma área, têm o mesmo perímetro.

A Susana aceitou claramente que a área podia ter diferentes valores apesar de utilizar a mesma unidade de medida:

E : No primeiro caso deu 75cm^2, no segundo 100cm^2 e no terceiro 36cm^2. Achas que pode ser?
S : Sim ... porque numas unidades estão ... dão assim o resultado ...
E : Dá resultados ...
S : Diferentes, tanto podem ser uns como outros.
(...)
S : (...) a área era 75, era 100, era 36, era 0.

Como a área foi identificada claramente com lados e dimensões lineares, a Susana concluiu então que este processo é correcto para a determinação da área de figuras:

E : O que queremos fazer quando falamos em área?
S : Medir o comprimento.
E : (...) Para ti, o que é a área de uma figura?
S : É o espaço que ocupa.
E : Por exemplo, quando queremos saber a área do tampo desta mesa ... é dentro, é fora, é à volta, é onde?
S : Aqui [percorrendo o bordo da mesa com a mão].
E : Só os lados?
S : Neste caso podíamos medir lá dentro.
E : E com o fio fazemos isso?
S : Não, [medimos] o que está fora.

E : Então, podemos associar o fio à área da figura?
S : Sim.

Na prática, o processo apresentado para a determinação da área revelou-se extremamente tentador, pelo menos, até à obtenção de duas medidas diferentes utilizando a mesma unidade de medida de área.

Os alunos que não aceitaram a possibilidade das medidas poderem ser diferentes revelaram menores dificuldades com os conceitos de perímetro e de área.

Outro aspecto que conduziu a confusões entre os dois conceitos foi a associação, quer do perímetro quer da área, a unidades unidimensionais. Por exemplo, os alunos frequentemente calcularam a área de um rectângulo multiplicando duas medidas de comprimento.

Tarefa 2. Para o cálculo do perímetro da figura, todos os alunos, à excepção da Susana, seguiram o mesmo processo em duas etapas: (a) determinação das medidas não conhecidas dos comprimentos dos lados do hexágono; e (b) adição de todas as medidas, isto é,

"6 + 4 + 4 + 6 + 2 + 10 = 32cm".

A Susana não apresentou qualquer estratégia para iniciar o cálculo do perímetro. Após alguma ajuda, continuou a revelar dificuldades quer na adição e subtracção de comprimentos quer na indicação da unidade de medida e acabou por seguir o processo já indicado para os restantes alunos:

E : Podemos começar pelo cálculo do perímetro. Como é que vais fazer?
S : (...)

E : Não te recordas? (...) qual é o comprimento deste lado?
S : 9 (...) até este bocadinho aqui são 6 (...) eu acho que deve ser, tem que ser 9.
E : (...) esta medida é 6, daqui até aqui é 4, quanto é no total?
S : 10.
(...)
S : 3.
E : E porque dizes 3?
S : (...) Não, são 4 (...) porque 4 + 2 são 6.
(...)
E : Como determinas agora o perímetro?
S : Tenho que somar tudo (...) 32.
E : Qual é a unidade?
S : Cm^2 (...) porque cm e cm dá sempre cm^2.

Para a determinação da área da figura, os alunos, também à excepção da Susana, seguiram estratégias semelhantes em três passos: (a) decomposição da figura em dois rectângulos; (b) aplicação, por vezes incorrectamente, da fórmula "A = c x l" a cada um dos rectângulos; e (c) adição (multiplicação, no caso do Helder) dos dois resultados.

Estratégia diferente foi adoptada pela Susana que recorreu à pavimentação da figura com unidades físicas em cartolina.

A Alda, tal como tinha feito no teste, calculou correctamente a área do hexágono fazendo a decomposição da figura e aplicando bem a fórmula:

"6 x 2 = $12cm^2$; 6 x 4 = $24cm^2$; 12 + 24 = $36cm^2$.
Resultado: $36cm^2$".

O David desenvolveu o mesmo processo mas sentiu problemas na aplicação da fórmula especialmente quando, no rectângulo, estavam assinaladas medidas não relevantes:

E : Como determinas a área deste rectângulo?
D : Multiplicando os lados (...) os lados não, o comprimento vezes a largura (...) 6 x 2 x 6.

E : Porque multiplicas outra vez por 6?
D : Porque aqui ainda tem outra área.
E : Outro lado (...) mas ali também existe um outro lado.
D : Ah pois! Então é 6 x 2 só (...) 6 x 2 igual a $12cm^2$.

O Helder começou por fazer a decomposição mas com pouca confiança:

E : Como vais fazer?
H : Dividimos a figura (...) para saber primeiro quanto é a área de um rectângulo e depois do outro.
E : Podias calcular a área sem fazer essa divisão?
H : Podia.
E : Então se podias, talvez não fosse necessário dividir. Como fazias então?
H : 6 x 4 x 6 x 2.
E : Multiplicavas todos os números?
H : (...) Talvez não ...

Regressando à decomposição, calculou a área de cada um dos rectângulos (indicando o cm como unidade de medida) e depois retomou a multiplicação:

E : A área de um rectângulo é $12cm^2$ e do outro é $24cm^2$. E agora?
H : Agora fazemos 24 x 12.
E : Porquê? (...) Porque multiplicas?
H : Porque ... na área, é vezes.

Inicialmente o Jorge seguiu a estratégia que já tinha desenvolvido no teste: multiplicação dos números aos pares considerando os rectângulos independentes:

J : Agora fazemos 6 x 4, 4 x 6 e 2 x 10 para saber a área.
E : Porque é que multiplicas esses números todos?
J : Porque para saber a área é o comprimento vezes a largura.
E : Mas nesta figura [apontando para a figura da Tarefa 1], qual é o comprimento e a largura?
J : (...) Então só se fizermos ... só se ... se dividir a figura.

Em seguida, fez a decomposição mas revelou confusões na aplicação da fórmula e na linguagem a utilizar:

E : Qual é a área deste rectângulo?
J : (aqui é 4 e 10 menos 4 dá ... aqui é 6cm) 6 x 2 x 6.
E : E este lado?
J : Aqui é 2cm (...) sendo assim, é 6 x 2 = 12.
E : Qual é a unidade?
J : A unidade é 12, acho.
E : 12 é a medida. Que unidade utilizaste?
J : O rectângulo.
E : A unidade (...) cm^2.
J : Pois, cm^2. E agora fazemos outra vez 6 x 6 que dá ...
E : E porque repetes?
J : Porque é a soma do outro lado, ou só se fizermos logo (...) não sei explicar bem.

O Pedro fez a decomposição em dois rectângulos mas determinou o perímetro,

E : Determina, então, a área desse rectângulo.
P : Ora então, aqui é 4, aqui também é 4, aqui é 6, aqui também é 6 (...) 6 e 6, 12; 12 com 8, 20.
E : Quando fazes 6 + 6 + 4 + 4, estás a determinar a área?
P : (...) não, o perímetro.
E : É o perímetro, não é?
P : 6 x 4, então.

A partir daqui, desenvolveu correctamente o processo.

A Susana sentiu dificuldades em iniciar uma estratégia. Acabou por pavimentar correctamente a figura recorrendo a quadrados de 2x2 em cartolina:

E : Como é que vais fazer? (...) Então não te recordas?
S : Recordo, tem a ver com os quadrados.
E : (...) Estás a colocá-los todos seguidos. Poderias colocá-los assim sobrepondo um com o outro?
S : Não, porque já o tinha posto antes e ia até ali ...
E : E, por exemplo, podias deixar este pedaço em branco?
S : Não, se não já não dava certo a ... área.
E : Então qual é a área?
S : São 9 (...) contei as unidades.

E : Que unidade utilizaste?
S : Este quadrado.

De seguida, solicitada a apresentar o resultado em centímetros quadrados, a aluna acabou por confundir área com perímetro:

E : Mas se quisesses dar a resposta: são tantos cm^2? (...) Achas que era possível?
S : $9cm^2$.
E : Mas, isso seria se a área deste quadrado fosse $1cm^2$. Para ter $1cm^2$ de área, qual era a medida do comprimento do lado?
S : Era mais pequena (...) Neste caso 2cm.
E : Então qual é a área deste quadrado?
S : 8 (...) porque aqui tem 2, aqui 2, aqui 2 e aqui 2.
E : Estiveste a adicionar as medidas do comprimento de todos os lados. Achas que assim calculas a área?
S : Sim.

A figura apresentada nesta tarefa era semelhante a figuras tratadas na aula e no teste. Por isso, a situação trabalhada era já conhecida pelos alunos.

A Alda, o Helder e o Jorge começaram por desenvolver abordagens para a determinação da área similares às seguidas no teste. O David e o Pedro aplicaram outros processos, que não os desenvolvidos no teste, apontando para conclusões já retiradas aquando das interpretações de perímetro e de área, ou seja, os alunos nem sempre recorrem aos mesmos processos de resolução nem os utilizam da mesma maneira.

A Susana, após ter feito abordagens mais concretas, seguiu o mesmo processo "simbólico", já desenvolvido no teste, calculando o perímetro.

Outras observações sobre esta tarefa (determinação do perímetro e da área) são feitas posteriormente aquando do tratamento da Tarefa 3.

Tarefa 3. Nesta tarefa, era pedido o cálculo do perímetro e da área de um paralelogramo não rectângulo.

Todos os alunos recorreram à mesma estratégia para o cálculo do perímetro: (a) determinação das medidas dos comprimentos dos lados usando uma régua; e (b) adição de todas estas medidas, ou seja,

"7 + 5 + 7 + 5 = 24cm".

Para a determinação da área, a primeira estratégia seguida pela Susana foi a pavimentação do paralelogramo com triângulos de cartolina. Os restantes alunos recorreram inicialmente à multiplicação das medidas de comprimento dos dois lados não geometricamente iguais (supostamente o comprimento e a largura, como no rectângulo).

A Susana, apesar de ter pavimentado bem a figura, sentiu algumas dificuldades em estabelecer conclusões:

S : Podem caber dois triângulos.
E : Então, qual era a área?
S : Era em relação ao triângulo.
E : Mas quantos triângulos utilizaste?
S : Dois.
E : Utilizando essa unidade, qual é a área?
S : Duas vezes (...) a área ... é 2.

Questionada sobre um processo que permitisse exprimir a área em centímetros quadrados, a aluna recorreu à multiplicação, mas hesitando entre dois produtos diferentes:

S : Fazia lado vezes lado.
E : Então qual seria a área em cm^2?
S : (...) multiplicava ... 7 x 7 ... não sei.
E : Porque multiplicaste 7 x 7?
S : ... ou então podia multiplicar 5 x 7.
E : A área é $49cm^2$ ou $35cm^2$? Qual te parece a mais correcta?
S : 7 x 7. (...) porque acho que a figura é maior.

E : Mas, a figura é sempre a mesma!
S : (...)

Sugerida a utilização de uma grelha quadriculada (dividida em centímetros quadrados), a Susana ajustou-a adequadamente à figura e determinou bem o número de quadrados (inteiros e metades), mas indicou o centímetro como unidade de medida:

S : A área é 25.
E : 25 quê? Qual a unidade?
S : Cm.
E : Achas que o cm pode ser uma unidade para a área?
S : Sim, acho.

Como já referido, os outros alunos recorreram ao produto "7x5" como primeira estratégia para o cálculo da área do paralelogramo, embora diversificando as respectivas justificações.

A Alda, apesar de ter identificado a figura como paralelogramo, na prática trabalhou-a como rectângulo:

E : A figura é um rectângulo?
S : Não. É um paralelogramo.
E : Como vais fazer para calcular a área?
A : Multiplicar 5cm vezes 7cm.
E : Porquê?
A : Porque a área é sempre a multiplicar. A multiplicação ... irá dar a área, não é?
E : Disseste que a figura não era um rectângulo (...) Essa fórmula também se aplica a paralelogramos?
A : (...) Eu acho que também.

O David aplicou a fórmula do rectângulo, mesmo tendo dúvidas se a figura o era, ou não:

D : A área é igual a 7 x 5.
E : Porquê 7 x 5?
D : Porque para determinarmos a área dum rectângulo precisamos multiplicar o comprimento vezes a largura.
E : Achas que esta figura é um rectângulo?
D : (...)

E : Para ser rectângulo estes lados tinham de formar ângulos rectos.
D : Sim (...) então, não é um rectângulo.
E : Não é?
D : Pronto, mas é um rectângulo assim meio ...

O Helder e o Jorge, embora não identificassem a figura como um rectângulo, recorreram à respectiva fórmula:

H : A área é 7 x 5.
E : Porquê?
H : Para saber quanto (...) eu sei, só que não sei explicar (...) a área de uma figura é a largura vezes o comprimento.
E : Esta figura é um rectângulo?
H : Não (...)
E : Então, este processo está correcto?
H : (...)

E : Esta figura é um rectângulo?
J : Rectângulo? Não me parece, parece-me um tanto ... esquisito ...
E : Como podes, então, calcular a área?
J : 7 x 5.

O Pedro desenvolveu a estratégia de dividir o paralelogramo em "quadrados", apesar de reconhecer que não o eram, ajustando-a ao produto "7 x 5":

P : A área ... é 7 x 5.
E : Porque fazes assim?
P : Porque é como se tivesse aqui 7 traços e aqui 5 e contava os quadradinhos ... não são bem ... [representou os traços paralelos aos lados do paralelogramo]
E : Qual vai ser a unidade de medida?
P : Cm (...) quadrados.
E : Achas que esta figura aqui corresponde a $1cm^2$?
P : Não (...)
E : A figura dada é um rectângulo?
P : Não. É um losango (...) como no tangram.

Por sugestão do entrevistador ou por iniciativa própria (no caso do Jorge), os alunos confrontaram os resultados obtidos através do produto "7 x 5" com os valores encontrados através do recurso à grelha quadriculada. O desenvolvimento do processo utilizando esta grelha não trouxe complicações a qualquer aluno. Como exemplo, apresenta-se a abordagem feita pela Alda:

A: Agora vou contar primeiro os que estão ... os quadrados inteiros.
E: Que são ...
A: 20 (...) agora vou ... sei que isto aqui é metade de um quadrado. É somar esta metade com a outra metade que está aqui.
E: Podes contar a partir de 20 ...
A: (...) 25 (...) A área é 25cm^2.
E: Se a figura fosse um rectângulo com essas dimensões, qual seria a área?
A: (...)
E: Se fosse um rectângulo de lados 7 e 5, a área seria ...
A: 35cm^2.

Após a aplicação da grelha quadriculada e a obtenção de resultados diferentes, todos os alunos reconheceram que a estratégia inicial era inadequada ao cálculo da área de um paralelogramo.

Solicitados a aplicar outro processo, todos os alunos recorreram à utilização de unidades físicas em cartolina -- paralelogramos e triângulos de diversos tamanhos -- pavimentando a figura dada. Os alunos "cobriram" correctamente o paralelogramo, sem sobreposições e sem falhas, não tendo sido registadas dificuldades na execução do processo. Apresenta-se, como exemplo, o diálogo com o Helder:

E: Qual é a área?
H: 2 ... figuras.
E: Porque disseste 2 figuras? Porque não, 3?
H: Porque esta metade é um triângulo e esta metade é outro.
E: Como fizeste?
H: Meti o triângulo na figura.
E: E cobriu a figura toda?
H: Não, só cobria metade (...) e é 2 porque é este triângulo mais este.

(...)
H : A área depende da unidade.
E : Portanto, quando utilizamos uma determinada unidade, vamos ver quantas vezes ...
H : ... essa unidade cabe na figura.

No entanto, continuaram a verificar-se algumas confusões nos conceitos e no vocabulário a usar, visíveis nas justificações dadas pelo David e pelo Pedro quando utilizaram como unidade de medida uma figura geometricamente igual ao paralelogramo dado:

D : Deixa ver se isto aqui cabe (...) Pronto, já está.
E : Então, qual era a área?
D : $35cm^2$.
E : Achas que sim? Que unidade utilizaste?
D : Os centímetros.
E : O centímetro?
D : Não, uma unidade ...
E : ... a própria figura. Quantas vezes esta unidade coube na figura?
D : Uma.
E : Portanto qual é a área?
D : Um.

E : Utilizando esta unidade, qual é a área?
P : A área? (...) essa unidade é geometricamente igual à figura
E : É verdade. Mas quantas vezes esta unidade cabe na figura?
P : Uma.
E : Portanto qual era a área relativa a esta unidade?
P : Centímetros.

A situação apresentada nesta tarefa era nova para os alunos, pois este tipo de figura não foi tratado nas aulas.

Como estratégia inicial para a determinação da área, a Susana recorreu a unidades de medida fisicas. Os restantes alunos seguiram um processo mais abstracto traduzido na aplicação de uma fórmula que, no caso, se mostrou inadequada.

Quando solicitados a desenvolver outras estratégias -- utilização de uma grelha quadriculada ou recurso a unidades fisicas -- os alunos não revelaram grandes dificuldades, apesar de verificadas algumas confusões de linguagem.

A partir dos desempenhos nas Tarefas 2 e 3, poder-se-á afirmar que os processos de resolução seguidos pelos alunos reflectiram diversos níveis de desenvolvimento cognitivo.

A Susana, quando trabalhou com materiais concretos, revelou alguma confiança nos processos por ela seguidos. Essa confiança desvaneceu-se à medida que foi passando para esquemas mais abstractos, originando abordagens e justificações pouco consistentes.

Os restantes alunos recorreram a representações mais simbólicas e abstractas (fórmulas) que, no caso da área, pareceram não estar completamente interiorizadas. A área é ligada fortemente à multiplicação mas os alunos sentem problemas ao concretizar essa ligação ou, dito de uma outra forma, sabem que "devem" multiplicar mas têm bastantes dúvidas sobre "o que" multiplicar. Esta situação foi visível quando, por exemplo, os alunos aplicaram a fórmula do rectângulo ao paralelogramo, mantiveram as dimensões iniciais mesmo após terem efectuado a decomposição ou atenderam a medidas não relevantes.

Síntese. Algumas das dificuldades reveladas pelos alunos com os conceitos de perímetro e de área, em certas situações, foram reflexo de uma fraca compreensão conceptual. Por exemplo, a área foi bastante associada ao cálculo, mas alguns alunos aceitaram a possibilidade de se obterem dois (ou mais) valores distintos usando a mesma unidade de medida. Refiram-se ainda alguns problemas de linguagem sentidos pelos alunos relativamente ao vocabulário específico dos sistemas de medida. Foi frequente mencionarem unidade em vez de medida e área em vez de superfície ou unidade.

Para o cálculo do perímetro das figuras apresentadas, os alunos seguiram genericamente o mesmo processo de resolução. Este processo correcto consistiu na determinação das medidas dos comprimentos dos lados, seguida da adição dessas medidas.

Para o cálculo da área, geralmente os alunos seguiram como primeiro processo de resolução a aplicação da "fórmula do rectângulo", mesmo que a figura fosse não rectangular. Outro processo utilizado consistiu na pavimentação da figura com unidades físicas, mas havendo a dificuldade em exprimir esse resultado em centímetros quadrados.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Este estudo pretendeu investigar atitudes, concepções e práticas de alunos do 6º ano de escolaridade procurando responder a três questões principais: (a) Como encaram alunos do 6º ano de escolaridade a utilização de materiais concretos na sua aprendizagem matemática?; (b) Que concepções acerca dos conceitos de área e perímetro são reveladas por alunos do 6º ano de escolaridade?; e (c) Que processos/abordagens de resolução são utilizados por alunos do 6º ano de escolaridade em tarefas que envolvam os conceitos de área e/ou perímetro?

Este capítulo apresenta as conclusões e implicações do estudo e encontra-se dividido em três secções: (a) conclusões; (b) limitações; e (c) considerações finais.

A primeira secção refere-se às principais conclusões, seguindo a sequência estabelecida para as três questões de investigação.

Finalmente, nas restantes secções são adiantadas limitações consideradas relevantes, assim como algumas sugestões e recomendações para trabalho futuro.

Conclusões

Utilização de Materiais Manipulativos

Os alunos consideraram que a utilização de materiais manipulativos proporciona aprendizagens mais significativas. De facto, ao preferirem ambientes em que possam manipular materiais, enfatizam a maneira *como* aprendem matemática valorizando os processos utilizados nas suas experiências de construção da aprendizagem. Quando não reconhecem tanta importância à utilização de materiais, enfatizam *o que* aprendem valorizando, deste modo, os conteúdos matemáticos.

Os alunos emitiram opiniões muito favoráveis sobre a utilização de materiais manipulativos na aula de Matemática. Nesse sentido, consideraram que esses materiais proporcionam situações de aprendizagem mais próximas da realidade, permitindo uma melhor compreensão e resolução dos problemas. Além disso, facilitam as interacções com os outros, originando mais momentos de partilha e discussão de pontos de vista. Este aspecto da comunicação torna-se particularmente relevante porque, na verdade, resulta da própria utilização dos materiais. Como a aprendizagem é feita a partir da própria experiência, os alunos sentem e revelam uma maior segurança na comunicação e partilha dos raciocínios e processos desenvolvidos.

Os alunos desenvolveram uma elevada autoconfiança, referindo que os materiais os ajudaram a ter mais confiança e mais segurança na execução das tarefas e na resolução dos problemas. O trabalho com materiais manipulativos permitiu também o desenvolvimento de atitudes positivas relativamente aos outros; facilitou a relação com o professor e com os restantes colegas, contribuindo para a consciencialização do espírito de tolerância e de aceitação dos outros; e estimulou o gosto e o hábito de cooperação e entreajuda, favorecendo o trabalho em grupo.

Os alunos fizeram um enquadramento global dos materiais na sua aprendizagem matemática. Ultrapassando as referências "previsíveis" à sua dimensão lúdica, apresentaram justificações que atravessam diversos campos, tais como o cognitivo, social, afectivo e psicomotor.

Particularmente, os alunos não relataram dificuldades significativas na integração dos materiais utilizados e consideraram o geoplano e os "puzzles" como materiais bastante adequados ao ensino-aprendizagem do perímetro e da área.

Concepções de Perímetro e de Área

Para os alunos, a área é um conceito mais complexo do que o perímetro. Uma maior dificuldade na comunicação dos seus pontos de vista e uma maior diversidade nas palavras utilizadas reflectem aspectos dessa complexidade.

Neste estudo foram identificadas duas categorias principais de concepções de perímetro e cinco categorias principais de concepções de área. O perímetro foi associado essencialmente à "soma de lados" e à linha fronteira da figura. A área foi associada ao "produto de lados", a espaço ou superfície, ao interior, à medida e ao comprimento. Por outro lado, os alunos não apresentaram concepções únicas de cada um dos conceitos, fazendo diferentes interpretações conforme o contexto.

As concepções de perímetro e de área reveladas pelos alunos foram fortemente influenciadas por processos de resolução que habitualmente utilizam, tornando nítida a associação destes conceitos a operações numéricas. De facto, as operações adição e multiplicação foram frequentemente utilizadas no cálculo de perímetros de polígonos e na determinação de áreas de rectângulos, respectivamente.

Refira-se ainda que, com muita frequência, os alunos associaram unidades de medida unidimensionais quer ao perímetro quer à área, originando confusões entre os dois conceitos.

Processos de Resolução Desenvolvidos

Os processos de resolução utilizados para a determinação da área foram mais diversificados e complexos do que os usados no cálculo do perímetro. No desenvolvimento desses processos, os alunos utilizaram vários modos de representação, reflectindo diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo.

Para o perímetro, recorreram essencialmente a abordagens concretas (utilização de instrumentos de medida) e simbólicas (aplicação de fórmulas). Particularmente, o processo mais utilizado para o cálculo do perímetro de polígonos consistiu em, inicialmente, determinar as medidas não conhecidas dos comprimentos dos lados e, depois, adicionar todas as medidas, sendo o resultado expresso através de unidades unidimensionais.

Para a área, os alunos recorreram a abordagens concretas (utilização de unidades físicas), figurativas (divisão em quadrículas) e simbólicas (aplicação de fórmulas). Particularmente, para a determinação da medida da área, os alunos usaram com frequência a "fórmula do rectângulo" independentemente da figura ser, ou não, rectangular. Este trabalho com dimensões lineares levou, muitas vezes, a que a área fosse expressa através de unidades unidimensionais.

Os processos mais simbólicos estão ligados a operações numéricas. Assim, o cálculo do perímetro foi associado geralmente à adição e o cálculo da área à multiplicação.

Perante situações similares, os alunos podem nem sempre recorrer ao mesmo processo de resolução ou não o desenvolver da mesma maneira.

Limitações

Indicam-se de seguida algumas limitações que se devem ter presentes na leitura das conclusões do estudo.

Atendendo às características próprias do modelo de investigação seguido, deve naturalmente aceitar-se a interferência do investigador sobre o problema em estudo, quer através do seu quadro de referências pessoais quer pelo contacto directo com os participantes. Por isso, houve a preocupação permanente de clarificar e fundamentar as intenções e pressupostos do investigador, assim como as opções metodológicas assumidas.

Dada a grande importância atribuída às opiniões expressas pelos participantes, a dificuldade de comunicação revelada por alguns deles possivelmente não permitiu captar com clareza os seus pontos de vista.

Os materiais concretos foram os materiais usados pelos alunos na realização das tarefas da aula enquadradas na "Unidade Didáctica: Área e Perímetro", ou seja, num contexto envolvendo o estudo de sistemas de medida.

Apesar de os participantes terem alguma tradição de utilização de materiais concretos, o período de tempo ao longo do qual decorreu o estudo poderá ser considerado relativamente curto.

Considerações Finais

Uma reflexão sobre todo o percurso do estudo possibilita o estabelecimento de recomendações para investigações futuras e de algumas sugestões para a formação de professores.

A primeira delas prende-se com as opções metodológicas assumidas no desenvolvimento do estudo. Algumas das limitações geralmente apontadas a investigações de carácter quantitativo podem ser ultrapassadas recorrendo a estudos mais qualitativos, pois estes asseguram uma maior sensibilidade às opiniões e diferenças individuais dos participantes e, portanto, uma maior profundidade nas abordagens. Realmente, com o presente estudo foi possível verificar e fundamentar vantagens claras da utilização de materiais manipulativos como, por exemplo, a maior disponibilidade referida pelos alunos para comunicar e discutir opiniões próprias. Assim, neste contexto, é de recomendar que estudos futuros sobre a integração de materiais no ensino-aprendizagem da Matemática sejam conduzidos numa perspectiva qualitativa e enfatizem o(s) ponto(s) de vista dos alunos.

Também parece ser pertinente estudar as concepções e os processos de resolução desenvolvidos por alunos mais novos, nomeadamente, crianças do 1º Ciclo do Ensino Básico. Na verdade, as concepções e práticas reveladas pelos participantes reforçam a convicção sentida ao longo do estudo de que as suas experiências anteriores com os conceitos de comprimento, de perímetro e de área assentaram em abordagens demasiado abstractas e simbólicas, não tendo, por isso, correspondido às suas reais necessidades.

Para evitar esta "generalização" precoce, é fundamental que, desde sempre, sejam proporcionadas aos alunos situações de aprendizagem orientadas para a compreensão dos conceitos. De facto, os conceitos, sendo construídos com base nas experiências e vivências de cada um, devem ser tratados sob diferentes perspectivas a fim de facilitar a ligação do concreto ao abstracto. Aceitando que a aprendizagem das "fórmulas" é importante para os alunos, essa aprendizagem apenas constituirá uma ajuda efectiva se baseada numa boa compreensão conceptual.

Reconhece-se como importante que todas estas considerações devam merecer uma atenção especial em programas quer da formação inicial quer da formação contínua e que os professores as considerem relevantes na planificação e concretização das situações de ensino. Para isso, deverão privilegiar ambientes de aprendizagem envolvendo uma utilização criteriosa de materiais adequados e variados. Deverão diversificar as abordagens dos conteúdos, analisando-os de diferentes pontos de vista, de modo a possibilitar a compreensão dos conceitos e o domínio dos procedimentos de cálculo. Deverão propor aos alunos actividades de experimentação, dar-lhes oportunidade de manipular, conjecturar, ensaiar, comparar, medir, descobrir e avaliar e, assim, permitir-lhes tornarem-se mais responsáveis e autónomos nas suas aprendizagens. Deverão estimular situações em que os alunos possam comunicar, partilhar e discutir opiniões próprias, contribuindo para que se sintam mais motivados e empenhados, porque participantes activos.

Conclui-se este estudo com a forte convicção de que "aprender matemática" deve ser entendido essencialmente como "fazer matemática". Daqui decorre a necessidade de adoptar metodologias centradas no aluno que o tornem agente activo e consciente da sua própria aprendizagem, pois ela será tanto mais significativa quanto mais as experiências de aprendizagem o mobilizarem não só como aluno mas também como pessoa.

REFERÊNCIAS

Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática: a experiência do projecto* MAT_{789} (Tese de doutoramento). Lisboa: APM.

Almeida, C. (1992). Atitudes em relação à matemática. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática*. Lisboa: IIE & SEM-SPCE.

Arnal, J., Rincón, D. & Latorre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodologia*. Barcelona: Editorial Labor.

Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Orlando, FL: Allyn and Bacon.

Bennett, A. & Nelson, L. (1985). *Mathematics, an informal approach*. Newton: Allyn and Bacon, Inc.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Borg, W. & Gall, M. (1983). *Educational research: an introduction*. New York: Longman Inc.

Brown, C., Carpenter, T., Kouba, V., Lindquist, M., Silver, E. & Swafford, J. (1988a). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: discrete mathematics, data organization and interpretation, measurement, number, and operations. *Mathematics Teacher*, 81(4), 241-248.

Brown, C., Carpenter, T., Kouba, V., Lindquist, M., Silver, E. & Swafford, J. (1988b). Secondary school results for the fourth NAEP mathematics assessment: algebra, geometry, mathematical methods, and attitudes. *Mathematics Teacher*, 81(5), 337-347, 397.

Bruner, J. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Havard University Press.

Caraça, B. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Livraria Sá da Costa Editora.

Carpenter, T. & Osborne, A. (1976). Needed research on teaching and learning measure. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop.* Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis Center.

Costa, C. (1985). A compreensão do conceito de área entre alunos do magistério primário. In D. Fernandes (Ed.), *ProfMat*, 1, 146-166.

Dienes, Z. (1970). *Aprendizado moderno da matemática.* Rio de Janeiro: Zahar Editores.

Douady, R. & Perrin, M. (1986). Concerning conceptions of area (pupils aged 9 to 11). *Actas do 10º encontro internacional do PME*, London, 253-258.

Entonado, F. (1991). La investigación acción. Métodos y técnicas de investigación qualitativas. In Ó. Barrio (Ed.), *Prácticas de enseñanza. Proyectos curriculares y de investigación-acción.* Alcoy: Editorial Marfil.

Erasmie, T. & Lima, L. (1989). *Investigação e projectos de desenvolvimento em educação.* Braga: Universidade do Minho.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching.* New York: MacMillan.

Evertson, C. & Green, J. (1986). Observation as inquiry and method. In M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching.* New York: MacMillan.

Fennema, E. (1974). Models and mathematics. In S. Smith & C. Backman (Eds.), *Teacher-made aids for elementary school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Fernandes, D. (1984). *A mathematics needs assessment of the elementary school teachers of Viana do Castelo* (Tese de mestrado). Boston: School of Education.

Fernandes, D. (1989). Perspectivas de renovação em educação matemática. *Actas do ProfMat 89*, Viana do Castelo, 5-16.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, 18, 64-66.

Fernandes, D. (1992). *Práticas e perspectivas de avaliação: dois anos de experiência no IIE.* Texto policopiado.

Fernandes, H. (1990). *Efeito de três métodos de ensino na aprendizagem do conceito de número racional no segundo ciclo do ensino básico* (Tese de mestrado). Braga: Instituto de Educação.

Guba, E. & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research.* Londres: Sage.

Guimarães, H. (1990). Ensino da matemática nos anos 90: uma leitura dos Standards. *Actas do ProfMat 90, vol.1*, Caldas da Rainha, 11-26.

Hirstein, J., Lamb, C. & Osborne, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher*, 25(6), 10-16.

Jacobs, H. (1974). *Geometry*. San Francisco: W. H. Freeman and Company.

Lemos, V. (1993). *O critério do sucesso. Técnicas de avaliação da aprendizagem*. Lisboa: Texto Editora.

Lesh, R., Landau, M. & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*. Orlando, FL: Allyn and Bacon.

Macias, E. (1976). *Didáctica de las matemáticas*. Salamanca: Ediciones Anaya.

Matos, J. F. (1991). *Logo na educação Matemática: um estudo sobre as concepções e atitudes dos alunos* (Tese de doutoramento). Lisboa: Projecto MINERVA, DEFCUL.

Matos, J. F. (1992). Atitudes e concepções dos alunos: definições e problemas de investigação. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática*. Lisboa: IIE & SEM-SPCE.

Matos, J. M. (1992). Conhecimento, sociedade e afectividade. In M. Brown, D. Fernandes, J. F. Matos & P. Ponte (Eds.), *Educação Matemática*. Lisboa: IIE & SEM-SPCE.

Ministério da Educação (1991a). *Organização curricular e programas: ensino básico, 2º ciclo, vol. I*. Lisboa: ME.

Ministério da Educação (1991b). *Programa de matemática - plano de organização do ensino-aprendizagem: ensino básico, 2º ciclo, vol. II*. Lisboa: ME.

Monteiro, C., Fernandes, D., Guimarães, H. & Matos, J.M. (1985). Materiais manipulativos no ensino da matemática elementar. In D. Fernandes (Ed.), *ProfMat*, 1, 40-45.

Muro, M. (1989). El uso de materiales en la enseñanza de las matemáticas. *Studia Pædagogica*, 21, 127-145.

National Council of Supervisors of Mathematics (1989). Essential mathematics for the twenty-first century. *Arithmetic Teacher*, 37(1), 44-46.

National Council of Teachers of Mathematics (1985). *Agenda para a acção*. Lisboa: APM.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: APM & IIE.

Osborne, A. (1976). The mathematical and psychological foundation of measure. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC Science, Mathematics, and Environmental Education Information Analysis Center.

Ponte, J. (1990). Documentos programáticos no ensino da matemática, 1975-1990. *Actas do ProfMat 90, vol.1*, Caldas da Rainha, 1-10.

Post, T. (1992). Some notes on the nature of mathematics learning. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: research-based methods*. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Raphael, D. & Wahlstrom, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achivevement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 173-190.

Reys, R. (1974). Considerations for teachers using manipulative materials. In S. Smith & C. Backman (Eds.), *Teacher-made aids for elementary school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Schwandt, T. (1994). Constructivist, interpretivist approaches to human inquiry. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research*. Londres: Sage.

Serrazina, L. & Matos, J. M. (1986). *O geoplano na sala de aula*. Lisboa: APM.

Silva, J. (1975). *Guia para a utilização do compêndio de matemática*. Lisboa: GEP.

Sowell, E. (1989). Efects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505.

Suydam, M. & Higgins, J. (1977). *Activity-based learning in elementary school mathematics: recommendations from research*. Columbus: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Szetela, W. & Owens, D. (1986). Finding the area of a circle: use a cake pan and leave out the pi. *Arithmetic Teacher*, 33(9), 12-18.

Thiessen, D., Wild, M., Paige, D. & Baum, D. (1989). *Elementary mathematical methods*. New York: Macmillan Publishing Company.

Wilson, P. & Osborne, A. (1992). Foundational ideas in teaching about measure. In T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: research-based methods*. Massachusetts: Allyn and Bacon.

Zabalza, M. (1992). *Planificação e desenvolvimento curricular na escola*. Rio Tinto: Edições ASA.

ANEXOS

ANEXO A

Teste de Papel e Lápis

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

TESTE DE AVALIAÇÃO

ANO LECTIVO DE 1993/1994

NOME ....

Nº .... **ANO/TURMA** .... **DATA** ..../....... / ....

- Antes de começares a responder, lê com atenção cada pergunta.

- <u>Deves indicar os cálculos</u> que tiveres de efectuar.

- Sempre que pedido, <u>deves justificar a tua resposta</u>.

- Podes utilizar, sempre que quiseres, os materiais disponíveis na sala.

Responde o mais completamente possível.

QUESTÃO 1

Escreve a unidade de medida que escolherias para indicar:

- a área de um campo de andebol ....

- a altura do castelo ....

- a largura da porta da sala de aula ....

- a área de um postal de correio ....

QUESTÃO 2

A Rita, a Sara e a Inês mediram, em palmos, a largura da mesa de trabalho e chegaram aos seguintes resultados:

Rita: quase 3 palmos;

Sara: 3 palmos;

Inês: 3 palmos e meio.

Qual das amigas tem o palmo com maior comprimento? ....

Explica o teu raciocínio:

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 3

O Luís e o Rui mediram o comprimento de um lápis novo.

O Luís disse que era 1 e o Rui disse que era 2.

Qual dos dois amigos tem razão? ....

Justifica a tua resposta:

....

....

....

....

....

QUESTÃO 4

Diz, por palavras tuas, <u>o que é o perímetro</u>:

....

....

....

....

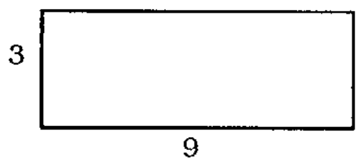
....

QUESTÃO 5

<u>Estima</u> o perímetro do quadro da sala de aula: ....

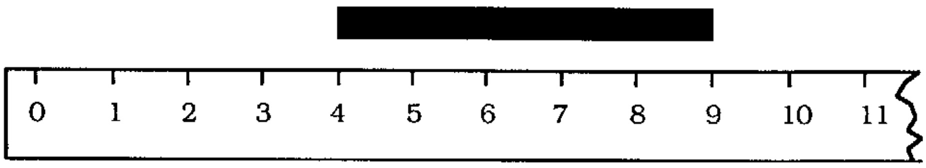
QUESTÃO 6

Indica a distância à volta do rectângulo: ....



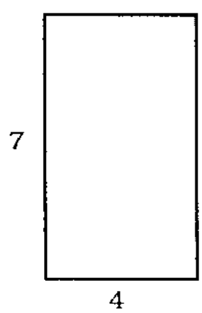
QUESTÃO 7

Diz qual é o comprimento da barra preta: ....



QUESTÃO 8

Calcula o perímetro do rectângulo:



Resposta: ....

QUESTÃO 9

Diz, por palavras tuas, o que é a área:

....

....

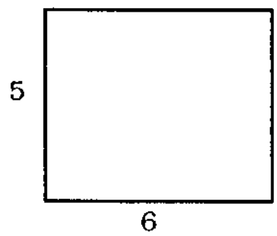
....

....

....

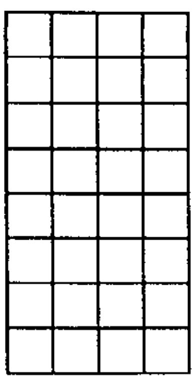
QUESTÃO 10

a) Calcula a área do rectângulo:



Resposta: ....

b) Calcula a área do rectângulo:



Resposta: ....

QUESTÃO 11

Abre o envelope "questão 11".

Como vês, neste envelope estão os seguintes modelos em cartolina:

- 1 rectângulo de cor branca;
- 14 quadrados de cor rosa;
- 14 quadrados de cor verde.

a) Indica a relação que existe entre as áreas do quadrado "rosa" e do quadrado "verde": ....

....

....

b) Calcula a área do rectângulo "branco" usando como unidade a área do quadrado "rosa".

Resposta: ....

c) Calcula a área do rectângulo "branco" usando como unidade a área do quadrado "verde".

Resposta: ....

d) Que conclusões podes tirar acerca do cálculo da área de uma figura usando unidades de medida diferentes: ....

....

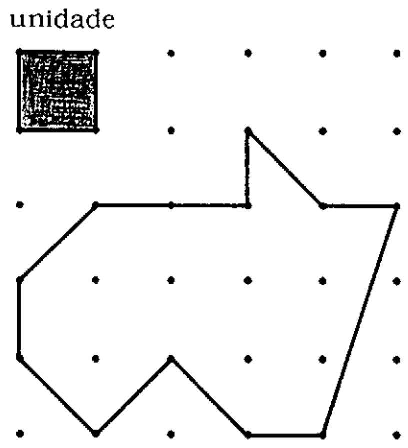
....

....

....

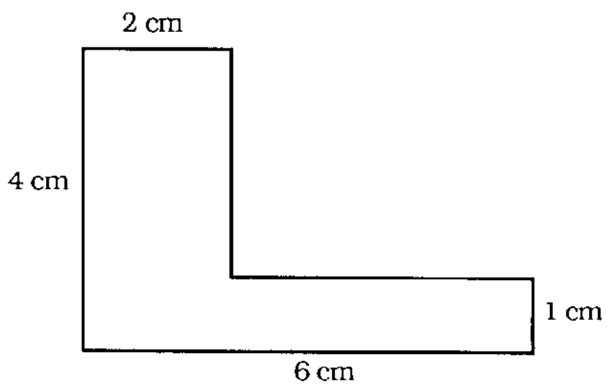
QUESTÃO 12

a) Calcula a área da figura:



Resposta: ....

b) Calcula a área da figura:

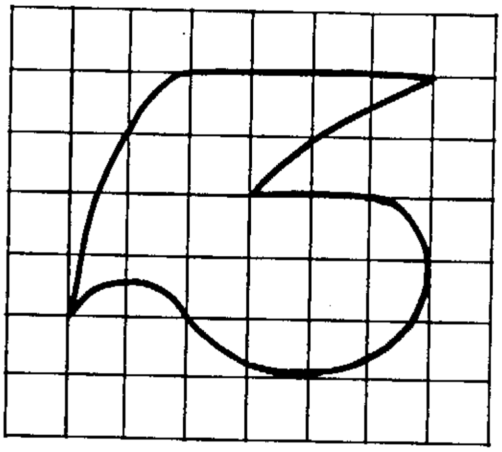


Resposta: ....

QUESTÃO 13

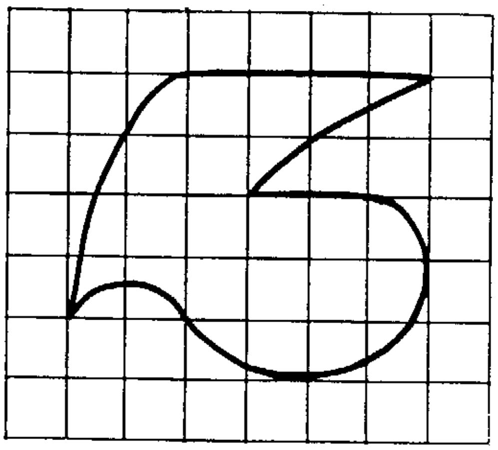
Tomando como unidade a área de uma quadrícula, determina dois enquadramentos da área da figura e regista os resultados.

a) Enquadramento interior:



enquadramento interior: ....

b) Enquadramento exterior:



enquadramento exterior: ....

Podes concluir que ....

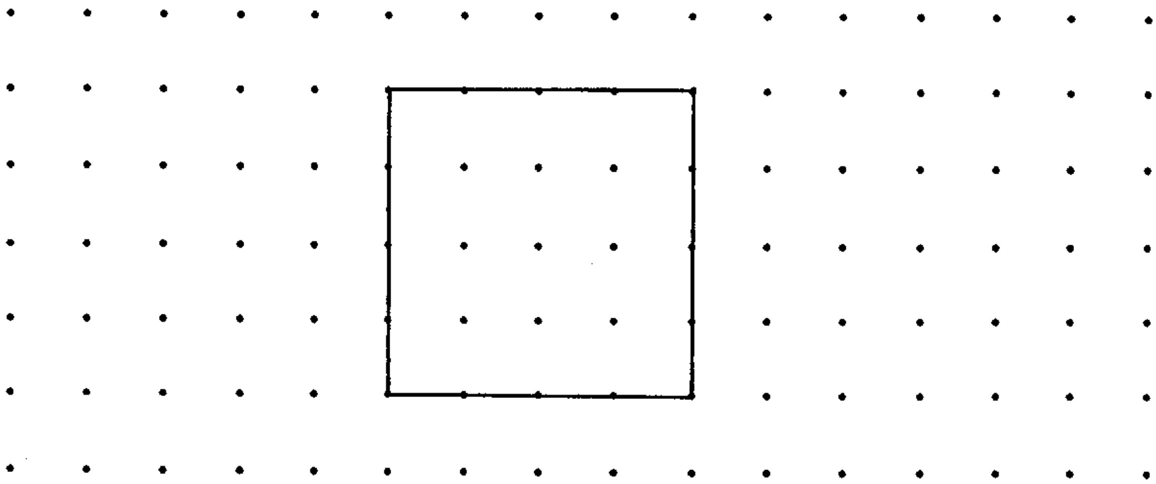
....

....

....

QUESTÃO 14

É dado o quadrado com o lado de comprimento 4 cm.



a) Constrói um outro rectângulo com o mesmo perímetro:

b) Constrói um outro rectângulo que tenha a mesma área:

QUESTÃO 15

Numa escola, os alunos de uma turma têm 12 grades iguais e pretendem vedar um canteiro de forma <u>rectangular</u> e encostado a um muro.

Indica todas as possibilidades que os alunos têm de colocar as grades:

Em que situações o canteiro tem a maior área? ....

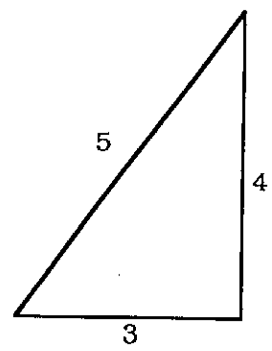
....

....

QUESTÃO 16

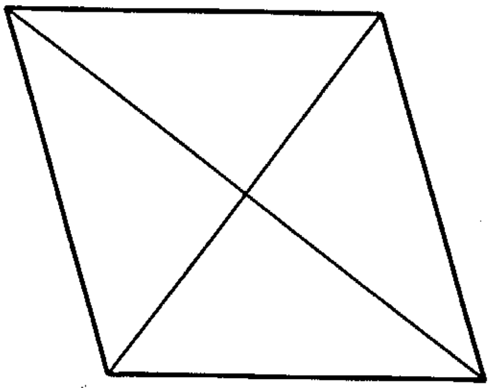
Abre o envelope "<u>questão 16</u>".

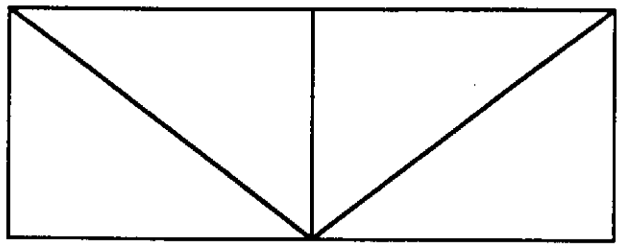
Este envelope contém um puzzle em cartolina que é constituído por 4 triângulos geometricamente iguais cujas dimensões são, em cm:



O Nuno, a São e a Zé decidiram brincar com este puzzle.

As soluções descobertas pelo Nuno e pela São foram:





Quando chegou a sua vez de descobrir outra forma, a Zé disse:

> "Que engraçado!
> As vossas figuras têm a mesma área e o mesmo perímetro."

Estás de acordo com a opinião da Zé? ....

Justifica a tua opinião:

....

....

....

....

....

ANEXO B

Questionário

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

QUESTIONÁRIO

ANO LECTIVO DE 1993/1994

NOME ....

Nº .... **ANO/TURMA** .... **DATA** ..../....... / ....

- Nas aulas sobre **áreas** e **perímetros** trabalhaste com diversos tipos de materiais.
- Gostaria de saber a tua opinião sobre a utilização de materiais nas aulas de Matemática.

- Para isso, pedia-te para preencher este questionário composto por oito questões.

- Para responder, deves colocar uma cruz (**X**) no quadrado que melhor corresponda à tua opinião e dizer, sempre que pedido, as razões da tua escolha.

Responde o mais completamente possível.

Obrigado.

QUESTÃO 1

Os materiais que utilizaste ajudaram-te na realização das actividades propostas nas aulas?

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

Escreve **razões** que te levam a responder assim:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 2

Quais os materiais que gostaste mais de utilizar?

- ☐ régua e esquadro
- ☐ geoplano
- ☐ puzzles
- ☐ modelos em cartolina
- ☐ materiais de uso corrente (giz, paus, fio,...)
- ☐ outros: .... , ...

Escreve **razões** para a tua escolha:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 3

Tiveste dificuldades em utilizar os materiais?

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

Se respondeste **nunca** ou **poucas vezes**, passa à questão 4.

Se respondeste **muitas vezes** ou **sempre**, indica **dificuldades** que sentiste:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 4

Consideras as aulas de Matemática mais interessantes quando trabalhas com materiais?

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

Indica **razões** para teres esta opinião:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 5

A matéria é mais fácil de aprender quando usas materiais?

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

Diz **porquê**:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 6

Quando utilizas materiais preferes trabalhar sozinho ou trabalhar em grupo?

trabalhar sozinho ☐

trabalhar em grupo ☐

Escreve **razões** para a tua preferência:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

QUESTÃO 7

A utilização de materiais na aula de Matemática:

a) facilita a minha relação com os colegas

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

b) facilita a minha relação com o professor

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

c) ajuda-me a respeitar a opinião dos outros

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

d) ajuda-me a pensar por mim próprio

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

e) ajuda-me a ter confiança nas minhas capacidades

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

f) faz-me sentir mais seguro nas minhas opiniões

nunca	poucas vezes	muitas vezes	sempre
☐	☐	☐	☐

QUESTÃO 8

Que tipo de aulas de Matemática preferes?

☐ aulas em que trabalhas com materiais para realizar actividades e responder a questões.

☐ aulas em que o professor explica a matéria e depois resolves fichas ou exercícios no quadro e no caderno.

Indica **razões** para a tua preferência:

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Acrescenta **outras opiniões** que aches importante registar acerca do teu trabalho com materiais na aula de Matemática:

....

....

....

....

ANEXO C

Tarefas das Entrevistas Particulares

TAREFA 1

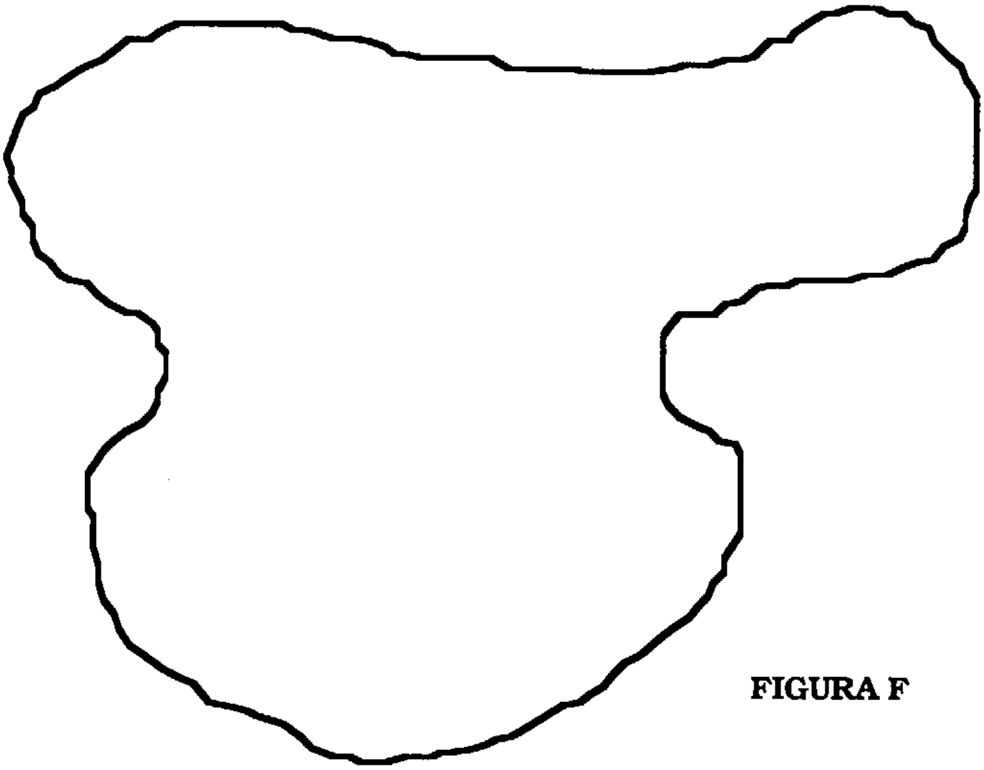


FIGURA F

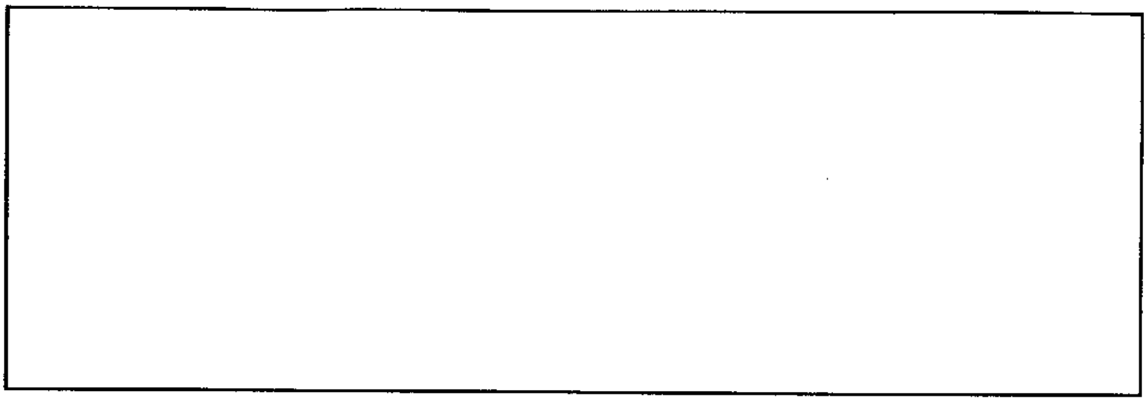
Para determinar a área desta figura F um teu colega seguiu o seguinte processo:

"Arranjo um fio.

Começando num ponto qualquer da linha fronteira, decalco-a totalmente com o fio até chegar de novo a esse ponto. Aí, corto o fio e uno as pontas.

Depois dou a este fio a forma de um rectângulo.

Com a ajuda de um esquadro meço o comprimento (c = 15 cm) e a largura (l = 5 cm).



Para calcular a área deste rectângulo aplico a fórmula A = c x l, ou seja, A = 15 x 5 = 75 cm^2.

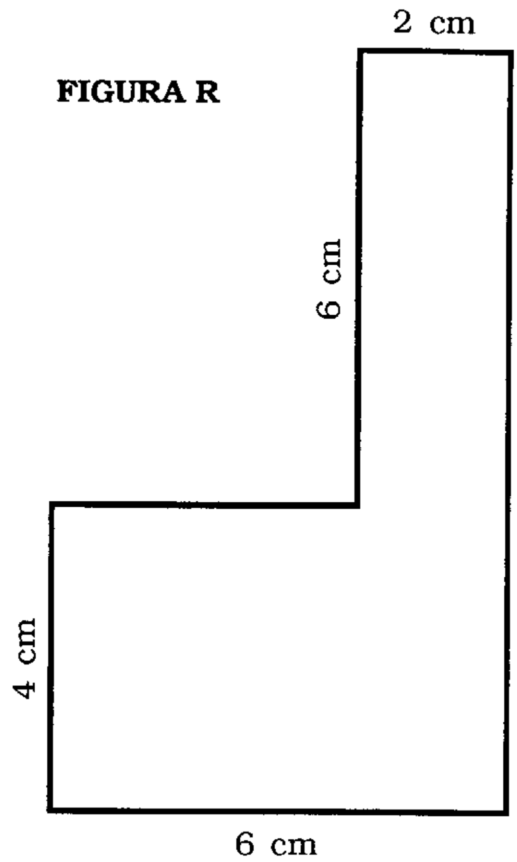
Posso então concluir que a área da figura F é também 75 cm^2".

Estás de acordo com o teu colega? Consideras que é um bom processo para determinar a área de figuras daquele tipo?

Material disponível:

- figura F, em papel branco;
- rectângulo de 15x5, em papel branco;
- fio;
- tesoura;
- régua e esquadro;
- material de escrita;
- rectângulo de 10x10, em papel branco;
- rectângulo de 2x18, em papel branco;
- unidades físicas, em cartolina
  - quadrados de 5x5;
  - quadrados de 2x2;
- quadriculado (cm^2), em acetato;
- ponteado (cm^2), em acetato.

TAREFA 2 Determina o perímetro e a área da figura R:



Material disponível:

- figura R, em papel branco;
- geoplano 10x10;
- elásticos;
- tesoura;
- régua e esquadro;
- material de escrita;
- unidades físicas, em cartolina
  - quadrados de 2x2;
- quadriculado (cm^2), em acetato;
- quadriculado (cm^2), em papel branco;
- ponteado (cm^2), em acetato;
- ponteado (cm^2), em papel branco.

TAREFA 3 Determina o perímetro e a área da figura S:

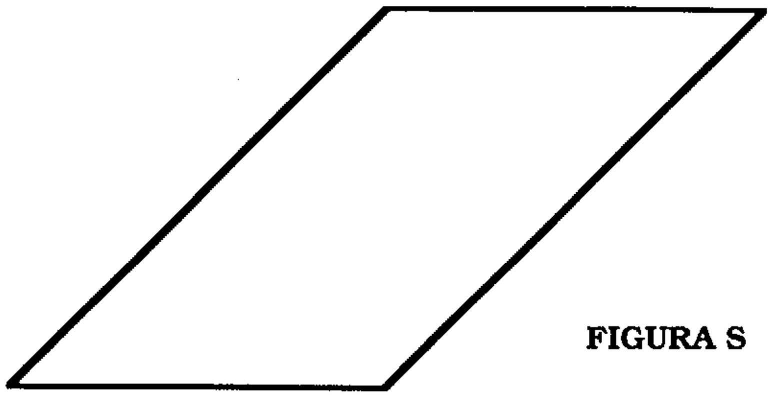


FIGURA S

Material disponível:

- figura S, em papel branco;
- figura S, em cartolina;
- geoplano 10x10;
- elásticos;
- tesoura;
- fio;
- régua e esquadro;
- material de escrita;
- unidades físicas, em cartolina
  - metades de quadrados de 5x5;
  - metades de quadrados de 2,5x2,5;
  - quadrados de 2x2;
- quadriculado (cm^2), em acetato;
- quadriculado (cm^2), em papel branco;
- ponteado (cm^2), em acetato;
- ponteado (cm^2), em papel branco.

ANEXO D

Fichas de Trabalho

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ...1....

1) <u>Comprimento da mesa</u>

registo das medições

unidade	número de unidades
pau	
giz	
lápis	
palmo	

conclusões

....

....

....

....

....

....

....

....

2) <u>Tampo da mesa</u>

registo das medições

unidade	número de unidades
folha azul	
folha rosa	

conclusões

....

....

....

....

....

....

....

....

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ..2....

1) <u>Área</u>

registo das medições

unidade		**área** fig.1	fig.2	fig.3
◺	a			
□	b			
▭	c			
☐	d			

conclusões

....

....

....

....

....

....

....

....

2) <u>Perímetro</u>

registo das medições

unidade	**perímetro** fig.1	fig.2	fig.3
cm			
dm			

conclusões

....

....

....

....

....

....

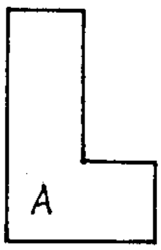
....

....

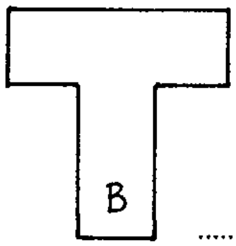
DISCIPLINA DE MATEMÁTICA	
Nome	Ano/Turma ....

Assunto:	Ficha de Trabalho nº ..3....

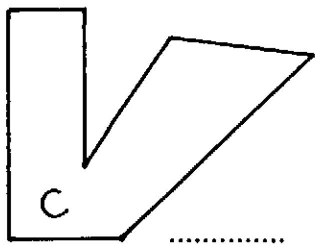
1) Usando a régua, calcula o perímetro das figuras A, B e C:



....



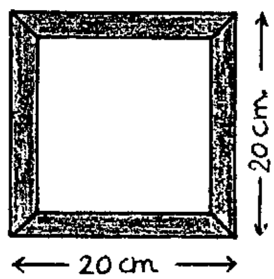
....



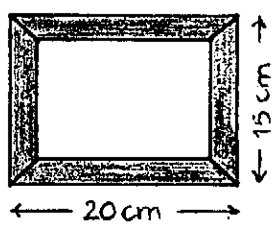
....

2) O perímetro de uma piscina é 34 metros. Sabendo que três dos seus lados têm de comprimento 7 m, 10 m e 5 m, qual é o comprimento do outro lado?

3) O João tem uma ripa de madeira com 3 metros de comprimento que vai utilizar para fazer molduras com estas formas e dimensões:



Quais e quantas molduras pode o João construir?

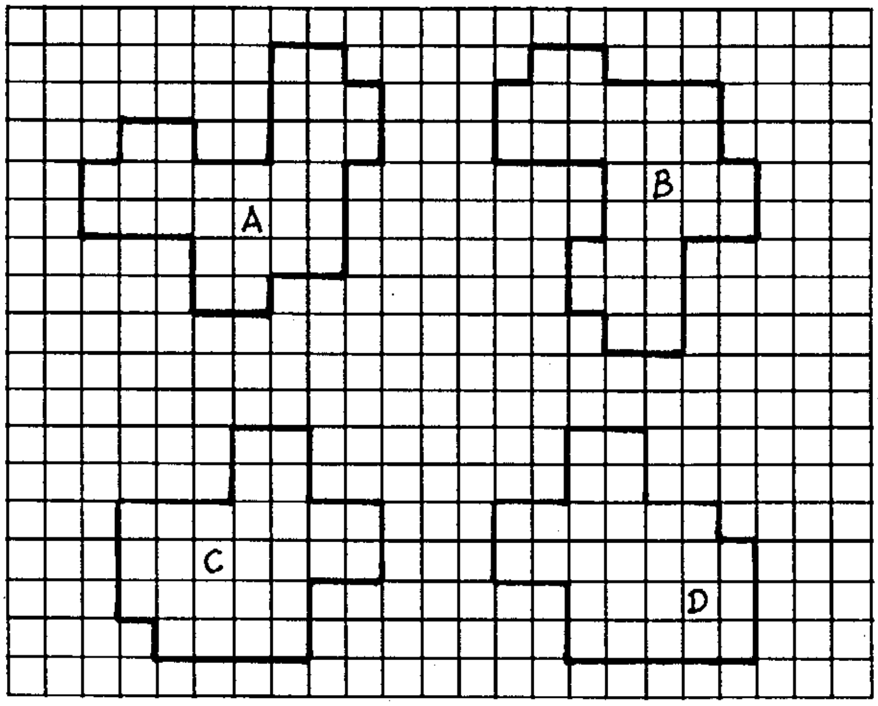


DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ..4...

Observa as figuras:



1) Com o auxílio de papel vegetal, decalca a figura A e verifica se coincide, ponto por ponto, com a figura B.

Conclusão: A e B são <u>figuras geometricamente iguais</u> porque ......

....

....

2) Procede de igual modo para as figuras C e D.

Conclusão: C e D .... figuras geometricamente iguais.

3) Determina o número de quadrículas de cada figura e regista-o na tabela:

figura	número de quadrículas
A	
B	
C	
D	

Conclusões: A e B são geometricamente iguais e ....

....

ou seja, têm ....

C e D não são geometricamente iguais e ....

....

ou seja, têm ....

Duas figuras são <u>equivalentes</u> quando ....

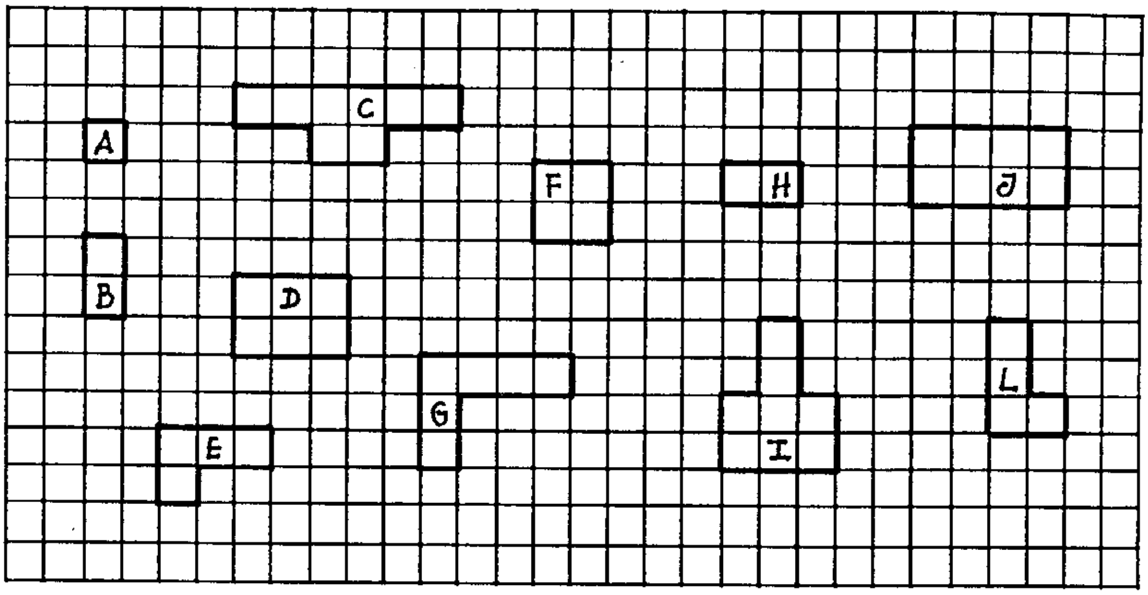
....

....

4) Diz se é verdadeiro (V) ou falso (F):

- Todas as figuras equivalentes são geometricamente iguais .... ☐
- Todas as figuras geometricamente iguais são equivalentes .... ☐

5) Observa as figuras:



• Tomando como unidade a área da figura A, calcula a área das figuras:

B→........ C→........ D→........ E→........ F→........

G→........ H→........ I→........ J→........ L→........

• Tomando como unidade a área da figura B, calcula a área das figuras:

C→........ D→........ E→........ F→........ G→........

H→........ I→........ J→........ L→........

• Indica duas figuras que sejam geometricamente iguais: .... e ....

• Indica duas figuras equivalentes mas que não sejam geometricamente iguais: .... e ....

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ..5...

Representa no geoplano e regista os resultados no papel ponteado:

1) Duas figuras equivalentes:

2) Duas figuras equivalentes mas não geometricamente iguais:

3) Um triângulo e um quadrado equivalentes:

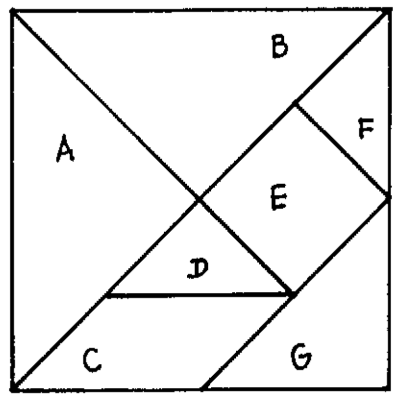
4) Um triângulo e um rectângulo equivalentes:

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ...6...

Na figura está representado um puzzle muito antigo de origem chinesa - o puzzle **tangram**. É formado por sete figuras: cinco triângulos (A, B, D, F, G), um quadrado (E) e um paralelogramo (C):



1) Os triângulos A e B têm a mesma área.

Investiga que relação existe entre as áreas das figuras:

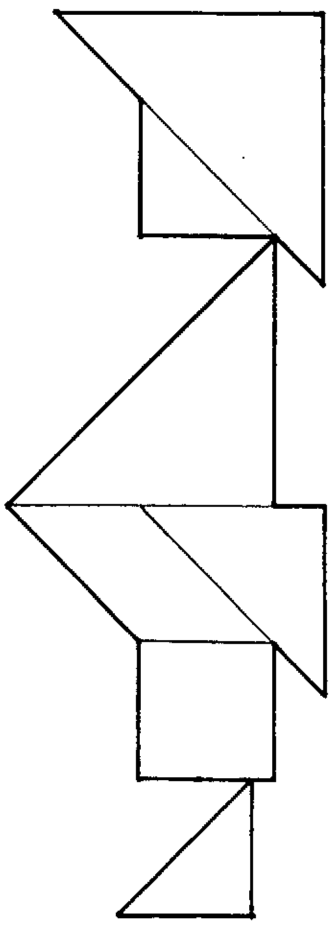
- D e F ....
- A e G ....
- G e D ....
- A e D ....
- E e F ....
- C e F ....

2) Verifica que o paralelogramo C, o quadrado E e o triângulo G são equivalentes.

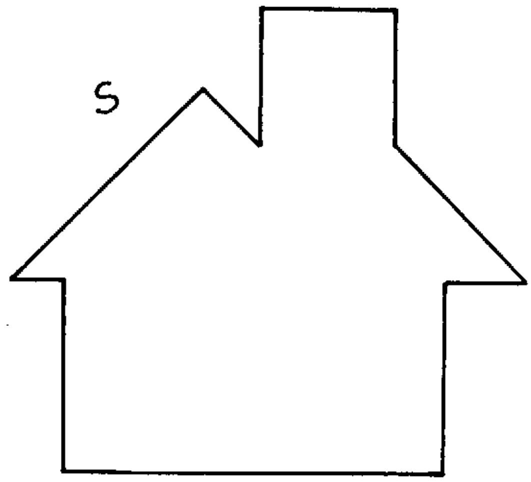
3) Utilizando todas as peças do **tangram** podem construir-se figuras bem interessantes chamadas figuras tangram.

Com o teu puzzle forma as figuras R, S e T:

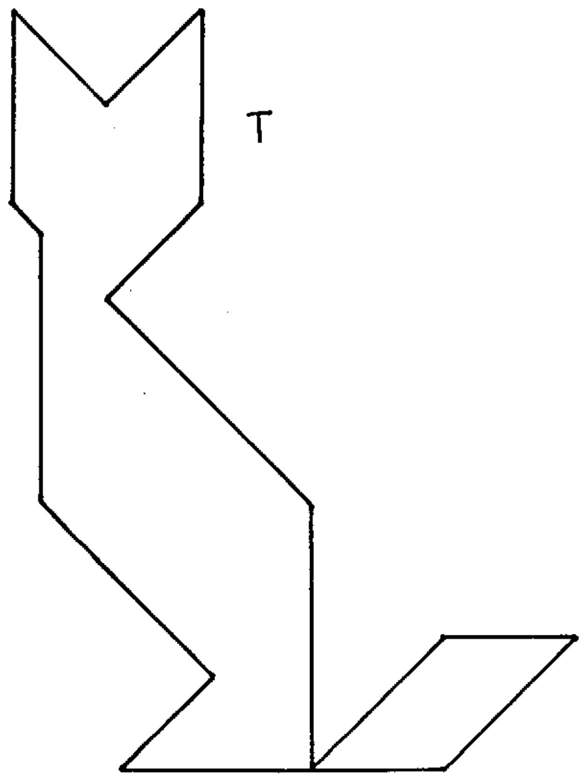
R



S



T



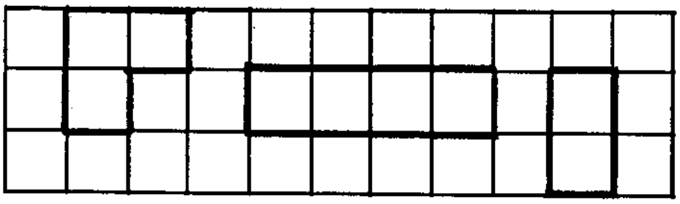
4) Inventa, agora, outras figuras tangram e regista-as no teu caderno diário.

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

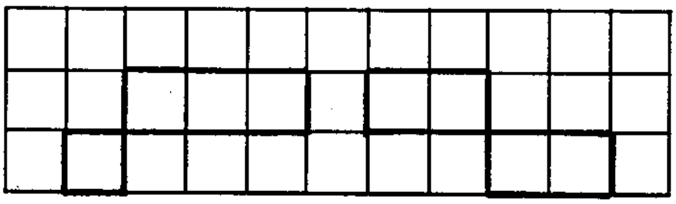
Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ...7...

Polimінós são figuras planas formadas por quadrados geometricamente iguais unidos dois a dois por um lado completo:

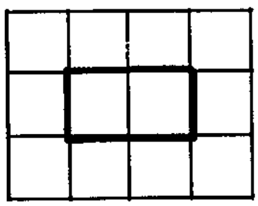


são poliminós.



não são poliminós.

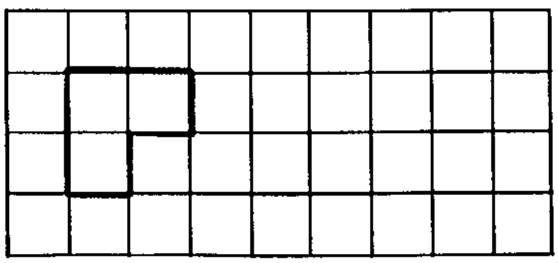
• Já conheces um poliminó formado por dois quadrados - **dominó**:



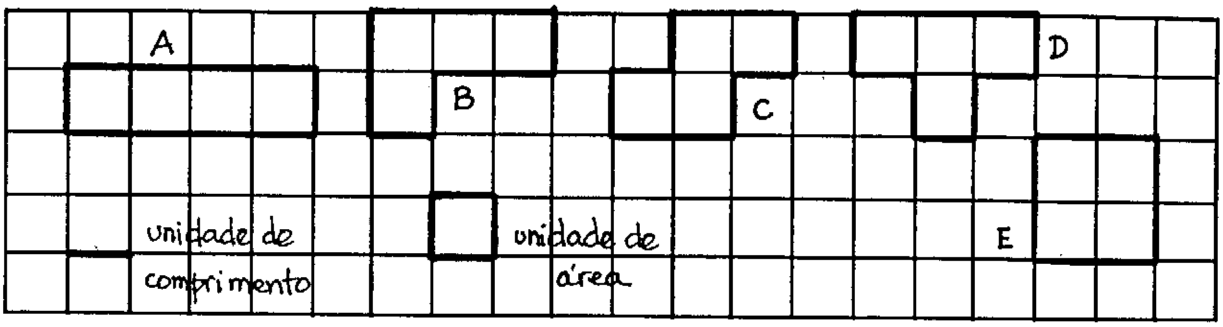
Vamos descobrir outros poliminós.

Podes utilizar os quadrados em cartolina.

• Com três quadrados - **triminós** - existem dois. Descobre o que falta e regista-o:



• Com quatro quadrados - **tetraminós** - existem cinco:



Utilizando estas unidades de medida, completa a tabela e tira conclusões:

tetraminó	perímetro	área
A		
B		
C		
D		
E		

conclusões

....

....

....

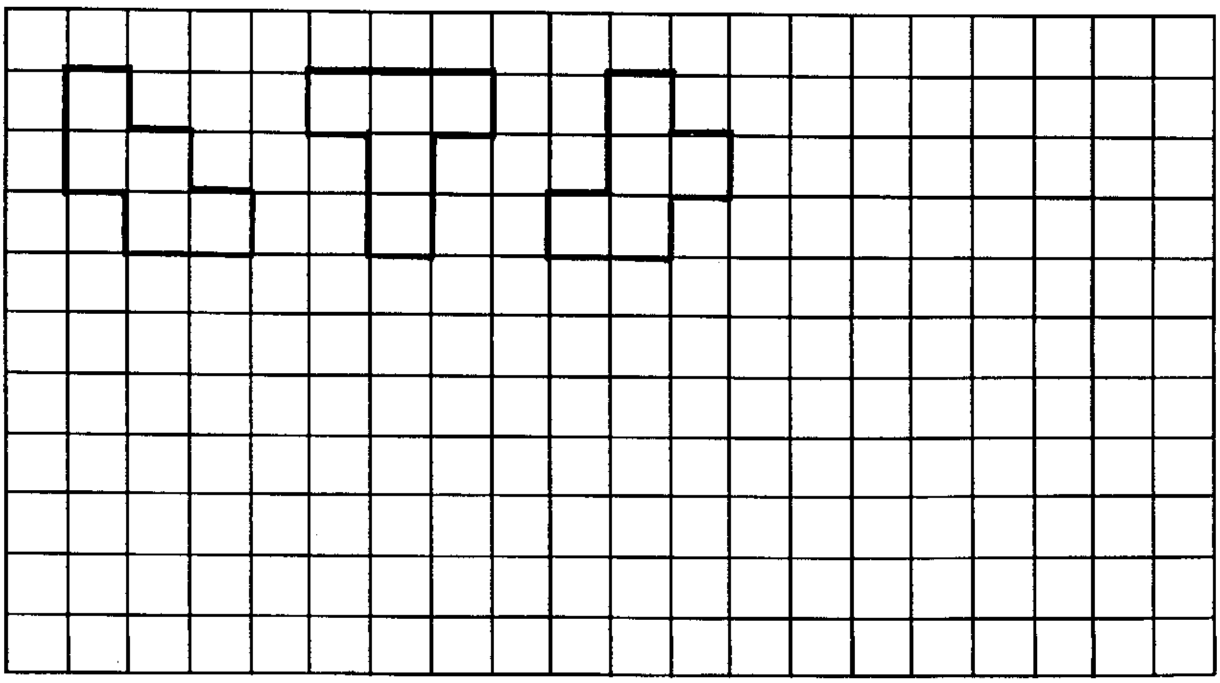
....

....

....

• Com cinco quadrados - **pentaminós** - existem doze.

Descobre os restantes e regista-os:



DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

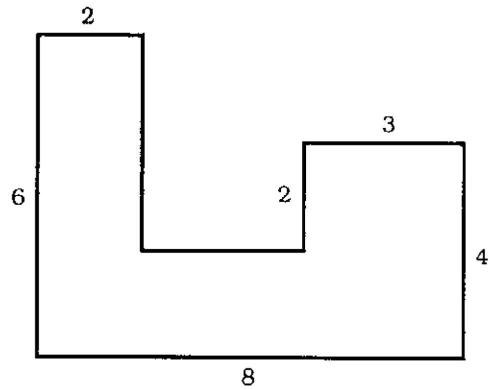
Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ...8...

1) A casa da Sara tem um terraço com a forma e as dimensões, em metros, representadas na figura.

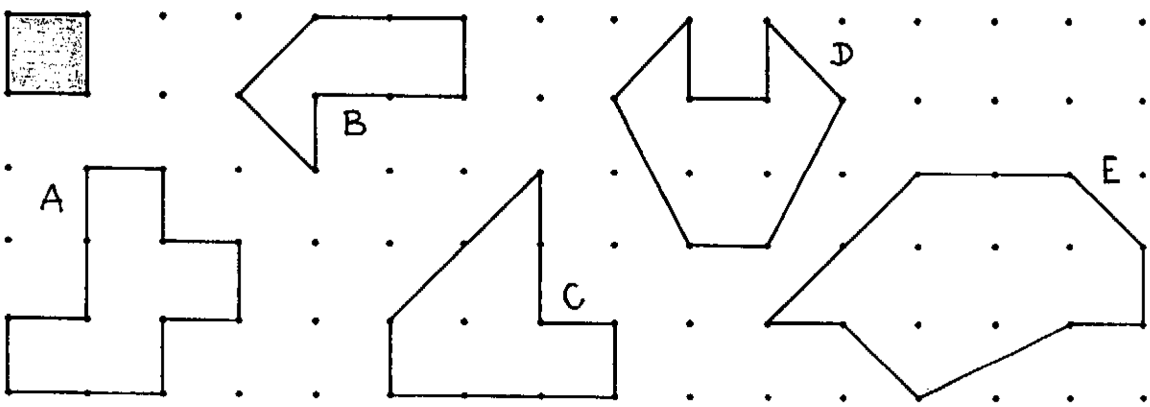
Os pais decidiram pavimentá-lo com mosaicos quadrados com o comprimento do lado 25 cm e pediram à Sara para calcular o número de mosaicos necessário.

No entanto, a Sara está um pouco atrapalhada pois o terraço não tem a forma rectangular.

És capaz de ajudar a Sara?



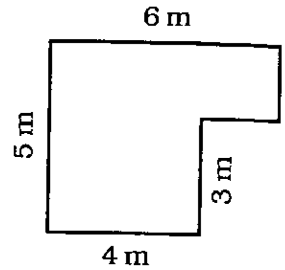
2) Reproduz estas figuras no teu geoplano:



Considerando como unidade de medida a área do quadrado assinalado, calcula a área das figuras:

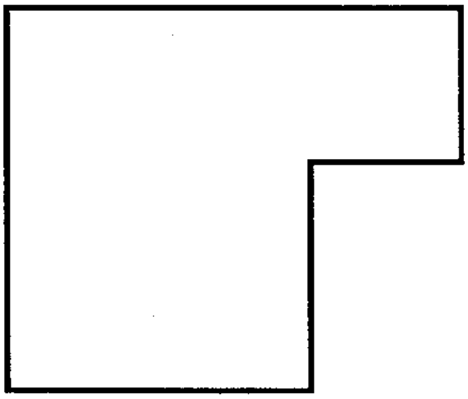
A→........ B→........ C→........ D→........ E→........

3) O João tem três carpetes rectangulares que cobrem, totalmente e sem sobreposições, o chão de uma sala.



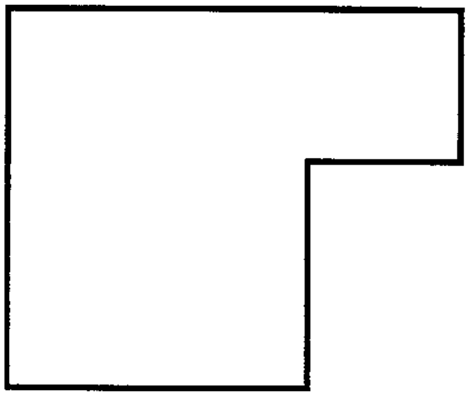
• Representa, nos esquemas, as três carpetes em cada um dos casos, indicando as dimensões de cada uma delas:

<u>1º caso</u>: duas das carpetes têm as mesmas dimensões:



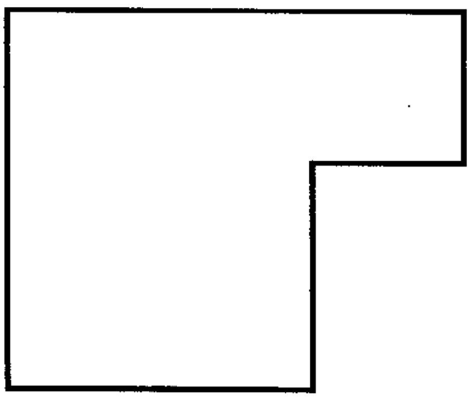
- carpete A: ....
- carpete B: ....
- carpete C: ....

<u>2º caso</u>: uma das carpetes é quadrada:



- carpete A: ....
- carpete B: ....
- carpete C: ....

• Considera, agora, que duas das carpetes do João são quadradas. Preenche o esquema e calcula mentalmente a área de cada carpete:



- área da carpete A: ....
- área da carpete B: ....
- área da carpete C: ....

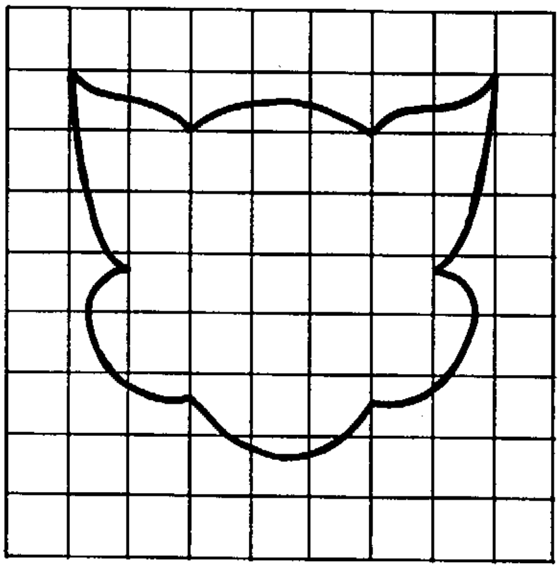
• A área do chão da sala é ....

DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... **Ano/Turma** ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº** ...9...

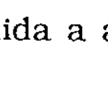
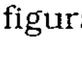
1) Tomando como unidade a área de uma quadrícula, determina dois <u>enquadramentos</u> da área da figura:



- enquadramento interior: ....
- enquadramento exterior: ....

conclusão: ....
....
....
....

2) Para estimar a área de uma figura, fizeram-se dois enquadramentos: um usando como unidade de medida a área da figura A e o outro utilizando a área da figura B.

A   B

Qual dos enquadramentos obtidos é mais preciso? ....

Justifica a tua resposta: ....
....
....
....

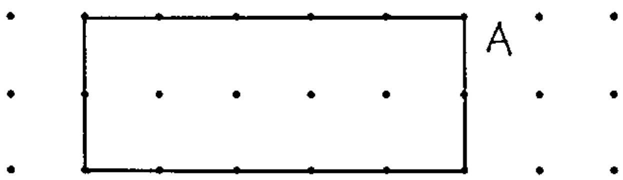
DISCIPLINA DE MATEMÁTICA

Nome .... Ano/Turma ....

Assunto: **Ficha de Trabalho nº ..10...**

PROBLEMA 1

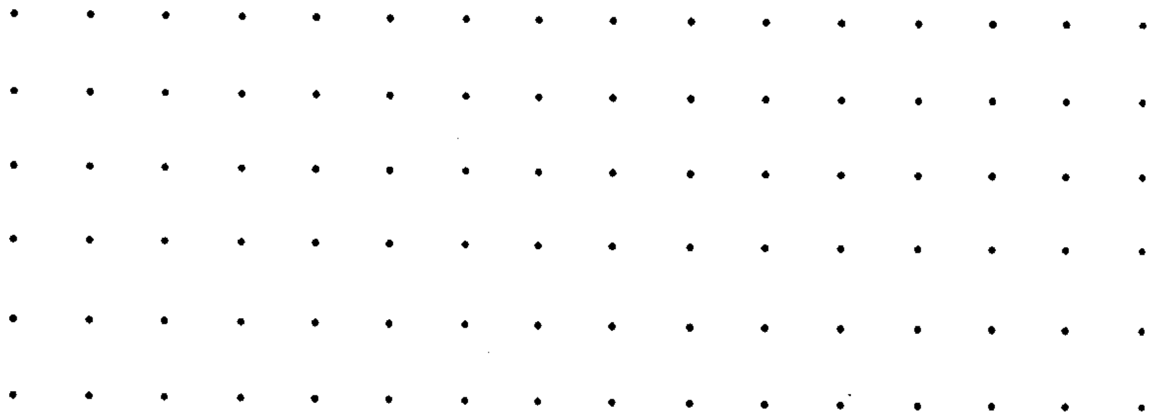
Verifica que o rectângulo A tem:



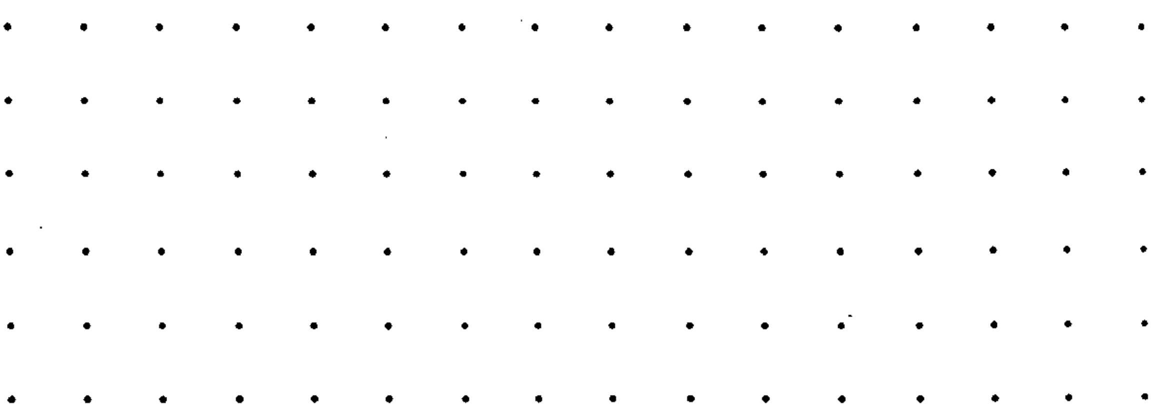
- área 10.

- perímetro 14.

a) Representa um outro rectângulo com a mesma área de A mas com perímetro diferente:



b) Representa um outro rectângulo com o mesmo perímetro de A mas com área diferente:



PROBLEMA 2

A casa do Miguel ocupa uma superfície rectangular de 8m de largura e 14m de comprimento e está rodeada por um passeio com 2m de largura.

a) Faz um esquema que ajude a compreender a situação:

b) Calcula a área do passeio:

Resposta: ....

PROBLEMA 3

Usando grades iguais, pretende-se vedar um canteiro de forma rectangular e encostado a um muro.

a) Supõe que se utilizavam 8 grades para vedar o canteiro.

Representa todas as possibilidades de colocação das grades:

• Em que situações o canteiro tem a maior área? ....

....

....

PROBLEMA 3

b) Supõe, agora, que se usavam 10 grades para vedar o canteiro.

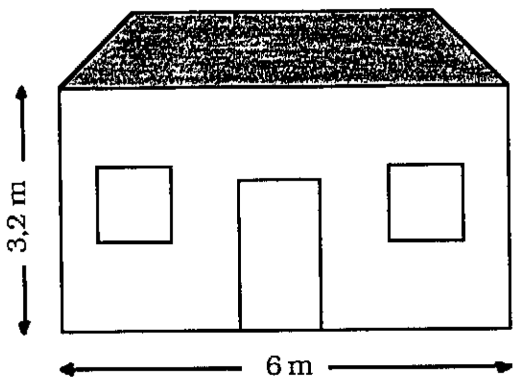
Representa todas as possibilidades de colocação das grades:

- Em que situações o canteiro tem a menor área?

- Em que situações o canteiro tem a maior área?

PROBLEMA 4

A figura mostra a fachada da casa que o Sr. António vai pintar.



As duas janelas são quadradas cujo lado tem 1m de comprimento e as dimensões da porta são 1,1m e 2m.

A tinta que o Sr. António vai usar vende-se em latas de 1 litro ao preço de 500$00 e cada lata dá para pintar $4m^2$.

Quanto é que o Sr. António vai gastar na compra da tinta necessária para pintar a fachada da casa?

Resposta: ....