

DINÂMICA DO DESDOBRAMENTO DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS COM RECURSO AO GEOGEBRA 2D

Ilda Reis, Edite Cordeiro

Instituto Politécnico de Bragança
Campus de Santa Apolónia, Apartado 134
5301-857 Bragança, Portugal
e-mail: ildareis@ipb.pt
emc@ipb.pt

Manuel Delgado

Centro de Matemática, Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687
4169-007 Porto, Portugal
e-mail: mdegado@fc.up.pt

Resumo: O GeoGebra é um software educacional livre que permite manipular objetos matemáticos do plano, representando-os algebricamente e geometricamente. Neste artigo recorreremos a conceitos matemáticos, como matrizes de mudança de base e transformações lineares, a fim de simularmos a representação de objetos tridimensionais em GeoGebra e implementarmos um procedimento para a planificação de prismas regulares retos.

Abstract: GeoGebra is a free educational software that allows to manipulate mathematical plane objects, representing them algebraically and geometrically. In this paper we use mathematical concepts, such as, change of basis matrices and linear transformations in order to simulate the representation of three-dimensional objects in GeoGebra and to implement a procedure for flattening regular straight prisms.

palavras-chave: demonstração dinâmica; planificação; prisma.

keywords: dynamic proof; net; prism.

1 Introdução e motivação

Em Portugal, à semelhança de outros países, a geometria no plano e no espaço integra os currículos de matemática. A investigação de propriedades de objetos geométricos sem a sua visualização e manipulação pode não permitir desenvolver a perceção dos conceitos envolvidos. Os recursos dinâmicos facilitam a formulação de conjecturas e a posterior justificação e validação. Projetado especificamente para fins educacionais, o software GeoGebra utiliza

em simultâneo um sistema de álgebra computacional, um sistema geométrico interativo e um sistema de cálculo, possibilitando uma aprendizagem experimental.

Neste artigo recorreremos a sistemas tridimensionais (3D) projetados em ambiente bidimensional (2D), manipuláveis através de parâmetros angulares, para simular a representação de objetos geométricos do espaço e apresentamos um procedimento para uma planificação de um prisma regular reto. Tal pressupõe o desdobramento das linhas poligonais que são as fronteiras das suas bases.

2 Desdobramento de linhas poligonais fechadas

Começamos por rodar um ponto do plano em torno de outro fixo, relacionamos alguns elementos de um polígono regular e procedemos ao desdobramento da linha poligonal de um qualquer polígono regular.

2.1 Rotações no plano e elementos de um polígono regular

A aplicação linear $R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada (x, y) associa o ponto obtido pela rotação, em torno da origem $O = (0, 0)$, de uma amplitude θ radianos, no sentido direto, é representada pela matriz de rotação a seguir:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\{u_1, u_2\} = \{(\cos(\theta), \text{sen}(\theta)), (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 (ver, por exemplo [2]), por isso R_θ também se diz uma matriz de mudança de base. O sistema $\{O, u_1, u_2\}$ é um novo referencial ortogonal.

Em geral, a rotação no plano de um ponto $P = (x, y)$ em torno de um ponto $C = (a, b)$, de uma amplitude θ radianos, no sentido direto, é definida por $R_{\theta, C}(x, y) = T^{-1}(R_\theta(T(x, y)))$ onde T é a translação definida por $T(x, y) = (x - a, y - b)$ e R_θ a aplicação acima referida.

Um polígono regular de n lados ($n \geq 3$), \mathcal{P}_n , determina, na circunferência circunscrita, arcos cuja medida do ângulo ao centro é de $\eta = 2\pi/n$ radianos, valor coincidente com a medida dos ângulos externos de \mathcal{P}_n . Além disso, se as arestas de \mathcal{P}_n medirem ℓ unidades, o raio da tal circunferência é $\frac{\ell}{2 \text{sen}(\frac{\eta}{2})}$.

Seja $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ o conjunto dos vértices de \mathcal{P}_n enumerados de forma sequencial e seja $V_{n+1} \equiv V_1$. Sem perda de generalidade, consideramos $V_1 = O = (0, 0)$, $V_2 = (\ell, 0)$ e $C = \left(\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2 \text{tg}(\frac{\eta}{2})}\right)$ o centro da circunferência circunscrita. As coordenadas dos restantes vértices de \mathcal{P}_n obtêm-se

aplicando rotações sucessivas, de η radianos, a V_1 , em torno de C , isto é, $V_{i+1} = R_{\eta,C}^i(V_1)$ para qualquer $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

2.2 Desdobramento da linha poligonal associada a \mathcal{P}_n

Uma rotina para o desdobramento da linha poligonal \mathcal{LP}_n de \mathcal{P}_n é a seguinte:
 Para todo $i \in \{0, \dots, n - 2\}$

- Rodar o segmento $[V_{n-i}V_{n+1}]$ de uma amplitude de $\eta = 2\pi/n$ radianos (no sentido indireto), em torno de V_{n-i} , para alinhar com a aresta $[V_{n-1-i}V_{n-i}]$ e identificar $R_{\eta,V_{n-i}}(V_{n+1})$ com V_{n+1} ;
- Juntar o segmento obtido à aresta $[V_{n-1-i}V_{n-i}]$.

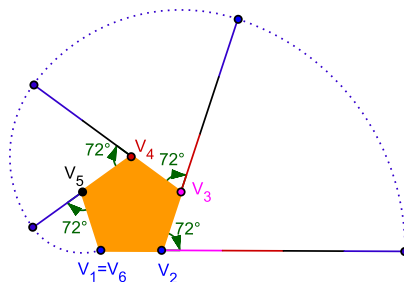


Figura 1: Ilustração da rotina aplicada a \mathcal{LP}_5

Não é difícil verificar que \mathcal{LP}_n fica retificada após $n - 1$ rotações. Além disso, para $m \in [0, n - 1]$, a posição de V_{n+1} é dada por $R_{-\alpha\eta, V_{i_{rot}}}(V_{i_{rot}} + n_l(V_{i_{rot}+1} - V_{i_{rot}}))$, onde $\alpha = m - [m]$, $i_{rot} = [n - m]$, $n_l = [m] + [|\cos(\pi m)|]$.

3 Planificação de prismas regulares em GeoGebra

Após darmos os fundamentos para a implementação em GeoGebra de referenciais 3D projetados e manipuláveis em função de parâmetros angulares e de uma origem livre, um pouco à semelhança do que foi feito em [1], apresentamos uma planificação possível para um prisma regular reto.

3.1 Projeção e manipulação de referenciais tridimensionais

Sejam R_x , R_y e R_z as matrizes de rotação do sistema $\{Oxyz\}$, em torno do eixo x , y e z , de amplitude α , β e φ , respetivamente. A orientação específica de um dado objeto quando submetido a uma sequência das três

rotações é determinada pela transformação linear definida pelo produto das três matrizes, que em geral depende da ordem dos fatores.

A projeção de um objeto $3D$ num plano é uma representação $2D$ desse objeto, usualmente designada de perspectiva. A sua posição depende do plano de projeção considerado. Em geral, a projeção de um espaço vetorial V sobre um subespaço $S \subseteq V$ é uma aplicação linear g de V , tal que $g(V) = S$ [2].

Sejam p a projeção ortogonal do sistema $\{O, i, j, k\}$ no plano $\{Oyz\}$ e M_p a matriz que a representa. A aplicação definida por $M = \lambda M_p R_x R_y R_z$, transforma a base canônica de \mathbb{R}^3 , $\{i, j, k\}$, projetando-a à escala $\lambda \in \mathbb{R}^+$ no plano $\{Oyz\}$, originando os vetores $u = Mi$, $v = Mj$ e $w = Mk$ de \mathbb{R}^2 . Dado um ponto $O_T \in \mathbb{R}^2$, a translação associada a $\overrightarrow{OO_T}$ dá origem ao referencial projetado $\{O_T, u, v, w\}$, onde perspectivamos objetos $3D$. Assim, um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é representado no plano de projeção por $O_T + xu + yv + zw$.

3.2 Construção e planificação de prismas regulares retos

Construído, no plano, um polígono regular de n lados de medida ℓ , mergulha-mo-lo em \mathbb{R}^3 e representa-mo-lo no referencial $\{O_T, u, v, w\}$, obtendo a base inferior do prisma. A base superior obtêm-se a partir desta aplicando-lhe a translação associada a hw , onde h é a altura do prisma. Unindo os vértices correspondentes das duas bases obtemos as arestas das faces laterais.

Uma planificação possível deste prisma obtém-se aplicando a rotina descrita em 2.2 às linhas poligonais associadas às bases do prisma e rebatendo as bases sobre o plano determinado pelas faces laterais retificadas.

4 Conclusões

Representações dinâmicas de sólidos geométricos permitindo a sua planificação e encaixe efetivam a compreensão dos conceitos envolvidos e podem dar resposta a questões como a do empacotamento.

Referências

- [1] Jeong-Eun Park, Young-Hyun Son, O-Won Kwon, Hee-Chan Yang e Kyeong-Sik Choi, “Constructing 3D graph of function with GeoGebra(2D)”, *1st Eurasia Meeting of GeoGebra*, Proceedings, 2010, Eds. Sevinç Gülsecen, Zerrin Ayvaz Reis, Tolga Kabaca, pp. 46-55.
- [2] G. Strang, *Linear Álgebra and its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich College Publishers, New York, 1988.