Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança

As tarefas matemáticas

A dinâmica da aula de Matemática pode ser influenciada por múltiplos factores. Pires (1999) adianta alguns desses factores condicionantes, destacando: (a) o contexto escolar e social, através da organização e funcionamento da escola, dos recursos existentes e das expectativas das famílias; (b) os alunos, com as suas concepções e atitudes em relação à Matemática, com os seus conhecimentos e experiências, e pela forma como encaram a escola; (c) o professor, com os seus conhecimentos e as suas competências profissionais; e (d) as tarefas propostas pelo professor e os materiais que os alunos utilizam para as resolver. Relativamente a este último aspecto, como refere o National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007), o papel do professor na "selecção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental" (p. 58). De facto, a dinâmica da aula é bem diferente se o professor apresenta uma ficha de trabalho com exercícios para resolver ou se propõe a realização de uma investigação, um problema, um projecto, ou se conduz uma discussão colectiva (Ponte & Serrazina, 2000).

O potencial educativo das tarefas pode variar significativamente. Num estudo desenvolvido pela Associação de Professores de Matemática [APM] (1998) é defendido que a renovação do ensino e da aprendizagem da Matemática passa muito pela alteração (e diversificação) do tipo e da natureza das tarefas dominantes na sala de aula, numa perspectiva da valorização da experiência matemática através da resolução de problemas, das investigações matemáticas e de outras situações que envolvam os alunos em processos de pensamento matemático e de comunicação. Também o NCTM (1994), discutindo as características desejáveis das tarefas para promover a aprendizagem, considera que estas se devem basear em Matemática sólida e significativa, no conhecimento das aptidões, interesses e experiências dos alunos e no conhecimento da variedade de formas pelas quais aprendem Matemática. As tarefas a propor devem apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a sua compreensão e as aptidões matemáticas, estimular a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a

Matemática, mostrar a Matemática como uma actividade humana permanente, ter em atenção e assentar em diferentes experiências e predisposições dos alunos, e promover o desenvolvimento da predisposição para fazer Matemática.

As tarefas matemáticas, conforme o seu tipo, podem permitir diferentes formas de *entender* ou *fazer* Matemática. Podem apelar mais a processos rotineiros ou constituir um desafio à exploração ou descoberta, exigir um raciocínio mais reprodutor ou um raciocínio mais criador, permitir uma maior uniformidade de ritmos de aprendizagem ou favorecer uma maior diversificação, ter um carácter mais convergente ou um carácter mais divergente, reforçar uma visão da Matemática mais estática e como "produto acabado" ou apontar para uma visão mais dinâmica e como "construção", estabelecendo conexões matemáticas e proporcionando experiências matemáticas com mais significado. Por isso, as tarefas podem ser contrastadas, por exemplo, relativamente ao seu grau de dificuldade (mais fáceis ou mais difíceis), ao seu grau de abertura (mais abertas ou mais fechadas) ou ao tempo necessário para a sua resolução (mais rápidas ou mais demoradas). Evidentemente que, tratando-se de comparações, ressalva-se o seu carácter relativo e subjectivo, pois o que pode ser considerado fácil para uma pessoa pode não o ser para outra.

Uma distinção muito útil é a que decorre quando se cruza o grau de abertura com o grau de dificuldade. A visualização deste cruzamento num referencial apresentada por Ponte (2003) é muito sugestiva (ver Figura 1) e destaca quatro tipos de tarefas matemáticas — exploração, exercício, problema, investigação — cuja caracterização tem recolhido bastante consenso, mesmo a nível de orientações curriculares oficiais.

Figura 1 — Os diversos tipos de tarefas, em termos dos graus de dificuldade e de abertura (retirado de Ponte, 2003, p. 27).

Os problemas e as investigações aparecem como expressões do trabalho de natureza não rotineira, referindo-se a processos matemáticos complexos e envolvendo actividade fortemente problemática (Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002). Embora considerados dois conceitos muito próximos, podem cumprir diferentes funções. Por exemplo, o termo "resolução de problemas" refere-se a uma actividade convergente em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, recorrendo a técnicas e a estratégias adequadas, enquanto que o termo "investigação" é visto como uma actividade mais divergente em que se incentiva a ser curioso, a procurar estratégias alternativas, a considerar o que sucederia se se alterassem certas condições ou a generalizar a situação (Chamoso & Rawson, 2001). Também as etapas previsíveis a percorrer na resolução de cada uma das tarefas podem destacar diferenças entre os dois tipos. Seguindo o modelo de Pólya (1977), a resolução de um problema passa por: (1) compreender o problema; (2) conceber um plano de resolução; (3) executar o plano; e (4) reflectir sobre o trabalho realizado. Já uma investigação tem uma abordagem diversa, passando por: (1) formular a questão a investigar; (2) formular conjecturas relativamente a essa questão; (3) testar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las; e (4) validar e comunicar os resultados (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998).

Evidentemente que uma situação, em abstracto, pode ter as características de uma investigação e a sua exploração na sala de aula distorcer, na prática, essas características. Daqui decorre que o papel do professor na organização e gestão da sala de aula é determinante, como bem ilustram Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Portela, Rocha e Gouveia (2005, p. 20):

> (…) Se bem que a aprendizagem da Matemática é fortemente estruturada pela natureza das tarefas que o professor propõe aos alunos, não menos importante é a forma como ele organiza a situação de aprendizagem e os papéis que reserva a si mesmo e aos alunos. Por exemplo, o professor pode colocar aos alunos uma tarefa investigativa que lhes permita descobrir um conjunto interessante de relações matemáticas mas acabar por tolher-lhes essa possibilidade, caso não lhes forneça tempo suficiente de trabalho autónomo, não oiça as suas ideias, não as ponha à discussão e validação colectiva, baseada em argumentos matemáticos, ou não lhes ofereça um papel relevante em termos das conclusões a tirar. Uma mesma tarefa pode ou não proporcionar aos alunos uma actividade de aprendizagem muito significativa em função do modo como o professor dinamizar a sua realização (…).

As investigações implicam que o professor faça um questionamento sistemático aos alunos, em tom de desafio, que prolongue e aprofunde as explorações e permita a formulação de conjecturas. O professor deve orientar o discurso na sala de aula atendendo à prática da "argumentação" (NCTM, 1994), de modo a conduzir os alunos a conjecturar, a explorar exemplos e contra-exemplos na investigação de uma conjectura e a justificarem as suas conjecturas apoiando-se em argumentos matemáticos. Atribuir um papel central à argumentação na sala de aula significa responsabilizar todos os alunos para que mostrem e expliquem os seus raciocínios, mas também para que se esforcem por compreender a argumentação dos outros.

Conhecimento e desenvolvimento profissionais do professor de Matemática

O professor de Matemática é confrontado com uma crescente (e alargada) exigência no seu trabalho de preparação e condução das aulas (e, em particular das tarefas a propor e da sua exploração) e na consequente tomada de decisões. Ser professor exige saberes muito complexos que se distribuem por dimensões e domínios diversificados. Veja-se, como exemplo, a caracterização do conhecimento profissional apresentada por Pires (2006) e esquematizada na Figura 2. A construção do conhecimento profissional vai ancorando-se nos campos disciplinar (Matemática), educativo e pedagógico, que suportam o conhecimento profissional mais geral, e é moldada pelo professor enquanto pessoa. Sintetizando este conhecimento mais geral, o autor destaca o conhecimento didáctico resultante de um entrelaçar permanente e dinâmico do conhecimento da Matemática, do conhecimento do contexto educativo e do conhecimento pedagógico, e de uma adequação ao contexto particular de trabalho do professor.

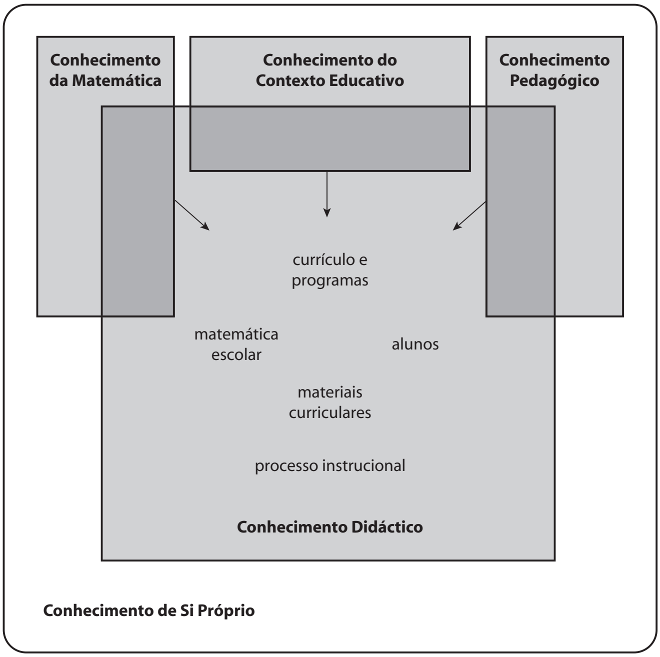

Figura 2 — Domínios essenciais do conhecimento profissional do professor (retirado de Pires, 2006).

Este conhecimento didáctico, muito próprio e característico dos professores, é o domínio do conhecimento profissional que se relaciona com a integração da Matemática na realidade escolar, as necessidades e concepções próprias dos alunos, o contexto curricular e as orientações programáticas, a diversidade de materiais curriculares disponíveis e os aspectos mais directamente relacionados com a preparação, condução e avaliação da prática lectiva. É "conhecimento pedagógico que ultrapassa o conhecimento da matéria per se para a dimensão do conhecimento da matéria para ensinar" (Shulman, 1986).

Mas os saberes do professor, nomeadamente o conhecimento didáctico, provêm, em grande medida, da reflexão sobre as suas práticas e da interacção com os outros professores. Este conhecimento prático, resultando da integração de saberes experienciais e de saberes teóricos, tem uma natureza contextualizada e é modelado pelas concepções, valores e intenções do professor (Elbaz, 1983), podendo ainda ser caracterizado como um conhecimento em acção e muito marcado pela prática da reflexão (Schön, 1992). Na opinião de Hiebert, Gallimore e Stigler (2002), é um conhecimento muito útil porque, estando ligado à prática, desenvolve-se em resposta a problemas específicos dessa prática, e é um conhecimento integrado, pormenorizado, concreto e específico. Mas, por outro lado, para que o conhecimento prático se torne, de facto, em conhecimento profissional, é necessário que esse conhecimento seja público e comunicado entre colegas, acumulável e partilhado.

Assim, programas de formação com objectivos e estrutura adequados (Darling-Hammond, Wei, Andree, Richardson & Orphanos, 2009), como o Programa de Formação Contínua em Matemática [PFCM] (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Portela, Rocha & Gouveia, 2005), podem constituir "espaços" de validação desse conhecimento de natureza mais prática e contribuir para um efectivo desenvolvimento profissional. O PFCM, em desenvolvimento desde 2005, propõe-se melhorar as aprendizagens em Matemática dos alunos dos seis ao doze anos, reconhecendo que os professores precisam de desenvolver atitudes positivas e de possuir um conhecimento sólido acerca da Matemática e do seu ensino.

Este programa de formação apresenta características bastante inovadoras e desejáveis na sua estrutura e organização. Canavarro e Rocha (2008) apontam-lhe as seguintes: (i) realização de diferentes tipos de sessões de formação, mas inter-relacionadas entre si, envolvendo os participantes em múltiplas dimensões educativas, num período alargado de tempo; (ii) possibilidade de experimentar situações de ensino novas e complexas; (iii) acompanhamento reflexivo dos participantes na sala de aula por parte do formador (habitualmente um educador matemático); (iv) reflexão colectiva acerca das aulas dos participantes; (v) reflexão individual e escrita, como forma de fomentar o desenvolvimento profissional; e (vi) possibilidade de continuidade e promoção da autonomia profissional. Assim, este modelo de formação reforça o trabalho conjunto dos professores e valoriza o trabalho produzido na aula, privilegiando dois instrumentos fundamentais que devem acompanhar continuamente o desenvolvimento profissional do professor: a cooperação e colaboração com outros professores e a reflexão (pessoal e conjunta) sobre a prática, criando condições para a partilha e a melhoria do conhecimento profissional dos participantes.

Por isso, e continuando a seguir Canavarro e Rocha (2008), o PFCM tem contribuído para a clarificação e aprofundamento do conhecimento matemático dos professores participantes, quer relativamente a conceitos e procedimentos em vários domínios da Matemática, quer relativamente à visão acerca da Matemática e a processos matemáticos (resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemáticos). Verifica-se uma melhoria global do conhecimento didáctico para enfrentar as diferentes exigências curriculares, especialmente na selecção e resolução na aula de tarefas de natureza diversa. Os participantes sentem-se mais confiantes com a Matemática, desenvolvendo atitudes mais positivas e elevando, assim, as expectativas acerca das capacidades dos seus alunos. É reconhecida a relevância da reflexão sobre o que acontece, identificando o que os alunos aprendem e os factores envolvidos e alargando as opções e decisões dos professores para o seu ensino. Também é valorizada a importância do trabalho colaborativo, quer com o formador quer com os outros professores, especialmente na abertura e partilha do que acontece na sala de aula. É visível, ainda, o desenvolvimento de atitudes profissionais mais questionadoras, no sentido de uma maior compreensão e melhoria das práticas lectivas.

Contexto e procedimentos

A experiência, que se descreve e analisa a seguir, desenvolve-se no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática e corresponde ao ciclo lectivo (planificação, condução da aula, reflexão sobre o que foi feito) de uma aula da professora Margarida. A aula realizou-se em Abril de 2008 numa turma de vinte e cinco alunos do quinto ano de escolaridade de uma escola EB2,3 do distrito de Bragança.

O Programa de Formação Contínua em Matemática

O PFCM é um programa de formação que se orienta para quatro objectivos principais: (i) promover um aprofundamento do conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores; (ii) favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplassem a planificação de aulas, a sua condução e reflexão por parte dos professores envolvidos, apoiados pelos seus pares e formadores; (iii) desenvolver uma atitude positiva dos professores relativamente à Matemática; e (iv) promover dinâmicas de trabalho em colaboração entre os professores nas escolas e com os formadores. Os conteúdos de formação previstos distribuem-se por cinco domínios: (i) o programa de Matemática do ensino básico (Ministério da Educação, 2007); (ii) os temas matemáticos e as capacidades transversais; (iii) a natureza das tarefas para os alunos; (iv) os recursos a utilizar, como contexto ou suporte das tarefas propostas; e (v) a cultura de sala de aula e de avaliação.

Para a concretização do PFCM nas escolas formam-se grupos de dez professores, em média, que realizam diferentes tipos de sessões de trabalho, tais como quinze sessões de formação em grupo (para aprofundamento da formação em Matemática e em Educação Matemática e para a planificação e reflexão da actividade associada à prática lectiva) e quatro sessões de acompanhamento individual em sala de aula (para o desenvolvimento de actividades curriculares na aula que concretizassem a planificação trabalhada nas sessões de formação em grupo e respectiva discussão). Ao longo do ano, os professores participantes devem elaborar um portefólio que reflicta o desenvolvimento profissional resultante da formação.

O estudo

Este estudo centra-se numa experiência de formação com o propósito de conhecer o modo como as tarefas de investigação são integradas no desenvolvimento do currículo e de aprofundar processos de reflexão sobre as práticas numa perspectiva de melhoria dos desempenhos profissionais. Como a investigação procura perceber o ponto de vista de uma professora, como interpreta as diferentes experiências que vai vivendo e que significados lhes atribui, o estudo segue uma abordagem de natureza essencialmente qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994; Bolívar, Domingo & Fernández, 2001).

A professora Margarida tem quarenta anos de idade. Desenvolve a actividade profissional como professora de Matemática e Ciências da Natureza do 2.º ciclo há dezassete anos, após a conclusão da respectiva licenciatura em ensino. Com a participação no PFCM, através da troca de experiências com outros professores, pretende aperfeiçoar o seu desempenho, aprofundar os conhecimentos matemático e didáctico e melhorar as práticas lectivas.

Margarida integra um grupo de formação (de que o autor é o formador) de treze professores pertencentes a dois agrupamentos de escolas, que frequentam o PFCM, pela primeira vez, desde Outubro de 2007. Tal como os restantes participantes, ultrapassadas algumas indecisões iniciais, valoriza bastante a sua participação na formação e tenta aproveitar e integrar ideias novas (ou aspectos que não fazem parte das suas rotinas curriculares) nas práticas de ensino, numa perspectiva de se desenvolver profissionalmente. Em especial, atribui muito valor à partilha de materiais e experiências, quer na fase de preparação da prática lectiva quer na fase de reflexão sobre o que aconteceu, contribuindo, no grupo, para uma dinâmica de trabalho muito favorável à experimentação e posterior discussão com todos.

O processo de recolha de dados suportou-se: (i) em transcrições de episódios das sessões de formação e de episódios de aula; (ii) em produções escritas que a professora apresenta no seu portefólio de desempenho, nomeadamente, as relativas à aula analisada e posterior reflexão; (iii) em produções escritas feitas pelos alunos na resolução das tarefas; (iv) em notas de campo registadas pelo autor nas diversas etapas do processo, em especial, na sala de aula (como observador participante) e nas sessões de reflexão com a Margarida e com os restantes professores do grupo de formação; e (v) em estudos, teóricos ou empíricos, sobre o tema em análise.

O processo de tratamento e análise dos dados foi orientado para o propósito principal do estudo e conduzido tendo em conta as fases características de uma investigação de natureza qualitativa e interpretativa, como sejam "o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (Bogdan & Biklen, 1994, p. 205). A análise dos dados iniciou-se com uma aproximação *flutuante* (Bardin, 1995) e continuou com uma cada vez maior sistematização, procurando dar aos diversos materiais uma ordenação coerente e levando ao estabelecimento de classificações e categorias (Bogdan & Biklen, 1994), envolvendo negociação de significados com os professores participantes.

Na aula de Matemática da professora Margarida

A secção que se segue é apresentada na primeira pessoa e as partes do texto colocadas entre aspas correspondem a expressões do discurso dos intervenientes (professora, alunos, formador).

As motivações

Ao longo do ano lectivo, várias sessões de formação em grupo foram dedicadas a trabalhar e discutir o tipo e a natureza das tarefas matemáticas. Os professores participantes leram textos mais especializados relacionados com o tema, analisaram episódios de sala de aula relatados por outros professores e resolveram situações propostas por mim. Estas estratégias formativas suportaram a discussão e a análise de implicações dos diferentes tipos de tarefas previstas nos documentos curriculares oficiais (exercícios, explorações, investigações matemáticas, problemas, jogos, projectos) na aprendizagem dos alunos, no ensino do professor e na gestão e organização da sala de aula, especialmente, nos papéis a desempenhar pelos alunos e pelo professor.

Decorrente desse trabalho, a professora Margarida começou a integrar tarefas de natureza mais aberta nas práticas lectivas. Este tipo de tarefas não era habitual nas suas aulas, mas as discussões havidas nas sessões de formação em grupo despertaram-lhe a vontade de as experimentar com os seus alunos, de uma forma mais sistemática, pelas vantagens que lhe passou a reconhecer. Como as respostas numa tarefa anterior foram muito prometedoras, na gestão curricular da unidade de ensino que estava a abordar, decidiu explorar regularidades numéricas propondo aos seus alunos que descobrissem relações no triângulo de Pascal:

> Os alunos tinham, numa aula anterior, demonstrado grande interesse numa actividade que lhes propus. Na tarefa tiveram que encontrar regularidades com potências: regularidades do algarismo das unidades em potências de base 2 e de base 3 com expoentes diferentes. O entusiasmo que revelaram e a curiosidade que eu própria tinha em colocá-los à prova numa situação diferente e mais complexa foram também razões que me levaram a aplicar esta tarefa. [portefólio]

Margarida considerou que a minha presença na sala de aula era importante para ela (eu já tinha estado três vezes na sala de aula dessa turma e os alunos gostavam que isso acontecesse) para se sentir mais apoiada no desenvolvimento da aula e para que a reflexão sobre a acção e a reflexão sobre a reflexão na acção (Schön, 1992) pudessem ser partilhadas e mais aprofundadas. Decidimos que essa aula constituiria a quarta sessão de acompanhamento em sala de aula.

A preparação da aula

No seu portefólio, Margarida explicitou e justificou as razões da escolha da tarefa do ponto de vista matemático, considerando a proposta de trabalho muito "interessante em termos de aprendizagens matemáticas, nomeadamente no que diz respeito ao estudo de sequências numéricas, que envolvem o trabalho com números e operações, proporcionando o estabelecimento de relações e a explicitação de leis de formação das mesmas. Esta actividade irá permitir também estimular os alunos para a utilização adequada da terminologia e da simbologia matemática". Quando prepara as suas aulas, acha que é muito importante perceber e aperceber-se da Matemática envolvida em qualquer tarefa que propõe aos alunos. No seu plano de aula, bastante minucioso e completo, a professora começou por enunciar a tarefa a propor aos alunos — "Partindo do triângulo de Pascal descobrir relações interessantes entre os números" — e listar os materiais de apoio necessários: caderno diário, ficha de trabalho com a apresentação da tarefa, canetas de várias cores, lápis de cor, transparências, quadro.

Com a proposta de resolução desta tarefa, pretendeu que os seus alunos aprendessem a: (i) explorar e investigar regularidades em sequências numéricas; (ii) analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica; (iii) determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação; (iv) descrever e explicar, oralmente e por escrito, as estratégias e procedimentos matemáticos utilizados; (v) usar a linguagem matemática para expressar ideias matemáticas com precisão; (vi) argumentar e discutir as argumentações dos outros; (vii) interpretar uma potência de expoente natural como um produto de factores iguais; (viii) identificar múltiplos de um número; e (ix) completar, desenhar padrões geométricos que envolvam simetrias.

Para isso, organizou uma sequência para a aula, explicitando as etapas principais a seguir e prevendo a sua actuação: (i) organizar os alunos em pares respeitando os lugares habituais; (ii) distribuir a ficha de trabalho sobre o triângulo de Pascal; (iii) explicar a tarefa de uma forma motivadora e interagir com os alunos para uma melhor compreensão da mesma; (iv) circular pelos pares e incentivar os alunos à descoberta das relações; (v) organizar a apresentação e a discussão das descobertas pelos pares ao grupo-turma; (vi) distribuir um modelo do triângulo de Pascal numa folha para os alunos completarem; e (vii) incitar os alunos a descobrir múltiplos de 2 ou de 3 e padrões geométricos.

Como se tratou "praticamente do primeiro trabalho de investigação" mais organizado que propunha aos seus alunos, Margarida tentou "previamente descobrir relações na sequência" e, ao fazê-lo, procurou antecipar possíveis descobertas ou caminhos a seguir pelos alunos ou relações que dificilmente seriam detectadas — "procurei informar-me, através da Internet, sobre esse assunto alargando assim o meu conhecimento" — e explicitou relações que ela própria descobriu. Esta tentativa de prever o maior número possível de conjecturas parece relacionar-se com a possibilidade de, na aula, as crianças poderem seguir caminhos imprevistos (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998) ou da normal *autoridade* da verdade do professor poder ser posta em causa: "E se um aluno segue um caminho que eu não compreendo? E se concordo ou valido uma conclusão incorrecta? E se sou confrontada com alguma situação a que não sei dar resposta imediatamente?". De facto, uma investigação matemática, possibilitando que cada um siga o seu caminho, alarga quase indefinidamente as opções e pode conduzir ao estabelecimento de conjecturas que não seja fácil, no momento, refutar ou validar.

Na tentativa de antecipar possíveis descobertas, a professora registou, por exemplo, que os alunos descobrirão com facilidade que o elemento da primeira linha e primeira diagonal é 1, que as diagonais de fora apenas têm o número 1, ou que têm os números naturais na segunda diagonal. Chegarão à relação de Stiffel, "cada elemento é igual à soma dos elementos imediatamente acima e à direita com o elemento imediatamente acima e à esquerda", o que lhes permitirá continuar a preencher o triângulo de Pascal. Possivelmente descobrirão que a soma dos elementos das linhas são potências de base 2, em que o expoente corresponde ao número da linha. Os alunos aperceber-se-ão que os elementos são simétricos em relação a um eixo de simetria que divide o triângulo em dois triângulos congruentes. Provavelmente não chegarão a descobrir que a soma dos elementos da diagonal está sempre na diagonal seguinte, na linha logo abaixo daquela em que está o último número que foi adicionado (padrão *taco de hóquei*). Dificilmente descobrirão que, na terceira diagonal, têm os quadrados perfeitos, adicionando o primeiro número com o segundo, o segundo com o terceiro e assim sucessivamente. Poderão descobrir que a linha sete contém números divisíveis por 7 ou que os elementos de cada linha são potências de base 11, em que o expoente corresponde ao número da linha. De uma forma mais orientada, serão trabalhadas pelos alunos outras curiosidades no triângulo de Pascal, como seja o reconhecimento de padrões: "se aumentarmos bastante o número de linhas e depois pintarmos os múltiplos de 2 (números pares), vai aparecer um padrão muito interessante; o mesmo é válido para os múltiplos de 3, de 4 e assim sucessivamente".

Finalmente, Margarida clarificou como avaliará a compreensão da tarefa e a produção matemática dos alunos: "circular pelos pares verificando se compreenderam ou não a tarefa, explicando-a novamente se necessário; incentivar os alunos a registar na ficha de trabalho, de uma forma explícita, todas as relações descobertas; e insistir com os alunos que deverão testar e confirmar as conjecturas e, eventualmente, reformulá-las". Como se constata, a professora privilegiou a avaliação numa perspectiva essencialmente formativa.

O desenvolvimento da aula

A aula, com a duração de noventa minutos, organizou-se em três partes principais: (i) apresentação da tarefa (dez minutos), (ii) resolução da tarefa, trabalho em pares (trinta minutos), e (iii) apresentação e discussão dos resultados em grande grupo (quarenta minutos), seguindo genericamente a abordagem sugerida por Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998). O tempo final restante (dez minutos) foi utilizado no preenchimento do triângulo de Pascal.

Os alunos entraram na sala de aula, de uma forma ordeira, e sentaram-se nos seus lugares habituais. Eu sentei-me ao lado do Rui, que era o único aluno que não tinha par.

Apresentação da tarefa. A professora Margarida iniciou a aula referindo o nome de Blaise Pascal. Pediu aos alunos para realizarem um trabalho de pesquisa na Internet sobre este matemático francês, a entregar no final do período, recordando que "as pesquisas na Internet não são para copiar na íntegra, mas para servir de base de trabalho". Depois distribuiu a ficha de trabalho (ver Anexo I) pelos vinte e cinco alunos e apresentou a tarefa a realizar com a preocupação de não dar indicações "a mais" que pudessem condicionar o trabalho a desenvolver pelos pares. Projectou no quadro uma transparência com o triângulo de Pascal até à sexta linha (ver Figura 3) e os alunos identificaram os números, as linhas e as diagonais. A professora pediu que todos usassem a mesma numeração para assinalar o número de cada linha e de cada diagonal a fim de facilitar a comunicação aquando da discussão com o grupo-turma.

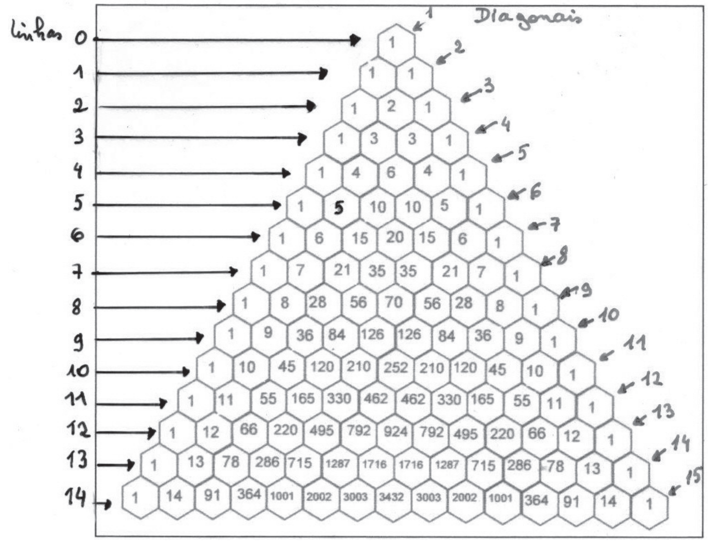

Figura 3 — Numeração das linhas e das diagonais no triângulo de Pascal.

Resolução da tarefa, trabalho em pares. Os alunos mostraram-se, de imediato, muito interessados na tarefa, procurando possíveis relações entre os números. A opção da Margarida pelo trabalho em pares pareceu uma forma muito adequada à tarefa e potenciadora de interacções entre os alunos (Ponte & Serrazina, 2000), pois exigiu um primeiro nível de apresentação e validação das conjecturas (ao e pelo colega de mesa) em que muitos deles se sentiram bastante confortáveis. O processo comunicativo de apresentação e validação das conjecturas "a dois", que a professora tentou influenciar o menos possível, foi muito valorizado pelos pares. A apresentação de uma dada conjectura exigiu a cada aluno um certo nível de organização e estruturação do argumento para poder ser entendido e, eventualmente, validado pelo seu colega. Foi frequente ouvir comentários orais do tipo: "isso não pode ser, nesta linha já não acontece", "e se fizéssemos… não, não dá!", "pode ser que tenhas razão, mas a mim não me parece", "não parecia que ia dar e deu", "essa [descoberta] é muito fácil, devemos procurar outra", "professora, qual de nós tem razão?". A necessidade de exprimir uma opinião e convencer o outro da sua veracidade melhorou, como pretendia Margarida, as capacidades de comunicação dos alunos. Mas também é verdade que ajudou a atribuir mais significado aos conceitos e aos procedimentos matemáticos (NCTM, 2007). Os alunos tiveram de recorrer, trabalhar, falar e entender-se sobre muitas noções e termos matemáticos, tais como múltiplo, divisor, número par, número ímpar, quadrado de um número, dobro, triplo, metade, número inteiro, número natural, potência, simetria ou operação numérica (embora, por vezes, a clarificação de conceitos também tivesse sido feita por Margarida). Em suma, as interacções sociais entre os alunos e entre os alunos e a professora foram claramente mais ricas e significativas nestas situações de trabalho não rotineiro do que nas tarefas em que se limitaram a seguir algoritmos já conhecidos (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). Como seria de esperar, à medida que foram descobrindo mais relações no triângulo de Pascal, o entusiasmo dos alunos aumentou.

A professora foi acompanhando pelos lugares o desenvolvimento do trabalho, tentando não interferir directamente nas conclusões dos alunos, mas estando muito atenta às produções matemáticas e às justificações apresentadas. Prestou esclarecimentos, respondeu a dúvidas que foram surgindo e deu sugestões para ultrapassar situações de impasse. Margarida questionou ou comentou o que ia observando: "achas que essa afirmação é verdadeira?", "por que fizeste assim?", "de facto, a regra funciona com estes valores… mas já confirmaste se a regra funciona sempre?", "não sei se será sempre assim… repara, com este valor já não dá!", "já experimentaste na linha seguinte?", "achas que 22 é múltiplo de 7?", "não sei, é melhor confirmares", "podes explicar melhor?", "vê o que se passa na linha 7", "o que escreveste é o que estás a dizer?". Notou-se a preocupação em não dar respostas imediatamente e, muitas vezes, "devolveu" a pergunta (Chamoso & Rawson, 2001).

Igualmente, preocupou-se em questionar e não aceitar validações apressadas. Foi notória a insistência com os alunos para testarem as conjecturas formuladas. Alguns alunos estabeleceram *verdades* sem qualquer critério de confirmação, aceitando o que lhes pareceu à primeira vista (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999). Como, muitas vezes, as conjecturas não se confirmaram imediatamente ou não se verificaram quando a experimentação foi feita com outros valores, Margarida esteve particularmente atenta ao processo de validação das relações estabelecidas e da aceitação dessas generalizações. Esta actuação da professora constitui um aspecto central da gestão do trabalho investigativo na sala de aula, dado que comentários ou sugestões menos ponderados poderão condicionar decisivamente as conjecturas ou as respostas dos alunos (Brunheira, 2002). Por isso, para Margarida, estes comentários e sugestões, mais do que confirmar se "está certo" ou "está errado", devem ajudar o aluno a reflectir sobre a situação para poder seguir a melhor opção. Por outro lado, ao não aceitar afirmações sem justificações, a professora exigiu uma maior responsabilização dos alunos pelas afirmações que produziram, incutindo-lhes também a ideia que uma verdade para ser aceite tem de ser verificada e provada (Boavida, 2005; Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003).

Apresentação e discussão dos resultados no grupo-turma. Quando todos os pares identificaram e registaram, pelo menos, uma relação no triângulo de Pascal, Margarida deu início à apresentação e discussão das conjecturas dos alunos. Todos tiveram possibilidade de apresentar uma descoberta para toda a turma. A ordem de apresentação foi estabelecida pela professora e seguiu, no início, a disposição por filas (procedimento habitual) e, mais para o fim da aula, um processo mais espontâneo. Para acompanhar as apresentações, os alunos utilizaram o triângulo de Pascal projectado no quadro, o que permitiu *apagar* e *reescrever* sem que fosse necessário fazer o triângulo novamente (no trabalho em pares, alguns alunos tiveram dificuldade em manter a "organização" do triângulo, originando a formulação de conjecturas não válidas).

Genericamente, os alunos souberam apresentar e defender os seus raciocínios. Também, embora em menor grau, souberam ouvir e compreender as opiniões dos outros. Refira-se a propósito que, segundo a Margarida, os alunos tinham um bom comportamento geral e, por isso, o ambiente de validação (ou refutação) colectiva das conjecturas não foi *contaminado* negativamente pelas suas posturas, aspecto que poderá ser complicado de gerir se as crianças não souberem respeitar as opiniões dos outros (Boavida, 2005).

Globalmente, a professora orientou a apresentação e a discussão das descobertas dos diversos pares, tentando valorizar todas as respostas da mesma maneira. Evitou compará-las ou hierarquizá-las, pois assumiu que "cada conjectura [formulada] teve significado matemático para quem a estabeleceu". Tomou uma postura geral que permitiu a validação colectiva das conjecturas e interferiu o menos possível nos argumentos e contra-argumentos dos alunos, mas intervindo nas situações de impasse ou de maior desacordo. Após uma conjectura ter sido validada ou refutada pelos alunos, Margarida fez sempre a sua síntese e realçou os aspectos que tinham suscitado maiores dúvidas ou discussão ou clarificou algum conceito matemático que tivesse sido mal utilizado. Quando os alunos se distraíam ou desvalorizavam as conclusões de outros pares insistiu na importância de exprimir as próprias opiniões mas também de ouvir e compreender os comentários dos outros. De seguida, destacam-se aspectos mais particulares da acção da professora nos processos de discussão e validação de algumas conjecturas apresentadas pelos alunos (identificados pelos nomes).

Dois pares apresentaram conjecturas que não foram validadas. Em ambos os casos, Margarida teve um comportamento bastante próximo. Por exemplo, o Manuel e a Telma apresentaram, no quadro, a sua descoberta, "na diagonal 2 existem as potências de base 1", e justificaram-na escrevendo: "$1^1 = 1$; $1^2 = 2$; $1^3 = 3$; $1^4 = 4$". De imediato, uma aluna argumentou que não podia ser porque "1^1 não é igual a 2, é igual a 1, as potências de base 1, são sempre iguais a 1 porque $1^1 = 1$ $1 = 1$; $1^3 = 1$ 1 $1 = 1$", ou seja, apresentou um contra-exemplo para invalidar a afirmação produzida, o que foi aceite pelo par. A professora, num primeiro momento, aproveitou a situação para recordar o que é uma potência e destacar a importância da utilização de um contra-exemplo em Matemática

(Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999) bastando a existência de um caso que não verifique uma afirmação para provar que não é verdadeira. Depois, estendendo os seus comentários, reforçou que é necessário confirmar "sempre" a conjectura para mais do que um ou dois casos já que a regra a estabelecer tem de verificar-se em todos os casos. Concluiu que esta ideia é fundamental no processo de prova (Boavida, 2005), pois alguns alunos aceitaram facilmente uma generalização baseada apenas numa ou em duas verificações.

Nos casos de conjecturas validadas rapidamente por todos, quer porque bastante evidentes quer porque estabelecidas pela generalidade dos pares, o papel assumido por Margarida foi bastante uniforme: confirmar a conclusão e clarificar os conceitos matemáticos envolvidos. Exemplifique-se com a descoberta do António e do João que afirmaram que os números representados no triângulo de Pascal "são todos números naturais". Esta descoberta foi aceite sem discussão e a professora limitou-se a repetir a conclusão e a recordar a noção de número natural.

A preocupação em clarificar ou reforçar aspectos relacionados com os conceitos e os procedimentos matemáticos verificou-se em muitas outras apresentações. Margarida pretendeu que as clarificações fossem feitas com a colaboração dos alunos e, portanto, deu sugestões para uma maior clareza e aperfeiçoamento das apresentações, justificações, registos escritos ou conclusões dos pares, tentando aproveitar os comentários produzidos, como se ilustra nas situações seguintes.

O Carlos e o Fernando identificaram que a soma dos números em cada linha era uma potência de base 2 e que o expoente da potência correspondia ao número da linha. A sua explicação recorreu ao esquema que se apresenta na Figura 4:

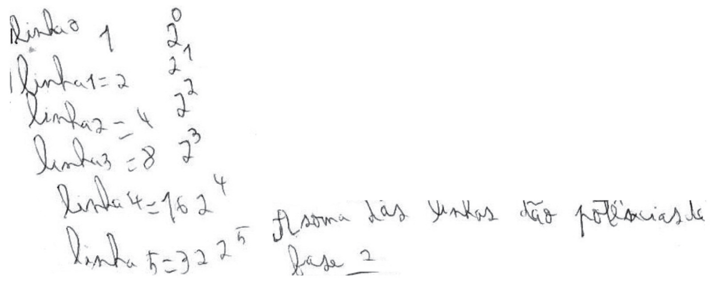

Figura 4 — Explicação do Carlos e do Fernando.

Esta conjectura levantou muitas interrogações (apenas foi estabelecida por um outro par), com alguns alunos a não entenderem a associação às potências. A professora solicitou aos dois alunos para serem mais claros na justificação, nomeadamente, para apresentarem cada potência como um produto de factores iguais. Um aluno questionou "mas 2^0 vai dar mesmo 1?!", ao que Carlos respondeu "quando o expoente é zero o resultado é sempre 1", conclusão repetida e reforçada por Margarida.

A discussão e a validação da conjectura do Hugo (ver Figura 5) não foram fáceis, pois diversos alunos não a perceberam imediatamente dado que o esboço de triângulo de Pascal que haviam construído na folha não estava correcto.

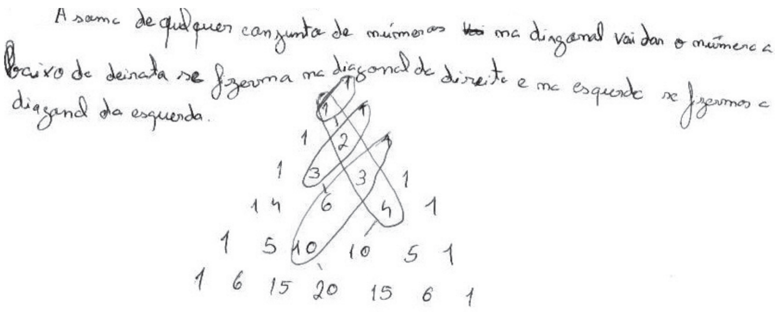

Figura 5 — Explicação do Hugo.

Margarida decidiu intervir, sugerindo ao aluno que assinalasse, no triângulo, o conjunto de números com uma cor. A sugestão ajudou o Hugo a melhorar a explicação e os restantes alunos a compreendê-la melhor, tornando evidente que as conjecturas são mais fáceis de aceitar ou refutar quando se apoiam num esboço ou diagrama. Posteriormente, a professora alertou os alunos para serem organizados e rigorosos nos registos escritos para que estes possam, de facto, ajudar a explicar ou compreender melhor uma dada situação.

A Célia e o Nuno descobriram a relação que permite continuar a escrever os números em cada linha, conhecidos os números da linha anterior, tendo registado a afirmação: "a soma de os números que vêm por cima dá o número em baixo". Embora a frase não esteja totalmente clara, as duas crianças, quando fizeram a apresentação para todos, foram bastante convincentes e não foi difícil convencerem os colegas da sua descoberta ao apontarem, no triângulo de Pascal, "este com este dá este, e podemos fazer isto para todos os números". Margarida interveio para aperfeiçoar a conclusão, recordando que a operação numérica envolvida era a adição, e insistiu na necessidade de fazer bons registos escritos que correspondam ao que foi pensado. Depois, um aluno, entendendo a lei geral de formação, concluiu que "podemos continuar o triângulo de Pascal, que nunca mais acaba", com que a professora concordou, aproveitando o comentário para sugerir que "se quiserem podem acrescentar mais uma linha, obtendo a linha sete, e depois podem continuar a preencher".

A Paula e a Teresa verificaram que o triângulo tem um eixo de simetria e que, por isso, os números são iguais de um e do outro lado do eixo, "mantendo as distâncias como num espelho". O registo escrito que fizeram na ficha de trabalho não ficou muito perfeito, "se fizermos um risco no meio, de um lado e do outro é igual", mas a explicação que fizeram no quadro com a sinalização do eixo de simetria no triângulo e a indicação dos números, "este e este, os valores são os mesmos dos dois lados", foi bem mais explícita, contribuindo para a validação colectiva quase imediata. Mais uma vez se constatou que os alunos se sentiram mais à vontade para registar e explicar as conjecturas oralmente (Chamoso & Rawson, 2001) ou recorrendo a representações gráficas. Aceitando que a formulação escrita exige um maior nível de estruturação da ideia que se pretende transmitir, Margarida continuou a destacar a grande importância desta forma de registo e a defender a sua articulação com a apresentação oral para toda a turma.

A professora também se confrontou com situação imprevistas, nomeadamente, quando uma aluna se referiu a números "capicuas". A Cristina e o Rodrigo mencionaram que, em cada linha, os números podem ser lidos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita, dando o exemplo das linhas 3 e 5: "na linha 3 temos 1, 3, 3, 1 e 1, 3, 3, 1 [invertendo o sentido da indicação]… os números são os mesmos. Na linha 5 temos 1, 5, 10, 10, 5, 1 e 1, 5, 10, 10, 5, 1". Todos concordaram, mas uma aluna afirmou: "claro, chegamos sempre a um número que é uma capicua". Como um aluno nunca tinha ouvido falar, a mesma aluna adiantou uma explicação que o esclareceu: "escreve cento e vinte e um [121]. Podes ler de um lado e do outro que dá sempre cento e vinte e um. É capicua!". A professora Margarida decidiu não ter qualquer intervenção neste diálogo (por pensar que, por vezes, os alunos compreendem melhor o discurso [correcto] de um seu colega do que o discurso do professor) e apenas destacou, no final, a existência de capicuas (números palíndromos). Previsivelmente, se tivesse pedido a definição de capicua, a aluna teria uma maior dificuldade em responder e explicar.

A gestão dos comportamentos dos alunos nas apresentações e discussões exigiu uma atenção permanente a Margarida. Em diversos momentos, alguns deles pretenderam comentar as descobertas, tentando falar todos ao mesmo tempo e não atendendo às explicações que estavam a ser dadas. Por isso, a professora teve que recordar que "era muito importante cada um formular as suas descobertas, mas também era muito importante ouvir as descobertas dos outros". De facto, um ambiente em que todos falam simultaneamente não será o mais adequado para um processo de prova e validação de conjecturas, pois cada um tem que saber ouvir os argumentos envolvidos para depois os poder aceitar ou refutar (NCTM, 1994).

Após as apresentações e discussão das conjecturas dos pares, e para concluir a aula, a professora distribuiu uma folha com um triângulo de Pascal até à linha 14 com uma malha de hexágonos encaixados uns nos outros. Era pedido que os alunos preenchessem o triângulo, podendo utilizar a calculadora, e fizessem o reconhecimento de padrões através da marcação dos múltiplos de 2 e de 3. Como entretanto tocou para a saída, a professora Margarida disse aos alunos para continuarem o trabalho em casa.

Reflexão sobre a aula

Como avaliação global do trabalho desenvolvido, Margarida registou, no seu portefólio, que a aula foi muito "interessante", proporcionando boas aprendizagens matemáticas aos alunos. Apesar de se sentir bastante "confiante relativamente ao domínio dos conceitos matemáticos envolvidos", reconheceu as "muitas dúvidas" sobre o que iria acontecer e a apreensão em relação à tarefa proposta, pois "tinha receio de não motivar os alunos, o que poderia levá-los ao desinteresse pela actividade". Mas "os alunos superaram as minhas expectativas, validaram muitas relações numéricas e penso que este tipo de tarefa é um importante contributo para o desenvolvimento matemático dos alunos".

Na sua perspectiva, um aspecto importante relacionado com este tipo de aulas prende-se com a "apresentação da tarefa". Considerou ter sido "clara na apresentação da tarefa, sabendo contudo que não poderia ser muito objectiva por se tratar de uma tarefa de investigação" e não pretender condicionar os caminhos a seguir pelos alunos. A generalidade deles revelou um grande entusiasmo devido ao facto de trabalharem em pares e por "terem de descobrir algo que iriam explicar aos colegas", destacando o carácter desafiante e motivador da tarefa (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998).

Sobre as aprendizagens dos alunos, Margarida reconheceu que o trabalho realizado foi "muito rico" e que este tipo de tarefas abriu mais possibilidades de compreensão e de sucesso aos alunos, especialmente àqueles com mais dificuldades (aspecto referido em diversos momentos). De facto,

> (...) mesmo os alunos mais fracos conseguiram descobrir relações no triângulo de Pascal o que lhes permitiu desenvolver, de certo modo, uma atitude mais positiva face à Matemática e de maior apreço por esta ciência. (...) A tarefa revelou-se uma actividade em que os alunos se envolveram com muito empenho, inclusive os que possuem mais dificuldades. Penso que as tarefas mais estimulantes, de descoberta e em que o aluno tem um papel mais activo são as que permitem construir de maneira mais significativa aprendizagens matemáticas. A resolução da actividade deu aos alunos a oportunidade para explicar, discutir e testar conjecturas. Penso que a capacidade para dizer o que se deseja e entender o que se ouve, deve ser um dos resultados de um bom ensino da Matemática. [portefólio]

Reforçando estas ideias, na reflexão escrita, Margarida mencionou explicitamente o trabalho de dois alunos. Por um lado, um aluno que "surpreende-me sempre positivamente, é muito perspicaz e empenhado; na turma foi o aluno que mais relações encontrou no triângulo de Pascal" e que estabeleceu o padrão taco de hóquei, "uma das conjectura mais difíceis de descobrir". Por outro lado, um aluno que, embora "não sendo um aluno muito brilhante a Matemática", descobriu uma "relação muito interessante" na diagonal 3 (1, 3 [1 + 2], 6 [1 + 2 + 3], 10 [1 + 2 + 3 + 4], 15 [1 + 2 + 3 + 4 + 5], 21 [1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6] ...). Com esta referência ao trabalho bem sucedido de um "aluno fraco", a professora reconheceu que as tarefas de natureza mais aberta podem ajudar os alunos com mais dificuldades na aprendizagem da Matemática a compreender melhor os conceitos matemáticos e a sentir mais confiança no seu desempenho, pois têm a possibilidade de seguir processos que tenham mais sentido para eles e de usar os conceitos de diferentes modos (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998).

Atendendo ao empenhamento e às respostas dadas e discutidas na aula, a professora entendeu que "a generalidade dos alunos construiu, de uma maneira significativa, conhecimento matemático", compreendeu os conceitos matemáticos relacionados com a tarefa e desenvolvendo uma maior compreensão do sentido do número e das operações. No entanto, também detectou um erro que, na sua perspectiva, é muito frequente quando os alunos trabalham com potências: "calcular a potência do número efectuando a multiplicação da base pelo expoente, esquecendo-se que uma potência é um produto de factores iguais, em que a base é o factor que se repete e o expoente indica o número de vezes que esse factor se repete". Apesar de "serem chamados à atenção para essa habitual confusão, há sempre um ou outro aluno que continua a errar e depois chegam a resultados incorrectos".

A professora registou, ainda, que os alunos apresentaram e justificaram os seus raciocínios e as conclusões a que chegaram e, tanto quanto possível, usaram uma linguagem matemática adequada. Testaram, discutiram e validaram conjecturas, argumentaram e discutiram as argumentações de outros, desenvolvendo as suas capacidades de comunicação matemática, melhor na forma oral do que na expressão escrita. Esta incidência na ligação entre o trabalho investigativo e a comunicação matemática está muito alinhada com a literatura (Martinho & Ponte, 2005; NCTM, 2007). Margarida alarga essa ligação à compreensão da Matemática, realçando a grande importância da "síntese e discussão colectiva" (Pereira & Saraiva, 2005) uma vez que "quanto mais o aluno tem oportunidade de reflectir sobre determinado assunto, falando, escrevendo ou representando, mais ele o compreende". Por isso, considerou que a troca de experiências em grupo com a comunicação das descobertas, a exposição e clarificação de dúvidas, bem como a leitura e análise das ideias dos outros, permitiu aos alunos a "interiorização de conceitos e a assimilação dos significados envolvidos, de forma a interligá-los com as suas próprias ideias".

Sobre as suas próprias aprendizagens, Margarida compreendeu melhor a importância de diversificar as tarefas propostas aos alunos "no sentido de os motivar e desenvolver atitudes positivas face à Matemática para que gradualmente saibam apreciar esta disciplina". Por outro lado, também passou a atribuir um maior valor curricular às situações de trabalho mais aberto, pois "o que realmente aprendi com a aplicação desta tarefa foi a ligação das actividades de investigação com os conteúdos leccionados (…) e com outros temas do currículo", reconhecendo, no entanto, que "o trabalho de natureza investigativa é pouco utilizado na aula de Matemática, uma vez que os programas são extensos".

A concluir

Este estudo sugere que a integração do trabalho de cariz investigativo na aula de Matemática não é uma tarefa fácil para o professor, especialmente se não constitui uma actividade habitual nas suas práticas lectivas. A natureza do trabalho a realizar pelos alunos — colocar questões, formular e testar conjecturas, registar, comunicar e validar resultados (Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002; Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998) — exige ao professor saberes profissionais muito complexos e especializados, a par de uma grande disponibilidade. Margarida, para além do trabalho de planificação e de reflexão, apresentou aos alunos uma tarefa matemática "muito interessante", apoiou o trabalho que desenvolveram, fazendo perguntas, dando sugestões, comentando ou clarificando o que era menos evidente, e avaliou as dificuldades e os sucessos, procurando dar sentido ao que aconteceu na sala de aula.

As principais preocupações da professora ao preparar a aula passaram pela procura e antecipação das (possíveis) conjecturas que os alunos poderiam formular muito devidas à imprevisibilidade e diversidade dos caminhos a seguir (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998) e consequente possibilidade de não lhes poder responder adequadamente.

Margarida também se confrontou com (novos) desafios na gestão da sala de aula resultantes do tipo de tarefa utilizada, desde logo com a sua apresentação aos alunos, mas especialmente em aspectos relacionados com os processos de procura, validação e discussão das conjecturas e de sistematização do conhecimento matemático envolvido. A professora valorizou muito o trabalho em pares (Ponte & Serrazina, 2000), bem como as formas como os alunos falaram e escreveram sobre as descobertas feitas e como fizeram a articulação entre os dois registos (Chamoso & Rawson, 2001; Martinho & Ponte, 2005; NCTM, 2007). Frequentemente, solicitou uma maior clareza das justificações ou conclusões estabelecidas e insistiu numa melhor organização e rigor dos registos escritos para que estes traduzissem, de facto, o que tinha sido pensado. Tentou aproveitar e partir das ideias dos alunos, intervindo com comentários, sugestões ou confirmações, mas evitando dar respostas imediatas ou "fazer" o trabalho deles (Brunheira, 2002). Também a gestão dos comportamentos dos alunos, principalmente nos processos de validação das conjecturas (quer no trabalho em pares, quer no grupo-turma), reclamou-lhe uma grande disponibilidade para não deixar contaminar negativamente o ambiente de trabalho (Boavida, 2005; NCTM, 1994), exigindo organização nas intervenções e respeito pelas opiniões dos outros.

Estas actuações da professora foram motivadas, em grande medida, pela natureza do trabalho investigativo exigido na formulação e validação das descobertas. Margarida foi insistente na ideia de que uma verdade ou uma generalização para ser aceite tem de ser verificada e provada em todos os casos (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Questionou validações estabelecidas sem qualquer critério de análise ou baseadas em poucas verificações e destacou a importância do recurso a um contra-exemplo para invalidar uma generalização (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Boavida, 2005). Assumiu um papel mais orientador na discussão colectiva das conjecturas (Pereira & Saraiva, 2005), quer no reforço das conclusões dos alunos, quer na clarificação e consolidação dos conceitos e procedimentos matemáticos envolvidos.

Após a realização da aula, Margarida destacou a maior relevância que passou a atribuir às tarefas de investigação nas suas práticas e no desenvolvimento do currículo. Reconheceu vantagens da sua integração na abordagem dos temas matemáticos, embora prevendo eventuais complicações na gestão do tempo para a tarefa. Considerou que o carácter divergente das investigações (Martins, Maia, Menino, Rocha & Pires, 2002) ajudou os alunos, em especial os que revelaram mais dificuldades, por permitir processos baseados nos seus conhecimentos anteriores e com mais significado para eles (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998). Realçou, ainda, que o ambiente de trabalho e apoio proporcionado pelo programa de formação lhe permitiu ultrapassar melhor as contrariedades com que se confrontou nas diversas fases do ciclo lectivo (Canavarro & Rocha, 2008).

O presente estudo evidencia que a integração na sala de aula de formas de trabalho matemático de natureza mais aberta, como as proporcionadas pelas investigações, é claramente favorecida quando os professores têm oportunidade de trabalhar em contextos mais colaborativos, como o vivenciado por Margarida, com dinâmicas orientadas para a discussão colectiva e para o apoio directo na sala de aula. O conhecimento profissional exigido nas diversas situações de ensino, embora complexo e multidimensional (Pires, 2006), tem um carácter marcadamente pessoal e prático (Elbaz, 1983) que terá (mais) significado se for partilhado e reflectido com outros professores (Hiebert, Gallimore & Stigler, 2002). Por isso, torna-se importante em qualquer processo de mudança que os professores tenham possibilidade de constituir comunidades colegiais (escola, acções de formação contínua) onde, de uma forma organizada e continuada, se ajudem, colaborem e reflictam sobre o que pensam e sobre o que fazem e, assim, (re)construam o seu conhecimento profissional.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.

Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática.* Lisboa: Associação de Professores de Matemática & Instituto de Inovação Educacional.

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de Matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. Em J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Orgs.), *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas*. Setúbal: Associação de Professores de Matemática, pp. 13–43.

Bardin, L. (1995). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70. (edição original em francês, 1977)

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora. (edição original em inglês, 1991)

Bolívar, A., Domingo, J., & Fernández, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa en educación: Enfoque y metodología*. Madrid: Editorial La Muralla.

Brunheira, L. (2002). O conhecimento didáctico e as atitudes de uma professora estagiária face à realização de actividades de investigação na aula de Matemática. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pp. 183–205.

Canavarro, A. P., & Rocha, I. (2008). *Professional development of mathematics teachers: Challenges from a national in-service teacher education program in Portugal.* Em ICME11, México. Acedido em 23 de Outubro de 2008 em http//dg.icme11.org/document/get/147.

Chamoso, J., & Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *SUMA*, *36*, pp. 33–41.

Darling-Hammond, L., Wei, R., Andree, A., Richardson, N., & Orphanos, S. (2009). *Professional learning in the learning profession: A status report on teacher development in the United States and abroad*. Stanford: National Staff Development Council. Acedido em 15 de Dezembro de 2009 em http:/www.srnleads.org/resources/publications/pdf/nsdc_profdev_short_report.pdf .

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one?. *Educational Researcher*, *31*(5), pp. 3–15.

Martinho, H., & Ponte, J. P. (2005). Comunicação na sala de aula de Matemática. Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. Em J. Brocardo, F. Mendes & A. M. Boavida (Orgs.), *XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática — Actas*. Setúbal: Associação de Professores de Matemática, pp. 273–293.

Martins, C., Maia, E., Menino, H., Rocha, I., & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da Matemática. Em J. P. Ponte, C. Costa, A. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo & A. Dionísio (Orgs.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. Coimbra: Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, pp. 59–81.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Acedido em 1 de Setembro de 2008 em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf .

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática & Instituto de Inovação Educacional. (edição original em inglês, 1991)

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (edição original em inglês, 2000)

Pereira, M., & Saraiva, M. (2005). A integração de tarefas de investigação no ensino e aprendizagem das sucessões. *Quadrante*, *14*(2), pp. 43–69.

Pires, M. (1999). O professor e o currículo. *Educação e Matemática*, *55*, pp. 3–6.

Pires, M. V. (2006). A construção do conhecimento profissional: Um estudo com três professores. Em *Actas do XVII SIEM*. Setúbal: Associação de Professores de Matemática. (edição em CD-ROM).

Pólya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciência. (edição original em inglês, 1945)

Ponte, J. P. (2003). Investigar, ensinar e aprender. Em *Actas do ProfMat 2003*. Santarém: Associação de Professores de Matemática, pp. 25–39. (edição em CD-ROM).

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante*, *7*(2), pp. 41–70.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Ediciones Paidós e Ministerio de Educación y Ciencia. (edição original em inglês, 1987)

Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Gouveia, M. J. (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo*. Documento não publicado.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), pp. 4–14.

Anexo I — Ficha de trabalho: relações no triângulo de Pascal.

Ficha de trabalho de Matemática – 5º Ano
Assunto: Triângulo de Pascal

Nome: ____________________ nº: ____ Turma: ____

O triângulo de Pascal contém números dispostos desta maneira.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Encontra relações interessanntes no triângulo de Pascal.

Resumo. O presente texto descreve uma experiência lectiva, desenvolvida no âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática, com o propósito principal de conhecer como os professores integram as tarefas de investigação no desenvolvimento do currículo e como reflectem sobre as suas práticas. O estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa e centra-se no trabalho de uma professora de Matemática do 2.º ciclo, realizado ao longo do ciclo lectivo (preparação, condução da aula, reflexão), na exploração de uma tarefa de investigação envolvendo o triângulo de Pascal. Conclui-se que a dinâmica da formação, valorizando a partilha e a discussão colectiva de materiais e experiências, ajudou a professora a integrar as investigações na sala de aula e a compreender que esta utilização acarreta novos desafios e exige mudanças na gestão do seu trabalho e do trabalho dos seus alunos. Nas suas práticas, a professora passou a atribuir um maior valor curricular às tarefas de investigação e a valorizar mais os aspectos relacionados com a comunicação, a argumentação e o ambiente de trabalho.

Palavras-chave: Tarefas, Investigações matemáticas, Práticas, Conhecimento profissional do professor, Formação.

Abstract. The present article reports on a teaching experience developed in the context of a Mathematics inservice teacher education program aiming at knowing how teachers integrate mathematics investigations in curricular development and think about their teaching practices. The study follows a both qualitative and interpretative approach and focuses on the work of a 5th grade Mathematics teacher, developed along a whole teaching cycle (preparation, classroom conducting, and reflection), exploring an investigation task about the Pascal triangle. It is concluded that a teaching dynamic, that enhanced sharing and discussion about experiences and teaching materials, helped the teacher to include investigations in the classroom and to understand that this approach brings new challenges and requires changes to her own and her students work practices. After the reported experience, the teacher gave a higher curricular value to mathematics investigations and to communication and discussion skills as well as classroom interaction and overall working environment quality.

Keywords: Tasks, Mathematical investigations, Practices, Professional teacher knowledge, Teacher education.

▪▪▪

MANUEL VARA PIRES
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança
mvp@ipb.pt