

# MODELAÇÃO MATEMÁTICA DE EPIDEMIAS

Ana Catarina Andrade, Alcina Nunes, Carlos Balsa  
ana\_andrade14@hotmail.com, alcina@ipb.pt, balsa@ipb.pt

## Introdução

Faz-se a recolha dos principais modelos matemáticos utilizados para simular a evolução de epidemias provocadas por doenças contagiosas. Os modelos matemáticos epidemiológicos são criados a partir de observações do fenómeno epidémico e de hipóteses matemáticas relativas à dinâmica da transmissão de infeções. Os modelos determinísticos utilizam equações diferenciais ordinárias para modelar o (de)crescimento das populações envolvidas em função dos seus valores iniciais. Este modelo tem origem no modelo predador-presa de Lotka-Volterra. Este modelo simula a evolução do número de presas  $x$  e do número de predadores  $y$  em função da interação entre as duas populações e é descrito pelas equações

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy \end{aligned} \quad (1)$$

em que  $a$  é taxa de crescimento da população de presas,  $c$  é a taxa de decrescimento da população de predadores,  $b$  é a taxa de contactos entre as duas populações que levam à morte da presa e  $d$  é a taxa de crescimento da população de predadores em consequência da interação predador-presa. Este modelo pode ser convertido num modelo epidemiológico considerando que  $x$  representa o número de pessoas suscetíveis de serem infetadas e  $y$  o número de pessoas infecciosas. As taxas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  variam em função das características do vírus responsável pela doença infecciosa.

## Metodologia

Faz-se a inventariação dos principais modelos determinísticos que servem de suporte aos modelos mais complexos utilizados na epidemiologia. Analisam-se os principais parâmetros envolvidos e faz-se a simulação computacional dos modelos através do *software* Octave. Os sistemas de equações diferenciais ordinárias são resolvidos numericamente através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

## Conclusões

As epidemias são um problema de saúde pública afetando as populações com grandes impactos económicos e sociais. Os modelos epidemiológicos permitem prever o número de pessoas afetadas em função das características da população, da doença e das medidas de prevenção. Neste contexto, as doenças infecciosas caracterizam-se sobretudo pela taxa de contágio resultante de contactos entre suscetíveis e infecciosos e pelo período de contágio. Medidas de prevenção baseadas na higiene permitem diminuir a taxa de contágio entre infecciosos e suscetíveis. Enquanto que a vacinação remove as pessoas infetadas do estado de suscetível sem que estas passem pelo estado infeccioso.

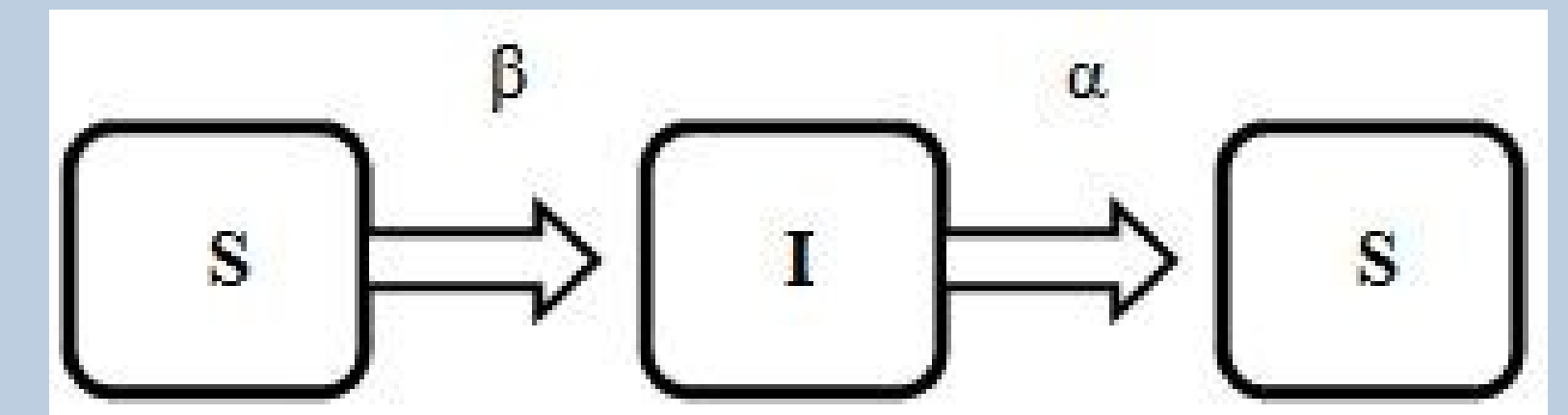
## Referencias

[1] Herbert W. Hethcote. The mathematics of infectious diseases. *SIAM Rev.*, 42(4):599–653, December 2000.

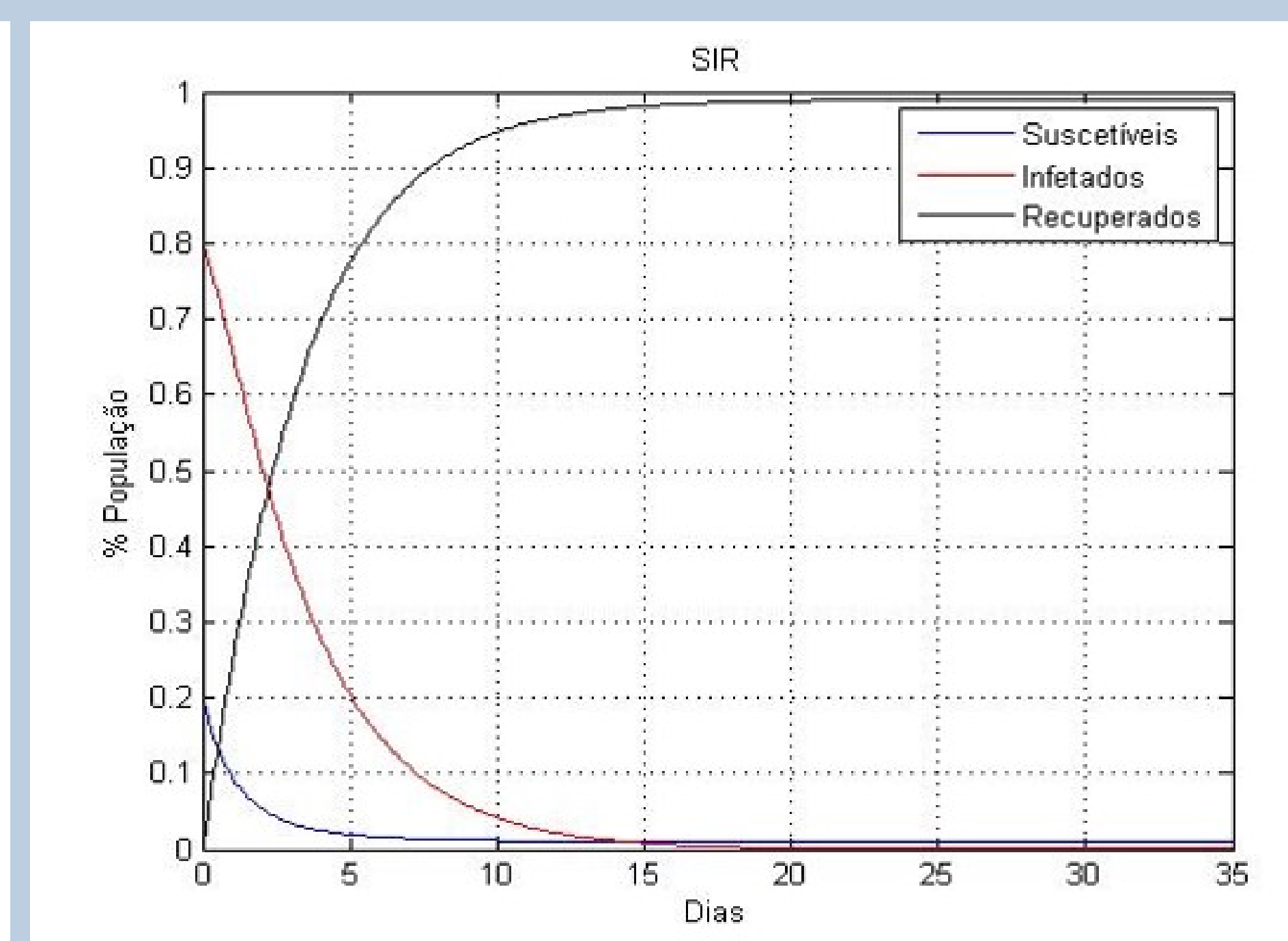
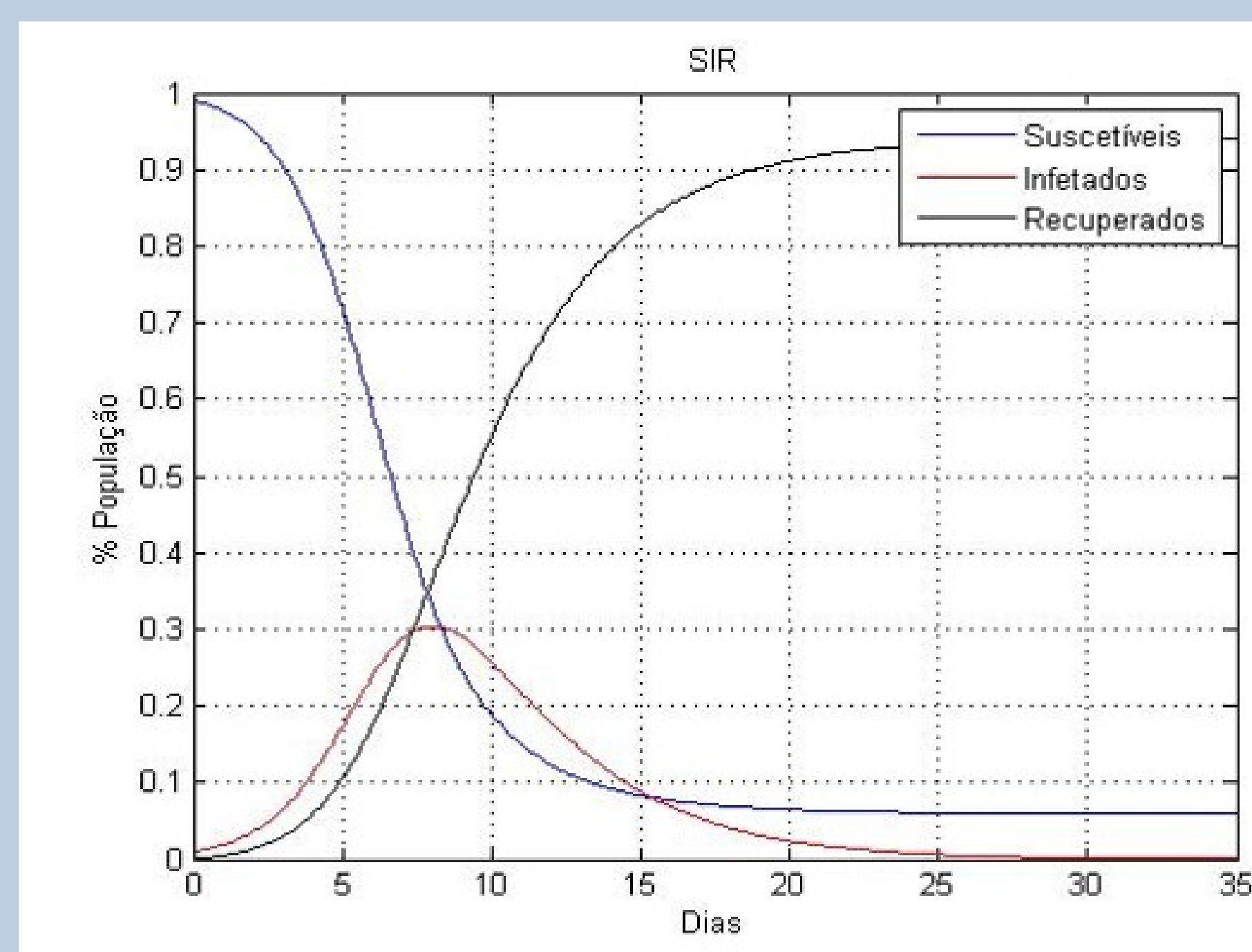
## Modelo Suscetível-Infecioso-Removido (SIR)

Modelos compartimentais consideram a divisão da população em compartimentos com taxas de passagem entre eles por unidade de tempo. No modelo SIR existem 3 compartimentos S, I e R. A modelação matemática deriva diretamente da equação (1) através da introdução da equação relativa aos removidos (pessoas que já passaram pelo estado infeccioso) e da remoção da taxa de crescimento dos suscetíveis.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \mu I \end{aligned} \quad (2)$$



**Figure 1:** Modelo compartimental SIR:  $\beta$  representa a taxa de contactos adequados à transmissão da doença e  $\mu$  taxa de indivíduos que deixa de poder transmitir a doença, por unidade de tempo.

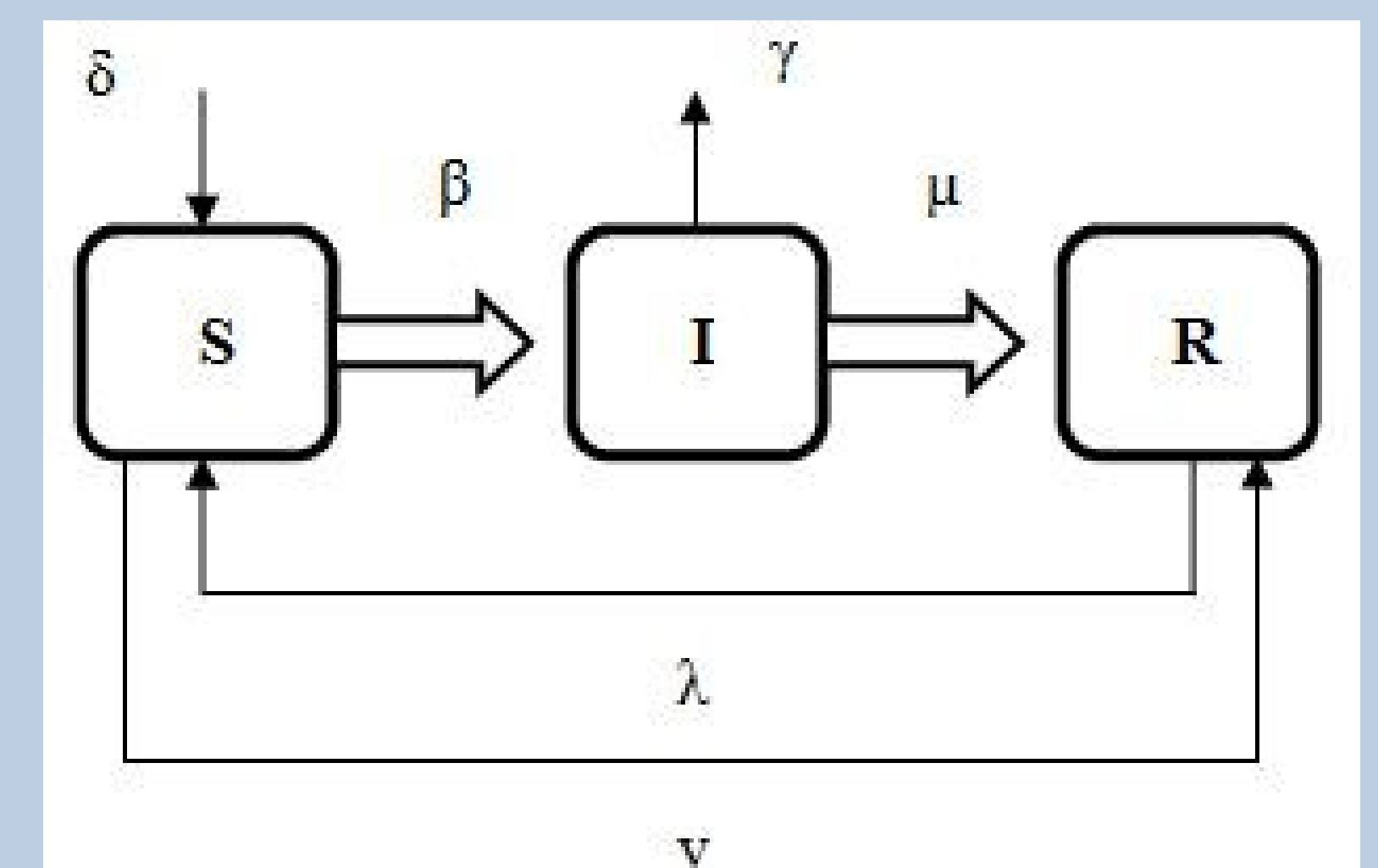


**Figure 2:** Simulação do modelo SIR com número de contactos adequados  $\sigma = 3$ , período de contágio  $1/\mu = 3$ , 1% (esquerda) e 20% (direita) de infetados inicialmente ( $I_0$ ).

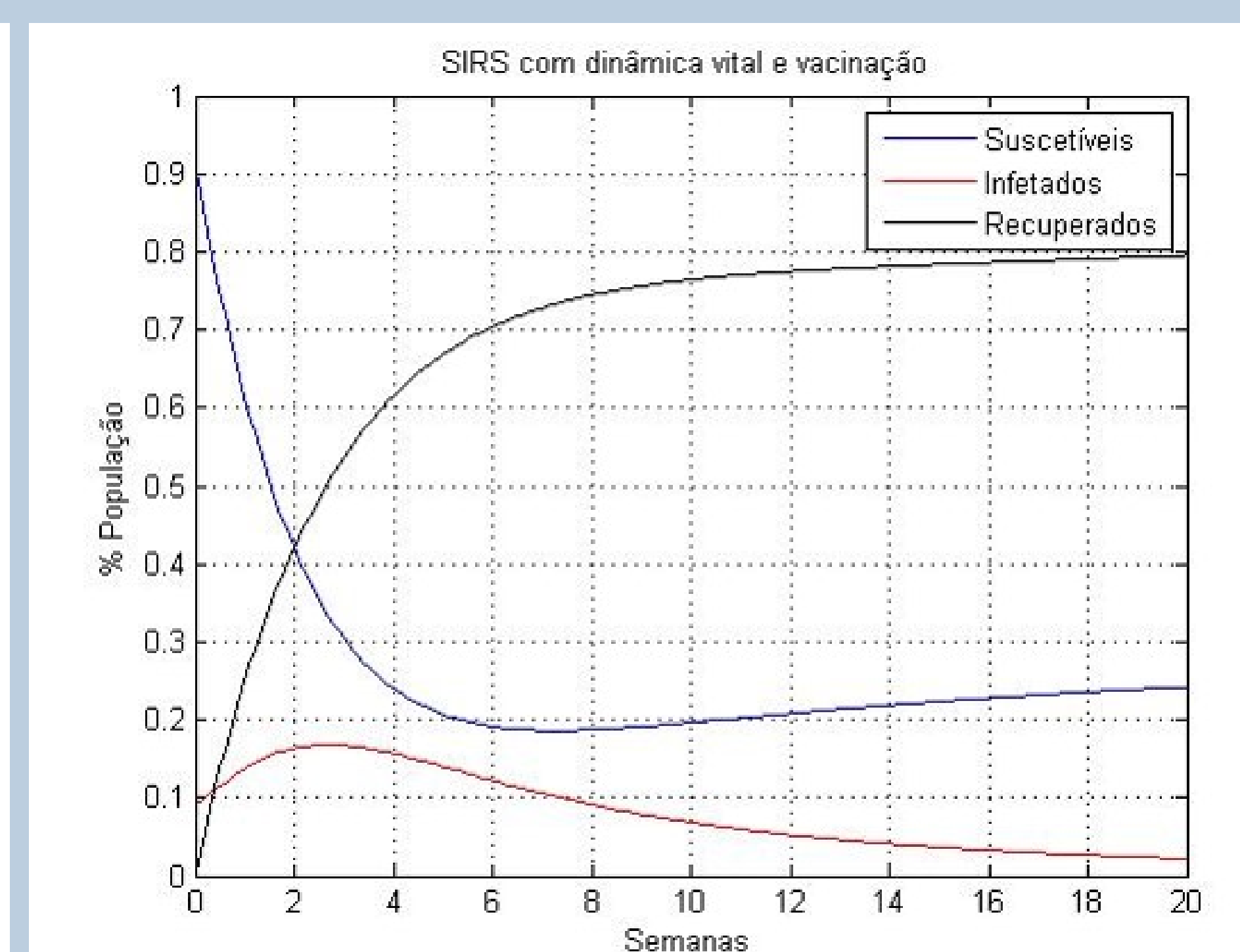
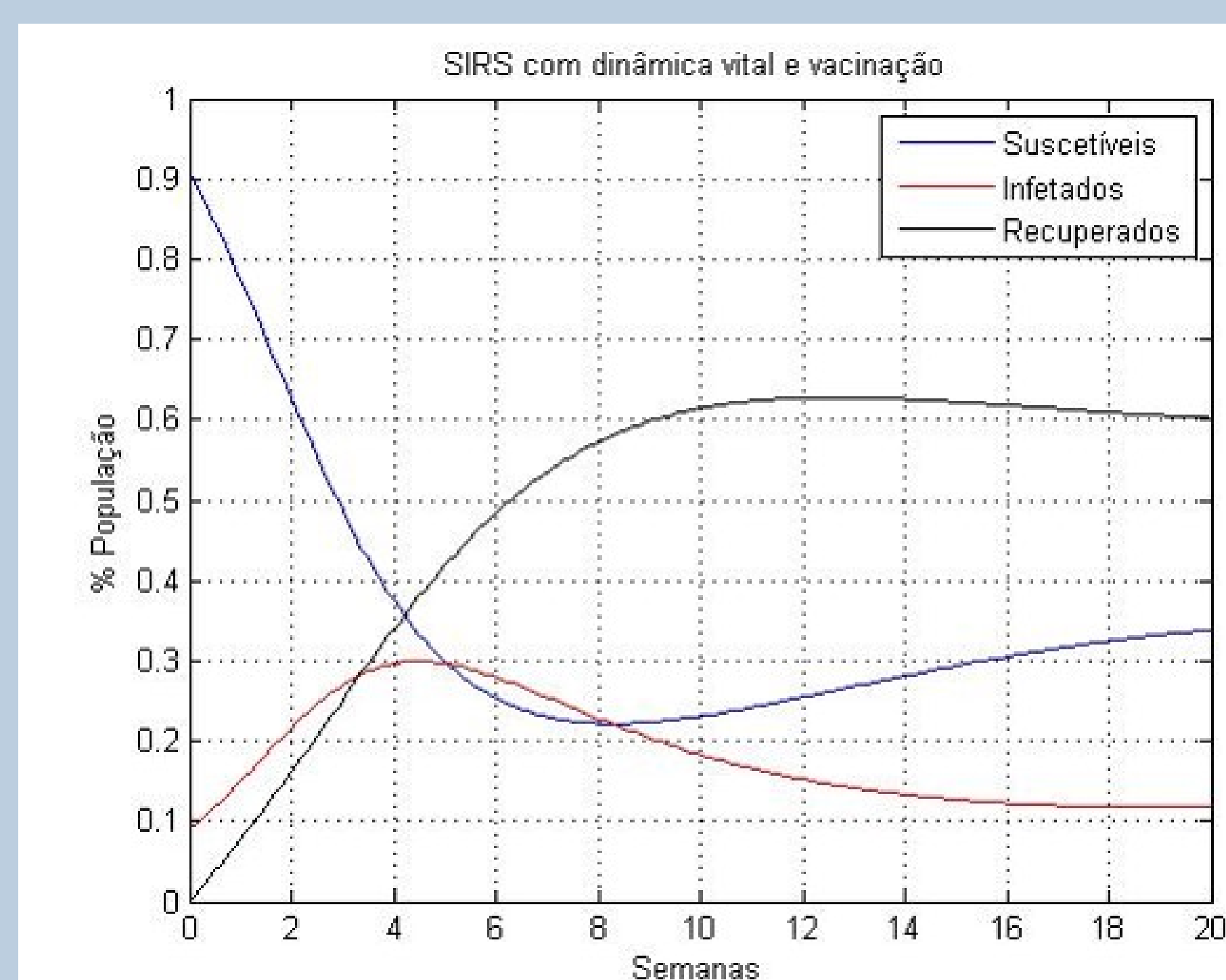
## Modelo SIRS com Dinâmica Vital e Vacinação.

Os modelos tornam-se mais complexos à medida que se aproxima mais da realidade. A inserção da dinâmica vital permite ter em conta a taxa de nascimento  $\delta$  e a taxa de mortalidade  $\gamma$ . O modelo SIRS [1] tem em conta a possibilidade das pessoas poderem voltar a contrair a mesma doença com uma taxa  $\lambda$ . A introdução da vacinação dos suscetíveis com uma taxa  $v$  origina o modelo

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI + \lambda R + \delta(S + I + R) - vS \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \mu) I \\ \frac{dR}{dt} &= \mu I + \gamma I - \lambda R + vS \end{aligned} \quad (3)$$



**Figure 3:** Modelo SIRS com dinâmica vital e vacinação:  $\delta$  representa a taxa de natalidade,  $\gamma$  a taxa de mortalidade,  $\lambda$  a taxa de perda da imunidade e  $v$  a taxa de vacinação.



**Figure 4:** Modelo SIRS com  $\sigma = 3$ ,  $1/\mu = 3$ ,  $\lambda = 0,098$ ,  $\delta = 0,003$ ,  $I_0 = 0,1$  e  $v = 0,05$  (esquerda) e  $v = 0,3$  (direita).