Dionísio das Dores Dias Gonçalves

Um silêncio sepulcral pairava no ar; era como se o Pentalião e o Jagodes ali estivessem mesmo, a petizada hipnotizada pelo gestual do mestre, Mestre que, de tesoura em punho, preparando-se para ir desta para melhor por não arranjar maneira de contentar os dois assaltantes, pedia ajuda a todos e inspiração ao Espírito Santo para se livrar da enrascada: quero 2/7 regougava o Pentalião; 3/5 e já berrava o Jagodes, senão!? E as crianças, aflitas, não queriam acreditar que fosse possível o milagre. Não sei se alguma vez alguém deu solução imediata a questão tão complicada, mas a preparação estava feita, a motivação conseguida e as mentes atentas captavam a solução consoante ia surgindo, seguindo curiosos a explicação, olhos fixados na tesoura que ia

Conferência de Mirandela
Maio 1935

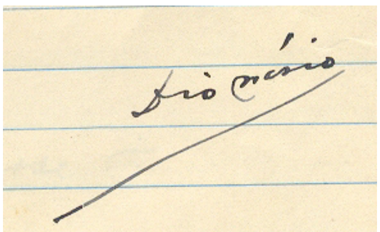
Instituto Politécnico de Bragança

2005

Conferência de Mirandela

Maio de 1935

Dionísio das Dores Dias Gonçalves



***

Exmº Senhor Inspector Orientador:

Sinto-me triste e alegre. Triste, porque não sou digno de ocupar o lugar em que me encontro, lugar a que fui chamado pela confiança imerecida que em mim depositou o Exmº Senhor Inspector dêste Distrito Escolar; alegre, porque tenho Vossa Ex.ª junto de mim, para ouvir os seus conselhos, receber a sua orientação e para enfim receber o seu perdão para a minha incompetência. Para Vossa Ex.ª vão portanto as minhas saudações, filhas do sincero respeito e consideração que devo tributar-lhe. Como filho de Portugal e como professor primário, saúdo, neste momento, na pessoa de V. Ex.ª o Ex.mº Ministro da Instrução Pública e todos os homens do govêrno da minha Pátria, que muito têm trabalhado para o ressurgimento e engrandecimento de Portugal e para a regeneração da sociedade. E neste trabalho destaca-se a figura do Exmº Senhor Doutor Oliveira Salazar, exemplo de trabalho e de abnegação pela Pátria. Por isso o seu retrato se encontra nas nossas escolas ao lado do de sua Ex.ª o Presidente da República, para as crianças aprenderem, pelo exemplo dêsses dois homens, a bem servir a sua Pátria.

Para nós, professores, é sempre motivo de alegria ver ao nosso lado os nossos superiores, para lhes confiarmos os nossos embaraços e dificuldades, e receber do seu coração amigo um conselho, uma palavra de coragem para prosseguirmos no caminho espinhoso de bem ensinar os pequeninos.

Sim, os professores sentem alegria, porque amam a sua escola e tanto, Senhor Inspector Orientador que falaríamos assim se lhe falássemos do seu ??.

_ Nada mais lindo que uma escola, nada mais encantador que uma criança. A nossa vida, Senhor Inspector, passada entre as paredes de uma escola, tendo ao nosso lado as criancinhas, é como se fosse passada sempre junto da imagem adorada e sacrossanta da Pátria, tendo nos lábios, ao fitá-la, e vindo do mais fundo dos nossos corações, estas frases cheias de amor e de fé: Junto de nós estão os teus filhos, filhos que amanhã deixarão correr de boa vontade o seu sangue para te defender.

A nós os confiaste pequeninos e porque assim fizeste, recompensaremos a tua confiança ensinando-os a obedecer-te, desprezando o vício e a mentira, abraçando o dever como a imposição mais bela feita à alma humana. A êles amamos porque te amamos, ó Pátria, “a mais formosa e linda que ondas do mar e luz do luar viram ainda” – como disse um dos teus melhores poetas.

E, Exmº Senhor Inspector Orientador, nada mais sei dizer-lhe, porque nestas poucas palavras que tive a honra de dirigir-lhe, vai o sentir do meu coração.

Exmº Senhor Inspector do Distrito Escolar de Bragança

Tenho a honra de render a Vossa Ex.ª o preito da minha estima e alta consideração, porque reconheço em Vossa Ex.ª o Inspector competente, dedicado e carinhoso, sempre pronto a perdoar e amar os seus subordinados. Para o seu coração bondoso vai o meu reconhecido e grato.

É meu dever agradecer a Vossa Ex.ª a honra que me deu escolhendo-me para fazer uma conferência subordinada ao tema: “ O ensino inicial da aritmética. Preparação das lições. Cadernos diários. Suas vantagens."

Este meu agradecimento não tem pretensões a lisonjas, porque o meu coração, um tanto ou quanto asselvajado, nunca as admitiu para si e muito menos para os outros. Quando recebi o convite de Vossa Ex.ª senti-me pequeno, pequenino mesmo, como ainda agora me sinto, para arcar com tão grandes dificuldades e poder, já não digo satisfazer os desejos de Vossa Ex.ª, mas pelo menos as suas esperanças, filhas da confiança que em mim depositou. E porque me senti pequenino e incapaz de fazer tal trabalho, pedi a Vossa Ex.ª para retirar de mim tal encargo. Como Vossa Ex.ª não acedeu ao meu pedido e continuou a depositar em mim a mesma confiança, que eu mais uma vez do coração agradeço, sentindo imensa pena por estar longe, muito longe mesmo de merecê-la, aqui me encontro envergonhado e confundido perante Vossa Ex.ª por nada ter feito de aproveitável. Resta-me a consolação de poder afirmar-lhe que se melhor não fiz foi porque melhor não pude e que, se encontrar algum trabalho no que vou ler, o tome pela única recompensa que o meu coração pode dar à confiança que em mim depositou. Desculpe-me tudo isto, mas parece-me que dizendo assim, sou digno de aparecer diante de Vossa Ex.ª e da minha consciência sem corar.

Exmos. Colegas:

Pelas palavras que acabo de dirigir ao Exmo Senhor Inspector sabeis já a razão porque me encontro aqui, eu, o mais humilde e incompetente de todos. Para vós que, como eu, trabalhais na escola onde a Pátria encerra tôdas as esperanças dum melhor futuro, vai o meu coração com todo o afecto que deve ser dedicado aos que trabalham pelo bem da Pátria e da Escola.

Tudo quanto vou ler não é novidade para vós. É assunto conhecido e sabido de todos, devendo afirmar-vos, com a máxima franqueza, que sou eu o que menos conheço dele. Se me encontrardes maçador, perdoai-me. Nada mais resta dizer-vos senão que é um incompetente que vai falar dum assunto só próprio de competentes mas que pode afirmar, em seu abono, que está aqui por obedecer e não por se oferecer.

E agora deixai-me ir ajoelhar de mansinho diante da minha primeira professora a Exma. Senhora D. Constança dos Anjos Pereira, para rezar junto dela esta oração de saudade: Já lá vão vinte e dois anos desde que deixei os bancos da sua escola e desde que deixei de ter a ventura de ouvir as palavras dos seus lábios ditadas pelo seu coração bondoso cheio de amor pelas crianças e pela escola. Benditos sejam êsses tempos que passaram e durante os quais Vossa Ex.ª me guiou pela mão, com amor de mãi, atravéz do caminho do saber e da honra. A Vossa Ex.ª devo muito, devo quasi tudo quanto sou, porque se caminhei na vida, foi Vossa Ex.ª sem dúvida quem me ensinou. As crianças na sua escola não são acarinhadas como alunos, mas sim como filhos. E eu já tive a felicidade de ser seu filho. Ah! Quem dera poder voltar a êsses tempos! É por isso que em cada ano que passa, maior e mais bela é a sua imagem diante dos meus olhos, e maior é a estima e a gratidão que lhe consagro. Trago duas mulheres dentro do meu coração: Uma é Vossa Ex.ª e a outra é minha santa Mãi. Vossa Ex.ª porque me ensinou, minha Mãi porque me criou. Aceite pois o lugar desinteressado que o meu coração lhe deu desde o primeiro dia em que me sentei nos bancos da sua escola, e assim principiarei a pagar o muito que lhe devo, juntamente com a minha gratidão perpétua.

Ensino Inicial de Aritmética

Depois que Alberto Pimentel, Filho, escreveu a Súmula Didáctica, é para mim uma temeridade falar sôbre o ensino inicial da aritmética, porque os assuntos referentes a esta disciplina são explicados por ele de maneira a satisfazerem os mais exigentes e, devo afirmá-lo, diz a última palavra em prática e em clareza. Bem se vê que foi escrito por mão de mestre competentíssimo. De maneira que se eu quisesse sair bem dêste trabalho sem trabalho, nada mais tinha a fazer que meter a Súmula Didática debaixo do braço, chegar aqui, abri-la e pedir algumas horas de atenção àqueles que ainda a não conheçam. É um livro precioso, um verdadeiro tesouro para o professor primário, porque veio acabar com tôdas as dificuldades que possa ter aquele que, por dever de ofício, é obrigado a ensinar aritmética a crianças. E se o meu trabalho vos parecer quasi uma cópia fiel da Súmula Didáctica, não vos admireis, porque a tenho no coração, e o que temos no coração raras vezes o podemos ocultar. Além disso, devo declarar com toda a franqueza e sinceridade mas franqueza franca e sinceridade sincera, se assim é lícito dizer, que eu já ensinava aritmética quasi como o ilustre escritor preceitua, pois tendo comprado a obra logo que apareceu anunciada no mercado, fiquei admirado ao ver que Alberto Pimentel, Filho, explicava certos casos servindo-se dos mesmos meios e quasi das mesmas palavras de que eu me servia.

Tem graça – exclamei eu ao ler o livro – parece que entre mim e o autor há um caso de telepatia. Desculpai a afirmação que nada tem de vaidosa, porque, para mim, a vaidade no homem é a justificação da sua demência. E dito isto, entremos no assunto.

O ensino da aritmética tem de ser pràticamente e portanto por meio de exemplos concretizados. A concretização é tão necessária na aritmética, como o oxigénio nos pulmões. Devemos principiar o ensino da aritmética ensinando o aluno a contar e a escrever os respectivos resultados da contagem. Dada a exiguidade do material didáctico de muitas escolas, para não dizer de tôdas, somos obrigados a lançar mão dos objectos que se encontram dentro da escola como por exemplo: livros, cadernos ou lápis. Eu, à falta de um bom contador mecânico, pois os que andam pelas nossas escolas era preciso queimá-los porque só servem para encher de confusão as crianças, sirvo-me de feijões, porque é fácil arranjar a quantidade necessária para qualquer explicação. E não me envergonho de afirmar que lanço mão dos feijões para tornar prática a minha explicação da escrita de números às primeiras classes, embora haja lá por fora quem se ria dos mestres primários chamando-lhes os professores dos feijõesinhos. Se êsses que assim falam tirassem das algibeiras dinheiro em abundância e o entregassem aos professores primários para comprarem o material didáctico indispensável para tornarem o ensino prático, teriam prestado um bom serviço aos obreiros do ensino, à Pátria e à Escola. Perdoem-me o desabafo. E já agora, enquanto falar sobre aritmética, limitar-me-ei a apresentar a minha maneira de explicar esta disciplina na escola, e a copiar algumas lições do meu diário escolar do ano lectivo corrente.

Tendo chamado para junto de mim os alunos da primeira classe, coloco sobre a secretária uma caixa cheia de feijões e digo aos pequenos: Meninos, se eu quiser saber quantos rapazes frequentam esta escola, tenho de contar. Se quiser saber quantas carteiras há dentro da sala, conto-as; se quiser saber quantos livros têm todos os meninos desta escola, conto-os, o mesmo me acontecendo se quiser saber quantos cadernos, quantos lápis e quantas penas. Se sair da escola vejo árvores, ruas, pedras, casas, homens, mulheres, etc., etc. Se eu quiser saber quantas árvores vejo, ou quantas ruas, ou quantas pedras, ou quantas casas, ou quantos homens, ou quantas mulheres, sou obrigado a contá-los, não é verdade? Como vêem, tudo se pode contar. Os meus meninos ainda não sabem contar e por isso vou hoje principiar a ensiná-los. Ora nós temos aqui esta caixa com feijões e queremos saber quantos são; portanto temos de contá-los. É claro que não vamos hoje contá-los todos. Iremos contando devagarinho. Dito isto, tiro todos os objectos que estão sobre a secretária, menos a caixa dos feijões, disponho os alunos de maneira a poderem ver o que se vai fazer, pego no giz e com êle traço sôbre a secretária várias linhas no sentido da largura e paralelas. Em seguida percorro com o índex da mão direita o espaço compreendido entre a primeira linha e a extremidade da mesma e pergunto a um dos alunos:

-- Meninos, que temos aqui?

-- Nada.

-- Disse muito bem; não temos nada.

Já vêm que falando queremos dizer que não temos coisa alguma, pronunciando a palavra nada. Pois bem; além da palavra nada temos um sinal próprio para dizer a mesma coisa e esse sinal é o que agora vou desenhar no quadro. Atenção portanto para os meninos aprenderem a fazer êsse sinal. Tomando o giz escrevo lentamente no quadro o algarismo zero e em lugar onde todos os alunos possam ver bem o movimento que é preciso imprimir ao giz para o traçar. Depois volto-me para os alunos e digo-lhes: - Êste sinal, como todas as coisas, tem um nome. Querem saber como se chama? Chama-se zero. Em seguida, e sempre muito devagar, escrevo no quadro vários zeros para os alunos fixarem bem a sua forma e a maneira de o traçar. Depois mando cada um dos alunos ao quadro a traçá-lo, tendo o cuidado de o auxiliar todas as vezes que tenha dificuldades, não o largando enquanto não sabe desenhar o zero sem hesitação. É esta uma das lições que exige muita paciência e boa disposição para conservar todos os alunos com atenção. Depois de todos os alunos terem aprendido a fazer o zero, tiro da caixa um feijão, coloco-o à direita da linha, no espaço por mim indicado, e pergunto a outro aluno: - E agora, quantos feijões estão aqui?

-- Um

-- Tens razão. Temos um. Pois bem, além da palavra um, do nome um, do qual nos servimos para dizer que só temos uma coisa, temos também um sinal, um símbolo para dizer o mesmo, sinal que eu vou escrever no quadro. Depois de ter traçado lentamente no quadro o algarismo 1, e em lugar onde os alunos possam ver distintamente todos os movimentos por mim imprimidos ao giz, digo, voltando-me para as crianças: - Êste sinal, como o zero, também tem um nome e esse nome é: um. Chama-se um. Depois de ter traçado no quadro o algarismo 1 várias vezes e sempre lentamente, chamo cada um dos alunos ao quadro, presto-lhe todo o auxílio necessário, procuro entusiasmá-lo tanto mais quanto maiores sejam as suas dificuldades, e não o deixo sair do quadro sem saber traçar o respectivo algarismo. É claro que não ligo importância à perfeição do desenho, porque essa só se adquire com muita prática. Depois de todos os alunos saberem escrever o algarismo 1, coloco outro feijão ao lado do primeiro e pergunto-lhe: - E agora, quantos feijões estão aqui?

-- Dois

E já agora é escusado continuar a explicar o modo como ensino o nome e a escrita dêste algarismo, bem como do 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, pois é em tudo igual à dos dois primeiros. Aprendido o nome e a escrita dos algarismos, o que é impossível numa só lição, principalmente se a classe for numerosa, digo aos alunos que êstes nove sinais se chamam algarismos e que por meio dêles podemos escrever qualquer número. Só depois dos alunos saberem escrever relativamente bem e sem hesitação todos os algarismos, passo a explicar-lhes o que é quantidade, unidade e número. Para isso coloco na secretária por exemplo 4 livros, 6 lápis, 5 cadernos e 8 feijões. Chamados os alunos para junto da secretária e dispostos de maneira a poderem ver os grupos de objectos que coloquei sôbre ela, digo-lhes:

-- Os meus meninos, se olharem com atenção para a secretária, vêem vários objectos dispostos em grupos. Aqui está um grupo de livros, ali um grupo de lápis, além um grupo de cadernos e acolá um grupo de feijões. Se os meus amigos desejarem saber por quantos objectos é formado cada um dêstes grupos, precisam de os contar não é verdade? Ora os meus meninos já sabem o suficiente para os contar e para representarem, por meio de sinais, o resultado da contagem dos objectos de cada um dêstes grupos. Portanto – digo eu voltando-me para um dos alunos – o menino vai contar os livros daquele grupo. Quantos são?

-- Quatro

-- Vá ao quadro escrever o respectivo algarismo. Vá agora contar os lápis daquele grupo. Quantos são?

-- Seis

Escreva o respectivo algarismo no quadro, bem separado do algarismo 4, e venha depois contar os cadernos daquele grupo. Quantos são?

-- Cinco.

-- Escreva o algarismo cinco no quadro um pouco adiante do seis e venha depois contar os feijões. Quantos são?

-- Oito.

-- Escreva o oito um pouco adiante do 6.

Depois do aluno ter acabado a contagem dos objectos de cada grupo e de ter representado gràficamente no quadro o resultado de cada contagem, dirijo-me novamente aos alunos e digo-lhes:

-- A aritmética, que é a ciência que os meus amigos estão aprendendo e que trata dos números, a cada um dos grupos que os meus meninos vêem sôbre a mesa, chama grandeza;

a cada um dos objectos que formam os grupos, chama unidade; aos nomes e aos algarismos ou símbolos que indicam a totalidade dos objectos de cada grupo, de cada grandeza portanto, chama-lhe números. Logo, em aritmética, aquele grupo de livros é uma grandeza (colecção ou quantidade); aquele grupo de lápis outra; o grupo de cadernos outra, e o grupo de feijões outra. Cada livro, cada lápis, cada caderno, cada feijão, é uma unidade. Os nomes quatro, seis, cinco e oito, bem como os algarismos 4, 6, 5, e 8, que estão escritos acolá no quadro, porque representam respectivamente a totalidade dos objectos de cada grandeza (de cada colecção, de cada quantidade) chamam-se números. Portanto o 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9, são números. Sabido isto, não se deve prosseguir na representação gráfica dos números sem que as crianças saibam somar, subtrair, multiplicar e dividir com êstes nove primeiros números, o que se consegue por meio de muitos e muitos exemplos concretizados por objectos colocados diante da criança, e por muitos e muitos concretizados também, mas sem que os objectos da concretização estejam à vista dela para a habituar a reflectir, a raciocinar. A concretização é necessária, mas é preciso ter cuidado com ela.

Como resolvi fazer a minha conferência sobre aritmética seguindo escravamente o caminho que tenho seguido até aqui, em todos os assuntos que me seja possível tratar, não falo agora das operações, porque teria de apresentar exemplos para as quatro operações com os primeiros nove algarismos, depois exemplos idênticos para os números de 10 a 20, acompanhados da respectiva explicação da sua representação gráfica, etc., etc., o que tornaria o assunto demasiadamente extenso, o que não pode nem deve ser. Por isso vou representar a explicação da escrita dos números de 10 até 100, assunto de muitas lições, já se entende, e depois, com meia dúzia de exemplos, apresentarei o caminho que sigo para levar a criança a saber o que é somar, subtrair, multiplicar e dividir, em que casos deve ser feita a respectiva aplicação e porque. E dito isto à laia de esclarecimento, voltemos ao assunto.

Traçadas novamente as linhas sobre a secretária à imagem e semelhança das da primeira lição, e dispostos os alunos à volta dela de maneira a poderem ver perfeitamente o que se vai fazer, entrego o giz a um dos alunos, conto em voz alta e lentamente nove feijões, coloco-os no espaço compreendido entre a primeira linha e a extremidade da mesa e pergunto:

-- Quantos feijões estão aqui?

-- Nove

– Vá ao quadro escrever o respectivo algarismo.

Coloco mais um feijão ao lado dos nove e pergunto-lhe:

-- E agora, quantos são?

-- Dez.

-- Como se deve escrever dez?

-- ?!

-- Meus meninos – digo eu dirigindo-me a todos os alunos – se para cada número houvesse um sinal como para os primeiros nove, seria possível aprender a escrever números? Não, porque a série de números é indefinida, isto é, não tem limites. Por maior que um número seja, podemos sempre torná-lo maior, acrescentando-lhe uma unidade. Até nove unidades, temos sinais próprios para designar o respectivo número delas. Mas para o número dez, já não temos sinal próprio e por isso temos de nos remediar com os já conhecidos. Ora quando temos dez coisas, dez objectos, a êsse grupo damos o nome de dezena e forma uma unidade nova. Por isso – continuo eu passando os dez feijões para o outro lado do traço – como estes dez feijões formam uma unidade nova chamada dezena, não podem ficar onde estavam e vão para aqui, para a esquerda deste traço, porque à direita só podem ficar as unidades que não chegam a dez e que por isso se chamam unidades simples. Ora, se dez unidades, aqui feijões, formam uma unidade nova chamada dezena, que sinal, que algarismo, que símbolo devemos escrever no quadro para a indicar? Tem de ser o algarismo 1, porque é o único que nos indica uma só coisa. Mas chegará só êle para representar dez? Não, porque precisamos de indicar quantas unidades simples nos sobram das dez. E passando a mão pelo espaço compreendido entre o primeiro traço e a extremidade da mesa, acrescentei:

-- Como vêem, aqui não há unidade nenhuma. Logo, o algarismo que devemos escrever à direita do 1, é o zero, porque só ele serve para dizer que não temos nada. E na verdade, além da dezena, não temos mais nada. Depois do aluno ter escrito no quadro o número dez, coloco outro feijão à direita do traço e pergunto-lhe:

-- E agora, meu menino, quantos temos?

-- Onze

-- Como se escreve onze?

-- ?!

-- Como vêem - digo para todos os alunos – ter onze é ter dez mais um. E dez, o que é? É uma dezena, não é verdade? Qual é o algarismos de que nos servimos para indicar que temos uma só coisa? É o algarismo 1. Aqui temos uma só unidade chamada dezena – digo eu apontando o grupo de dez; ali temos outra unidade chamada unidade simples. Portanto, para indicar a primeira, escrevemos o 1, e para indicar a outra escrevemos outro 1. Daí a razão porque o número 11, se escreve com o algarismo 1, duas vezes.

Por isso, dizer onze é dizer: dez mais um, ou: uma dezena e mais uma unidade simples. Acabada a explicação, tiro da caixa outro feijão, coloco-o ao lado do outro e pergunto a um dos alunos:

-- Menino, quantos feijões temos agora?

-- Doze

-- Como devemos escrever doze?

-- ?!

-- Se os meus meninos olharem com atenção, vêem que ter doze, é ter dez e mais dois. Temos aqui um grupo de dez e ali um grupo de dois. Ora dez é uma dezena, e por isso escrevemos o 1 para a representar. E como além das dez unidades (feijões) temos mais duas unidades simples, à direita do 1, escrevemos o 2. Depois do número 12 ter sido representado graficamente no quadro, coloco outro feijão ao lado dos outros dois e pergunto a outro aluno:

-- E agora, menino, quantos feijões são?

-- Treze.

-- Como devemos escrever treze?

-- ?!

-- Devemos escrever com um 1, e com um três, porque o número treze é formado por uma unidade chamada dezena e por mais três unidades simples. Ora os meninos já sabem que o algarismo de que nos servimos para indicar uma só coisa é o algarismo 1. Se olharmos com atenção para os feijões que temos sôbre a mesa, vemos que estão dispostos em dois grupos, sendo um formado por dez feijões e outro por três. Aquele grupo de dez, para poder ser escrito, tem de ser considerado como uma só coisa, uma só unidade, para poder ser representado pelo algarismo 1, pois doutra maneira ser-nos-ia impossível, visto só termos sinais próprios para representar os primeiros nove números. O outro grupo, porque é formado por três unidades simples, deve ser indicado pelo algarismo três, porque é êle que representa êsse número de unidades. E porque assim é, para escrever treze, devemos escrever o 1, para indicar aquele grupo de dez, para dizer que temos uma dezena, e o três para dizer que além daqueles dez, daquela dezena, que temos mais três unidades simples.

Acho inútil continuar a apresentar a explicação da escrita de números de 14 a 20, porque ela é em tudo igual às anteriores, e mesmo porque os alunos, geralmente, a partir do número 14 até ao número 20, depois de escutadas estas explicações, passam a indicar os respectivos sinais de cada número e a razão porque devem ser êsses e não outros. Atingido o número vinte, pergunto a um dos alunos:

-- E agora quantos feijões temos?

-- Vinte.

-- Como devemos escrever vinte?

-- ?!

-- Todos os meninos o sabem – digo eu apontando a dezena já conhecida – que os feijões que aqui estão são dez e que por isso formam uma dezena. Agora vamos contar os que estão aqui à direita para ver quantos são. E dito isto, vou contando lentamente e em voz alta: 1, 2, 3, etc. Depois de os contar e de verificar que são dez, digo-lhes:

-- Meus meninos, aqui estão dez; e como dez forma uma unidade nova chamada dezena, não pode ficar aqui, porque neste lugar só podem ficar as unidades que não cheguem para formar um grupo de dez. Logo, que tenho a fazer? Passá-las para junto da outra dezena. Depois de ter passado os dez feijões para a esquerda do traço e de os ter disposto em grupo por baixo da outra dezena, digo aos alunos:

-- Como vêem, o número vinte é formado por duas dezenas certas. Não há mais unidades simples que as precisas para formar as duas dezenas. Daí a razão porque o número vinte deve ser escrito com um dois e com um zero. O dois, para indicar as duas dezenas, e o zero para indicar que são certas, que não sobra nem falta nada.

Passo depois ao 21, 22, 23, etc., etc., tendo sempre o cuidado de ir perguntado ora a um ora a outro aluno:

-- Quantos feijões temos agora? Com

que algarismos devemos escrever? Porquê?

Quando chego ao número trinta, mando vir à mesa um dos alunos e peço-lhe para que diga aos seus condiscípulos com que algarismos se escreve trinta e explique a razão porque. Se o aluno não sabe, conto lentamente e em voz alta os feijões que estão à direita do traço, e ao verificar que são dez, passo-os para a esquerda, dizendo aos alunos:

-- Como vêem, ter trinta é ter dez três vezes, ou seja três dezenas certas, pois aqui, no lugar das unidades simples, não ficou nada. Logo o número trinta deve ser representado pelo algarismo três e pelo algarismo zero: o 3, para indicar que temos três dezenas e o zero para indicar que são certas, que não sobra nem falta nada. Passo depois ao 31, 32, 33, etc., etc., fazendo aos alunos perguntas como estas:

-- Êste número com que algarismos se escreve? – Porque? – Quantas dezenas temos? – Quantas unidades simples sobram? –- Êste número quantas unidades simples tem (ou contém)? –- Quantas unidades simples tem cada dezena? –- Quantas dezenas tem este número?

Quando chego ao número quarenta peço a um dos alunos para vir à mesa explicar com que algarismos se escreve quarenta e porque. Se ainda não sabe, explico eu da mesma maneira que expliquei os números 20 e 30, e assim continuo até 100.

Ao chegar a 100, digo aos pequenos:

-- Agora, muita atenção para aprenderem a escrever o número 100. Os meus meninos já sabem que, com dez unidades simples, se forma uma unidade nova chamada dezena. Se contarmos as dezenas que temos agora aqui, vemos que são dez. Logo, se com dez unidades simples se forma uma unidade nova chamada dezena, também com dez dezenas se forma uma unidade nova chamada centena. E dito isto, reuno as dezenas num só grupo, passando-as para a esquerda do segundo traço, dizendo:

-- Estas dezenas, porque são dez, não podem ficar aqui, porque formam uma nova unidade à qual chamamos centena. Eis a razão porque eu as passo para a esquerda do traço. Se olharmos agora com atenção para a mesa, vemos aqui um grupo de cem e não vemos nada no lugar das dezenas como também não vemos nada no lugar das unidades simples. Ora se eu tenho uma nova unidade (centena neste caso) que algarismo devo escrever para a representar? O 1, não é verdade? E como não tenho mais dezenas que as que foram precisas para formar a centena, nem mais unidades simples que as que foram precisas para formar as dez dezenas, e os meus amigos bem vêem que não há dezena nenhuma no lugar das dezenas, nem nenhuma unidade simples no lugar das unidades simples, os algarismos que devo escrever à direita do 1, são dois zeros. Eis a razão porque cem se escreve com um 1 e dois zeros. E agora passo a apresentar os seguintes esquemas para exemplificar melhor a lição:

		· 1
		·· 2
		··· 3

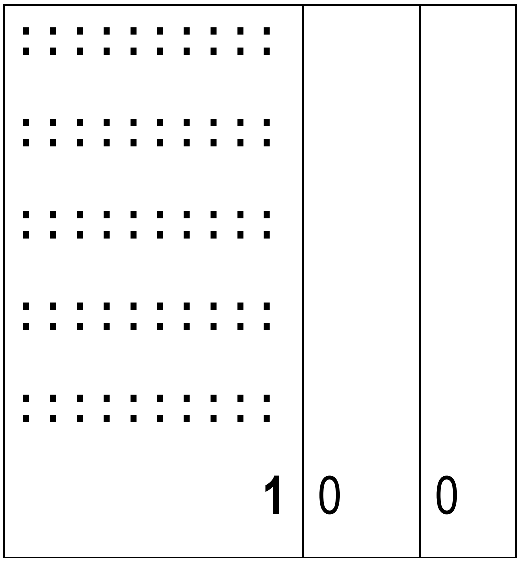
		…. 4
		….. 5
		….. . 6
		….. .. 7

		 8
		 9
	 1	0
	 1	. 1

	 1	.. 2
	 1	... 3
	 1	 4
	 1	 5

	 1	 6
	 1	 7
	 1	 8
	 1	 9

	::::: ::::: 2	0
	::::: ::::: 2	. 1
	::::: ::::: 2	.. 2


1
0
0

Passemos agora às operações. Dispostos os alunos à volta da secretária, tiro feijões da caixa e entrego dois a um dos alunos e um a outro e digo ao que tem dois:

-- O menino tem dois feijões e aquele seu companheiro tem um. Quantos feijões têm os dois?

-- três.

-- O menino não sabe ainda que operação fez para encontrar êsse três. O menino para me dizer que eram três, talvez pensasse assim: -- Para responder ao meu professor precisava que os meus feijões estivessem juntos com o feijão do meu condiscípulo, pois êle não quere saber quantos tenho eu ou quantos tem êle, mas sim quantos temos os dois. Ora os meus juntos aos do meu condiscípulo, são três. Já vê, o meu menino, que para responder à minha pergunta, foi obrigado a juntar, a reunir, os seus feijões com os do seu condiscípulo. Tôdas as vezes que juntarmos ou reunirmos dois ou mais números, fazemos uma operação chamada soma ou adição. Agora vou escrever no quadro a operação que o meu amigo fez, para todos ficarem a saber como se indicam as operações por meio de sinais, pois cada operação tem um sinal próprio. Escrevo no quadro: **2+1=3**, e digo aos alunos: -- O sinal que escrevi entre o 2 e o 1, é o sinal que serve para dizer que a operação indicada é a soma ou adição e chama-se **mais;** lê-se mais; e o sinal que escrevi entre o 1 e o 3, porque indica que as unidades que estão antes dêle são tantas como as que estão depois, portanto iguais na quantidade, chama-se **igual**. O 2 e o 1, por estarem separadas pelo sinal mais, chamam-se parcelas, e o 3, por representar tantas unidades como as de tôdas as parcelas, chama-se soma ou total. Se quisermos ler o que está indicado no quadro, devemos ler: 2 mais 1, igual a 3.

Depois disto dirijo-me aos alunos que têm feijões e digo-lhes:

-- Troquemos os feijões. Quantos feijões têm agora vocês? – Pergunto eu ao rapaz que há bocado tinha 2?

-- Três.

-- É isso mesmo; continuam ainda a ser três porque as quantidades não aumentaram nem diminuíram, apenas foram trocadas. Portanto indicando isso no quadro, temos: **1+2=3** Se olharmos com atenção para as duas operações indicadas, vemos que em ambas as parcelas são iguais, mas que na primeira adição a parcela dois está em primeiro lugar e a parcela um está em segundo; e na segunda adição a parcela um está em primeiro lugar e a parcela dois está em segundo. Como os totais das duas operações são iguais, ficamos já sabendo que a ordem das parcelas é arbitrária. E a aritmética dizendo isto, quere dizer o mesmo que diria, se dissesse: A colocação das parcelas da soma, não tem regras; é feita à vontade de cada um. Depois de ter explicado assim, entrego por exem_ plo três feijões a outro aluno e pergunto a um aluno que não tenha feijões: -- Quantos feijões têm aqueles três meninos?

-- Seis.

-- Para o menino dizer que são seis os feijões daqueles três meninos, foi obrigado a juntar, a reunir, a misturar – deixe-me assim dizer – os feijões de um com os do outro, e depois os dos dois primeiros com os do terceiro e assim encontrou o número seis, que indica os feijões de todos. Vou escrever no quadro, por meio de algarismos e de sinais próprios, a operação que o menino acabou de fazer. E escrevo no quadro: **3+2+1=6**. Esta expressão indica uma adição e lê-se: três, mais dois, mais um, igual a seis. Os sinais que estão entre o 3, o 2 e o 1, chamam-se mais. O 3, o 2 e o 1, por estarem separados pelo sinal mais, chamam-se parcelas. O 6, por indicar tantas unidades quantas são as de todas as parcelas, chama-se soma ou total, e o sinal que está entre a última parcela e o seis, chama-se igual. Dito isto, volto para junto dos alunos, dirijo-me ao aluno que contou e digo-lhe, apontando o quadro:

-- Da maneira que a operação está indicada no quadro, conclui-se que o meu amigo chegou ao resultado seis, juntando os três feijões que este seu condiscípulo tem na mão aos dois dêsse, e os dêsses dois ao feijão daquele. Se o meu amigo principiar a contar pelo rapaz que tem só um feijão, encontra o mesmo resultado, porque 1 e 2 são 3, e 3 e 3 são 6. Indicando esta segunda adição no quadro, temos: **1+2+3=6**. Comparando esta adição com a primeira, vemos que as parcelas são iguais; a diferença está apenas na ordem delas. Como porém os resultados são iguais, concluímos, mais uma vez, que a ordem das parcelas é arbitrária. Pelos exemplos apresentados já os meninos ficam a saber que quando temos várias quantidades e queremos saber quantas unidades têm tôdas, somos obrigados a juntá-las, a reuni-las. Por isso a aritmética diz assim: Soma é uma operação que tem por fim reunir dois ou mais números num só. Mas eu não quero que os meninos saibam tanta coisa. Quero simplesmente que saibam que somar é juntar e que portanto esta operação só se emprega quando necessitamos de juntar, reunir vários números. Depois dos alunos saberem bem somar com os nove primeiros números e de saberem indicar a respectiva operação, passo a explicar-lhes a multiplicação. E para isso digo assim: Há uma operação muito parecida com a soma e por isso lhe chamam a soma abreviada. Dito isto, coloco sôbre a mesa dois grupos de dois feijões cada um e pergunto a um dos alunos: -- Quantos feijões estão sôbre a mesa?

-- Quatro

-- Que operação fez?

-- Uma soma.

--Não respondeu mal, porque juntando os dois grupos fica um grupo de quatro feijões. Mas podemos chegar ao mesmo resultado repetindo as unidades de cada grupo tantas vezes quantas são os grupos. E sendo assim, os feijões que temos sobre a mesa, são dois duas vezes. Ora dois duas vezes são quatro. Indicando no quadro as duas operações temos:

$$2+2=4$$

$$2x2=4$$

Esta última operação porque nos ensina a repetir um número, chama-se multiplicação. O primeiro dois, porque representa o número que há-de ser repetido, chama-se multiplicando; o segundo dois, porque indica o número de vezes que essa repetição há-de ser feita, chama-se multiplicador; o sinal que os separa chama-se vezes, lê-se vezes ou multiplicar por, e o quatro, porque representa o resultado da operação chama-se produto total. Ao multiplicando e ao multiplicador dá-se também o nome de factores do produto. Querendo ler a segunda operação indicada, devemos ler: dois vezes dois igual a quatro. Se colocar outro grupo de dois feijões ao lado dos que já tenho, fico com três grupos de dois feijões cada um. Se quiser saber quantos feijões são, posso somá-los e somando-os digo: dois e dois, quatro; quatro e dois, seis. Mas, neste caso, atendendo a que cada grupo tem o mesmo número de unidades, posso saber quantas são sem as somar: basta que repita as unidades de cada grupo tantas vezes quantos são os grupos. Ora sendo os grupos três e duas as unidades de cada grupo, as unidades de todos são duas três vezes, ou sejam seis. Indicando as duas operações temos:

$$2+2+2=6$$

$$2 \times 3=6$$

Na primeira operação encontramos o resultado seis, juntando, e na segunda repetindo. A última operação, porque nos ensina a repetir um número, chama-se multiplicação. O dois, porque se repete, chama-se multiplicando. O três, porque nos diz quantas vezes o multiplicando há-de ser repetido, chama-se multiplicador, e o seis por indicar o resultado da operação chama-se produto total. Pelos exemplos apresentados, já os meninos vêem que uma soma de parcelas iguais se pode transformar numa multiplicação, desde que se tome uma delas para multiplicando e o número delas para multiplicador.

Ora agora – digo eu voltando-me para a secretária – vou juntar êstes três grupos de dois e vou formar com êles só dois grupos. Como vêem – digo eu apresentando os novos grupos – há bocado, com estes feijões, formei três grupos de dois e agora formei dois grupos de três. Portanto, quer tenha dois feijões três vezes quer tenha três duas vezes, tenho sempre seis. Tirando depois mais feijões da caixa, coloco dois sobre a mesa e digo: Tenho dois feijões porque tenho dois uma vez. Coloco a seguir outros dois feijões e digo: Agora tenho quatro, porque tenho dois duas vezes. A seguir coloco outros dois e digo: Agora tenho 6, porque tenho dois três vezes. Coloco depois outros dois e digo: Agora tenho oito, porque tenho dois quatro vezes.

Se juntar agora êstes feijões e formar com êles só dois grupos – e ao mesmo tempo que vou dizendo vou fazendo – fico com dois grupos de quatro feijões cada um. E assim fico sabendo que tenho sempre oito feijões, quer tenha dois quatro vezes, quer tenha quatro duas vezes.

Indicando separadamente no quadro o resultados destas nossas observações temos:

$$2x3=6$$
$$3x2=6$$

$$2x4=8$$
$$4x2=8$$

No primeiro caso aparece-nos o dois em multiplicando e o três em multiplicador; e depois o três em multiplicando e o dois em multiplicador. No segundo caso aparece-nos o dois em multiplicando e o quatro em multiplicador; e depois o quatro em multiplicando e o dois em multiplicador.

Como os respectivos produtos totais são iguais, concluímos que na multiplicação a ordem dos factores é arbitrária.

Depois dos alunos terem compreendido que somar é juntar e que multiplicar é repetir e de saberem somar e multiplicar com os nove primeiros números, bem como indicar as respectivas operações e resultados, passo à explicação da subtracção.

Para isso coloco sobre a mesa três feijões e digo aos alunos: -- Tenho aqui três feijões. Se dêstes três feijões tirar um, ficam dois. A isto que acabo de fazer, chama a aritmética subtrair, e à operação que nos ensina a subtrair, isto é, a tirar um número doutro, chama-se subtracção. Fazendo a respectiva indicação no quadro, temos: **3 -1=2** .

O três, por indicar o número do qual há-de ser tirado outro, chama-se diminuendo ou aditivo; o um, porque indica o número que há-de ser tirado do diminuendo, chama-se diminuidor ou subtractivo; o sinal que os separa chama-se menos, lê-se menos, e o dois porque indica as unidades que sobram do diminuendo depois de lhe ter tirado as unidades do diminuidor, chama-se resto. Se dos três tirar dois fico com um. Neste caso faço também uma subtracção porque tiro um número doutro. Indicando esta operação no quadro, temos:

$$3 - 2 = 1$$

O três, por indicar o número do qual há-de ser tirado outro, chama-se diminuendo ou aditivo; o dois por indicar o número que há-de ser tirado, chama-se diminuidor ou subtractivo, e o um, por indicar as unidades que sobram do diminuendo depois de lhe ter tirado as do diminuidor, chama-se resto. Nem sempre o resultado de uma subtracção se chama resto. Assim, por exemplo, se aquele menino tiver quatro feijões e êste tiver dois – e ao mesmo tempo que vou dizendo isto vou colocando os feijões de cada um sôbre a mesa – e o menino que tem dois feijões quiser saber quantos lhe faltam para ter tantos como o seu companheiro, terá de fazer uma subtrac_ ção, isto é, terá de tirar os seus dois feijões dos quatro para saber os que ficam, porque os que ficarem, indicarão os que lhe faltam para ter tantos como o seu companheiro. Neste caso, os que lhe faltam, indicam a diferença que há entre dois e quatro, e por isso o resultado desta subtracção se chama diferença. Indicando no quadro temos:

$$4 - 2 = 2$$

Se porém o menino que tem dois feijões quiser saber quantos feijões tem a mais que êle o seu companheiro, terá também de fazer uma subtracção, isto é, terá de tirar os dois feijões que tem, dos quatro que tem o seu companheiro para saber quantos sobram. O resultado desta subtracção chama-se excesso, por indicar as unidades que o número quatro tem a mais que o número dois.

Depois de bem compreendida a subtracção por meio de muitos exemplos idênticos aos que apresentei, passo à divisão, e para explicar procedo assim:

Coloco sobre a mesa vários grupos de feijões, três por exemplo, e suponhamos que o primeiro grupo tem quatro feijões, o segundo oito e o terceiro nove. Depôis digo aos alunos: Se quiser dar dois feijões a cada menino, para quantos meninos me chegarão estes quatro feijões? Chegam para tantas quantas sejam as vezes que do número quatro tire o número dois. Depois de ter tirado dois feijões duas vezes e dos alunos terem verificado que não podia tirar mais vezes porque nada ficara, digo-lhes: Como vêem, do número quatro só podemos tirar o número dois, duas vezes. Fazer o que eu agora fiz, isto é, tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa, é fazer uma operação a que a aritmética chama divisão. Indicando no quadro o que acabei de fazer, temos:

$$4:2=2$$

O quatro, por indicar o número do qual há-de ser tirado outro tantas vezes quantas se possa, chama-se dividendo. O dois, por indicar o número que há-de ser tirado do dividendo o maior número de vezes possível, chama-se divisor. O sinal que os separa chama-se **dividir por**, e o dois que fica adiante do igual, porque indica o número de vezes que o divisor pode ser tirado do dividendo, chama-se cociente. Querendo ler o que está indicado devemos ler: Quatro a dividir por dois, igual a dois. Como nada sobrou, esta divisão chama-se exacta. Já vêem que a divisão e a subtracção são operações muito parecidas porque ambas nos ensinam a tirar um número doutro. A diferença porém é esta: A subtracção ensina-nos a tirar um número doutro uma só vez; a divisão ensina-nos a tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa.

Tenho aqui oito feijões que quero distribuir igualmente por quatro meninos. Quantos feijões pertencem a cada um? Se tirar quatro feijões, dou um a cada menino. Se tornar a tirar quatro, já dou outro, e assim até acabarem os feijões que tenho para dar ou até que os que fiquem não cheguem para dêles voltar a tirar quatro. Portanto, os feijões que dou a cada menino são tantos como as vezes que o número quatro possa ser tirado do número oito, que neste caso não podem ser mais de duas. Ora tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa, é dividir. Logo a operação que tenho a fazer é a divisão. Indicando, a operação, temos:

$$8:4=2$$

Querendo ler esta expressão, devemos ler: Oito a dividir por quatro, igual a dois. O oito, por indicar o número do qual há-de ser tirado outro número tantas vezes quantas se possa, chama-se dividendo. O quatro por indicar o número que há-de ser tirado, chama-se divisor. O sinal que os separa chama-se dividir por, lê-se: dividir por, e o dois, por indicar o número de vezes que o quatro há-de ser tirado do dividendo, chama-se cociente. Nesta divisão não há resto, porque tirando quatro duas vezes, tiramos oito, e tirando oito de oito não fica nada. Por isso esta divisão chama-se exacta.

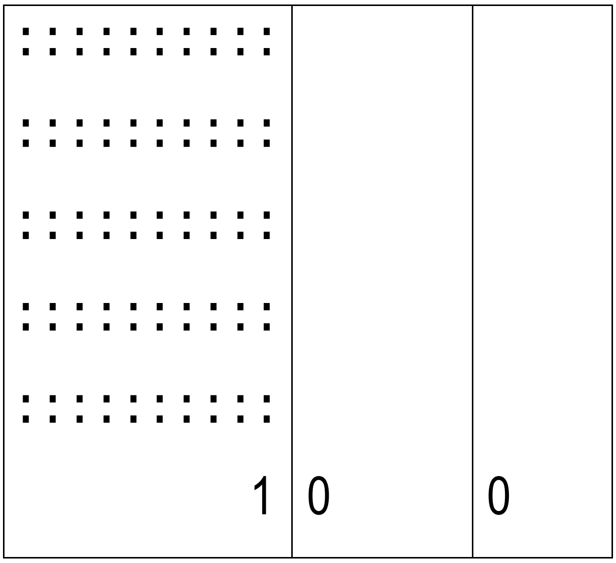
Se agora quiser saber para quantos meninos me chegam os nove feijões deste grupo se a cada menino der três, para o saber, terei também de fazer uma divisão, pois tantas vezes tire o número três do número nove, tantos serão os feijões que darei a cada menino. E como do número nove não posso tirar o número três mais que três vezes, segue-se que são três os feijões que hei-de dar a cada menino. Indicando a operação no quadro temos:

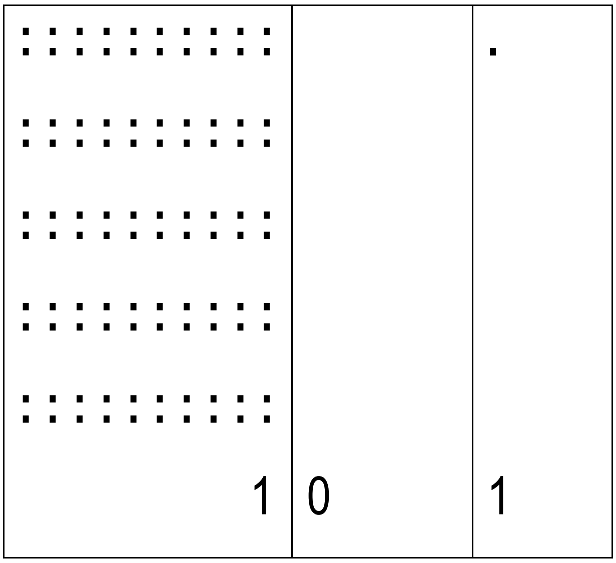
$$9:3=3,$$

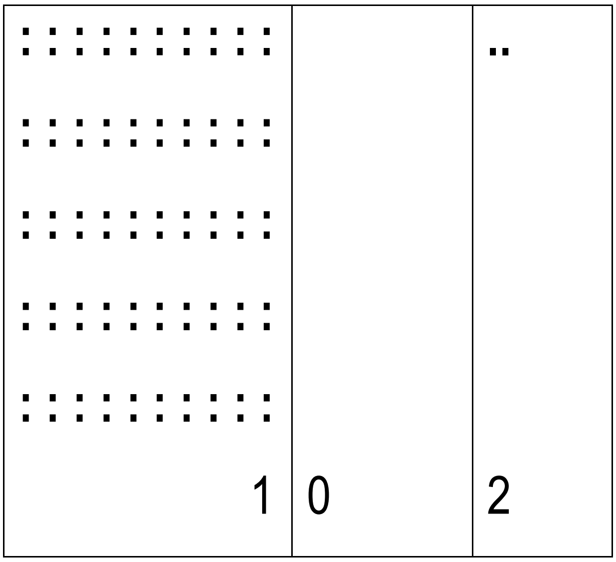
que deve ler-se: nove a dividir por três igual a três. O nove chama-se dividendo; o três divisor, o sinal que os separa, dividir por, e o último três, cociente. Depois de bem compreendidas todas as operações com os nove primeiros números, passo a obrigar os alunos a operar com números de dez a vinte, esforçando-me o mais possível para os fazer compreender bem que somar é juntar, subtrair é tirar um número doutro uma só vez, multiplicar é repetir, e dividir é tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa. E para que apresentar mais exemplos? Basta dizer que para obrigar os alunos a raciocinar, os obrigo a responder a um sem número de perguntas como as que seguem, feitas, já se entende, conforme o caso a resolver: -- Que operação se faz para saber o que desejamos? Porque? O que é somar? O que é subtrair? O que é multiplicar? O que é dividir? Porque se multiplica? Porque se divide? Porque se soma? Porque se subtrai? Que diferença há entre somar e multiplicar? Que diferença há entre subtrair e dividir? Neste caso porque se soma e não se subtrai? Porque se multiplica e não se divide? etc.,etc.

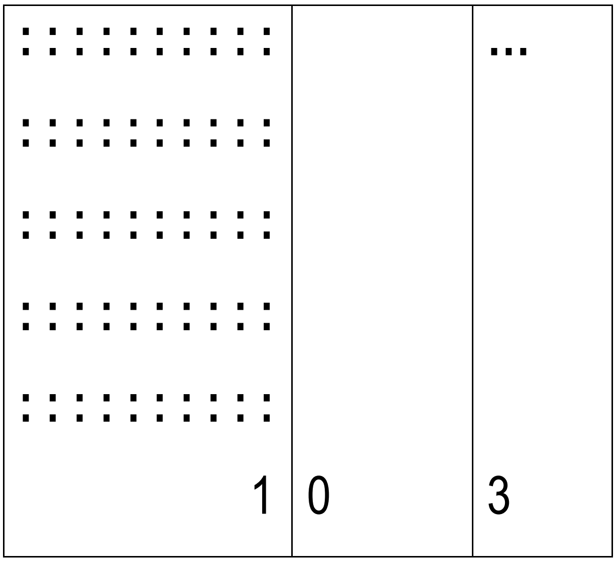
Também não me esqueço de ensinar, desde os primeiros exemplos, como na prática é costume dispor os números para efectuar as operações. Não apresentei êsses exemplos porque entendo que neste trabalho não devo entrar em minuciosidades demasiadas. Passo portanto a apresentar os esquemas para exemplificar a escrita de números de cem até mil, não apresentando a explicação porque em tudo é igual à que já apresentei para os números de um a cem.

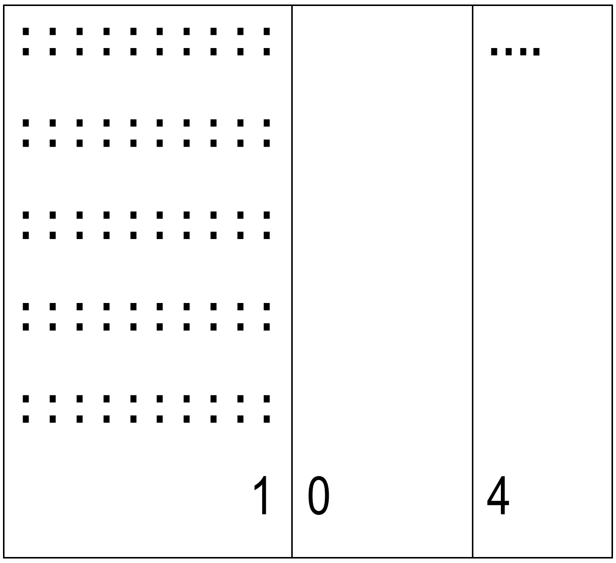
Logo que os alunos sabem escrever até mil com conhecimento de causa, fàcilmente compreendem o princípio fundamental da numeração escrita e escrevem qualquer número. Seguem os esquemas:

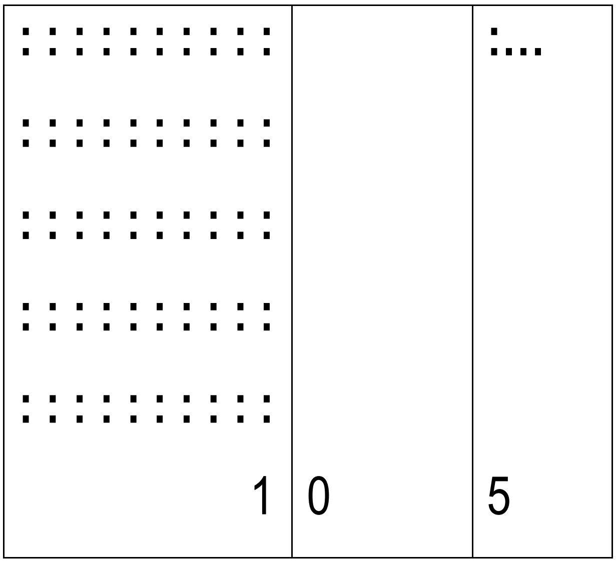

1
0
0

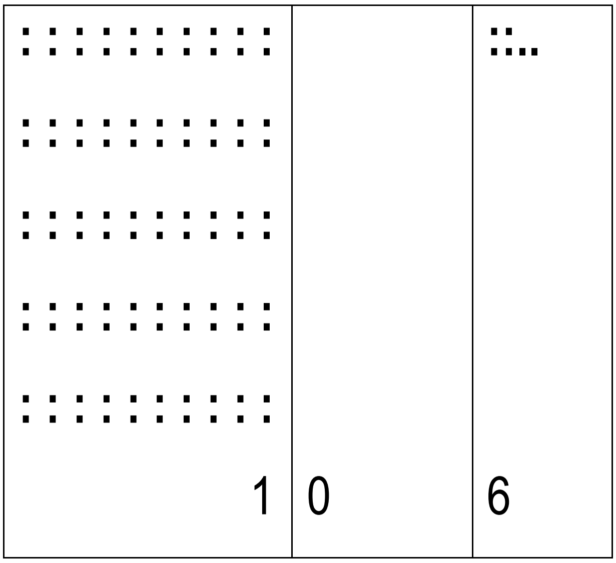

1
0
1

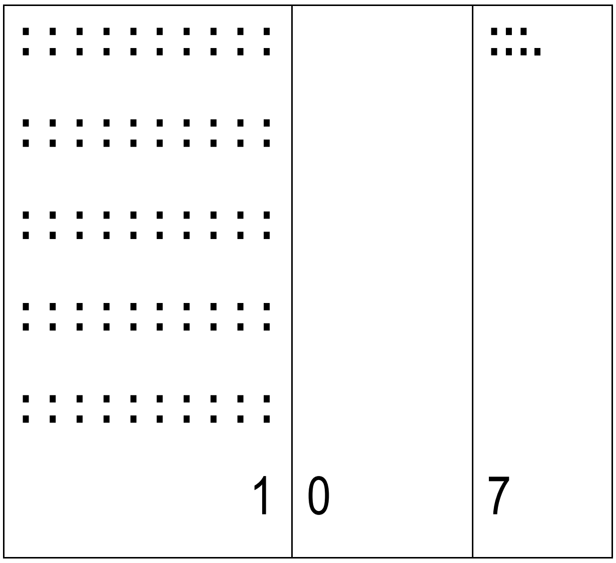

1
0
2

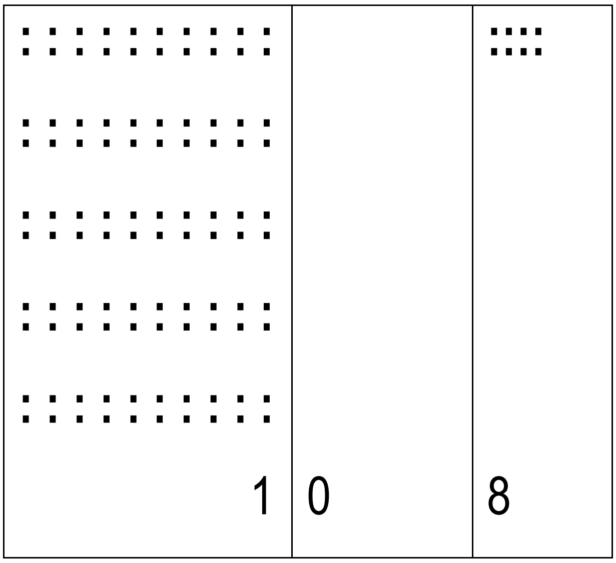

1
0
3

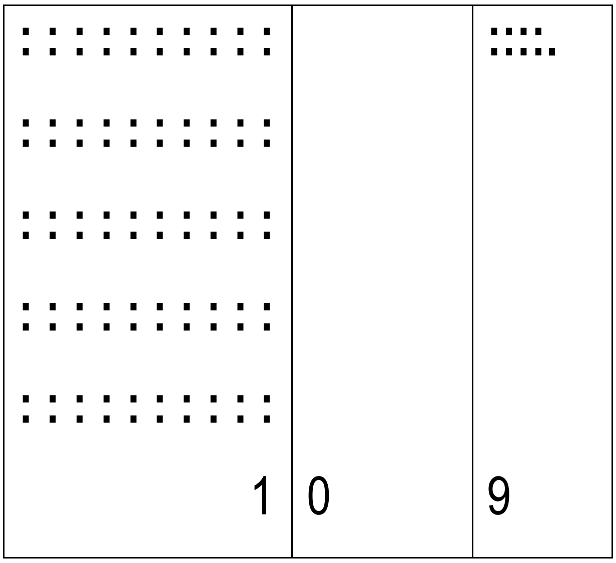

1
0
4

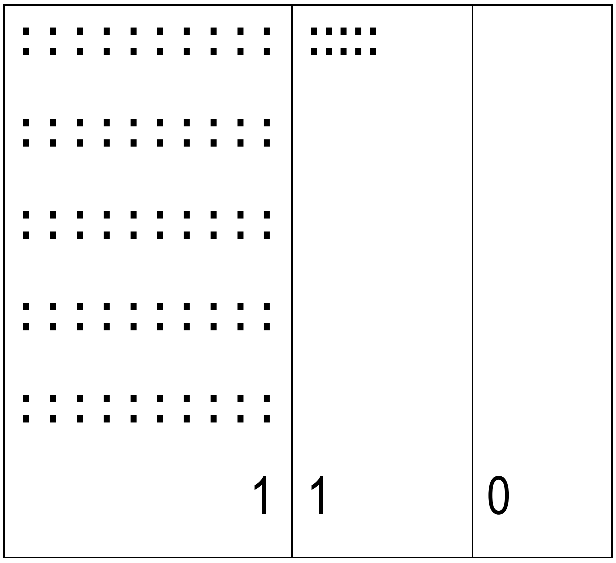

1
0
5

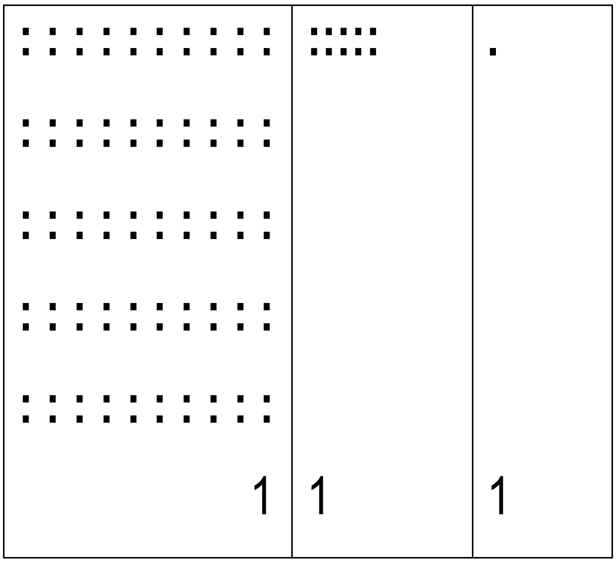

1
0
6

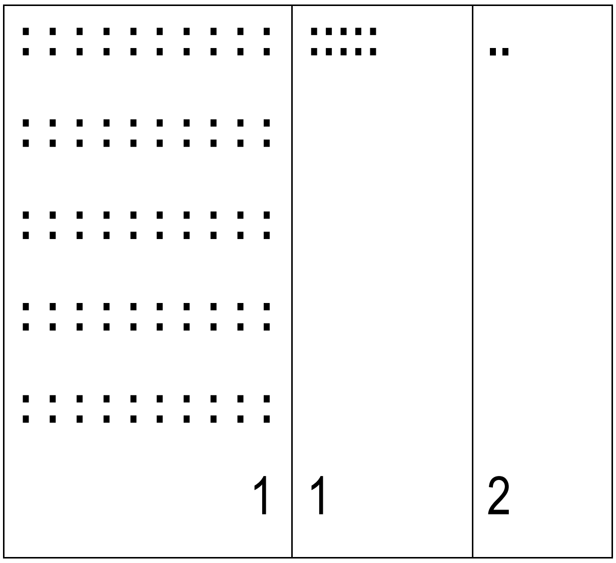

1
0
7

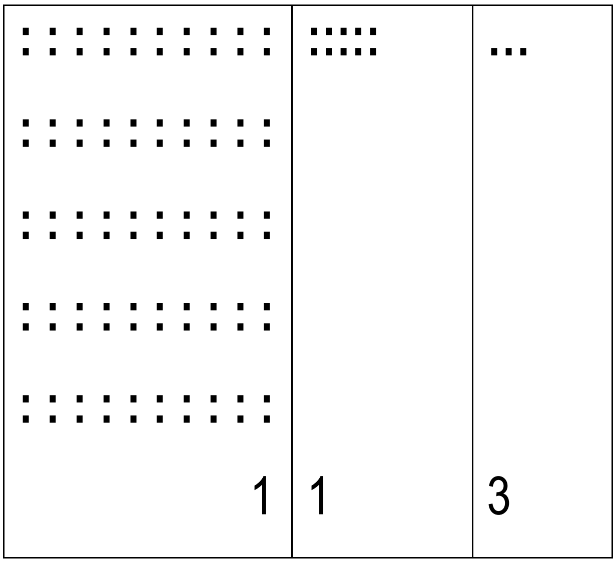

1
0
8

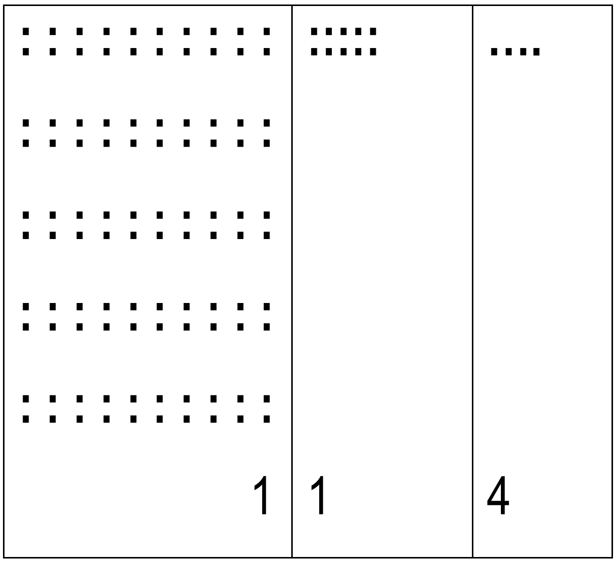

1
0
9

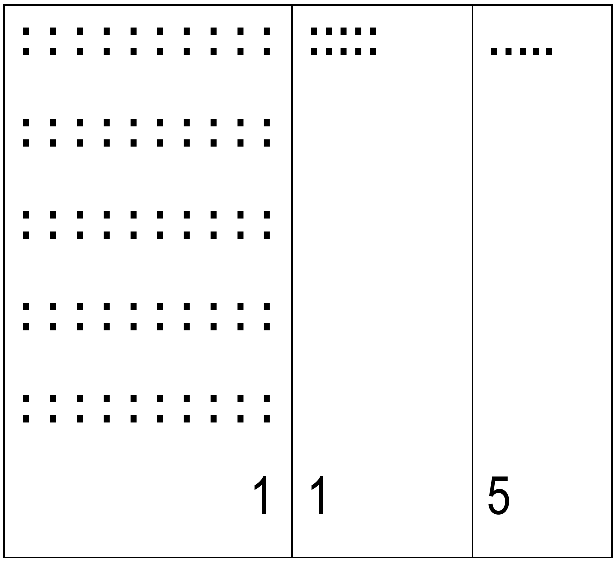

1
1
0

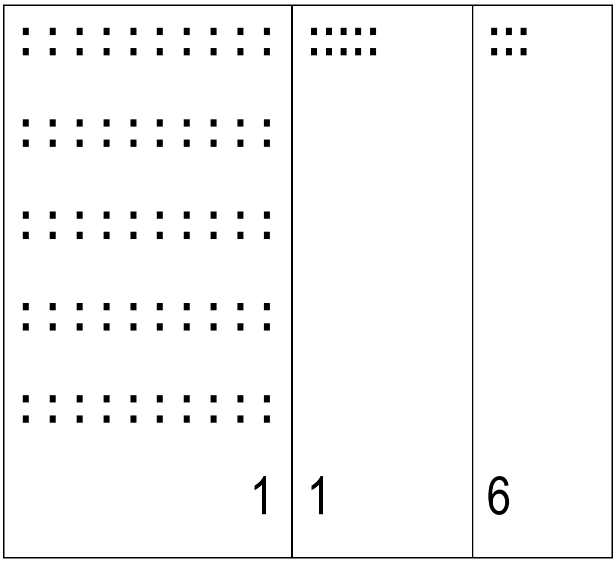

1
1
1

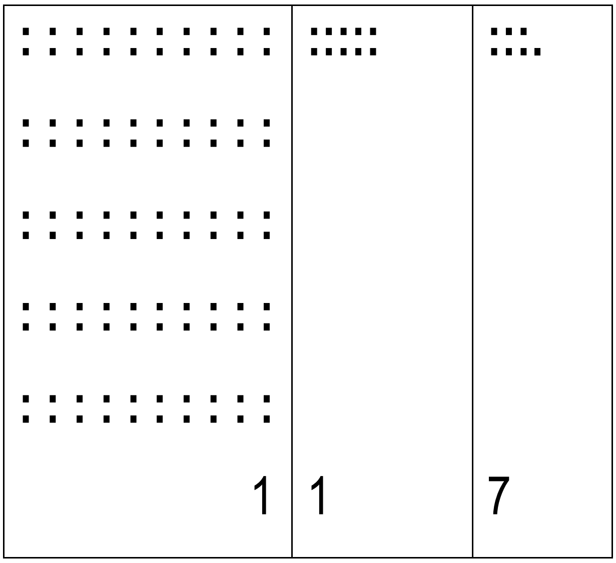

1
1
2

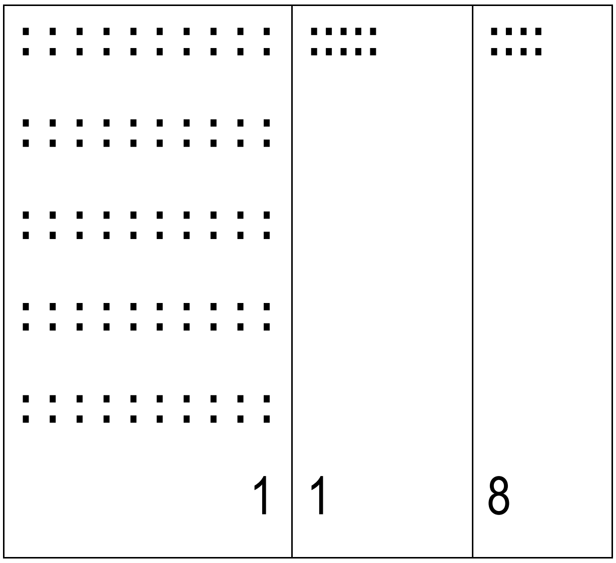

1
1
3

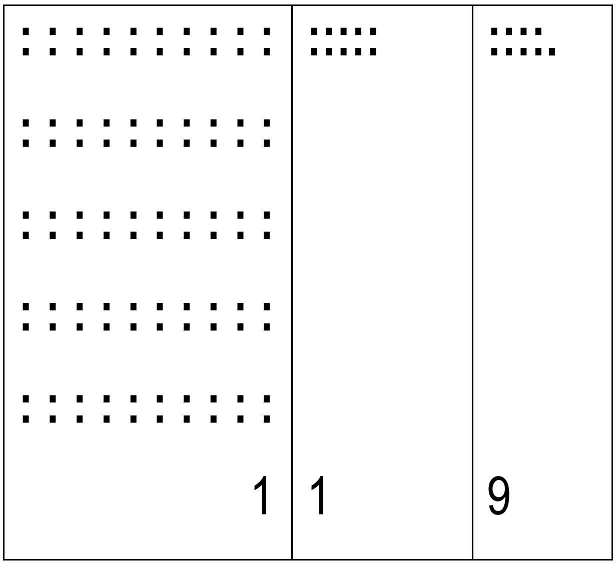

1
1
4

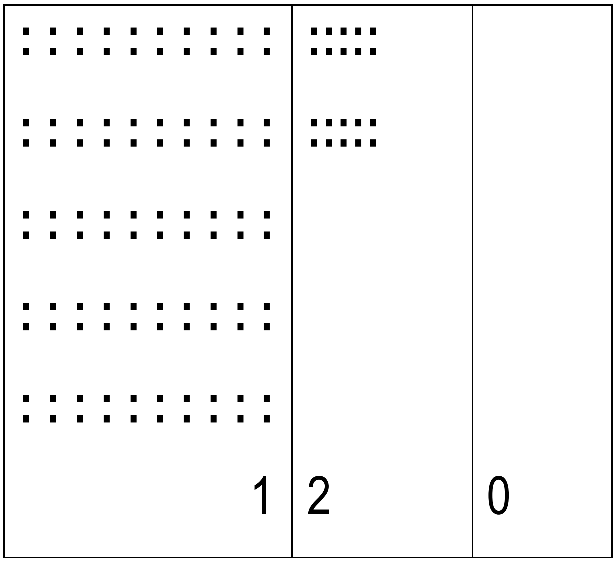

1
1
5


1
1
6


1
1
7


1
1
8


1
1
9



etc.,etc.

Sôbre operações, como daqui em diante me limitarei a copiar algumas das lições do meu diário escolar do ano lectivo corrente, pois já vejo que me é impossível tratar de todos os assuntos, e os que apresento já chegam para fazer dormir de tédio e aborrecimento os que me escutam, vou apresentar uma explicação da divisão à segunda e à quarta classes, que são as que lecciono êste ano e que, como todos sabem, obrigam a repetir, respectivamente, o programa da primeira e da terceira. Apresentarei depois uma lição à quarta onde explico as quatro operações por meio de exemplos. Passarei depois à explicação dos noves fora, das provas das operações, do princípio fundamental da numeração escrita, da divisibilidade, das fracções e respectivas operações, do emprego da vírgula, e por fim explicação do sistema métrico. Se me for possível, apresentarei a explicação dos complexos e respectivas operações.

Lição da explicação da divisão à segunda classe:

Chamei um aluno ao quadro e disse-lhe: O menino tem doze peras e quere distribuí-las igualmente por três rapazes seus amigos. Quantas deve dar a cada um?

-- Quatro – respondeu ele.

-- Que operação fez para achar êsse quatro?

-- ?!

-- Tomei o contador, contei nele doze esferóides e disse ao rapaz: Suponha que estes doze esferóides são as peras que quere distribuir pelos seus três amigos. Se o meu amigo quiser saber quantas dá a cada um dêles, que faz? Tira três, e dá uma a cada um. E ao mesmo tempo que assim ia dizendo apartei três esferóides. Depois volta a tirar três, e a dar uma a cada um dos seus amigos, e assim sucessivamente até as peras se acabarem, ou até que as que sobrem não cheguem para dar uma a cada rapaz. Quando tirei os últimos três esferóides perguntei-lhe:

-- E agora menino, ainda pode tornar a tirar três?

-- Não, porque já não tenho mais.

-- Então quantas vezes tirou três? – perguntei eu apontando-lhe os grupos de três que eu deixara bem separados?

-- quatro vezes.

-- Logo, eram quatro as peras que o meu amigo dava a cada um dos seus amigos.

-- Então que operação fizemos?

-- Uma divisão.

-- Porque?

-- Porque tiramos o número três do número doze, tantas vezes quantas pudemos.

-- É isso mesmo. Tôdas as vezes que necessitamos de tirar um número doutro tantas vezes quantas possamos, fazemos sempre uma divisão. Agora vamos escrever os números indicando a operação: 12:3=

Dispondo pràticamente e efectuando, temos:

12 | _3_
0   4

O menino, para achar o quatro, disse: - Em doze quantas vezes há três?
-- Que é que o menino quere dizer dizendo: em doze quantas vezes há três?
-- ?!
-- Quere dizer o mesmo que diria, se dissesse: De doze peras, quantas vezes posso tirar três peras?
O meu menino ainda agora viu no contador que o número três pode ser tirado do número doze, quatro vezes. Aí tem a razão porque disse: -- Há quatro – que, neste caso, quere dizer: posso tirar três peras quatro vezes.
Depois o menino disse: -- Quatro vezes três doze. – Que quere dizer aí: -- quatro vezes três, doze?
-- ?!
-- Quere dizer: tirando três peras quatro

vezes, tiro doze. E depois o menino disse:

-- Doze para doze nada. Que quere dizer aí : -- Doze para doze, nada?

-- ?!

-- Quere dizer: Tirando doze peras de doze peras, não sobra nada, não fica nada.

Agora, pergunto eu: Se as peras fossem treze, quantas sobravam?

-- Sobrava uma.

-- Sim, sobrava uma, e nesse caso teria de escrever o um debaixo do doze e chamar-lhe-ia resto, porque representava as unidades que sobravam e que já não chegavam para delas tirarmos três outra vez.

E como êste apresentei muitos exemplos, fazendo sempre as mesmas perguntas.

Passemos agora à divisão que exemplifiquei à quarta classe:

Escrevi no quadro esta divisão: 7839 |_5___ , chamei um aluno ao quadro e disse-lhe: Faça esta divisão.

O aluno marcou o sete e disse:

-- Em sete, quantas vezes há 5, há um.

Logo que acabou de escrever o um no cociente, perguntei-lhe: Que é que o menino quere dizer quando diz: -- em sete quantas vezes há cinco, há um?

-- ?!

-- Olhe, quere dizer o mesmo que diria se dissesse: De sete só posso tirar cinco uma vez.

Agora o meu amigo diz: -- Uma vez cinco é cinco, para sete dois. – Que quere dizer isso?

-- ?!

-- Quere dizer: tirando cinco uma vez, tiro cinco; e tirando cinco de sete, sobram dois, que já não chegam para dêles tirar cinco. Fazendo isso temos:

7839|_5__
2   1

Agora baixa o oito para junto do dois e diz: Em vinte e oito, quantas vezes há cinco, há cinco. Dizer isto é o mesmo que dizer: de vinte e oito só posso tirar cinco, cinco vezes. Depois disto, o meu amigo diz: -- cinco vezes cinco, vinte e cinco, para vinte e oito, três. Dizer aqui: cinco vezes cinco vinte e cinco, para vinte e oito, três, equivale a dizer: tirando cinco cinco vezes, tiro vinte e cinco; e tirando vinte e cinco de vinte e oito, só ficam três, que já não chegam para dêles tirar cinco. Fazendo isso temos:

```
7839 |_5__
28     15
 3
```

Agora marca o três, baixa-o para junto do três, e diz: -- Em trinta e três, quantas vezes há cinco? Dizer isto equivale a dizer: De trinta e três quantas vezes posso tirar cinco? E quando o meu amigo diz: há seis, diz o mesmo que diria se dissesse: -- posso tirar cinco, seis vezes. E depois, quando diz: -- seis vezes cinco trinta para trinta e três,

três, -- diz o mesmo que diria se dissesse: E de trinta e três só posso tirar cinco seis vezes, porque tirando cinco seis vezes, tiro trinta; e tirando trinta de trinta e três, só ficam três, dos quais não posso tornar a tirar cinco. Fazendo isso temos:

```
7 8 3 9 |_5__
2 8       156
  3 3
    3
```

E assim continuei até ao fim. Só depois dos alunos saberem explicar assim a divisão e de responderem a tôdas as perguntas apresentadas nestas duas lições, é que julgo a divisão bem sabida e compreendida.

Passo agora a apresentar a lição da quarta classe onde explico as quatro operações:

Em aritmética repeti as quatro operações, ensinando, mais uma vez, e por meio de exemplos claros, o emprego delas. Saber fazer grandes somas, subtracções, multiplicações e divisões e não saber quando é necessário fazer uma soma, uma subtracção, uma multiplicação ou uma divisão, é o mesmo que não saber nada. Por isso, antes de obrigar os alunos a resolverem problemas, é meu costume insistir, tanto quanto possível, sôbre as quatro operações, explicando-as o mais fácil e claramente que me é possível, para levar os alunos a compreender que somar é juntar, subtrair é tirar um número doutro uma só vez, multiplicar é repetir, e dividir é tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa. E assim, hoje, apresentei para a soma o seguinte exemplo: Voltando-me para um dos alunos, disse-lhe: Suponha que logo, ao sair da escola e ao dirigir-se para casa, lhe aparece um homem a pedir-lhe para que lhe faça uma conta e que, depois do menino lhe ter dito que sim, lhe dizia assim: -- Outro dia comprei umas botas por 65$00, um fato por 125$00, e hoje comprei duas camisas por 53$00 e um chapéu por 25$00. Queria que o menino me dissesse quanto dinheiro gastei com tôdas estas compras. Ora a primeira condição para resolver um problema depois de conhecer os dados, é raciocinar e pensar bem sôbre o enunciado dêle, para conseguirmos saber se para o resolvermos necessitamos de juntar ou de tirar um número doutro uma só vez, ou se teremos de repetir ou de tirar um número doutro tantas vezes quantas possamos. Assim, neste caso, o meu amigo, pensando bem, diria de si para si: Êste homem, na verdade, não gastou só 65$00 para comprar as botas, nem só 125$00 para o fato, nem só 53$00 para as camisas, nem só 25$00 para o chapéu. Êste homem gastou 65$00 para as botas, mais 125$00 para o fato, mais 53$00 para as camisas e mais 25$00 para o chapéu. Portanto para eu poder dizer a <u>êste homem</u> quanto dinheiro gastou, tenho de juntar, reunir, <u>amontoar</u>, todas estas quantias, para saber depois a quantia que tôdas elas formam. Não posso (portanto) fazer outra operação que não seja a soma, porque é ela a única que me ensina a juntar dois ou mais números num só. <u>Portanto</u>, indicando o problema, temos:

65$00
125$00 – – – – 65$00 + 125$00 + 53$00 + 25$00 = 268$00
53$00
25$00

Efectuando:

65$00
125$00
53$00
__25$00___
268$00

Aproveitei a ocasião para dizer que para somar e subtrair é necessário escrever os números uns por baixo dos outros, de maneira que as unidades da mesma espécie fiquem na mesma coluna e que por isso eu escrevera os números de maneira a formar uma coluna com as unidades simples, outra com as dezenas e outra com as centenas. Quando eu ao somar cheguei à coluna das unidades e disse: 5 e 5, 10; 10 e 3, 13; 13 e 5, 18, e que escrevi o 8 e que disse: aí vai 1, voltei-me para os alunos e disse-lhes: Se eu escrevesse o que disse, teria de escrever 18 e não 8 como escrevi. E porque é que escrevi 8? Porque estou a adicionar as unidades simples e portanto só posso deixar debaixo desta coluna o algarismo que indicar unidades simples, para continuarem a ficar as unidades da mesma espécie umas debaixo das outras. Ora o número 18 que quere dizer? Quere dizer: 10 e mais 8.

E 10, o que é? Uma dezena, não é verdade? E a coluna das dezenas é esta? Não. Eis a razão porque digo: e vai 1, isto é, vai uma dezena que não pode ficar aqui, porque é preciso juntá-la às outras dezenas, e por isso eu digo: 1 e 6, 7; 7 e 2, 9; 9 e 5, 14; 14 e 2, 16. Mas 16, o que é? Dezasseis dezenas, não é verdade? Ora em dezasseis dezenas há 10 dezenas e mais 6. E 10 dezenas o que é? É uma centena. Logo, escrevo o 6 que representa as dezenas e o 1, que representa as centenas, tenho de o juntar às centenas que haja, e é por isso que digo: e vai 1, isto é, uma centena que, com a outra que já temos, faz 2 centenas.

Passei depois à subtracção. Eis o exemplo apresentado a um dos alunos: Suponha o menino que se aproximava de si um homem e lhe falava desta maneira:

-- Menino, eu sei que anda na escola e por isso queria que me resolvesse êste problema, porque eu, infelizmente, não sei nada de operações, porque, enquanto andei na escola brinquei e não estudei. Quero montar uma barbearia e para isso gasto 950$00. Como tenho 628$00, queria que o menino me dissesse quantos escudos me faltam. Pelo que acabamos de ouvir, o homem tinha de fazer uma despesa de 950$00, e para a fazer tinha 628$00. Portanto já lhe não faltava todo o dinheiro, mas sim os escudos que faltam aos 628$00 para serem tantos como 950$00, não é verdade? Logo, se tirarmos uma vez os escudos que o homem tem dos escudos que quere ter, encontramos os que lhe faltam. E como tirar um número doutro uma só vez é subtrair, a operação que resolve êste problema é a subtracção. Indicando temos:

950$00
628$00------------ 950$00 – 628$00 = 322$00

Efectuando:

$$\begin{array}{r} 950\$00 \\ \underline{628\$00} \\ 322\$00 \end{array}$$

Quando eu disse: 8 para 10, perguntei aos alunos: Meninos, como é que eu arranjei êste 10 estando aqui o 0? Quem é capaz de me explicar porque é que eu, querendo fazer esta subtracção tenho de dizer: 8 para 10, e não posso dizer 8 para 0? Como me não satisfizessem as respostas, expliquei assim: Neste caso, dizer 8 para 10, equivale a dizer: Eu tenho 8, mas preciso de ter 10, quantos me faltam? E isto não deve custar a compreender, porque se é certo eu ter 8 e ainda querer mais, com certeza que não quero ter zero, isto é, que não quero ter nada. Portanto aqui, eu tendo 8 e querendo ter mais, quero ter 10. Mas donde veio aquele 10? Como apareceu aquele zero transformado em 10?

Digam-me uma coisa: os meninos, quando precisam e não têm, que fazem?

-- Pedimos.

-- Foi o que me aconteceu. Como aquele zero não tinha o que queria, foi ali à casa do 5 e pedi-lhe uma das suas unidades. Ora os meninos já sabem que cada uma das unidades do 5, se chama dezena, e que uma dezena tem 10 unidades simples. Portanto, como não há mais unidades, pois o zero nos diz que na casa dêle não há nada, ficamos simplesmente com essas 10 unidades que fomos buscar à unidade imediatamente superior, e por isso dizemos: 8 para 10, 2. Agora os meninos decerto têm vontade de me perguntar: -- Mas porque é que o senhor, depois de dizer 8 para 10, 2, diz: e vai 1? O que quere dizer isso? – Quere dizer que <u>eu</u> não quero nada do que é dos outros. Fui ou não fui buscar uma dezena ao 5? Fui. Portanto agora, digo: e vai um, que é como se dissesse: Eu não tenho agora duas dezenas; tenho 3, porque uma fui buscá-la ao 5, e por isso, uma que fui buscar com duas que já tinha, são 3, e 3 para 5, só faltam 2.

Passei à multiplicação e apresentei êste exemplo: -- Um homem comprou 12 alqueires de trigo a 16\$00 cada alqueire. Quanto dinheiro gastou? Se o homem gastava 16\$00 para comprar um só alqueire, para comprar 12, deve gastar 16\$00, 12 vezes. Se repetirmos 16\$00 12 vezes, teremos o problema resolvido. Como a operação que nos ensina a repetir é a multiplicação, conclui-se que é essa a que devemos aplicar neste caso. Indicando temos:

16\$00
12 ----------------- 16\$00 x 12 = 192\$00

Efectuando:

```
        1 6 $ 00
    ___1 2_____
      3 2
 ____1 6______
   1  9  2  $ 00
```

Para a divisão apresentei êste exemplo: Um homem comprou 50 alqueires de nozes por 450\$00. A como comprou cada alqueire? Se o homem comprou 50 alqueires de nozes por 450\$00, cada alqueire custou-lhe 50 vezes menos. Portanto tantas vezes tiremos 50 de 450, tantos são os escudos que custou cada alqueire. (1) Como a operação que nos ensina a tirar um número doutro tantas vezes quantas possamos é a divisão, é essa a que devemos aplicar. Indicando temos:

```
450$00
    50   -----------------------   450 : 50 = 9$00
```

Efectuando:

```
4 5 0 $ 00 |___50____
   0 0          9$00
```

Lição que explica os noves fora:

Achar os noves fora de um número, meninos, é saber quantas unidades nos sobram desse número depois de lhe termos tirado grupos de nove unidades tantas vezes quantas nos seja possível. E assim, o 2, o 3, o 4,o 5, o 6, o 7 e o 8, não têm noves fora, porque de nenhum deles podemos tirar grupos de nove. De nove já podemos tirar um grupo de nove, e como não fica nada dizemos assim: nove, noves fora, nada. Se de dez tirarmos nove tantas vezes quantas possamos, fica-nos 1, e é por isso que dizemos: 10, noves fora, 1. Se procedermos da mesma maneira com o 11, ficam-nos 2, daí a razão porque dizemos: 11, noves fora, 2. Procedendo da mesma maneira com o 12, verificamos que nos ficam 3 e é essa a causa que nos leva a dizer: 12, noves fora, 3. Expliquei isto por meio de feijões que fui colocando em grupos sôbre a secre_ tária conforme o caso apresentado e dos quais ia tirando nove para que a verificação fôsse completa. Depois de ter apresentado vários exemplos, perguntei a um aluno: -- O que é que queremos dizer quando dizemos: 42 noves fora?

-- Queremos dizer – respondeu a criança – de 42 unidades, quantas nos sobram depois de lhe tirarmos grupos de nove unidades tantas vezes quantas possamos?

-- É isso mesmo. Vamos ver então neste caso quantas nos sobram. Contei 42 feijões e depois comecei a tirar 9 feijões de cada vez até que ficaram apenas 6. Disse então para os alunos: Destes 6, já não é possível tirar 9 e por isso indicam os noves fora de 42. Os meninos já sabem que tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa é dividir. Portanto achar os noves fora de um número, é fazer a sua divisão por nove para encontrar os que sobram. Em suma:

Os noves fora dum número são sempre indicados pelo resto da divisão dêsse número por nove. Apresentei muitos e variados exemplos seguidos da concretização e verificação e depois de tôda a classe, pelas respostas dadas, me dar a conhecer que compreendera bem êste caso, disse-lhe: Pràticamente, para achar os noves fora dum número, basta conhecer esta regra: Se o número é formado apenas por dois algarismos, somam-se êsses algarismos, e se a sua soma for nove ou inferior a nove, é ela que indica os noves fora dêsse número. Se a sua soma maior que nove, somam-se novamente os algarismos dessa soma e o resultado representa os noves fora procurados. Exemplificando: 55, noves fora? Fazendo como manda a regra, temos: 5 + 5 = 10 e 10 = 1+ 0 = 1. Logo, 55, noves fora, 1. 76, noves fora? 7 + 6= 13 13 = 1 + 3 1 + 3 = 4. Portanto, 76, noves fora, 4. Etc., etc. Se o número tiver mais de dois algarismos, vamos somando os respectivos algarismos e quando chegarmos a uma soma igual a nove, dizemos: nove, nada. Se encontrarmos uma soma igual a 10, 11, 12, 13 etc., extraímos os noves a essa soma, adicionamo-los ao algarismo seguinte e assim até chegar ao último algarismo da direita dêsse número. Se tivermos por exemplo o algarismo 7 485, extraindo-lhe os noves, temos: 7 e 4, 11; 11, noves fora, 2; 2 e 8, 10; 10, noves fora,1; 1 e 5, 6. Seis é portanto o número que indica os noves fora de 7 485.

Explicação das provas das 4 operações.

Exemplos apresentados para as provas da soma:

	7 2 3	
	4 8 5	
Prova dos noves:	6 2 3	__6__
	____ 4 3 4 ____	6
	2 2 6 5	

Para que os alunos ficassem a compreender a razão porque os noves das parcelas devem ser iguais aos da soma ou total, expliquei assim: O que é somar? É juntar, não é verdade? Logo, se juntarmos as 723 unidades da primeira parcela com as 485 da segunda, com as 623 da terceira e com as 434 da quarta, verificamos que todas essas unidades são 2. 265: Portanto o número 2.265, tem tantas unidades, como os números 723, 485, 623, e 434. E porque assim é, os noves fora das parcelas, têm de ser forçosamente iguais aos da soma ou total.

Prova por meio da própria operação:

	_____2 265___
723	723
485	485
623	623
____434_____	___434____
2.265	

Esta prova baseia-se na regra de aritmé_ tica que diz: A ordem das parcelas é arbitrária. Portanto, caso a operação esteja bem feita, o resultado há-de ser o mesmo, quer a operação se efectue de cima para baixo ou debaixo para cima.

Prova pela operação inversa:

723	723	2.265	723
485	485	___1.831__	485
623	____623____	434	___434___
_____ 434___	1 831		1 642
2.265			

2.265
____1.642____
623

Para os alunos ficarem a compreender esta prova, basta apresentar-lhes os exemplos, pois se somarmos tôdas as parcelas e se depois fizermos nova soma, tendo o cuidado de retirar uma delas, neste último total, há-de haver a menos as unidades da parcela que foi retirada.

Provas da subtracção:

Prova dos noves	485	
	296	0
	189	0

Para que os alunos ficassem a compreender a razão porque os noves fora do diminuendo devem ser iguais aos do diminuidor e do resto, expliquei assim: Como sabem, a subtracção tanto serve para saber quantas unidades faltam a um número para ter tantas como outro, como para saber quantas faltam a um número para ser igual a outro, como ainda para saber as unidades que ficam de um número depois de lhe tirar as unidades doutro. Portanto se nós temos por exemplo 485 laranjas e tiramos 296 laranjas, ficam-nos 189. Logo as que nos ficaram mais as que tiramos, caso a operação esteja bem feita, têm de ser forçosamente 485. Daqui se conclui que o diminuendo duma subtracção é igual ao diminuidor mais o resto. Se eu tiver

296 laranjas e quiser saber quantas me faltam para ter 485, tenho de subtrair e subtraindo, encontro 189, donde concluo que as que tenho mais as que me faltam, devem dar as que quero ter, ou sejam 485. Exemplificando:

$$\begin{array}{r} 296 \\ +\underline{\quad 189 \quad} \\ 485 \end{array}$$

Portanto, mais uma razão para melhor nos convencermos de que o diminuidor, mais o resto, devem ser iguais ao diminuendo. E porque assim é, os noves fora do diminuendo, devem ser iguais aos do diminuidor e do resto.

Prova pela operação inversa:

$$\begin{array}{r} 485 \\ \underline{\quad 296 \quad} \\ 189 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 296 \\ +\underline{\quad 189 \quad} \\ 485 \end{array}$$

Pela explicação da prova dos noves, os alunos compreendem esta prova sem nova explicação.

Prova por meios da própria operação:

485	485
____296____	____189___
189	296

Expliquei assim esta prova: Que nome pode ter o resultado duma subtracção? Resto, excesso ou diferença, conforme respectivamente êle representar o que sobra do diminuendo depois de lhe tirarmos o diminuidor, ou o que o diminuendo fica a ter a mais depois de lhe tirarmos o diminuidor, ou o número de unidades que há entre as indicadas pelo diminuendo e diminuidor. Em qualquer dos casos, desde que as que sobram, as que faltam ou as que há de diferença sejam tiradas ao diminuendo, hão-de ficar as do diminuidor, caso a operação esteja certa, o que ficou provado com a segunda operação acima efectuada.

Provas da multiplicação

Prova dos noves

347	
_______5___	_5|_7
1 735	_5|_7

Expliquei assim esta prova:

Meninos, fazendo esta multiplicação, não fazemos mais que repetir 347 unidades cinco vezes e assim encontramos o número 1 735. Logo o número 1 735 é maior ou menor que o número 347? É maior não é verdade? E quantas vezes é maior? Cinco vezes, não é assim? Portanto o produto total desta ou doutra multiplicação, estando a operação bem feita, é igual ao multiplicando vezes o multiplicador. E porque assim é, os noves fora do multiplicando vezes os noves fora do multiplicador, hão-de ser iguais aos do produto total da respectiva multiplicação.

Prova pela operação inversa:

347	1 735|__347__	1 735 |__5__
______5___	000 5	23 347
1 735		35
		0

Expliquei assim esta prova: Meninos, o que disse eu há bocado? Disse que o produto total de uma multiplicação era igual ao multiplicando vezes o multiplicador. Portanto, no nosso caso, o produto total 1 735 unidades quantas vezes contém 347 unidades? Cinco vezes, não é verdade? Se a operação estiver bem feita, quantas vezes de 1 735 unidades poderemos tirar 347 unidades? Cinco vezes. Como vêem, é precisamente isso o que a respectiva operação nos diz e portanto não há razão para duvidar nem para ter dificuldades. Já agora, também não é difícil compreender que se em 1 735 unidades há 347 unidades cinco vezes, também estas cinco unidades podem ser tiradas 347 vezes daquelas 1 735, o que nos leva ao segundo caso apresentado. Portanto para tirar a prova à multiplicação pela operação inversa, tanto podemos dividir o produto total pelo multiplicando, como pelo multiplicador. Se ela estiver bem feita e fizermos a divisão pelo multiplicando, no cociente há-de aparecer forçosa_ mente o multiplicador; se dividirmos pelo multiplicador há-de aparecer no cociente o multiplicando.

Prova pela própria operação:

347	5
5	347
1 735	1 735

Para explicar esta prova apresentei os seguintes exemplos:

3 x 9 = 27 4 x 5 = 20

9 x 3 = 27 5 x 4 = 20

Como vêm, disse eu aos alunos, tanto faz dizer: 3 x 9, como 9 x 3, pois o resultado é sempre 27. Assim como 4 x 5, ou 5 x 4, dá sempre vinte. Portanto, como na soma, a ordem dos factores é arbitrária.

Está portanto provado que se a multiplicação estiver bem feita, o produto total há-de ser sempre o mesmo quer se repita o multiplicando tantas vezes quantas sejam as unidades do multiplicador, quer se repita o multiplicador tantas vezes quantas sejam as unidades do multiplicando.

Provas da divisão

Prova dos noves

325 |__4__   __ 4|1__

05   81   _ 0|1_

1

Expliquei assim esta prova: Meninos, o que é dividir? É tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa. Portanto dividindo 325 por 4, queremos saber quantas vezes quatro unidades podem ser tiradas de 325. No nosso caso, quatro unidades, quantas vezes foram tiradas de 325? Oitenta e uma vezes, não é verdade? E não sobrou nada? Sobrou uma unidade, porque não é possível dela tirar quatro unidades. Ora bem; uma vez que assim é, nada custa a compreender que 325 = (4 x 81) + 1, porque (4 x 81) + 1 = 325: Logo, o dividendo de qualquer divisão é sempre igual ao divisor, vezes ocociente, mais o resto se o houver. Eis a razão porque os noves do divisor, vezes os do cociente e mais os do resto quando o haja, hão-de ser iguais aos noves do dividendo.

Prova da operação inversa

```
325 |__4__            4
 05    81         ____81____
  1                  324
                  _____1___
                     325
```

Depois de tôdas as explicações apresentadas para as outras provas, para esta limitei-me a dizer o seguinte: -- Meninos, quantas vezes podemos tirar 4 unidades de 325 unidades? Oitenta e uma vezes, não é verdade? Logo, o 4 repetido 81 vezes, há-de dar um número de unidades igual a 325. É claro que não dá, porque sobrou uma unidade que é preciso juntar depois de ter feito a repetição de 4, 81 vezes.

Prova pela própria operação

```
325 |__4___        325 |__81__
 05    81            01     4
  1
```

Para esta nada há a explicar depois de ter explicado as outras, pois se podemos tirar 4, 81 vezes de 325, também é certo que não poderemos tirar 81 de 325 mais que quatro vezes, sobejando sempre em qualquer dos casos, uma unidade.

Passo agora ao princípio fundamental da numeração escrita:

A lição que apresento foi dada à quarta classe e por isso é mais uma repetição que uma explicação. No entanto, ela serve para todas as classes, dependendo o aproveitamento dela de uma questão de adaptação e relatividade. É desde as primeiras lições que devemos dizer à criança que era impossível escrever os números se cada algarismo não pudesse representar um número qualquer de unidades, conforme a necessidade. Por isso o valor absoluto e relativo dos algarismos, deve ser explicado desde as primeiras lições, fazendo ver à criança que para lermos um número, damos aos algarismos que o formam, um valor que não é o dêles quando se encontram sós, e que por isso se chama valor rela_ tivo. Tendo explicado pràticamente a formação dos números até mil, as crianças já sabem que cada unidade de ordem imediatamente superior é dez vezes maior que a imediatamente inferior, e que o algarismo que indica aquela deve ser escrito à esquerda do que representar esta. Segue a lição: Depois de ter escrito no quadro o algarismo 2, disse aos pequenos: -- Se à esquerda deste 2 escrever outro 2, fica o número: 22, ficando o 2 da esquerda a ter o valor relativo de 20, que quere dizer: dez vezes mais que dois. Se à esquerda escrever outro 2, fica o número: 222, tendo o último 2 da esquerda o valor relativo de 200, que quere dizer 10 vezes mais que 20. Se à esquerda escrevermos outro dois, tenho o número 2.222, ficando o último dois da esquerda a valer 2.000, ou seja 10 vezes mais que 200. Se escrevermos outro dois ficará a valer 20.000, ou seja 10 vezes mais que 2.000, e assim sucessivamente. Concluímos portanto que um algaris_ mo escrito à esquerda doutro, vale 10 vezes mais. É a isto que a aritmética chama princípio fundamental da numeração escrita. Para melhor compreensão, apresentei depois o número desta maneira:

200.000	20.000	2000	200	20	
2	2	2	2	2	2

1.0000.000x+						
100.000x+	100.000x+					
10.000x+	10.000x+	10.000x+				
1.000x+	1.000x+	1.000x+	1.000x+			
100x+	100x+	100x+	100x+	100x+		
10x+←	10x+ ←	10x+ ←	10x+ ←	10x+ ←	10x+ ←	
2	2	2	2	2	2	2

Nota: O autor, com este quadro, pretende ilustrar o valor de cada algarismo do número 2. 222. 222 (consultar manuscrito, onde este esquema aparece com uma forma diferente)

2 1. 000. 000 x +	2 100. 000 x +	2 10. 000 x +	2 1000 x +	2 100 x +	2 10 x +	2

2 100. 000 x +	2 10. 000 x +	2 1. 000 x +	2 100 x +	2 10 x +	2	2

2 10. 000 x +	2 1. 000 x +	2 100 x +	2 10 x +	2	2	2

2 1. 000 x +	2 100 x +	2 10 x +	2	2	2	2

2 100 x +	2 10 x +	2	2	2	2	2

2 10 x +	2	2	2	2	2	2

(Consultar manuscrito).

Passo agora a apresentar a minha lição sobre divisibilidade

Diz-se que um número é divisível por outro quando dividido por êle der resto zero. Assim o número 28 é divisível por 7, porque se o dividirmos por 7, a divisão dá de resto zero.

```
28 |__7__
 0    4
```

O número 28 também é divisível por 2 porque se o dividirmos por 2, também a divisão dá de resto zero.

```
 28 |___2___
08     14
 0
```

Antes de mais nada precisamos de saber o que são números pares e o que são números ímpares. Números pares, diz o livro, são aqueles cujo último algarismo da direita é par **??**. Quais são os algarismos pares? São o zero, o 2, o 4, o 6 e o 8. E os algarismos ímpares? O 1, o 3, o 5, o 7, e o 9. Sabido isto já podemos aprender a primeira regra da divisibilidade que nos diz: Um número é sempre divisível por 2, desde que seja par, isto é, desde que o seu último algarismo da direita é par. E assim, fazendo a divisão, temos:

$$\begin{array}{r|l} 46 & \underline{\;2\;\;\;} \\ 06 & 23 \\ 0 & \end{array}$$

É conveniente aprender a fazer a divisão doutro modo mais rápido, mais interessante e mais cómodo. Querendo fazer a divisão de 46 por 2, basta dizer assim: a metade de 4, 2; e a metade de 6, 3. Dêste modo, como vêm chegamos ao mesmo resultado, 23, gastando menos tempo e menos giz. Mas os meninos poderão perguntar-me: O que é que quere dizer a metade de 4? A metade de 4, neste caso, quere dizer: Em 4, quantas vezes há 2? Ou ainda melhor: de 4, quantas vezes podemos tirar 2? Já vêem os meus meninos que achar a metade dum número equivale a saber quantas vezes o número 2 pode ser tirado dêsse número. É uma divisão mais rápida e que é conveniente empregar-se todas as vezes que o divisor tenha um só algarismo. Para a fazer podemos indicar a divisão e colocar adiante o resultado: 46 : 2 = 23, ou podemos escrever o número e por baixo dele ir escrevendo o resultado conforme formos fazendo a divisão das respectivas unidades. E assim temos: 46

23

É claro, em qualquer dos casos apontados, para encontrarmos o 23, teremos sempre de dizer: a metade de 4, 2; e a metade de 6, 3. Outro exemplo: o número 354 será divisível por dois? É, porque lá diz a regra: Sempre que o último algarismo da direita dum número seja par, esse número é divisível por 2, isto é, se o dividirmos por 2, a divisão será exacta.

Vamos ver se a regra não engana:

```
3 5 4   |__2___
15        177
  14
   0
```

Dá certo. Vamos fazer pelo outro processo. Teremos então: 354:2 = Ora agora temos de dizer: A metade de 3, 1; Que é que quere dizer a metade de 3? Quere dizer: de três, quantas vezes posso tirar 2? Em três quantas vezes há 2? Tudo é o mesmo. Mas agora atenção, muita atenção mesmo. Eu dizendo que a metade de 3, é 1, direi bem? Digo, e digo por dois motivos. Primeiro: porque dizer a metade de 3 é o mesmo que dizer: de três quantas vezes posso tirar 2? Ora toda a gente sabe que de três não posso tirar dois mais que uma vez. Segundo, porque dizer a metade de três é o mesmo que dizer: destas três unidades, quantos grupos de 2 unidades – da respectiva ordem, já se entende – posso formar? Também é sabido que tendo eu 3 unidades, que neste caso se chamam centenas, não posso com elas formar mais que um grupo de 2. Ora, se eu só posso, com três centenas, formar um grupo de duas centenas, que acontece? Sobra uma centena, centena que não posso roubar e por isso tenho de declarar que sobra. Aqui têm os meninos explicada a razão porque eu ao dizer: a metade de 3, 1, tenho de dizer logo a seguir: e sobra 1, ou seja uma unidade da respectiva ordem da qual estamos a achar a metade. Portanto, temos: 354:2 = 1. Sobra portanto uma centena. Ora uma centena vale dez dezenas; e dez dezenas que sobraram com mais cinco, são quinze. Por isso agora devo dizer: a metade de 15, 7 e sobra 1. E sobra 1, porque? Porque de 15, só posso tirar 2, 7 vezes, que é o mesmo que dizer: com 15 unidades – neste caso dezenas – só posso formar 7 grupos de 2 dezenas cada um, sobrando uma dezena que já não chega para formar outro grupo de duas. Portanto ficará: 354:2 = 17. Ora como uma dezena tem 10 unidades simples, essas 10 e mais as 4, são 14 e por isso digo agora: A metade de 14, 7, e não sobra nada. Temos então: 354 : 2 = 177. Outra disposição:

3 5 4

1 7 7

Um número é divisível por 3, quando a soma dos seus algarismos for 3, ou múltiplo de 3. E agora perguntam os meninos:

-- Que quere dizer múltipla de 3? – Quere dizer que o resultado da adição dos algarismos do respectivo número, no caso de não ser igual a 3, há-de ser igual a um número que seja formado pela repetição de 3, duas, três, quatro, etc., vezes. Temos por exemplo o número 417. Este número será divisível por 3? Para o saber, que temos a fazer? Somar os seus algarismos. Fazendo isso, temos: 4 e 1,5; 5 e 7, 12. Ora 12 é igual a 3 quatro vezes. Logo, doze é múltiplo de três. Se 12 é múltiplo de 3 e é o resultado da soma dos algarismos do número 417, concluímos que este número é divisível por 3, isto é, que se o dividirmos por 3, a divisão há-de dar de resto zero. Fazendo a divisão temos:

```
4 1 7  |___3__
1 1       139
  2 7
    0
```

Lançando mão do outro processo temos:

417 : 3 = Agora temos de dizer: a terça parte de 4, 1; e sobra1. Que é que quere dizer a terça parte de 4? Quere dizer: de quatro centenas quantas vezes posso tirar 3 centenas? Ou: com quatro centenas quantos grupos posso formar de três centenas cada um? Em qualquer dos casos não é difícil saber o número de vezes que podemos tirar, o número de grupos que podemos formar. O resultado é sempre 1 e sobra 1. Temos portanto:

417 : 3 = 1. A centena que sobra vale 10 dezenas que com mais uma, são 11, e por isso tenho de dizer: A terça parte de 11, 3; e sobram 2. Que é que quere

dizer: a terça parte de 11, 3; e sobram 2? Quer dizer que de 11 só posso tirar 3, três vezes, porque tirando 3, três vezes, tiro 9; e tirando 9 de 11, ficam 2, dos quais não posso tornar a tirar 3. Ou então também pode significar que com 11 unidades só posso formar 3 grupos de três unidades cada um, sobrando duas unidades que já não chegam para formar outro grupo. Temos portanto: 417 : 3 = 13. Sobram agora 2 dezenas, ou sejam 20 unidades que, reunidas às 7, fazem 27, e por isso digo agora: a terça parte de 27, 9, e não sobra nada. E porque é que não sobra nada? Porque dizer: a terça parte de 27, é o mesmo que dizer: de 27 quantas vezes posso tirar 3? Posso tirar 9 vezes, porque tirando três nove vezes, tiro 27; e tirando 27 de 27, não fica nada. E assim temos:

$$417 : 3 = 139$$

Outra disposição:

417

139

Outro exemplo: O número 273 será divisível por 3? É, porque a soma dos seus algarismos é 3. Verificando, temos:

```
2 7 3  |__3__          73 : 3 = 91          273
  0 3    91                                  91
    0
```

Um número é divisível por 5, quando o último algarismo da direita for zero ou 5.

```
Exemplo:   4 895  |__5__        4 895 : 5 = 979        4 895
             39      979                                 979
              45
               0

           620  |__5__          620 : 5 = 124          620
           12      124                                 124
             20
              0
```

Um número é divisível por 10, quando o último algarismo da direita for zero. Para achar o resultado da divisão, basta cortar-lhe o zero. Exemplo

780 : 10 = 78   4970 : 10 = 497

Passo agora a fracções apresentando uma lição dada à 2.ª classe:

Colocados os alunos à volta da secretária, disse-lhes: Os meninos já sabem que unidade, em aritmética, é tudo o que se conta. Portanto, todas as coisas que vemos, deixem-me assim dizer-lhes, são unidades. A unidade pode dividir-se. Assim eu posso partir lápis, penas, peras, laranjas, cadernos, etc. Tenho aqui sobre a secretária êstes rectângulos de papel. Cada um é para nós uma unidade, unidade que posso partir em qualquer número de partes. Escolhi êstes pedaços de papel porque posso dividi-los em partes com facilidade. Pegando numa tesoura e num dos rectângulos, dividi-o em duas partes iguais e disse aos pequenos: Como vêem, parti êste rectângulo em duas partes iguais. Querem saber como se chama cada uma destas partes? Chama-se um meio, que quer dizer metade da unidade, duas ve_ zes mais pequena que a unidade. Pegando em seguida num dos meios, perguntei aos alunos:

-- Em quantas partes parti a unidade?

-- Em duas.

-- Quantas tenho?

-- Uma.

- -Como se chama?

-- Um meio.

Obtida esta resposta, peguei no giz, aproximei-me do quadro e disse: Para eu representar por algarismos a parte da unidade que tenho na mão, tenho de escrever assim: $\frac{1}{2}$. Como viram, dei um traço e escrevi por cima dele o número 1 e por baixo o número 2.

-- E porque tem de ser assim? Perguntarão os meninos.

-- Porque para indicar o número de partes que tenho duma unidade, não posso escrever só o número que as indicar; tenho de escrever também o número que indicar em quantas partes foi partida a uni_ dade. E para que um destes números indique as partes em que parti a unidade e o outro indique as partes que tomei, tenho de separá-los por meio de um traço. Os números assim dispostos porque indicam um certo número de partes em que a unidade foi dividida, formam um número que se chama fracção. Os números que formam a fracção chamam-se termos, genericamente falando. Na fracção indicada no quadro o 2 chama-se denominador porque indica as partes em que a unidade foi partida; e o 1 chama-se numerador, porque indica quantas dessas partes tomámos. Se eu ficasse com os dois meios, teria de escrever assim: $\frac{2}{2}$. Esta fracção lê-se: dois meios, e diz que a unidade foi partida em duas partes iguais e que ficamos com elas. E, neste caso, ficar com duas partes das duas, a que equivale? Equivale a ficar com a unidade. A fracção $\frac{2}{2}$ é portanto igual a uma unidade. Se eu tiver um meio e aquele menino tiver outro, os dois temos dois meios. A operação que fiz para achar êstes dois meios foi a soma. Indicando-a no quadro, temos: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$. Como fiz para somar estas fracções? Como ambas indicam a unidade dividida no mesmo número de partes, somei apenas as partes tomadas. E isto não custa a compreender, porque tendo eu uma das duas partes em que a unidade foi dividida, e aquele menino outra das duas, os dois temos duas das duas. Daqui concluímos que para somar fracções, que tenham o mesmo denominador, somamos os numeradores e damos-lhe o mesmo denominador. Agora – disse eu voltando para a secretária e tomando na mão outro rectângulo de papel – vou dividir êste pedaço de papel, que para vós é uma unidade, em três partes iguais. Depois de assim ter feito, tomei uma das partes e disse aos alunos: Esta parte, por ser três vezes mais pequena que a unidade, chama-se um terço. Indicando no quadro, temos: $\frac{1}{3}$. Esta fracção lê-se: um terço, e indica que tomamos uma parte das três em que a unidade foi dividida. O três, por indicar em quantas partes foi dividida a unidade, chama-se denominador, e o um, por indicar as que se tomaram, chama-se numerador. Se eu tomasse dois terços, teria de escrever: $\frac{2}{3}$. Se ficasse com os três terços, com a unidade portanto, teria de escrever: $\frac{3}{3}$. Por êste exemplo e pelo apresentado há bocado pela fracção $\frac{2}{2}$, concluímos que uma fracção corresponde à unidade, quando o numerador for igual ao denominador. Se eu tiver um terço, o José tiver outro – disse eu apontando o aluno dêste nome – e o Manuel tiver outro, quantos temos todos? Três terços. Para achar êstes três terços, fiz uma soma. Indicando-a no quadro, temos: $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}$. Como cada uma destas fracções indica a unidade dividida no mesmo número de partes, pa_ ra saber as que tenho eu, o José e o Manuel, nada mais tenho a fazer que reunir, juntar as minhas com as do José e as do Manuel. Mais uma vez os meninos vêem que para somar fracções com o mesmo denominador, basta somar os numeradores e dar-lhes o mesmo denominador. E não pode deixar de ser assim, porque se eu tenho uma das três partes, o José outra e o Manuel outra, todos, temos três das três. Agora – disse eu voltando à secretária e tirando outro terço – tenho dois terços. Se eu der um ao Manuel com quantos fico? Com um, não é verdade? Como tirei o número 1 do número 2 uma só vez, fiz uma subtracção. Indicando-a no quadro temos: $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Já podem ficar sabendo que para subtrair fracções com o mesmo denominador, basta subtrair os numeradores e dar-lhes o mesmo denominador. Passei depois à divisão dos outros rectângulos em quartos, quintos, sextos, sétimos, oitavos e nonos explicando cada caso conforme expliquei os dois primeiros, e tendo o cuidado de ir perguntando aos alunos: -- Uma unidade quantos meios dá? – Quantos terços? – quantos quartos? Quantos quintos? Quantos sextos? Quantos sétimos? E oitavos? E nonos? Quantos meios preciso de ter para ter uma unidade? E terços? E quartos?. Tendo eu um quinto e aquele menino dois quintos, quantos quintos temos os dois? Que operação fez? Porque? – E quantos quintos nos faltam para ter uma unidade? Que operação fez? – Porque? etc., etc., etc.

Passo agora a apresentar uma lição dada à quarta classe sobre soma e subtracção de fracções que não têm o mesmo denominador.
Segue a lição:

Os meninos já sabem somar e subtrair fracções que têm o mesmo denominador.

Agora, pergunto eu: Se as fracções não tiverem o mesmo denominador, para as somar ou subtrair, bastará, respectivamente, somar ou subtrair os numeradores? Não. Se as fracções não tiverem denominadores iguais, então é preciso reduzi-las ao mesmo denominador. Mas como agora o caso se complica, antes de aprendermos a reduzir fracções ao mesmo denominador, vamos observar uma particularidade das fracções que é indispensável conhecer antes de entrar na redução ao mesmo denominador. Se o meu amigo Francisco – disse eu dirigindo-me ao aluno dêsse nome – partisse uma pêra em 6 partes iguais e comesse 2, quanto tinha comido? Dois sextos, não é verdade? Se eu quiser dizer isso no quadro por meio de algarismos, terei de escrever assim: $\frac{2}{6}$, ficando o seis em denominador por indicar as partes em que parti a pêra, e o dois em numerador por indicar as partes que comeu. Ora agora pergunto eu: O meu amigo para comer $\frac{2}{6}$ de uma pêra, necessita infalivelmente de partir a pêra em 6 partes iguais e de ficar com 2, ou pode parti-la em mais partes? Pode sim. Quer ver? Suponha o menino que resolvia partir a pêra em 12 partes iguais, ou seja, duas vezes mais que aquelas em que a tinha partido. Com quantas há-de ficar agora para ficar com uma porção igual a $\frac{2}{6}$? Há-de ficar com 4, que é o mesmo que dizer: com duas vezes mais partes que aquelas com que tinha ficado há bocado. Sim, o meu amigo, há bocado, não partiu a unidade em 6 partes iguais? Partiu. E agora em quantas partiu? Não foi em 12? Foi. E 12 comparado com 6 não é 2 vezes mais? É. Portanto, se há bocado ficou com duas das 6, agora, para ficar com porção igual, com quantas partes há-de ficar? Há-de ficar com 4, porque 4 é duas vezes mais que dois. Portanto quem comer $\frac{2}{6}$ duma pêra, come tanto como quem comer

$\frac{4}{12}$ da mesma pêra. Para transformar a fracção $\frac{2}{6}$ na fracção $\frac{4}{12}$, basta multiplicar ambos os termos por 2. Fazendo isso, temos: $\frac{2\times 2}{6\times 2}=\frac{4}{12}$. Donde se conclue que uma fracção não muda de valor quando os seus termos se multiplicarem ou dividirem pela mesma quantidade. E não se assustem com o **dividirem** que não merece a pena, porque vou já convencê-los de que é verdade. O Francisco, há bocado, comeu duas partes porque partiu a unidade em 6. Se êle quisesse comer uma porção igual a esta, mas que tivesse partido a unidade em duas vezes menos partes, também poderia comer duas? Não, com certeza, mas sim 2 vezes menos. Portanto partindo a unidade em 2 vezes menos partes, partia-a em 3 e comendo 2 vezes menos comia 1. Logo, comia: $\frac{1}{3}$. Para transformar a fracção $\frac{2}{6}$ na fracção $\frac{1}{3}$, basta dividir ambos os termos dela por 2. Fazendo isso, temos: $\frac{2:2}{6:2}=\frac{1}{3}$. Que diferença há entre $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ *e* $\frac{4}{12}$? Nenhuma; tôdas são iguais. Vá lá outro exemplo: O Francisco comeu $\frac{4}{9}$ de uma pêra. Pergunto eu agora: Se o Francisco quiser comer os $\frac{4}{9}$ duma pêra, será obrigado a partir a pêra em 9 partes iguais e a comer 4, ou poderá parti-la num número qualquer de partes e comer também um número qualquer delas? Pode, mas com a condição de partir a unidade num número de partes que seja 2, 3, 4, 5, etc., vezes maior que 9, para depois tomar, na mesma proporção, as partes que quiser comer. Portanto se o Francisco tivesse partido a pêra em 45 partes iguais e quisesse, neste caso, comer $\frac{4}{9}$, teria de comer 20 partes. Porque? Vamos ver. Em quantas partes partiu o Francisco a pêra há bocado? Em nove, não é verdade? E agora em quantas a partiu? Em 45; que é o mesmo que dizer; em 5 vezes mais partes. Portanto, se êle há bocado comeu 4 partes porque partiu a unidade em 9, agora, que a partiu em 5 vezes mais partes, há-de forçosamente, para ficar com porção igual, comer também 5 vezes mais. E daqui se conclui que tendo comido no primeiro caso $\frac{4}{9}$, no segundo há-de comer $\frac{20}{45}$. Para transformar a fracção $\frac{4}{9}$ na fracção $\frac{20}{45}$, basta multiplicar os seus termos por 5. E assim, fica: $\frac{4\times5}{9\times5}=\frac{20}{45}$. Qual das duas fracções é maior? São iguais. Ora bem; vamos agora ao caso da soma de fracções de denominador diferente.

O João quere que eu lhe dê $\frac{3}{7}$ dum queijo e o Manuel quere $\frac{4}{9}$ do mesmo queijo. Que porção querem do queijo? Para fazer a vontade ao João, tenho de partir o queijo em sete partes iguais; para a fazer ao Manuel tenho de o partir em 9. Pode ser? Não, porque ou hei-de partir o queijo em 7 ou em 9. Mas então não poderei satisfazer a vontade aos meus amigos? Posso; mas para isso tenho de dividir o queijo não em 7 nem em 9, mas sim num número tal de partes que se_ já múltiplo de 7 e de 9, isto é, que dividido por 7 ou por 9, dê de resto zero o que eu consigo multiplicando o 7 pelo 9 ou o 9 pelo 7, pois a ordem dos factores é arbitrária. Fazendo isso encontramos o número 63 que, neste caso, representa o número de partes em que a unidade tem de ser partida para satisfazer os desejos dos dois rapazes. Comparando agora o número 63 com o número 7, quantas vezes 63 é maior que 7? Nove vezes não é verdade? Logo, se o João se contentava com 3 partes partindo o queijo em 7, agora que o queijo está partido em 63 ou seja em 9 vezes mais, não se pode contentar com 3, mas sim com 9 vezes mais também. Portanto para satisfazer o desejo do João tenho de lhe dar 3 partes se dividir o queijo em 7, e tenho de lhe dar 27 se o dividir em 63. Comparando o 63 com o 9, quantas vezes o 63 é maior que o 9? Sete vezes, não é verdade? Portanto se o Manuel se contentava com 4 partes caso eu partisse o quejo em 9, agora que o parti em 7 vezes mais partes, não se pode contentar com as 4 mas sim com 7 vezes mais. Por isso tenho de dar ao Manuel 4 partes se dividir o queijo em 9, e tenho de lhe dar 28 se o partir em 63. Já vêem os meninos que eu satisfaço a vontade do João e do Manuel dividindo o queijo em 63 partes iguais e dando ao primeiro 27 e ao segundo 28. E porque assim é fica: $\frac{27}{63}$ para o primeiro e $\frac{28}{63}$ para o segundo.

Mas eu quero saber também que porção de queijo ficou. Para isso tenho de saber quanto gastaram os dois. Ora os dois gastaram: $\frac{27}{63}+\frac{28}{63}=\frac{55}{63}$. O queijo neste caso quanto vale? Vale: $\frac{63}{63}$. Quem de $\frac{63}{63}$ tira $\frac{55}{63}$, quanto deixa?

$\frac{63}{63}-\frac{55}{63}=\frac{8}{63}$. Deixa $\frac{8}{63}$. Daqui se conclue que para somar ou subtrair fracções é preciso que elas tenham o mesmo denominador; e caso o não tenham que é preciso reduzi-las. Para reduzir fracções ao mesmo denominador, se forem só duas, multiplicam-se os dois termos da primeira pelo denominador da segunda, e os da segunda pelo denominador da primeira. Pondo em prática a regra fica: $\frac{3}{7}+\frac{4}{9}=\frac{3\times 9}{7\times 9}+\frac{4\times 7}{9\times 7}$

Efectuando temos: $\frac{27}{63}+\frac{28}{63}=\frac{55}{63}$

<u>Apresento agora a lição continuação desta.</u>

Segue a lição:

Hoje, atendendo à explicação de ontem, falei assim: Eu tenho $\frac{3}{7}$ e aquele menino tem $\frac{4}{9}$.- Quanto temos os dois? É necessário fazer uma soma. Como as fracções não têm o mesmo denominador, é preciso reduzi-las. Para isso, multiplico os dois termos da primeira pelo denominador da segun_ da e os desta pelo denominador da primeira. Fazendo isso temos:

$$\frac{3}{7}+\frac{4}{9}=\frac{3\times 9}{7\times 9}+\frac{4\times 7}{9\times 7}$$

Efectuando as operações fica: $\frac{27}{63}+\frac{28}{63}$

Que temos a fazer agora? Como já têm o mesmo denominador, somam-se os numeradores e dá-se -lhes o mesmo denominador. Fazendo isso, temos:

$\frac{27}{63}+\frac{28}{63}=\frac{55}{63}$. Agora vamos verificar se eu, tendo $\frac{27}{63}$ duma unidade tenho tanto como tendo $\frac{3}{7}$ dessa unidade. Para isso temos de lançar mão daquela regra que diz assim: Se multiplicarmos ou dividirmos os termos de uma fracção pela mesma quantidade, a fracção não muda de valor. Como os termos da fracção $\frac{27}{63}$ são divisíveis por 3, posso simplificá-la, isto é, transformá-la noutra fracção cujos termos sejam menores e cujo valor seja o mesmo. E assim, tenho: $\frac{27:3}{63:3}=\frac{9}{21}$. Como os termos da fracção $\frac{9}{21}$ continuam ainda a ser divisíveis por 3, temos: $\frac{9:3}{21:3}=\frac{3}{7}$

Está portanto provado que a fracção $\frac{27}{63}$ é igual à fracção $\frac{3}{7}$. Tanto faz ter 3 partes das 7, como ter 27 das 63. Fazendo o mesmo à segunda fracção, como os termos dela são divisíveis por 7, temos:

$$\frac{28:7}{63:7}=\frac{4}{9}$$

Se quisermos somar mais de duas fracções que não tenham o mesmo denominador, temos de as reduzir ao mesmo denominador, e para isso multiplicamos os dois termos de cada fracção pelos denominadores das outras. Assim, se quiser somar $\frac{3}{7}$ com $\frac{4}{5}$, com $\frac{2}{9}$ e com $\frac{1}{6}$, tenho de multiplicar os dois termos da primeira, que são o 3 e o 7, pelo 5, pelo 9 e pelo 6, que são os denominadores das outras; tenho de multiplicar os termos da segunda, que são o 4 e o 5, pelo 7, pelo 9, e pelo 6, que são os denominadores das outras; tenho de mul_ tiplicar os termos da terceira que são o 2 e o 9, pelo 7, pelo 5 e pelo 6, que são os denominadores das outras; e, finalmente, tenho de multiplicar os termos da quarta que são o 1 e o 6, pelo 7, pelo 5 e pelo 9, que são os denominadores das outras. Fazendo isso, fica:

$\frac{3}{7}+\frac{4}{5}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{3\times5\times9\times6}{7\times5\times9\times6}+\frac{4\times7\times9\times6}{5\times7\times9\times6}+\frac{2\times7\times5\times6}{9\times7\times5\times6}+\frac{1\times7\times5\times9}{6\times7\times5\times9}$ Efectuando as operações, temos.

$$\frac{810}{1890}+\frac{1512}{1890}+\frac{420}{1890}+\frac{315}{1890}=$$

Como já têm o mesmo denominador, somam-se os numeradores e dá-se-lhes o mesmo denominador. Fazendo isso, fica:

$$\frac{810}{1890}+\frac{1512}{1890}+\frac{420}{1890}+\frac{315}{1890}=\frac{3057}{1890}$$

Agora vamos provar que a fracção $\frac{810}{1890}$ é igual à fracção $\frac{3}{7}$ e que portanto tanto faz ter 810 partes das 1890, como ter 3, das 7.

$\frac{810}{1890}$ Como ambos os termos

são divisíveis por 2, temos: $\frac{810:2}{1890:2}=\frac{405}{945}$. Como os termos desta fracção são divisíveis por 3, temos: $\frac{405:3}{945:3}=\frac{135}{315}$. Como os termos desta fracção continuam a ser divisíveis por 3, temos: $\frac{810}{1890}=\frac{405}{945}=\frac{135:3}{315:3}=\frac{45}{105}$. Como ainda são divisíveis por 3, temos: $\frac{810}{1890}=\frac{405}{945}=\frac{135:3}{315:3}=\frac{45:3}{105:3}=\frac{15}{35}$. Como agora só são divisíveis por 5, temos: $\frac{810}{1890}=\frac{405}{945}=\frac{135:3}{315:3}=\frac{45:3}{105:3}=\frac{15:5}{35:5}=\frac{3}{7}$. Portanto, temos: $\frac{810}{1890}=\frac{405}{945}=\frac{135:3}{315:3}=\frac{45:3}{105:3}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}$, Donde se conclue que $\frac{810}{1890}=\frac{3}{7}$.

Seguindo o mesmo processo vamos ver se a fracção $\frac{1542}{1890}$ é igual a $\frac{4}{5}$.

$\frac{1542}{1890}$ Como ambos os termos são divi_ síveis por 2, visto serem pares, temos: $\frac{1512:2}{1890:2}=\frac{756}{945}$. Como agora os termos desta fracção são divisíveis por 3, visto a soma dos seus algarismos ser múltipla de 3, temos: $\frac{1512}{1890}=\frac{756:3}{945:3}=\frac{252}{315}$. Como os termos desta fracção continuam a ser divisíveis por 3, temos: $\frac{1512}{1890}=\frac{756}{945}=\frac{252:3}{315:3}=\frac{84}{105}$. Como os termos desta (<u>fracção</u>) continuam ainda a ser divisíveis por 3, temos:

$\frac{1512}{1890}=\frac{756}{945}=\frac{252}{315}=\frac{84:3}{105:3}=\frac{28}{35}$. Como agora são divisíveis por 7, temos:

$\frac{1512}{1890}=\frac{756}{945}=\frac{252}{315}=\frac{84}{105}=\frac{28:7}{35:7}=\frac{4}{5}$. Temos portanto:

$$\frac{1512}{1890}=\frac{756}{945}=\frac{252}{315}=\frac{84}{105}=\frac{28}{35}=\frac{4}{5}$$

Donde se conclue que $\frac{1512}{1890}=\frac{4}{5}$.

Já agora vamos ver se a fracção $\frac{420}{1890}$ é igual a $\frac{2}{9}$

$\frac{420}{1890}$ Como os seus termos

são divisíveis por 2, temos: $\frac{420:2}{1890:2}=\frac{210}{945}$

Como os termos desta fracção são divisíveis por 3, pois a soma dos 3 algarismos é múltipla de 3, temos: $\frac{420}{1890}=\frac{210:3}{945:3}=\frac{70}{315}$. Como os termos desta nova fracção são divisíveis por 5, temos: $\frac{420}{1890}=\frac{210}{945}=\frac{70:5}{315:5}=\frac{14}{63}$. Como agora são divisíveis por 7, fica: $\frac{420}{1890}=\frac{210}{945}=\frac{70}{315}=\frac{14:7}{63:7}=\frac{2}{9}$

Temos portanto: $\frac{420}{1890}=\frac{210}{945}=\frac{70}{315}=\frac{14}{63}=\frac{2}{9}$, donde concluímos que $\frac{420}{1890}=\frac{2}{9}$

Fazendo o mesmo à fracção $\frac{315}{1890}$ para ver se é igual à fracção $\frac{1}{6}$, como os seus termos são divisíveis por 3, temos:

$\frac{315:3}{1890:3}=\frac{105}{630}$. Como os termos desta nova fracção são ainda divisíveis por 3, fica: $\frac{315}{1890} = \frac{105:5}{630:5} = \frac{35}{210}$. Como agora são divisíveis por 5, temos: $\frac{315}{1890} = \frac{105}{630} = \frac{35:5}{210:5} = \frac{7}{42}$. Como agora são divisíveis por 7, fica: $\frac{315}{1890} = \frac{105}{630} = \frac{35}{210} = \frac{7:7}{42:7} = \frac{1}{6}$

Donde concluímos que $\frac{315}{1890} = \frac{1}{6}$

<u>Apresento agora uma lição onde explico o que é número misto, sua conversão em fracção, a soma de um inteiro com uma fracção, a subtracção duma fracção dum inteiro e a extracção de inteiros.</u>

Nessa lição expliquei assim: Escrevi no quadro o número $3\frac{2}{5}$ e disse aos alunos: O número que acabo de escrever no quadro chama-se misto, porque é formado de parte inteira e parte fraccionária. Se quiser converter aquele número misto em fracção, tenho de multiplicar o inteiro pelo denominador da fracção, juntar o resultado ao numerador e dar-lhe o mesmo denominador. Fazendo como manda a regra, temos: Multiplicando o inteiro pelo denominador, fica: 3 x 5 = 15. Juntando agora o resultado ao numerador dá: 15 + 2 = 17; dando-lhe o mesmo denominador, fica a fracção: $\frac{17}{5}$. Logo $3\frac{2}{5}$ transformado em fracção é igual a $\frac{17}{5}$. Vamos agora ver porque fazendo assim fazemos bem. Transformar um número misto em fracção é meter dentro da fracção – deixem-me assim dizer – as unidades da parte inteira. No nosso caso a parte inteira é formada por 3 unidades, que devemos considerar divididas em quintos. Como cada unidade dá cinco quintos, três unidades dão $\frac{15}{5}$ que com os $\frac{2}{5}$, dão $\frac{17}{5}$. Outro exemplo: $4\frac{3}{8}$. Transformando êste número misto em fracção segundo a regra, temos: 4 x 8 = 32; 32 + 3 = 35; $\frac{35}{8}$

. Pràticamente: 4 unidades transformadas em oitavos, dão $\frac{32}{8}$; $\frac{32}{8}$ mais $\frac{3}{8}$, dão $\frac{35}{8}$. Se eu tiver $3+\frac{4}{9}$, faço da mesma maneira que para reduzir um número misto a fracção, porque três unidades transformadas em nonos, dão 27 e 27 nonos mais 4, são $\frac{31}{9}$. Se tiver $3-\frac{5}{7}$, o caso muda de figura, mas não para causar embaraços, porque agora tenho uma fracção a subtrair dum inteiro. Fazendo como manda a regra, tenho de multiplicar o inteiro pelo denominador, ao resultado subtrair o numerador e dar-lhe o mesmo denominador. Fazendo assim temos: $\frac{3\times 7-5}{7}=\frac{16}{7}$. Porque é que se faz assim? Ou por outra: Porque é que fazendo assim fazemos bem? Porque três unidades divididas em sétimos, dão 21 sétimos; e quem de $\frac{21}{7}$ tirar $\frac{5}{7}$, fica com $\frac{16}{7}$. Quando uma fracção é imprópria é necessário extrair-lhe os inteiros. Extrair os inteiros a uma fracção, é arrancar-lhe, sacar-lhe, tirar-lhe tôdas as unidades que tenha, visto que uma fracção é imprópria quando é maior que a unidade, o que acontece tôdas as vezes que o seu numera_ dor seja maior que o denominador.

Tenho por exemplo a fracção $\frac{14}{7}$. Basta olhar para ela para reconhecer que é maior que a unidade, visto a unidade neste caso dar $\frac{7}{7}$ e a fracção indicar $\frac{14}{7}$ Se quiser extrair os inteiros a esta fracção, isto é, saber quantas unidades há nela, seguindo a regra dos livros, tenho de dividir o numerador pelo denominador, e se a divisão der resto, com êsse resto e com o divisor formar uma fracção em que o resto seja o numerador e o divisor o denominador. Fazendo o que manda a regra, temos:

$$\begin{array}{r|l} 14 & \underline{7} \\ 0 & 2 \end{array}$$

Esta divisão não deu resto e por isso a fracção $\frac{14}{7}$ é igual a duas unidades. Vamos agora extrair-lhe os inteiros pràticamente, desprezando as regras livrescas. A fracção $\frac{14}{7}$ diz-nos que cada unidade foi dividida em 7 partes iguais e que ficamos com 14. Então partindo a unidade em sete partes poderemos ficar com 14? Podemos, desde que dividamos tantas uni_ dades quantas sejam precisas para dar o número de partes que desejamos tomar. Neste caso, como queríamos $\frac{14}{7}$, fomos obrigados a partir duas unidades, porque dando cada unidade $\frac{7}{7}$, as duas dão $\frac{14}{7}$. Outro exemplo: $\frac{25}{9}$. Esta fracção é imprópria porque uma unidade não chega para a formar, visto que uma unidade dá $\frac{9}{9}$ e a fracção tem $\frac{25}{9}$. Vamos extrair-lhe os

inteiros, isto é, vamos ver quantas unidades estão dentro dela. Fazendo como os livro mandam, temos: Dividindo o numerador pelo denominador fica:

$$\begin{array}{l|l} 25 & 9 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$$

Como esta divisão deixou resto, continuando a seguir a regra, temos de formar uma fracção em que aquele resto seja o numerador e o divisor o denominador. E sendo assim, temos

$$\begin{array}{l|l} 25 & 9 \\ \hline 7 & 2\,\frac{7}{9} \end{array}$$

A fracção $\frac{25}{9}$ é igual a 2 unidades e a $\frac{7}{9}$ doutra unidade. Para provarmos

que fazendo assim fazemos bem, devemos raciocinar dêste modo. Uma unidade neste caso dá $\frac{9}{9}$, duas dão $\frac{18}{9}$ e três dão $\frac{27}{9}$. Ora a fracção não representa $\frac{27}{9}$ mas simplesmente $\frac{25}{9}$.

Logo a fracção só vale duas unidades que neste caso são iguas a $\frac{18}{9}$. E porque assim é, a fracção $\frac{25}{9}$ é igual a 2 unidades e mais $\frac{7}{9}$ doutra unidade. Quer dizer: Para arranjarmos a fracção $\frac{25}{9}$, tivemos de partir três unidades em nonos, ficando com os nonos de duas unidades e com mais sete nonos da terceira unidade.

<u>Passo agora a apresentar outra lição na qual explico a maneira de achar o valor da fracção sendo dada a unidade ou a quantidade e achar o valor da unidade ou quantidade, sendo dada a fracção.</u>

<u>Segue a lição:</u>

Os meninos já sabem que para obtermos $\frac{2}{9}$ duma maçã, temos de dividir essa maçã em 9 partes iguais e ficar, tomar, duas dessas partes. Se quisermos dar $\frac{4}{5}$ dum queijo a um nosso amigo, temos de dividir o queijo em 5 partes iguais, tomar 4 dessas partes e entregá-las à pessoa a quem as queremos dar. Se tiver 15 laranjas e quiser dar os $\frac{2}{5}$ delas, tenho de dividir as 15 laranjas em 5 partes iguais, tomar duas dessas partes e entregá-las à pessoa que eu quero presentear, etc., etc. Para mais tarde não terem dificuldades, é conveniente ficarem sabendo desde já que, tomar, em fracções, é sinónimo de multiplicar. E assim, se quiser saber quantas maçãs tem a Maria se tiver $\frac{3}{7}$ de 42, terei de dividir 42 por 7, para achar um sétimo; e em seguida multiplicar por 3. Fazendo isto, temos: 42 : 7 x 3 = 18. 18 mação são os $\frac{3}{7}$ de 42 maçãs. Se quiser achar os $\frac{5}{9}$ de 81 peras, terei de dividir 81 por 9, para achar um nono; e depois multiplicar por 5. Fazendo assim, temos: 81 : 9 x 5 = 45. 45 peras são portanto os $\frac{5}{9}$ de 81 peras. etc. etc. Se for dado o valor da fracção e quisermos achar o valor da unidade ou quantidade, então procedemos de outra maneira. Assim, se quisermos saber quantas maçãs tem o João se soubermos que os $\frac{3}{7}$ das suas maçãs são 21 maçãs, teremos de dividir 21 por 3, para achar o número de maçãs de cada sétimo e depois multiplicar por 7. Efectuando, temos: 21 : 3 x 7 = 49 maçãs. Se os $\frac{4}{9}$ do meu dinheiro forem 32$00 e eu quiser saber quanto é o meu dinheiro, terei de dividir 32$00 por 4, para saber quantos escudos pertencem a cada nono, e depois multiplicar por 9. Efectuando temos: 32$00 : 4 X 9 = 72$00 etc., etc. Sobre multiplicação e divisão de fracções, limito-me a ensinar às crianças as regras dos livros, e, deixem-me dizer-lhes que é muito difícil para a primária.

Alberto Pimentel, Filho, na Súmula Didáctica, explica admiràvelmente tôdos os casos de fracções. Eu simplifico tanto quanto me é possível o ensino de fracções e esforço-me porque a criança compreenda

o que faz sabendo por isso explicar a razão porque faz. E já agora apresento um problema há dias dado por mim à 4.ª classe: $\frac{2}{7}$ do meu dinheiro são $\frac{5}{8}$ de 720\$00. Quanto é o meu dinheiro? Para saber quanto é o meu dinheiro – disse eu aos alunos – preciso saber em primeiro lugar quanto são os $\frac{5}{8}$ de 720\$00. Para achar os $\frac{5}{8}$ de 720\$00 tenho de dividir 720\$00 por 8 para achar o valor de $\frac{1}{8}$, e depois repeti-lo 5 vezes. Feito isto encontro a importância igual a $\frac{2}{7}$ do meu dinheiro. Que resta fazer agora? Dividir essa importância em duas partes iguais para achar o valor de cada sétimo, e depois repetir êsse valor sete vezes e ficarei sabendo quanto dinheiro tenho. Indicando e efectuando, temos: 720\$00 : 8 x 5 : 2 x 7 = 1575\$00.
Em casos como este tenho ensinado assim, e não tenho obtido maus resultados:

Passo agora ao emprego da vírgula.

Antes de ensinar às crianças para que

serve a vírgula num número, digo-lhes que quando a unidade for dividida em 10, ou em 100, ou em 1000, ou em 10.000 etc., partes iguais, essas partes por serem 10, 100, 1000, 10.000 etc., vezes mais pequenas que a unidade, chamam-se partes decimais. Que se a unidade for partida em 10 partes iguais, cada uma delas, por ser 10 vezes mais pequena que a unidade, chama-se décima. Que se for partida em 100, cada parte chama-se centésima, que quer dizer 100 vezes mais pequena que a unidade, e que se for partida em 1000, cada uma delas chama-se milésima, em 10.000 décima milésima, etc., etc. Ensino-as a representar qualquer número de partes decimais por meio de fracção, e só depois de terem compreendido bem o que são partes decimais e de saberem explicar a diferença que há entre partes decimais e fraccionárias, é que apresento a vírgula e as ensino a escrever qualquer fracção em forma de inteiro. Para isso digo-lhes que a vírgula, num número, é o sinal que usamos para separar as unidades das partes decimais da unidade: Para a esquerda da vírgula ficam as unidades, para a direita as partes decimais da unidade que serviu de origem a êsse número. Daí a razão porque quando queremos indicar qualquer número de partes decimais em forma de inteiro, desde que êsse número de partes não chegue ao que é dado pela unidade, o primeiro algarismo que escrevemos é o zero, seguido da vírgula, para dizer: unidades não temos nenhuma; só temos partes da unidade e essas partes são decimais. Portanto a parte do número que fica para a direita da vírgula, embora seja formada por muitos algarismos, representa pouco e tão pouco, que nem chega a representar uma unidade. E como entre as partes decimais há a mesma relação ou razão de 10 que há entre as unidades de nova ordem, um número decimal torna-se 10, 100, 1000, etc., vezes maior, mudando respectivamente a vírgula uma, duas, três, etc., casas para a direita, e diminue na mesma proporção mudando-a para a esquerda. E como me não é possível dizer mais sôbre o assunto porque quero falar do sistema – métrico, e o que já está dito já é demais para uma conferência, passo a apresentar alguns esquemas para exemplificar:

	10 x <que a unidade	**100 x < que a unidade**	**1000 x < que a unidade 10**	**10.000 x < que a unidade**
2,	**2**	**2**	**2**	**2**
	décima	**centésima**	**milésima a**	**Décima milésima**

100.000 x < mudando a vírgula para esta posição	10.000 x < mudando a vírgula para esta posição	1000 x < mudando a vírgula para esta posição	100 x < mudando a vírgula para esta posição	10 x < mudando a vírgula para esta posição		
2	2	2	2	2	2,	2

	10 x > mudando a vírgula para esta posição	100 x > mudando a vírgula para esta posição	1000 x > mudando a vírgula para esta posição	10.000 x > mudando a vírgula para esta posição	100.000 x > mudando a vírgula para esta posição	
2,	2	2	2	2	2	2

100.000 x < mudando a vírgula para esta posição	10.000 x < mudando a vírgula para esta posição	1.000 x < mudando a vírgula para esta posição	100 x < mudando a vírgula para esta posição	10 x < mudando a vírgula para esta posição		
2,	2	2	2	2	2,	2
	10 x > mudando a vírgula para esta posição	100 x > mudando a vírgula para esta posição	1000 x > mudando a vírgula para esta posição	10.000 x > mudando a vírgula para esta posição	100.000 x > mudando a vírgula para esta posição	

Passo agora ao sistema – métrico. Segue a primeira lição:

Para explicar pràticamente as medidas de comprimento e superfície, fui com os alunos para o campo, levando uma cadeia métrica e um metro articulado. Chegados ao lugar escolhido, apresentei o metro aos alunos e disse-lhes que o metro representava a décima milionésima parte do comprimento da quarta parte do meridiano terrestre, porque o meridiano terrestre fôra dividido em quatro partes iguais e cada uma dessas partes em 10 milhões de partes iguais, ficando cada uma delas com um comprimento igual àquele a que hoje chamamos metro. Disse-lhes também que se tivéssemos apenas o metro para medir, teríamos grande trabalho para avaliar grandes distâncias e seria até impossível fazer grandes medições. Foi por isso que os sábios arranjaram medidas maiores que o metro e a primeira foi o decâmetro, cujo compri_ mento é igual a 10 metros. Mandei então dois alunos estender a cadeia métrica e com o metro medi o comprimento dela para que todos ficassem sabendo que ela media 10 metros de comprimento e que a êsse comprimento se chamava decâmetro. Depois disse-lhes que ainda havia outro comprimento que, comparado com o decâmetro, era 10 vezes maior e que êsse comprimento se chamava hectómetro. Para melhor poderem compreender, obriguei os alunos a fazerem a medição de um hectómetro, e durante a medição fui perguntando ora a um, ora a outro aluno: -- Quantos decâmetros já medimos? Quantos metros são? Quantos metros são precisos para formar um decâmetro? E para formar um hectómetro? Porque? E quantos metros?.

Medido o hectómetro, fiz ver aos alunos que para formar o decâmetro eram precisos 10 metros e que para formar o hectómetro eram precisos 10 decâmetros, e disse-lhes ainda, que se tivéssemos tempo mediríamos o comprimento 10 vezes maior que o hectómetro e ao qual chamaríamos quilómetro. Portanto decâmetro, hectómetro e quilómetro são as medidas maiores que o metro e chamam-se múltiplos do metro. Disse também aos alunos que se havia grande vantagem em haver medidas maiores que o metro, também era de suma importância tê-las mais pequenas e que por isso fôra o metro dividido em 10 partes iguais e que a cada uma delas, por ser 10 vezes mais pequena que o metro, fôra dado o nome de decímetro. Como tinha na mão o metro articulado não me foi difícil mostrar aos alunos esse comprimento. Como na vida prática, continuei eu, há necessidade de fazer medições ainda menores que o decímetro, eis a razão porque os sábios dividiram ainda o decímetro em 10 partes iguais, o que equivale a dividir o metro em 100, e a cada uma dessas partes cha_ maram centímetro. E ainda não contentes com isso, dividiram o centímetro em 10 partes iguais, o que equivale a dividir o decímetro em 100 e o metro em 1000 e a cada uma dessas partes chamaram milímetro. Mostrei todos estes comprimentos aos alunos e disse-lhes: o decímetro, o centímetro e o milímetro, chamam-se submúltiplos do metro. Há ainda outro múltiplo **??** chamado mícron que não posso mostrar, porque é mil vezes menor que o milímetro. Depois perguntei a um aluno:

-- Então quantos metros são precisos para formar um decâmetro?

-- Dez.

-- E quantos decímetros são precisos para formar um metro?

-- Dez.

-- E quantos centímetros são precisos para formar um decímetro?

-- Dez

-- E quantos hectómetros são precisos

para formar um quilómetro?

-- Dez.

-E quantos milímetros são precisos para formar um centímetro?

-- Dez.

Portanto já os meninos vêm, que qualquer unidade destas medidas ou é dez vezes maior que a unidade imediatamente inferior, ou é 10 vezes mais pequena que a unidade imediatamente superior. É a isto que a aritmética chama variar na razão de 1 para 10. Há medidas que variam na razão de 1 para 100 e essas são as de superfície. Superfície é a extensão com duas dimensões. Verdadeiramente superfície só podemos considerar a sombra porque nela não há mais que comprimento e largura. Para explicar as medidas de superfície tracei no solo, com auxílio do metro, um quadrado com um metro de lado. Dividi cada lado em 10 centímetros servindo-me das divisões do metro articulado, e assim com_ segui dividir o metro quadrado em 100 quadrados de 1 decímetro de lado. Aqui têm – disse eu aos alunos – um quadrado de 1 metro de lado, e por isso, a êsse espaço de terra que fica dentro dêsses lados, chamamos metro quadrado. Como vêm, êste metro abrange duas dimensões: comprimento e largura. Mandei depois contar os quadrados em que dividira o metro quadrado, para que todos ficassem a saber que eram 100. Depois com o decímetro medi os quatro lados de um dêsses quadrados e os alunos ficaram a saber que cada um dêstes pequenos quadrados tinha um decímetro de lado e que por isso se chamava decímetro quadrado. Depois disto perguntei a um aluno:

-- Menino, o metro quadrado quantos decímetros quadrados tem?

-- Cem.

-- Mandei depois medir um quadrado com 10 metros de lado, mandando colocar nas 4 extremidades uma pedra grande para que todos os alunos vissem bem a grandeza do quadrado medido. Feita a medição, disse aos alunos: -- Se agora dividíssemos cada lado dêste quadrado em 10 partes iguais, cada parte ficaria com o comprimento de um metro. Se dividíssemos **??** essas divisões por meio de linhas, teríamos êste quadrado dividido em quadrados de 1 metro de lado. Em quantos quadrados ficaria dividido? Em 100, não é verdade? Ora cada um desses quadrados é igual a um metro quadrado. E êste quadrado por ter de lado um decâmetro, chama-se decâmetro quadrado. Já os meninos vêm, que a relação entre as unidades destas medidas, das quais nos servimos para avaliar duas dimensões e que por isso se chamam medidas de superfície, é de 100. Sim, o metro quadrado quantos decímetros quadrados tem? Cem. E o decâmetro quadrado quantos metros quadrados tem? Cem. Portanto já compreendem que se nos fosse possível medir um hectómetro quadrado, para o que seria preciso medir um quadrado com 100 metros de lado, êsse quadrado teria cem decâmetros quadrados, e se nos fôsse possível ainda medir um quilómetro quadrado, para o que seria preciso medir um quadrado com 10 hectómetros de lado, êsse quadrado teria 100 hectómetros quadrados de superfície. Por êstes exemplos ficam sabendo que cada unidade destas medidas ou é 100 vezes maior que a unidade imediatamente inferior ou 100 vezes menor que a unidade imediatamente superior. Variam portanto, como já disse, na razão de 1 para 100.

Na lição imediata para que os alunos ficassem a compreender bem o que é variar na razão de 1 para 10 ou de 1 para 100, e ainda para conhecerem pràticamente os respectivos lugares das unidades métricas e o seu valor em relação às imediatamente inferiores ou superiores, e ainda para aprenderem o número de unidades de ordens inferiores que cada uma contém, apresentei os seguintes esquemas:

Km	Hm	Dam	m
		1	0
	1	0	0
1	0	0	0

m	dm	cm	mm			µ
1	0					
1	0	0				
1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0

Km	hm	dam	m	dm	cm	mm			µ
1	0								
1	0	0							
1	0	0	0						
1	0	0	0	0					
1	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

hm	dam	m	dm	cm	mm			µ
1	0							
1	0	0						
1	0	0	0					
1	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0

dam	m	dm	cm	mm			µ
1	0						
1	0	0					
1	0	0	0				
1	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0

m	dm	cm	mm			µ
1	0					
1	0	0				
1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0

dm	cm	mm			μ
1	0				
1	0	0			
1	0	0	0	0	0

cm	mm			μ
1	0			
1	0	0	0	0

mm			μ
1	0	0	0

Medidas de superfície

m^2		dm^2		cm^2		mm^2
1	0	0				
		1	0	0		
				1	0	0

km^2		hm^2		dam^2		m^2
				1	0	0
		1	0	0		
1	0	0				

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
1	0	0										
1	0	0	0	0								
1	0	0	0	0	0	0						
1	0	0	0	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
1	0	0								
1	0	0	0	0						
1	0	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
1	0	0						
1	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0	0	0

m^2		dm^2		cm^2		mm^2
1	0	0				
1	0	0	0	0		
1	0	0	0	0	0	0

dm^2		cm^2		mm^2
1	0	0		
1	0	0	0	0

cm^2		mm^2
1	0	0

Segue a explicação das medidas de volume, capacidade e pêso.

Para tornar a explicação o mais intuitiva possível, portanto prática, mandei buscar o decímetro cúbico, o quilograma, o litro, o decilitro e umas balanças. Mandei um aluno buscar areia e depois expliquei assim:
Os meninos já sabem que o volume abrange três dimensões: comprimento, largura e altura. Nós também temos medidas para avaliar os volumes e essas medidas são o metro cúbico, o decímetro cúbico e o milímetro cúbico. O que será o metro cúbico? È um cubo com um metro de comprimento, outro de largura e outro de altura. Dito isto, mandei levantar os alunos e mandei-os aproximar de mim. Com o auxílio do metro linear, tracei sôbre o soalho o metro quadrado e depois colocando o metro verticalmente em cada uma das extremidades, disse aos alunos que se em cada vértice dos ângulos daquele quadrado se levantasse uma régua

com um metro de altura, ficaria assim marcado um metro cúbico. Apresentei-lhes em seguida o decímetro cúbico e disse-lhes: Êste cubo que os meninos vêm na minha mão, tem um decímetro de comprimento, outro de largura e outro de altura, e por isso se chama decímetro cúbico. Comparando o volume dêste cubo com o volume do metro cúbico, qual deles é o maior? O metro cúbico não é verdade? E sabem quantas vezes é maior? Mil vezes. São precisos mil cubos como êste, para formar um cubo com as dimensões do metro cúbico. Mostrei em seguida aos alunos o centímetro cúbico e disse-lhes: Êste pequeno cubo que está assente na extremidade do meu dedo, tem um centímetro de comprimento, outro de largura e outro de altura e por isso lhe chamamos centímetro cúbico. Não é preciso ser inteligente para ver que o centímetro cúbico, comparado com o decímetro, é mais pequeno e sabem quantas vezes? Mil vezes. Se comparássemos o cen_ tímetro cúbico com o milímetro cúbico, veríamos também que êste era mil vezes mais pequeno. Estas medidas, porque abrangem três dimensões, chamam-se medidas de volume e variam, como vêm, na razão de 1 para 1000, que quere dizer: Cada unidade destas medidas ou é mil vezes maior que a unidade imediatamente inferior, ou mil vezes menor que a unidade imediatamente superior. E para melhor compreenderem, apresentei-lhes os seguintes esquemas:

m³			**dm³**			**cm³**			**mm³**
1	**0**	**0**	**0**						
			1	**0**	**0**	**0**			
						1	**0**	**0**	**0**

m³			**dm³**			**cm³**			**mm³**
1	**0**	**0**	**0**						
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**			
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

dm^3			cm^3			mm^3
1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0

cm^3			mm^3
1	0	0	0

			km	hm	dam	m	dm	cm	mm			μ			
			1	0											
				1	0										
					1	0									
						1	0								
							1	0							
								1	0						
									1	0	0	0			
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2			
1	0	0													
		1	0	0											
				1	0	0									
						1	0	0							
								1	0	0					
										1	0	0			
						m^3			dm^3			cm^3			mm^3
						1	0	0	0						
									1	0	0	0			
												1	0	0	0

			Km	hm	dam	m	dm	cm	mm			μ			
7	3	8	9.	4.	5.	6.	7.	2.	4.	1	9	7.	5	4	3
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2			
7.	3	8.	9	4.	5	6.	7	2.	4	1.	8	7.	5	4	3
						m^3			dm^3			cm^3			mm^3
7	3	8	9	4	5	6.	7	2	4.	1	8	7.	5	4	3

			Km	hm	dam	m	dm	cm	mm			μ			
km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2			
						m^3			dm^3			cm^3			mm^3

Nota: O símbolo **μ**, *é semelhante ao que o autor usa nestes quadros para significar aquilo que ao tempo queria dizer “**mícron**”, ou seja* 10^{-3} *do mm, designação que foi suprimida pela 13ª CGPM (1967, Resolução 7)*

Para explicar as medidas de capacidade falei assim:

Os meninos, com as medidas que já conhecem, não podem ainda fazer todas as medições, pois nenhum dos meninos vai a um estabelecimento pedir um metro de azeite nem um decímetro cúbico de petróleo nem um decímetro quadrado de água-ardente. Ne_ cessitamos portanto de medidas próprias para medir o vinho, a água-ardente, o azeite, o álcool, o trigo, o centeio, o milho, o feijão, etc., etc., etc. Peguei no decímetro cúbico, mostrei-o aos alunos e disse-lhes: Meninos, se este decímetro cúbico fosse ôco, já eu o poderia encher de azeite de vinho ou de feijão, não é verdade? Logo, para medir os líquidos e secos por mim indicados, necessitamos de medidas ôcas. Aí têm a razão porque os homens para criarem essas medidas, tomaram o decímetro cúbico, transformaram-no – se assim se pode dizer – em caixa, e a essa caixa chamaram-lhe litro. O litro portanto é a medida mãi destas novas medidas que, por serem ôcas, lhes chamaram de capacidade. É claro; para facilitar cálculos e medições, arranjaram uma caixa – deixem passar o termo – dez vezes maior e chamaram-lhe decalitro; outra cem vezes maior e chamaram-lhe hectolitro, outra mil vezes maior e chamaram-lhe quilo_ litro. Para as pequenas medições arranjaram uma caixa dez vezes mais pequena que o litro e chamaram-lhe decilitro, outra cem vezes mais pequena e chamaram-lhe centilitro, outra mil vezes mais pequena e chamaram-lhe mililitro, e ainda outra mil vezes mais pequena que o mililitro e chamaram-lhe microlitro. As medidas de capacidade em forma de caixa feitas de madeira, servem para medir secos; e as que são feitas de lata, de estanho, zinco ou vidro e com a forma cilíndrica, à laia de copos, servem para medir os líquidos. Para os alunos compreenderem a relação, apresentei-lhes os seguintes esquemas:

Kl	**hl**	**dal**	**l**
		1	**0**
	1	**0**	
1	**0**		

l	**dl**	**cl**	**ml**			λ
1	**0**					
	1	**0**				
		1	**0**			
			1	**0**	**0**	**0**

Kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			λ
1	0								
	1	0							
		1	0						
			1	0					
				1	0				
					1	0			
						1	0	0	0

Kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			λ
1	0								
1	0	0							
1	0	0	0						
1	0	0	0	0					
1	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

*Nota: O símbolo λ, é semelhante ao que o autor usa nestes quadros para significar **microlitro**, ou seja, neste caso, 10^{-6} do litro.*

hl	dal	l	dl	cl	ml			λ
1	0							
1	0	0						
1	0	0	0					
1	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0

dal	l	dl	cl	ml			λ
1	0						
1	0	0					
1	0	0	0				
1	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0

l	dl	cl	ml			λ
1	0					
1	0	0				
1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0

dl	cl	ml			λ
1	0				
1	0	0			
1	0	0	0	0	0

cl	ml			λ	X				
1	0				X	ml			λ
1	0	0	0	0	X	1	0	0	0

Terminada a apresentação e explicação destes esquemas, disse aos alunos: Como sabem, já conhecemos as medidas de comprimento ou lineares, as medidas de superfície, as de volume e as de capacidade. Mas tôdas elas ainda não são suficientes para remediar tôdas as nossas necessidades, porque ninguém pode medir um litro de ferro, nem um metro de pregos, nem um decímetro cúbico de macarrão. Portanto temos necessidade de umas medidas que sirvam para pesar. Foi então que coloquei o litro vazio numa das cuias da balança, e na outra deitei areia até equilibrar o pêso da lata, e disse aos alunos: Meninos, os sábios para criarem as medidas de pêso, serviram-se do litro e, enchendo-o de água pura à temperatura de quatro graus centígrados, convencionaram que o pêso dessa água se chamaria quilograma. E para verem que isto é verdade, estejam com atenção. Coloquei sobre a areia o quilograma e fui lançando água no litro. Com efeito; quando o litro ficou completamente cheio de água, a balança ficou em equilíbrio, e os pequenos ficaram radiantes por verem que era certo o que eu tinha dito. Como vêem, meus meninos – disse eu – não resta dúvida sôbre o caso, e já ficam sabendo que o quilograma foi a primeira unidade das medidas de pêso e por isso a fundamental delas. Para facilitar cálculos e pesagens, temos duas unidades maiores que o quilograma: o quintal igual a 100 quilogramas e a tonelada igual a 1000 quilogramas. Para as pequenas pesagens temos o hectograma, dez vezes mais pequeno que o quilograma; o decagrama, cem vezes mais pequeno que o quilograma, o grama mil vezes mais pequeno; o decigrama dez mil vezes menor; o centigrama cem mil vezes menor, o miligrama um milhão de vezes menor e o micrograma um bilião de vezes menor. E já agora, não lhes deve custar a compreender que dizer mais pequena, neste caso, equivale a dizer: menos pesada. E para melhor compreensão apresentei os seguintes esquemas:

T	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			y
1	0											
	1	0	0									
			1	0								
				1	0							
					1	0						
						1	0					
							1	0				
								1	0			
									1	0	0	0

Nota: O símbolo **y**, *é semelhante ao que o autor usa nestes quadros para significar aquilo que ao tempo queria dizer* ***micrograma***, *ou seja, neste caso* 10^{-3} *do mg*.

T	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			y
1	0											
1	0	0	0									
1	0	0	0	0								
1	0	0	0	0	0							
1	0	0	0	0	0	0						
1	0	0	0	0	0	0	0					
1	0	0	0	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			y
1	0	0									
1	0	0	0								
1	0	0	0	0							
1	0	0	0	0	0						
1	0	0	0	0	0	0					
1	0	0	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			y
1	0								
1	0	0							
1	0	0	0						
1	0	0	0	0					
1	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

hg	dag	g	dg	cg	mg			y
1	0							
1	0	0						
1	0	0	0					
1	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0

dag	g	dg	cg	mg			y
1	0						
1	0	0					
1	0	0	0				
1	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0

g	dg	cg	mg			y
1	0					
1	0	0				
1	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0

dg	cg	mg			y
1	0				
1	0	0			
1	0	0	0	0	0

cg	mg			y					
1	0					mg			y
1	0	0	0	0		1	0	0	0

Depois de compreendidas as medidas lineares, as de superfície, volume, capacidade e pêso passei às equivalências, e por isso coloquei sobre a mesa o decímetro cúbico, o litro e o quilograma, e disse aos alunos: Já sabem que o decímetro cúbico transformado em caixa ou em copo – deixem-me assim dizer-lhes – chama-se litro, e o litro cheio de água, o pêso dessa água chama-se quilograma. E porque assim é, podemos dizer que o decímetro cúbico nas medidas de capacidade se chama litro, e que nas medidas de pêso se chama quilograma. Fui em seguida para o quadro e escrevi os seguinte número:

$$6\,7\,8\,3,^{dm^{\,3}}6\,2\,9\,6\,7\,3\,8$$

Como vêm, êste número, representa decímetros cúbicos. Se eu quisesse substituir aquela unidade pela que lhe corresponde nas medidas de capacidade, teria de apagar decímetro cúbico e escrever litro, não é verdade? E se quisesse fazer a substituição pela correspondente nas medidas de pêso, teria de escrever quilograma. Como vêm, ao decímetro cúbico correspondem o litro e o quilograma.

Portanto temos:

$$\begin{array}{c} Kg \\ l \\ 6\,7\,8\,3,^{dm^3}\,6\,2\,9\,6\,7\,3\,8 \end{array}$$

Ora digam-me: Qual é a unidade imediatamente superior a um decímetro? É o metro, não é verdade? Logo, a unidade imediatamente superior ao decímetro cúbico é o metro cúbico. E quantas vezes é maior que o decímetro cúbico? Mil vezes. Portanto se o decímetro cúbico é equivalente ao litro nas medidas de capacidade, o mero cúbico há-de ser equivalente a uma unidade que nas medidas de capacidade seja mil vezes maior que aquela a que é equivalente o decímetro cúbico. E qual é a unidade que nas medidas de capacidade é mil vezes maior que o litro? É o quilolitro. Portanto metro cúbico e quilolitro são equivalentes. E porque assim é, fica:

$$\begin{array}{lll} & & Kg \\ & Kl & l \\ 6^{m^3} & ,783, & ^{dm^3}6296738 \end{array}$$

Se o decímetro cúbico é equivalente ao quilograma nas medidas de pêso, o metro cúbico, por ser mil vezes maior que o decímetro cúbico, há-de ser forçosamente equivalente a uma unidade que, nas medidas de peso, seja mil vezes maior que aquela a que é equivalente o decímetro cúbico. E nas medidas de pêso, qual é a unidade mil vezes maior que o quilograma? É a tonelada. Logo, metro cúbico e tonelada, são equivalentes, e por isso temos:

$$\begin{array}{ll} T & Kg \\ Kl & l \end{array}$$
$$6^{m^3},783,^{dm^3}6296738$$

Qual é a unidade imediatamente inferior ao decímetro cúbico? É o centímetro cúbico, não é verdade? E quantas vezes o centímetro cúbico é mais pequeno que o decímetro cúbico? Mil vezes. Sendo assim, temos:

$$\begin{array}{ll} T & Kg \\ Kl & l \end{array}$$
$$6^{m^3},783,^{dm^3}629,^{cm^3}6738$$

Se o decímetro cúbico é equivalente ao litro nas medidas de capacidade e ao quilograma nas medidas de pêso, o centímetro cúbico, por ser mil vezes mais pequeno, há-de ser forçosamente equivalente a unidades que, nessas medidas, sejam mil vezes menores que aquelas a que é equivalente o decímetro cúbico. Essas unidades são: o mililitro nas medidas de capacidade, porque é mil vezes mais pequeno que o litro, e o grama nas medidas de pêso porque é mil vezes menor que o quilograma. Por isso centímetro cúbico, mililitro e grama, são equivalentes. Por isso temos:

$$\begin{array}{ccc} T & Kg & g \\ Kl & l & ml \\ 6^{m^3},7\,8\,3, & ^{dm^3}6\,2\,9, & ^{cm^3}6\,7\,3\,8 \end{array}$$

Se o centímetro cúbico é equivalente ao mililitro e ao grama, o milímetro cúbico, por ser mil vezes mais pequeno, há-de ser forçosamente equivalente a unidades que sejam mil vezes mais pequenas que aquelas a que é equivalente o centímetro cúbico. Essas unidades são respectivamente, o microlitro e o miligrama. Portanto, milímetro cúbico, microlitro e miligrama, são equivalentes. E assim temos:

$$\begin{array}{cccc} T & Kg & g & mg \\ Kl & l & ml & \lambda \end{array}$$

$$6^{m^3},783,^{dm^3}629,^{cm^3}673,^{mm^3}8$$

Passei uma vista geral às medidas servindo-me dos números e esquemas seguintes, para melhor os alunos fixarem os lugares das respectivas unidades:

1.000.000.000x	**100.000.000**	**10.000.000x>**	**1.000.000x>**	**100.000 x>**	**10.000 x>**	**1000 x>**			
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**			**µ**
6	**2**	**8**	**7**	**6**	**8**	**4**	**6**	**8**	**9**

1000x>	**100x>**	**10x>**	**m 10x> dm**	**m 100x> cm**	**m 1000x > mm**	**m 1.000.000x>µ**			
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**			**µ**
6	**2**	**8**	**7**	**6**	**8**	**4**	**6**	**8**	**9**

		100x>		**100x>**		**100x>**		**100x>**		**100x>**		**100x>**
km 2	**->**	**hm 2**	**->**	**dam2**	**->**	**m 2**	**->**	**dm 2**	**->**	**cm 2**	**->**	**mm2**
7.	**8**	**9.**	**6**	**7.**	**3**	**8.**	**9**	**4.**	**5**	**6.**	**7**	**8.**

km 2												
100x> hm2		10.000x> dam2		1.000.000x> m 2		100.000. 000x> dm 2		10.000 .000.000x> cm 2		1.000.000. 000.000x> mm 2		
km 2		hm 2		dam2		m 2		dm 2		cm 2		mm2
8.	4	3.	6	7.	5	6.	8	7.	3	6.	8	6.

m.3									
1.000x> dm 3			1.000.000x> cm 3			1.000.000. 000.000x> mm 3			
m 3			dm 3			cm 3			mm3
4.	6	8	3.	6	7	3.	8	9	6

kl									
	10x> hl	100x> dal 1	1.000x> l	10.000x> dl	100.000x> cl	1.000.000x> ml			1.000.000.000x> mcl
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			mcl
6.	8.	9.	3.	6.	8.	7.	6	8	7

t												
10x> q			1000x> kg	10.000x> hg	100. 000x> dag	1.000.x> 000 g	10.000. 000. dg	100. 000.000 x> cg	1.000. 000.000. x> mg			1.000.000. 000.000 x> y
t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			y
6,	2,	8	3.	9	6	3	6	8	7	6	8	7

t	q		kg	hg	dag	g	dg	cg	mg			y
kl	hl	dal	l	dl	cl	ml			mcl			
m 3			dm 3			cm 3			mm 3			
1	0											
1	0	0										
1	0	0	0									
1	0	0	0	0								
1	0	0	0	0	0							
1	0	0	0	0	0	0						
1	0	0	0	0	0	0	0					
1	0	0	0	0	0	0	0	0				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Passo agora a apresentar duas lições: uma sôbre superfícies e outra sobre volumes, explicando nelas a maneira de achar a superfície e o volume, e dada a superfície e a largura achar o comprimento, ou dada a superfície e o comprimento, achar a largura. Alberto Pimentel, Filho, é da mesma opinião, e a minha lição sobre volumes é quasi uma cópia da Súmula Didáctica.

Segue a lição sôbre a superfície:

Um dos problemas que apresentei à 4.ª classe indicava a superfície e a largura de um campo e pedia para achar o comprimento. Aproveitei a ocasião para explicar novamente a razão porque, em tais casos, o problema se resolve por meio de uma divisão. Tracei no quadro a seguinte figura:

	1 m	2 m	3 m	4 m	5 m	6 m
1 m	$1^{m\,2}$	$2^{m\,2}$	$3^{m\,2}$	$4^{m\,2}$	$5^{m\,2}$	$6^{m\,2}$
2 m	$7^{m\,2}$	$8^{m\,2}$	$9^{m\,2}$	$10^{m\,2}$	$11^{m\,2}$	$12^{m\,2}$
3 m	$13^{m\,2}$	$14^{m\,2}$	$15^{m\,2}$	$16^{m\,2}$	$17^{m\,2}$	$18^{m\,2}$
4 m	$19^{m\,2}$	$20^{m\,2}$	$21^{m\,2}$	$22^{m\,2}$	$23^{m\,2}$	$24^{m\,2}$

Os meninos suponham que êste rectângulo representa um campo e que cada uma das divisões tem o comprimento de 1 metro. Esse campo teria 6 metros de comprimento e 4 metros de largura, o que perfaz 24 metros quadrados de superfície. Os meninos já sabem que êstes 24 metros quadrados são o produto total da multiplicação de 6 metros quadrados por 4 e não de 6 metros lineares por 4 metros lineares, porque então apareceriam 24 metros lineares, pois o produto total de uma multiplicação é sempre da mesma natureza do multiplicando. Medir o comprimento dum campo, duma sala ou duma rua, é dividir esse campo, essa sala ou essa rua, em tiras, tendo cada uma um comprimento igual ao comprimento da unidade que se tomou para medida. Medir a largura é dividir também em tiras, cada uma com largura igual ao comprimento da unidade de medida, e que forma com as outras tiras, unidades de superfície. Neste caso o campo tem 6 metros de comprimento. Cada metro de largura, ao encontrar os metros de comprimento, vai formando metros de superfície e tantos, quantos sejam os metros de comprimento. Por isso, mais uma vez digo: Para achar a superfície dum campo ou de qualquer coisa de forma rectangular, devemos considerar as unidades de comprimento unidades de superfície, e repeti-las tantas vezes quantas sejam as unidades de largura.

Agora vamos ao caso que nos interessa e êsse é saber a causa porque dada a su_ perfície e a largura ou a superfície e o comprimento, devemos dividir a superfície pela largura ou pelo comprimento, para encontrar respectivamente o comprimento ou a largura. Olhando para a figura desenhada no quadro e que para nós representa um campo, vemos que a superfície dêle é de 24 metros quadrados. Se quisermos saber a sua largura, caso conheçamos a sua superfície e o seu comprimento, teremos de dividir. Porque? Vamos ver. O campo tem de superfície 24 metros quadrados e tem de comprimento 6 metros. Mas agora pergunto eu: Êste seis metros, neste caso ou noutro idêntico, deverão ser considerados 6 metros lineares ou 6 metros quadrados? Para mim devem ser considerados quadrados e não lineares, visto que, cada metro de largura forma com os metros de comprimento uma tira, que tem tantos metros quadrados de superfície quantos forem os metros de comprimento. Logo, tantos metros de comprimento, tantos metros de superfície. Ora se cada metro de largura forma com os metros de comprimento uma tira com tantos metros quadrados quantos forem os metros de comprimento, quantas tiras se formam iguais? Tantas quantas forem os metros de largura. Logo, uma tira destas há-de poder ser tirada da superfície total, tantas vezes quantas as unidades de largura que essa superfície tenha. Eis a razão porque se divide e porque ao comprimento ou à largura se deve dar a designação de superfície. E assim temos: $24^{m\,2} : 6^{m\,2} = 4^{m}$. Igual operação se faz quando conhecemos a superfície e a largura e desejamos encontrar o comprimento.

Assim, neste caso, sabemos que a largura é de 4 metros. Ora cada metro de largura, forma com o primeiro metro de comprimento, uma tira que tem tantos metros quadrados quantos os metros de largura. Portanto, neste caso ou noutro idênticos, as unidades de largura representam unidades de super_ fície, que poderão ser tiradas da superfície total, tantas vezes quantas as unidades de comprimento dessa superfície. Fazendo a respectiva divisão, temos: $24^{m\,2} : 4^{m\,2} = 6^{m}$. Para melhor compreenderem, vou exemplificar por meio de figuras. Servindo-nos da figura apresentada como exemplo, e caso conheçamos a sua superfície e o seu comprimento e queiramos saber qual é a sua largura, temos:

$1^{m\,2}$	$2^{m\,2}$	$3^{m\,2}$	$4^{m\,2}$	$5^{m\,2}$	$6^{m\,2}$	I m de largura

$7^{m\,2}$	$8^{m\,2}$	$9^{m\,2}$	$10^{m\,2}$	$11^{m\,2}$	$12^{m\,2}$	2 m de largura

$13^{m\,2}$	$14^{m\,2}$	$15^{m\,2}$	$16^{m\,2}$	$17^{m\,2}$	$18^{m\,2}$	3 m de largura

$19^{m\,2}$	$20^{m\,2}$	$21^{m\,2}$	$22^{m\,2}$	$23^{m\,2}$	$24^{m\,2}$	4 m de largura

Dada a superfície e a largura, querendo achar o comprimento, temos:

1 ^{m2}	5 ^{m2}	9 ^{m2}	13 ^{m2}	17 ^{m2}	21 ^{m2}
2 ^{m2}	6 ^{m2}	10 ^{m2}	14 ^{m2}	18 ^{m2}	22 ^{m2}
3 ^{m2}	7 ^{m2}	11 ^{m2}	15 ^{m2}	19 ^{m2}	23 ^{m2}
4 ^{m2}	8 ^{m2}	12 ^{m2}	16 ^{m2}	20 ^{m2}	24 ^{m2}
1 m de comp	2 m de comp	3 m de comp	4 m de comp	5 m de comp	6 m de comp

Segue agora a lição sôbre volumes:

Em sistema-métrico insisti novamente sôbre o modo de achar a altura sendo dado o volume e a superfície, ou achar esta sendo dado o volume e a altura. Expliquei assim: Para achar a superfície sendo dado o volume e a altura, divide-se o volume pela altura, mas a altura deve ser considerada como volume bem como a superfície, quando é dada esta e o volume e queremos achar a altura. Para achar por exemplo o volume desta sala, medimos o comprimento e desta maneira dividimos a sala em tiras tendo cada uma um metro de comprimento. Depois medimos a largura e cada metro da largura ao encontrar cada metro de comprimento, forma com êste um metro quadrado de superfície. Desta maneira a sala fica dividida em tantas tiras quantos os metros de largura e cada tira com tantos metros quadrados quantos os metros de comprimento que a sala tenha. Em seguida medi_ mos a altura, e cada metro de altura forma com cada metro quadrado da sala, um metro cúbico. Portanto o primeiro metro de altura forma uma camada de tantos metros cúbicos quantos eram os metros quadrados de superfície da sala, camada que tem tantas filas quantas os metros de largura, e cada fila tem tantos metros cúbicos quantos os metros de comprimento. O segundo metro de altura forma outra camada igual àquela e assente sôbre ela, o terceiro idem e assim até ao último metro de altura. Vamos medir esta sala:

$$c = 7^{m}; \;\; l = 5^{m}; \;\; a = 5^{m}$$

Superfície: $7^{m\,2} \times 5 = 35^{m\,2}$. Volume $35^{m\,3} \times 5 = 175^{m\,3}$

Ou então, querendo achar directamente o volume, deve ser: $7^{m\,3} \times 5 \times 5 = 175^{m\,3}$

Tendo esta sala $175^{m\,3}$ de volume e $35^{m\,2}$ de superfície, quantos metros tem de altura? $35^{m\,2}$ neste caso, devem ser considerados quadrados ou cúbicos? Devem ser considerados cúbicos, porque ainda agora acabei de provar que êles representam o número de metros cúbicos de cada camada formada por cada metro de altura. E porque assim é, os metros cúbicos de cada camada poderão ser tirados dos metros cúbicos de tôda a sala, tantas vezes quantas sejam os metros de altura. Daí a razão porque devemos dividir, porque dividir é tirar um número doutro tantas vezes quantas se possa, e também a razão porque devemos considerar unidades de volume as unidades de superfície.

Por isso devemos indicar assim:

$$175^{m3} : 35^{m3} = 5$$

Se for dado o volume e a altura, querendo achar a superfície, devemos dar à altura a designação de volume, porque a altura representa, neste caso, o número de metros cúbicos que é preciso colocar uns sôbre os outros, para atingir o tecto da sala. Portanto, dentro da sala há-de haver tantas pilhas (de tantos metros cúbicos cada uma quantos os metros de altura da sala) quantos forem os metros quadrados de superfície da sala. Logo, tantas vezes os metros cúbicos de cada pilha possam ser tirados dos metros cúbicos da sala, tantos são os metros quadrados da superfície. E assim temos:

$$175^{m\,3} : 5^{m\,3} = 35^{m\,2}$$

Dou por terminada a minha conferência por dois motivos: Primeiro, porque me sinto envergonhado por ter apresentado um trabalho cheio de imperfeições e talvez nulo; segundo, porque o que está dito é demais para uma conferência.

De tudo quanto escrevi e da prática dos meus anos de serviço, concluo que o estudo da aritmética deve buscar-se na concretização bem ordenada, porque se o não for, a criança tornar-se-há preguiçosa e não será possível levá-la à abstracção, tão necessária nesta disciplina.

Compreendido o caso explicado, deve ser feita a sua imediata aplicação por exemplos que a vida prática imporá mais tarde ao aluno, para deste modo o conduzir ao interêsse pela lição e à preparação consciente e segura para vencer a vida.

Nada de grandes somas, subtracções, multiplicações e divisões sem que as crianças saibam, mas muito bem, o que é somar, subtrair, multiplicar e dividir, bem como quando deve ser empregada qualquer delas, porque proceder doutra maneira, é seguir caminho errado, e conduzir a criança à inconsciência absoluta das suas acções.

O porquê que deve seguir quasi tôdas as respostas dadas, nenhum valor tem, se a criança não está suficientemente preparada para que êsse porquê lhe interesse de maneira tal, que sinta alegria ao ouvi-lo pronunciar pelos lábios do mestre e, melhor ainda, que ela própria o procure também.

Na aritmética só deve ser exigida a abstracção, quando a concretização tenha conduzido a criança à generalização.

Os problemas devem ser preparados pelo professor e adequados ao assunto da lição dada, e ligarem os acontecimentos adquiridos ontem, com os de hoje.

Profundar, tanto quanto possível, todos os assuntos cuja utilidade prática seja reconhecida, e fugir de tudo o que não tenha finalidade para a futura vida do aluno.

Desprezar as definições demasiadamente livrescas e tidas como dogmas, e abraçar as que a criança der dizendo o mesmo, mas à vontade.

Preparação das lições

Assim como nenhum viajante deve visitar um país sem primeiro se ter preparado estudando os costumes dos habitantes dêsse país, assim nenhum professor deve entrar na sala de aula sem preparar as suas lições. Uma lição nunca se conhece bem demais para a explicar a crianças. É êste o assunto que merece maior atenção da nossa parte e mais justo reparo. Mas – poderá dizer alguém – eu sei bem tôdas as matérias a ensinar na escola primária e por isso não preciso de estudar novamente para as ensinar. Concordo em que saiba muito bem mesmo tôdas as matérias, em que elas estejam suficientemente sabidas e compreendidas para serem explicadas a si mesmo. ¿ Mas para as explicar a crianças o conhecimento delas já atingiu a meta da perfeição? ¿ ” Mas não será o aperfeiçoamento incessante o caracter de tudo quanto vive”? – como pergunta Ferrière. É de–certo. Portanto devemos aspirar sempre a uma perfeição maior, sem nunca termos a petulância de querer atingir a suprema. Além disso, ¿ os alunos da nossa escola têm todos a mesma força de vontade, o mesmo grau de atenção, de imaginação? Pertencem todos ao mesmo tipo sensorial? Dizer que sim seria uma loucura. Uma lição pode estar portanto bem preparada para um aluno e já não estar para outro. Além disso, as imposições do ensino exigidas pela psicologia pedem-nos que baixemos aos alunos e que não obriguemos êstes a subir até nós. É preciso concordar com Ferrière quando diz: “ A criança prefere pôr-se em acção a ver, e ver a ouvir. É antes de tudo activa e utilitária, o que é normal”. Daí a razão porque devemos preparar as nossas lições de ma_ neira a interessar espontâneamente a actividade da criança. Uma lição não deve ser um amontoado de regras e preceitos que a criança deve aprender para em devida altura dizer inconsciente e automàticamente. Não, porque -- como diz J. J. Rousseau – “ o profundamento do ensino não deve consistir em dar aos alunos pensamentos já feitos, mas sim em ensiná-los a pensar”. Portanto as nossas lições podem estar muito bem sabidas para a criança as ficar sabendo mediante certas regras, mas mal preparadas se elas não vão dizer à criança o como e o porquê dessas regras. Presentemente, admitir o ensino na primária sem a concretização, é admitir o impossível. Mas também devemos lembrar que a concretização tem limites e que a demasia leva a criança à preguiça do esforço intelectual. Por isso, uma lição só estará bem sabida, bem preparada enfim para crianças, quando o seu grau de concretização atinja o necessário e não o excesso para a compreensão, pois daí em diante tem de ser a abstracção, e dentro das bases da limitação, já se entende, que deve levar a criança à generalização.

“ Tôda a ciência – diz Ferrière – procede com efeito por observação, hipótese, verificação e lei”. E porque assim é, só teremos as nossas lições bem preparadas, quando estejam sabidas de maneira a conduzirem o aluno activa e espontâneamente à observação, suposição, verificação e conclusão que, para mim, deve ser apresentada, não pelos termos livrescos, mas sim livremente pela criança, porque, lá diz De La Luzerne: Sans liberté, il n’y a point de moralité. E, em abono da minha afirmação, vejamos o que diz Herbert Spencer: “ Entre um espírito cheio de definições, de regras, e um cheio de princípios existe uma diferença igual à que há entre um amontoado confuso de materiais, e os mesmos materiais organizados num todo com tôdas as suas partes estritamente unidas. De todos êstes tipos de educação, êste último tem não só a vantagem de que as partes que o constituem se retem mais facilmente, mas a vantagem ainda muito maior de formar um agente eficaz para o estudo, para a independência das ideias, para a descoberta – fins estes que o primeiro não pode obter. Não se suponha que isto é apenas um exemplo, é a verdade literal. A união dos factos com as generalizações constitue a organização da ciência, quer considerada nos seus fenómenos objectivos, quer nos seus fenómenos subjectivos; e a virtude mental pode ser medida pela amplitude a que é levada esta organização". Spencer tem razão. A coordenação deve ser feita pela observação; e a disposição, o alinho das ideias filhas da observação devem ser feitos respeitando a ciência, a verdade que se quer alcançar portanto, mas não por meio de regras impostas, mas pelas que o nosso espírito nos ditar depois de uma observação séria e duma conclusão rigorosa, mas livre. Simpatizo tanto com as crianças que definam escravamente perante a verdade mas com tôda a liberdade perante a regra! Para conseguir esta perfeição na escola, necessitamos de preparar bem as nossas lições para que nada nos esqueça do que devemos explicar, e para que a explicação apresentada tenha o condão de levar a criança a procurar o livro com o interêsse de quem deseja verificar e nunca com a preocupação de nele aprender.

Não esqueçamos também que a base da compreensão está no interêsse que as nossas lições consigam despertar no espírito da criança. É preciso portanto que umas as vejam, outras as ouçam, e todas as sintam.

Cadernos diários e sua vantagem

O caderno é para nós uma cópia fiel da nossa maneira de ser ensinando na escola e um amigo que nos está dizendo se procedemos bem ou mal e que por isso nos diz assim: Olha, nesta lição, ainda não alcançaste uma perfeição sofrível. Vai ver novamente o que os livros dizem sobre o assunto, pensa sèriamente no caso, procura outra maneira de o explicar que assim, bem vês, dá pouco ou quasi nada, para ser compreendido por crianças. Lembra-te de que és professor e que, como tal, deves ser digno da confiança que em ti depositam as crianças da tua escola. É assim que nos fala o nosso caderno diário quando o folheamos e vemos as lições escritas já explicadas às crianças. Nele encontramos, com exactidão, tôdas as nossas perfeições e imperfeições. O professor que organize o seu caderno diário, entrou, sem dúvida, no caminho do aperfeiçoamento, porque obedece a um impulso de amor pela escola e a um desejo veemente de aperfeiçoar o que já lhe parece perfeito e corrigir as imperfeições até as aniquilar na medida do possível.

Nele encontramos as lições que despertaram interesse nas crianças e as que as aborreceram um pouco e lhes levantaram dificuldades na compreensão. Ao lermos estas, somos levados a estudá-las melhor, a procurar a causa que justifica o aborrecimento causado à criança, e a preparar nova lição com mais cuidado, com mais conhecimento de causa, com mais amor enfim.

Ainda que preparemos muito bem as nossas lições, se as não escrevermos, não poderemos saber ao certo se já alcançamos a perfeição desejada, ou pelo menos necessária, porque as não temos sempre diante dos nossos olhos a indicar-nos o que têm de bom para o seguir e para o aperfeiçoar sendo possível, e o que têm de mau para o corrigir.

Fim da Conferência de Mirandela de Maio de 1935

***