

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Departamento de Engenharia Electrotécnica e de Computadores

**Aplicação de Técnicas de Modelização
Paramétrica e Identificação ao Motor
de Indução Trifásico**

Américo Vicente Teixeira Leite

Dissertação de Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de
Computadores, ramo de Automação Industrial, apresentada
à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Setembro de 1996

Dissertação de Mestrado em Engenharia Electrotécnica e de
Computadores, ramo de Automação Industrial

Orientador: Diamantino Rui da Silva Freitas

Doutor em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Professor Auxiliar do Departamento de Engenharia Electrotécnica e
de Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do
Porto

Co-orientador: Rui Manuel Esteves Araújo

Mestre em Engenharia Electrotécnica e de Computadores
Assistente do Departamento de Engenharia Electrotécnica e de
Computadores da Faculdade de Engenharia da Universidade do
Porto

Este Trabalho é dedicado

aos meus pais,

à Beatriz

e aos meus irmãos.

Agradecimentos

Na realização da presente dissertação, tive a colaboração e o apoio, humano e material, de algumas pessoas e instituições, através de condições de trabalho, motivação e criação de estímulos, sem os quais este trabalho não teria sido possível. Assim, gostaria de manifestar o meu agradecimento:

Ao Professor Diamantino Freitas, meu orientador, a quem devo a contribuição e a exigência no rigor científico da presente dissertação.

Ao Engenheiro Rui Araújo, meu co-orientador, a quem devo a grande colaboração e empenhamento, na realização deste trabalho, através do seu esforço na criação das melhores condições de trabalho, das questões levantadas e constantes conversas que tivemos.

Ao Professor Vaz Guedes, pela disponibilidade manifestada e pelas breves, mas importantes, opiniões.

Ao Professor Augusto de Sousa, pela amabilidade e simpatia na ajuda importante que recebi.

Ao Centro de Estudos de Física Acústica e Telecomunicações, pelas excelentes condições de trabalho, físicas e humanas.

À Escola Superior de Tecnologia e Gestão do Instituto Politécnico de Bragança e, em particular, ao Professor Adjunto Alcínio Miguel e à Professora Adjunta Luísa Miranda, pelos meios concedidos e elaboração de um horário lectivo favorável.

Ao Engenheiro Avelino Marques e ao Engenheiro Jorge Reis, pelo bom ambiente de trabalho e amizade.

À Beatriz, pelo seu apoio incondicional, amor e carinho, imprescindíveis nos momentos de menor estímulo e motivação.

Aos meus pais, pelo apoio que me deram desde sempre e o reconhecimento silencioso do meu esforço.

Resumo

Este trabalho apresenta a aplicação de técnicas de modelização paramétrica e identificação ao motor de indução trifásico, para a estimação dos seus parâmetros. Estas técnicas são desenvolvidas através da construção de modelos, baseados na descrição matemática do motor, simplificada utilizando a transformada de Park e o método dos fasores especiais com posterior linearização.

As equações diferenciais que resultam da aplicação da transformada de Park são convertidas em modelos lineares, relativamente aos seus parâmetros. Da aplicação do método dos fasores espaciais, resulta uma função de transferência racional de coeficientes complexos. A partir dos valores estimados destes parâmetros e coeficientes, são determinados, em ambos os casos, os parâmetros físicos do motor.

Apresentam-se as várias técnicas estudadas e desenvolvidas, bem como os respectivos testes e são apresentados os resultados obtidos, através da utilização do método dos mínimos quadrados recursivo. A estimação dos parâmetros dos diferentes modelos é realizada utilizando os sinais da velocidade de rotação, das tensões e correntes das equações de Park no referencial do estator, com o motor a funcionar no seu ambiente normal de trabalho.

Os métodos de identificação paramétrica estudados, ainda que de utilidade genérica, podem ser incorporados nos sistemas de controlo de modo a ajustar os seus parâmetros automaticamente para diferentes motores e pontos de funcionamento em tempo real. Os algoritmos, de natureza recursiva no tempo, possibilitando a actualização das estimativas dos parâmetros variantes no tempo, são condição base para a obtenção desta funcionalidade.

Abstract

This work presents an application of parametric modelling and identification techniques to the induction motor for the estimation of its parameters. These techniques are developed with a construction of models based on the mathematical description of the induction motor, simplified with the Park's and space vector transformations with posterior linearization.

The application of Park's transformation results in differential equations that are transformed in linear models with respect to its parameters. The application of the space vector, results in a rational transfer function with complex coefficients. In either cases, the physics parameters of the induction motor are determined from those estimated parameters and coefficients.

The several studied and developed techniques, its tests and results using a recursive least squares method, are presented. The parameters estimation of the different models is realised using the velocity, voltages and currents signals, in the Park's model, expressed in stator coordinates.

The studied parametric identification methods, even though of a general utility, can be incorporated in drives that can adjust controller parameters automatically for different motors and operating points in real time. In their recursive form, the algorithms that can update parameters, are potentially useful for adaptation to time varying parameters estimates.

Résumé

Ce travail présente l'application de techniques de modélisation paramétrique et d'identification au moteur d'induction triphasé, pour l'estimation de ses paramètres. Ces techniques sont développées à travers de la construction des modèles qui sont basés dans la description mathématique du moteur d'induction, simplifiée en utilisant la transformation de Park et la forme complexe et postérieur linéarisation

Les équations différentielles qui résultent de l'application de la transformation de Park sont transformées en modèles linéaires par rapport à ses paramètres. De l'application de la forme complexe résulte une fonction de transfert rationnel de coefficients complexes. Avec les valeurs estimées de ces paramètres et coefficients, les paramètres physiques du moteur sont déterminées, en tous les deux cas.

Les différents techniques étudiées et développées, les tests et les résultats obtenus à travers de l'utilisation de la méthode des moindres carrés récursifs sont présentées. L'estimation des paramètres des différents modèles est réalisée en utilisant les signaux de la vitesse de rotation, des tensions et courants des équations de Park dans le repère lié au stator, avec le moteur en cours de fonctionnement.

Les méthodes d'identification paramétrique étudiés, même que d'utilisation générique, peuvent être incorporés dans les systèmes de commande de façon à ajuster ses paramètres automatiquement pour différents moteurs et points de fonctionnement en temps réel. Les algorithmes, de nature récursif dans le temps, sont condition base pour possibiler l'actualisation d'estimations des paramètres variables dans le temps.

Índice

Introdução geral.....	1
1. Modelização do motor de indução trifásico.....	5
1.1 Introdução	7
1.1.1 Esquema eléctrico do motor de indução trifásico	7
1.1.2 Equações fundamentais	8
1.2 Modelização através da Transformada de Park	9
1.2.1 Transformada do número de fases	9
1.2.2 Transformada eixos móveis/eixos fixos	10
1.2.3 Transformada de Park.....	11
1.2.4 Matrizes da transformada de Park	11
1.2.5 Aplicação da transformada de Park	12
1.2.6 Equações nos diferentes referenciais	13
1.2.6.1 Referencial fixo em relação ao estator.....	13
1.2.6.2 Referencial fixo em relação ao rotor.....	14
1.2.6.3 Referencial fixo em relação ao campo girante.....	14
1.2.7 Equação do binário electromagnético	15
1.2.8 Equação mecânica.....	15
1.3 Modelização através do Método dos Fasores Espaciais	16
1.3.1 Ilustração do método dos fasores espaciais	16
1.3.2 Escolha do referencial.....	18
1.4 Síntese da modelização.....	19
1.4.1 Método dos fasores espaciais.....	19
1.4.2 Transformada de Park.....	20
1.5 Sinais para a estimação	21
1.6 Conclusão	21
2. Modelos de sistemas e estruturas de modelos	23
2.1 Introdução	25

2.2	Descrição e classificação de modelos	25
2.3	Descrição de modelos lineares invariantes no tempo	27
2.3.1	Modelos com sinais determinísticos contínuos	27
2.3.1.1	Descrição do tipo entrada-saída.....	28
2.3.1.2	Descrição no espaço de estados	28
2.3.2	Modelos com sinais determinísticos amostrados.....	29
2.3.2.1	Descrição do tipo entrada-saída.....	29
2.3.2.2	Descrição no espaço de estados	29
2.3.3	Modelos com sinais estocásticos	29
2.4	Controlabilidade, observabilidade e identificabilidade	30
2.5	Estruturas de modelos de sistemas lineares invariantes no tempo.....	31
2.5.1	Representação polinomial das funções de transferência.....	32
2.5.1.1	Estrutura de modelos ARX.....	33
2.5.1.2	Estrutura de modelos ARMAX	34
2.5.1.3	Estrutura de modelos do tipo “Output Error”	35
2.5.1.4	Estrutura de modelos “Box-Jenkins”.....	36
2.5.1.5	Forma geral das estruturas de modelos.....	37
2.5.1.6	Identificabilidade das estruturas de modelos.....	37
2.5.2	Representação em espaço de estados.....	38
2.6	Descrição de modelos lineares variantes no tempo	39
2.7	Descrição de modelos não lineares	39
2.7.1	Linearidade nos parâmetros	40
2.7.2	A importância do conhecimento à priori	40
2.7.3	Linearização.....	41
2.8	Conclusão	42
3.	Estudo dos métodos de identificação paramétrica.....	45
3.1	Introdução	47
3.2	O conceito de identificação.....	47
3.3	Análise das características do sinal de entrada	49
3.4	Critérios para a selecção do melhor modelo	50
3.4.1	Critério de minimização dos erros de predição	51
3.4.2	Condições para a existência de um mínimo do critério de erro.....	53
3.4.3	Critério de minimização dos erros de predição, variante no tempo.....	55

3.4.4 Método dos mínimos quadrados.....	56
3.4.5 Critério de máxima verosimilhança.....	57
3.4.6 Critério de minimização dos erros de predição correlacionados com os dados anteriores	59
3.5 Métodos numéricos de minimização do critério de erro.....	60
3.6 Classificação dos métodos paramétricos	64
3.6.1 Métodos determinísticos e métodos estocásticos	64
3.6.2 Identificação em tempo real e em tempo diferido	65
3.7 Métodos recursivos de identificação paramétrica.....	67
3.7.1 Método dos mínimos quadrados recursivo	67
3.7.2 Método do Filtro de Kalman.....	70
3.7.3 Métodos recursivos de erro de predição	70
3.7.4 Regressões pseudo-lineares	73
3.7.5 Selecção das modificações de cada iteração.....	74
3.7.5.1 Escolha da direcção de convergência	74
3.7.5.2 Escolha do ganho e do factor de esquecimento	74
3.7.5.3 Método com inclusão de variações nos parâmetros do modelo.....	76
3.8 Conclusão	76
4. Técnicas de identificação paramétrica do motor de indução trifásico	79
4.1 Introdução	81
4.2 O estado actual da identificação dos parâmetros do motor de indução trifásico	81
4.3 Variação dos parâmetros.....	84
4.3.1 Variação das resistências	85
4.3.2 Variação das indutâncias	86
4.4 A escolha do referencial.....	86
4.5 Linearização do modelo do motor de indução, no referencial do estator	88
4.6 Identificação de todos os parâmetros	92
4.7 Identificação dos parâmetros, admitindo que a resistência do estator é conhecida.....	100
4.7.1 Identificação dos parâmetros com estimação de ϕ_{ds}	102
4.7.2 Identificação dos parâmetros com estimação de ϕ_{ds} e ϕ_{qs}	103

4.8 Modelo complexo do motor de indução trifásico	104
4.8.1 Função de transferência complexa num referencial geral.....	104
4.8.2 Função de transferência complexa no referencial do estator	106
4.8.3 Função de transferência para velocidade nula	107
4.8.4 Modelo de “caixa preta”	108
4.9 Conclusão	110
5. Estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico	113
5.1 Introdução	115
5.2 Simulação do motor no referencial do estator	115
5.3 Estimação simultânea de todos os parâmetros.....	120
5.3.1 Estimação do vector de parâmetro θ	120
5.3.1.1 Sinais obtidos com a simulação do motor A	123
5.3.1.2 Sinais obtidos com a simulação do motor B.....	129
5.3.2 Estimação do vector de parâmetros K	132
5.4 Estimação dos parâmetros com a resistência do estator conhecida	137
5.4.1 Estimação do vector de parâmetros X	137
5.4.2 Estimação do vector de parâmetros β e do fluxo ϕ_{ds}	141
5.4.3 Estimação do vector de parâmetros W e dos fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs}	146
5.5 Optimização da estimação simultânea de todos os parâmetros	147
5.6 Obtenção dos parâmetros do motor a partir da função de transferência.....	150
5.7 Conclusão	153
Conclusão geral.....	157
Bibliografia.....	163
Anexos	171

Lista de figuras

Figura 1.1: Representação dos enrolamentos do estator e do rotor do motor de indução trifásico.....	8
Figura 1.2: Transformada do número de fases.....	10
Figura 1.3: Transformada eixos móveis/eixos fixos.....	10
Figura 1.4: Ilustração do método dos fasores espaciais. (a) Sistema trifásico do estator e do rotor. (b) Sistema bifásico do estator e do rotor. (c) Fasores referidos ao estator e ao rotor. (d) Fasores referidos a um referencial geral g , único.	17
Figura 1.5: Ilustração da aplicação da transformada de Park.....	20
Figura 2.1: Descrição no espaço de estados.....	28
Figura 2.2: Representação básica entrada-saída, de um sistema.....	31
Figura 2.3: Estrutura de modelos ARX.	33
Figura 2.4: Estruturas de modelos de erro de equação.	35
Figura 2.5: Estrutura de modelos do tipo “Output Error”.....	36
Figura 2.6: Estrutura de modelos “Box-Jenkins”.	37
Figura 2.7: Sistema linear com não linearidade estática à entrada.	42
Figura 2.8: Linearização de um sistema não linear.....	42
Figura 3.1: Procedimentos da identificação de sistemas.	48
Figura 3.2: Algumas funções de $\ell(\cdot)$	52
Figura 3.3: Interpretação geométrica da função $J(\theta)$	53
Figura 3.4: Traçado das curvas de isocritério.	53
Figura 3.5: Mínimos locais e mínimo global.....	54
Figura 3.6: Métodos numéricos de convergência.	61
Figura 3.7: Ilustração dos métodos numéricos de convergência.	62
Figura 3.8: Estimação de parâmetros.....	65
Figura 3.9: Identificação em tempo real e em tempo diferido.	65
Figura 4.1: Componentes do modelo de estimação de todos os parâmetros.	98
Figura 4.2: Componentes do modelo de estimação dos parâmetros, com R_s conhecida.	99
Figura 5.1: Representação do modelo do motor.	116
Figura 5.2: Representação do modelo do motor com velocidade nula.	117
Figura 5.3: Sinais de tensão u_{ds} e u_{qs}	118
Figura 5.4: Sinais de corrente i_{ds} e i_{qs} , simulados.	118
Figura 5.5: Sinais de fluxo, ϕ_{dr} e ϕ_{qr} , simulados.	118

Figura 5.6: Velocidade mecânica simulada.....	119
Figura 5.7: Binário electromagnético simulado.....	119
Figura 5.8: Representação do ruído nos sinais de entrada e saída do sistema.....	119
Figura 5.9: Sinais de tensão do motor A, com ruído e filtrados.....	123
Figura 5.10: Corrente i_{ds} do motor A. Ampliação de i_{ds} com ruído e filtrada.....	124
Figura 5.11: Corrente i_{qs} do motor A, com ruído e filtrada.....	124
Figura 5.12: Velocidade do motor A, com ruído e filtrada.....	124
Figura 5.13: Evolução do parâmetro θ_1 do motor A, para diferentes valores iniciais.....	127
Figura 5.14: Evolução do parâmetro θ_2 do motor A, para diferentes valores iniciais.....	127
Figura 5.15: Evolução do parâmetro θ_3 , para diferentes valores iniciais.....	127
Figura 5.16: Evolução do parâmetro θ_4 do motor A, para diferentes valores iniciais.....	128
Figura 5.17: Evolução do parâmetro θ_5 do motor A, para diferentes valores iniciais.....	128
Figura 5.18: Análise da identificabilidade dos parâmetros θ , do motor A.....	129
Figura 5.19: Corrente i_{ds} do motor B. Ampliação de i_{ds} com ruído e filtrada.....	130
Figura 5.20: Ampliação de i_{qs} do motor B, com ruído e filtrada.....	130
Figura 5.21: Velocidade do motor B, com ruído e filtrada.....	130
Figura 5.22: Evolução do parâmetro K_1 do motor A.....	133
Figura 5.23: Evolução do parâmetro K_2 do motor A.....	134
Figura 5.24: Evolução do parâmetro K_3 do motor A.....	134
Figura 5.25: Evolução do parâmetro K_4 do motor A.....	134
Figura 5.26: Evolução do parâmetro K_5 do motor A.....	135
Figura 5.27: Análise da identificabilidade dos parâmetros K do motor A.....	135
Figura 5.28: Evolução do parâmetro X_1 do motor A.....	138
Figura 5.29: Evolução do parâmetro X_2 do motor A.....	138
Figura 5.30: Evolução do parâmetro X_3 do motor A.....	138
Figura 5.31: Análise da identificabilidade dos parâmetros X do motor A.....	139
Figura 5.32: Evolução do parâmetro β_1 do motor A.....	142
Figura 5.33: Evolução do parâmetro β_2 do motor A.....	143
Figura 5.34: Evolução do parâmetro β_3 do motor A.....	143
Figura 5.35: Análise da identificabilidade dos parâmetros β do motor A.....	143

Lista de tabelas

Tabela 4.1: Valores máximos dos termos S_i	98
Tabela 4.2: Valores máximos dos termos S_i , com R_s conhecida.	99
Tabela 5.1: Vector de parâmetros θ estimado, do motor A.	125
Tabela 5.2: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros θ estimados. ..	125
Tabela 5.3: Vector de parâmetros θ estimado, do motor A, com valores iniciais mais afastados.....	126
Tabela 5.4: Vector de parâmetros θ estimado, do motor A, com valores iniciais nulos.....	126
Tabela 5.5: Vector de parâmetros θ estimado do motor B.	131
Tabela 5.6: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros θ estimados....	131
Tabela 5.7: Vector de parâmetros K estimado, do motor A.	132
Tabela 5.8: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros K estimados...	133
Tabela 5.9: Vector de parâmetros K estimado, do motor B.....	136
Tabela 5.10: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros K estimados.	136
Tabela 5.11: Vector de parâmetros X estimado, do motor A.	137
Tabela 5.12: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros X estimados.	137
Tabela 5.13: Vector de parâmetros X do motor A, estimado com um erro de 5% no valor de R_s	139
Tabela 5.14: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros X, estimados com um erro de 5% no valor de R_s	140
Tabela 5.15: Vector de parâmetros X do motor A, estimado com um erro de 10% no valor de R_s	140
Tabela 5.16: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros X, estimados com um erro de 10% no valor de R_s	140
Tabela 5.17: Vector de parâmetros X estimado, do motor B.....	141
Tabela 5.18: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros X estimados.	141
Tabela 5.19: Vector de parâmetros β estimado, para o motor A.	142
Tabela 5.20: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros β estimados.	142
Tabela 5.21: Vector de parâmetros β do motor A, estimado com um erro de 5% no valor de R_s	144
Tabela 5.22: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros β , estimados com um erro de 5% no valor de R_s	144
Tabela 5.23: Vector de parâmetros β do motor A, estimado com um erro de 10% no valor de R_s	144

Tabela 5.24: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros β , estimados com um erro de 10% no valor de R_s	145
Tabela 5.25: Vector de parâmetros β estimado, do motor B.	145
Tabela 5.26: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros β estimados.	146
Tabela 5.27: Vector de parâmetros W estimado, para o motor A.....	146
Tabela 5.28: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros W estimados.	146
Tabela 5.29: Vector de parâmetros W estimado, para o motor B.....	146
Tabela 5.30: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros W estimados.	147
Tabela 5.31: Valores do parâmetro K_2 , do motor A, para as primeiras 3 iterações... ..	147
Tabela 5.32: Parâmetros estimados do motor A, K_1 , K_3 , K_4 e K_5 , ao fim de 3 iterações.	148
Tabela 5.33: Parâmetros físicos do motor A.....	148
Tabela 5.34: Valores do parâmetro K_2 , do motor B, para as primeiras 4 iterações... ..	149
Tabela 5.35: Parâmetros estimados do motor B, K_1 , K_3 , K_4 e K_5 , ao fim de 4 iterações.	149
Tabela 5.36: Parâmetros físicos do motor B.....	149
Tabela 5.37: Parâmetros θ , do motor A, obtidos a partir dos coeficientes da função de transferência estimada.	152

Lista de símbolos

$u_{a,b,c/s,r}$	Tensões das fases a, b ou c do estator (s) ou rotor (r), no sistema trifásico
$i_{a,b,c/s,r}$	Correntes das fases a, b ou c do estator (s) ou rotor (r), no sistema trifásico
$u_{\alpha,\beta/s,r}$	Tensões das fases α ou β do estator ou rotor, no sistema difásico
$i_{\alpha,\beta/s,r}$	Correntes das fases α ou β do estator ou rotor, no sistema difásico
$u_{d,q/s,r}$	Tensões das fases d ou q do estator ou rotor, no sistema de Park, dp
$i_{d,q/s,r}$	Correntes das fases d ou q do estator ou rotor, no sistema de Park, dp
\underline{u}_s	Fasor espacial da tensão no estator
\underline{i}_s	Fasor espacial da corrente no estator
\underline{i}_r	Fasor espacial da corrente no rotor
$\phi_{a,b,c/s,r}$	Fluxo que atravessa as fases a, b ou c do estator ou rotor
$\phi_{d,q/s,r}$	Fluxo que atravessa as fases d ou q do estator ou rotor
θ_s	Ângulo eléctrico entre uma fase do estator e o referencial dq
θ_r	Ângulo eléctrico entre uma fase do rotor e o referencial dq
θ	Ângulo de rotação eléctrico, entre uma fase do estator e a correspondente fase do rotor (capítulo 1) ou vector de parâmetros a estimar (capítulo 2)
θ_g	Ângulo eléctrico entre uma fase do estator e o referencial geral g
ω_s	Frequência eléctrica das grandezas do estator
ω_r	Frequência eléctrica das grandezas do rotor
ω	Velocidade de rotação eléctrica do rotor
ω_g	Velocidade de rotação eléctrica do referencial geral g
p	Número de pares de pólos
ω_m	Velocidade mecânica = $\frac{\omega}{p}$
R_s	Resistência por fase do estator
R_r	Resistência por fase do rotor
L_s	Coefficiente de auto-indução por fase do estator
L_r	Coefficiente de auto-indução por fase do rotor
M	Coefficiente de indução mútua entre uma fase do estator e uma fase do rotor
τ_s	Constante de tempo do estator = $\frac{L_s}{R_s}$
τ_r	Constante de tempo do rotor = $\frac{L_r}{R_r}$

x

σ Coeficiente de dispersão = $1 - \frac{M^2}{L_r L_s}$

s Deslizamento

J Momento de inércia (capítulo 1) ou critério de selecção do melhor modelo (capítulo 2)

f Coeficiente de atrito ou viscosidade

T_{em} Binário electromagnético

T_c Binário de carga

S Variável de Laplace

$u(t)$ Sinal de entrada do sistema

$y(t)$ Sinal de saída do sistema

λ Variância ou factor de esquecimento

$E(x)$ Valor esperado de x

$h(t)$ Resposta impulsional

$e(t)$ Variável aleatória independente com média nula e variância λ (ruído branco)

q Operador atraso, $q^{-1}u(t) = u(t-1)$

$\Phi_s(\omega)$ Espectro do sinal s

H Função de transferência de $u(t)$ para $y(t)$ ou matriz Hessiana

G Função de transferência de $e(t)$ para $y(t)$

θ_{opt} Vector de parâmetros que minimiza o critério de erro

$\hat{\theta}$ Vector de parâmetros estimados

$\hat{y}(t)$ Sinal de saída do modelo (predição do sinal de saída)

$\hat{y}(t|\theta)$ Predição do sinal de saída no instante t, com base nos parâmetros estimados em $\mathcal{M}(\theta)$

$\varepsilon(t, \theta)$ Erro de predição

\mathcal{M} Estrutura de modelos

$\mathcal{M}(\theta)$ Modelo particular correspondente ao vector de parâmetros θ

$D_{\mathcal{M}}$ Domínio do vector de parâmetros θ

D_c Domínio do vector de parâmetros onde a estimação converge

θ^* Vector de parâmetros pertencente a D_c

d Direcção de procura do mínimo no espaço dos parâmetros

$\alpha(k)$ Ganho da iteração k, segundo a direcção d

Z Vector dos dados observados

Z^t Vector dos dados observados até ao instante t

L_y	Função de verosimilhança da variável aleatória y
$\beta(N,t)$	Função de pesagem do critério de erro
$\Psi(t,\theta)$	Gradiente de $\hat{y}(t \theta)$, relativamente a θ
$R_1(t)$	Matriz de covariância do ruído
$R_2(t)$	Variância do ruído = $E\{e^2(t)\}$
$\arg \min x$	argumento que minimiza x
T	Tempo de amostragem
z	Variável da transformada em z
θ, K, X, β e W	Vectores de parâmetros estimados de diferentes modelos (capítulos 4 e 5)

Lista de abreviaturas

ARX	AutoRegressive with eXternal input
ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXternal input
PEM	Prediction-Error Method
PLR	PseudoLinear Regression
LMS	Least Mean Squares
ELS	Extended Least Squares
RGLS	Recursive Generalised Least Squares
KF	Kalman Filter
EKF	Extended Kalman Filter
IV	Instrumental Variables
ML	Máximum Likelihood
RPEM	Recursive Prediction-Error Method
RPLR	Recursive PseudoLinear Regression

Introdução geral

Introdução geral

Com o desenvolvimento das teorias de controlo e das tecnologias de aquisição e processamento de dados, nomeadamente, processadores digitais de sinal (DSP), o motor de indução trifásico tem vindo a substituir o tradicional motor de corrente contínua, como principal meio de accionamento nas aplicações de controlo industriais. Se associarmos a este desenvolvimento, as características mais importantes do motor de indução trifásico, como a robustez, a ausência de manutenção e o preço, compreendemos as razões pelas quais é hoje, o motor mais utilizado na indústria.

A simplicidade estrutural do motor de indução, contrastava com a dificuldade e a complexidade do seu controlo, que constituiu sempre, a maior contrariedade à sua utilização, uma vez que é realizado recorrendo, apenas, às grandezas estatóricas. Como todas as máquinas eléctricas, está sujeito a variações térmicas e magnéticas que perturbam o sistema de controlo.

De um modo geral, o desempenho dos sistemas de controlo, depende fortemente de um bom conhecimento do processo em causa e do modelo que descreve a dinâmica do motor. O conhecimento do seu modelo dinâmico pode resumir-se a dois aspectos fundamentais: por um lado, a estrutura do próprio modelo, isto é, o modo mais ou menos fiel, como as equações descrevem o comportamento físico do motor; por outro lado, a parametrização do modelo, ou seja, a ponderação dos coeficientes que são utilizados.

Nos sistemas de controlo de velocidade, nomeadamente as técnicas baseadas no princípio da orientação do campo, necessitam de conhecer os parâmetros eléctricos do motor, de modo a programarem convenientemente as leis de controlo. A forma tradicional de aceder aos parâmetros do motor, consistia na informação dada pelo fabricante e nos métodos clássicos, como por exemplo, o ensaio em vazio e com o rotor travado. Contudo, actualmente, é indispensável conhecer os parâmetros, independentemente do motor em causa, do fabricante e da informação fornecida por este. É necessário conhecer, o mais precisamente possível, o valor dos parâmetros do modelo, ao longo do tempo de funcionamento, para que as técnicas de controlo moderno tenham o desempenho desejado. Esta é a principal razão do desenvolvimento actual das técnicas de identificação na estimação dos parâmetros físicos do motor de indução. Estes parâmetros, além de poderem ser desconhecidos, variam ao longo do tempo.

Este último aspecto, mostra bem a necessidade de conhecer os parâmetros do motor, em duas situações fundamentais. A primeira tem a ver com a calibração do sistema de controlo, que se impõe automática para qualquer motor, quer dizer, antes de qualquer motor iniciar o seu funcionamento, o sistema de controlo deve conhecer, automaticamente, os seus parâmetros. A segunda situação tem a ver com a actualização dos parâmetros, tendo em conta a sua variação significativa ao longo do tempo de tempo de funcionamento com o aquecimento e o estado magnético do motor. Estas variações são importantes e limitam o desempenho do controlo se não forem acompanhadas.

Os métodos recursivos de identificação paramétrica, surgem, assim, como uma necessidade básica para a identificação em tempo real dos parâmetros físicos do motor, inserido no seu ambiente normal de funcionamento. É neste âmbito que se enquadra o estudo apresentado neste trabalho e que pretende contribuir para o desenvolvimento da identificação e modelização paramétrica e identificação aplicadas ao motor de indução, no seu ambiente normal de trabalho.

Esta dissertação está estruturada do seguinte modo:

O primeiro capítulo é dedicado à modelização do motor de indução assíncrono trifásico, baseada na aplicação da transformada de Park e no método dos fasores espaciais.

O segundo capítulo, apresenta as formas tradicionais de descrição de modelos de sistemas e as estruturas de modelos mais utilizadas nos procedimentos de identificação, em geral.

O terceiro capítulo é dedicado à identificação de sistemas, em geral, e ao estudo dos métodos de identificação paramétrica, em particular, com especial interesse pelos métodos recursivos, com vista à sua implementação na identificação em tempo real. A identificação dos parâmetros do motor de indução, consiste numa aplicação concreta e específica destes métodos, nomeadamente, o método dos mínimos quadrados recursivo, utilizado nos capítulos quatro e cinco. No entanto, o estudo que foi realizado é apresentado de uma forma suficientemente geral, de modo que se pode aplicar a muitas e diversificadas aplicações.

No quarto capítulo, apresentam-se algumas técnicas de identificação paramétrica, que serão utilizadas na estimação dos parâmetros do motor de indução. Às equações do modelo clássico do motor é aplicada a transformada de Park e o método dos fasores espaciais. No primeiro caso, resultam modelos parametrizados com vectores de parâmetros, que serão estimados no capítulo cinco, utilizando o método dos mínimos quadrados recursivo. Com os valores estimados destes parâmetros determinam-se os parâmetros físicos do motor. No segundo caso, obtém-se uma função de transferência de coeficientes complexos e a partir dos seus valores estimados podem determinar-se os parâmetros do motor.

O quinto e último capítulo, tem por objectivo testar, comparar e validar os modelos referidos no capítulo quatro, através da estimação dos parâmetros dos respectivos modelos, a partir dos quais são determinados os parâmetros físicos do motor. Os sinais utilizados nos algoritmos de identificação, são obtidos com a simulação do motor, realizada neste capítulo.

Os principais aspectos inovadores da presente dissertação, tanto quanto é do conhecimento do autor são: o estudo de um novo modelo de estimação simultânea de todos os parâmetros; o desenvolvimento de novos modelos com estimação dos fluxos admitindo que a resistência do estator é conhecida; a obtenção dos parâmetros do motor através da estimação dos coeficientes de um modelo de "caixa preta", sob a forma de uma função de transferência racional complexa e a simulação do motor.

Capítulo 1

Modelização do motor de indução trifásico

1. Modelização do motor de indução trifásico	5
1.1 Introdução	7
1.1.1 Esquema eléctrico do motor de indução trifásico	7
1.1.2 Equações fundamentais	8
1.2 Modelização através da Transformada de Park	9
1.2.1 Transformada do número de fases	9
1.2.2 Transformada eixos móveis/eixos fixos	10
1.2.3 Transformada de Park	11
1.2.4 Matrizes da transformada de Park	11
1.2.5 Aplicação da transformada de Park	12
1.2.6 Equações nos diferentes referenciais	13
1.2.6.1 Referencial fixo em relação ao estator	13
1.2.6.2 Referencial fixo em relação ao rotor	14
1.2.6.3 Referencial fixo em relação ao campo girante	14
1.2.7 Equação do binário electromagnético	15
1.2.8 Equação mecânica	15
1.3 Modelização através do Método dos Fasores Espaciais	16
1.3.1 Ilustração do método dos fasores espaciais	16
1.3.2 Escolha do referencial	18
1.4 Síntese da modelização	19
1.4.1 Método dos fasores espaciais	19
1.4.2 Transformada de Park	20
1.5 Sinais para a estimação	21
1.6 Conclusão	21

1. Modelização do motor de indução trifásico

1.1 Introdução

Os motores de indução trifásicos são dos mais utilizados na indústria como resultado das suas principais vantagens face às tradicionais máquinas de corrente contínua, nomeadamente, robustez, preço e simplicidade de manutenção. Em contrapartida, não têm o rotor acessível o que dificulta a sua aplicação em muitas situações em que é necessário controlo de posição e/ou velocidade. No entanto, devido a um aumento do conhecimento do seu princípio de funcionamento, foi possível desenvolver novas estratégias de controlo que permitem uma boa adaptação das suas características de funcionamento às necessidades da carga mecânica accionada.

Neste trabalho, referir-se-á, quase sempre, o motor de indução trifásico e não a máquina de indução trifásica, por esta ser, maioritariamente, utilizada como motor nas suas aplicações. No entanto, o estudo que se segue não perde generalidade.

Vamos rever a modelização do motor de indução trifásico, pela Teoria Generalizada das máquinas eléctricas, onde há necessidade de fazer a transformação de grandezas referidas a referenciais diferentes em grandezas referidas a um referencial único, [Carvalho 85].

A modelização incidirá, basicamente, sobre duas formas de escrever as equações que descrevem o funcionamento do motor. Uma baseada na aplicação da transformada de Park e outra na utilização do conceito de fasor espacial, que não são mais do que duas notações diferentes para o mesmo modelo matemático do motor.

Neste capítulo, vamos aplicar às equações do motor de indução trifásico, a transformada de Park e o método dos fasores especiais, para obter um modelo em que as grandezas estão referidas a um referencial geral único, segundo cada uma destas técnicas de modelização.

1.1.1 Esquema eléctrico do motor de indução trifásico

O esquema eléctrico clássico do motor de indução trifásico é o da figura 1.1, o qual representa um motor de indução com rotor bobinado ou em gaiola de esquilo, admitindo neste último caso a substituição da gaiola por três bobinas com simetria trifásica, que lhe são equivalentes.

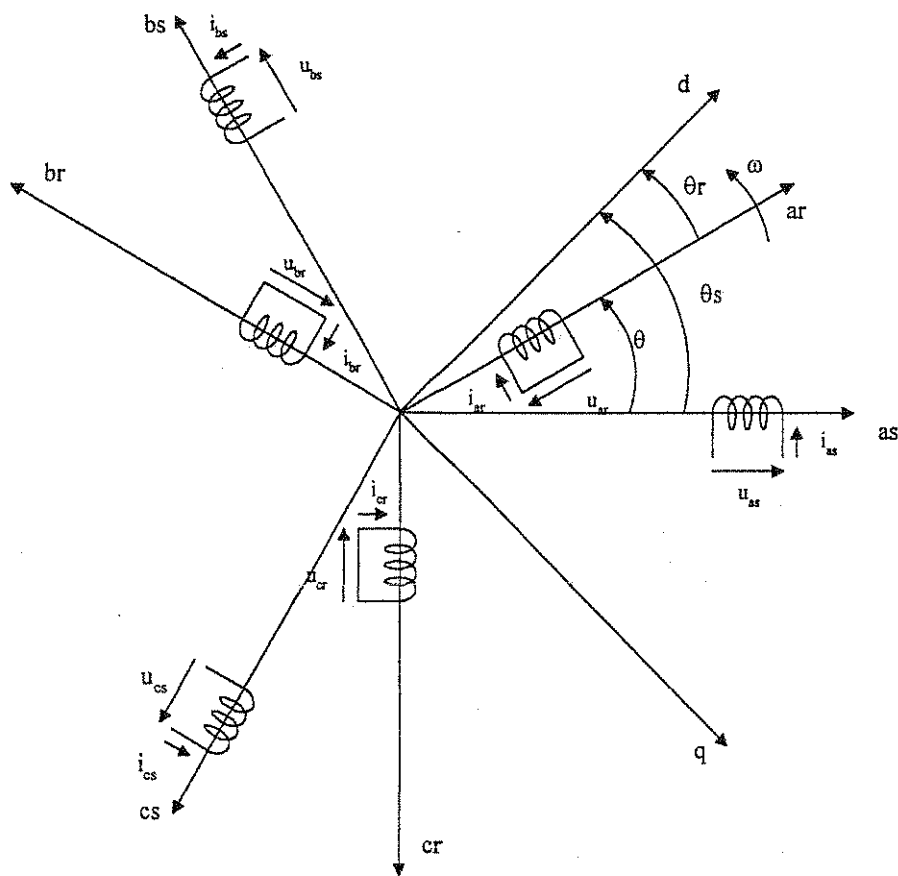


Figura 1.1: Representação dos enrolamentos do estator e do rotor do motor de indução trifásico.

1.1.2 Equações fundamentais

Equações das grandezas do estator:

$$u_{as} = R_s i_{as} + \frac{d\phi_{as}}{dt} \quad (1.1)$$

$$u_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d\phi_{bs}}{dt} \quad (1.2)$$

$$u_{cs} = R_s i_{cs} + \frac{d\phi_{cs}}{dt} \quad (1.3)$$

Equações das grandezas do rotor:

$$u_{ar} = 0 = R_r i_{ar} + \frac{d\phi_{ar}}{dt} \quad (1.4)$$

$$u_{br} = 0 = R_r i_{br} + \frac{d\phi_{br}}{dt} \quad (1.5)$$

$$u_{cr} = 0 = R_r i_{cr} + \frac{d\phi_{cr}}{dt} \quad (1.6)$$

Onde:

R_s representa a resistência de uma fase do estator,

R_r a resistência de uma fase do rotor e

ϕ_k o fluxo de indução que atravessa o enrolamento k.

As equações anteriores estão longe de permitir um tratamento simples. De facto, qualquer dos circuitos eléctricos está ligado magneticamente com todos os outros daí resultando indutâncias com leis de variação complicadas, apesar de algumas simplificações utilizadas sobre as distribuições espaciais das f. m. m. (forças magnetomotrizes) e as propriedades dos materiais utilizados.

1.2 Modelização através da Transformada de Park

Obtém-se uma simplificação importante se o conjunto dos circuitos eléctricos, do estator e do rotor, for substituído por dois circuitos em cada uma dessas partes, com eixos magnéticos em quadratura porque, nessas condições, não há ligação magnética entre os respectivos pares. Do ponto de vista matemático, corresponde a uma mudança de variáveis definida por uma matriz de transformação quadrada.

A aplicação de transformadas destina-se a simplificar as equações gerais das máquinas eléctricas rotativas, em geral, com excepção das que utilizam um colector de lâminas, por estas já terem, fisicamente, os eixos em quadratura. Estas transformadas linearizam as equações fundamentais por eliminação do ângulo θ entre os eixos magnéticos do estator e do rotor.

1.2.1 Transformada do número de fases

Uma primeira transformada pode ser aplicada para reduzir os enrolamentos do estator e do rotor, qualquer que seja o seu número, a duas bobinas em cada uma das partes, com os seus eixos magnéticos a 90° , $\alpha\beta$, equivalentes aos enrolamentos reais do ponto de vista magnético.

$$[i_{\alpha\beta 0}] = [T1][i_{abc}] \quad (1.7)$$

A aplicação da teoria das máquinas eléctricas na modelização de uma máquina eléctrica de corrente alternada trifásica, como o motor de indução, com os enrolamentos desprovidos de neutro acessível obriga a considerar a não existência de componentes homopolares no sistema trifásico e permite estabelecer uma transformação do número de fases, [carvalho 85], figura 1.2.

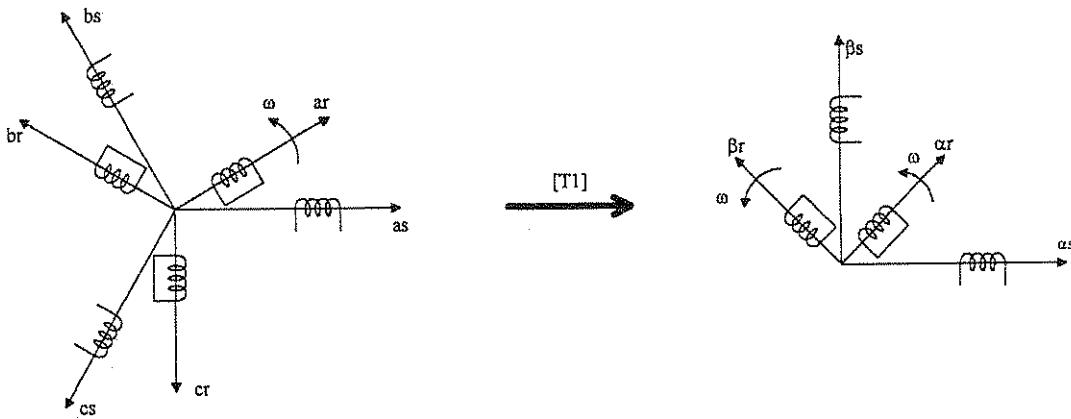


Figura 1.2: Transformada do número de fases.

1.2.2 Transformada eixos móveis/eixos fixos

No caso em que dois eixos de referência, ou referenciais, estão animados de uma velocidade relativa, por exemplo, quando um referencial está solidário com o estator e outro com o rotor, é necessário fazer a respectiva transformação para um referencial único (comum).

Assim, uma segunda transformada consistirá na substituição do sistema de referência do rotor com dois eixos móveis a 90° , por um sistema de eixos fixos também a 90° , dq. Esta transformação reduz o motor inicial a um outro de colectores equivalente. As bobinas equivalentes do rotor com os seus eixos a 90° , passam a ser pseudo-estacionárias [Carvalho 85].

$$[i_{dq0}] = [T2][i_{\alpha\beta0}] \quad (1.8)$$

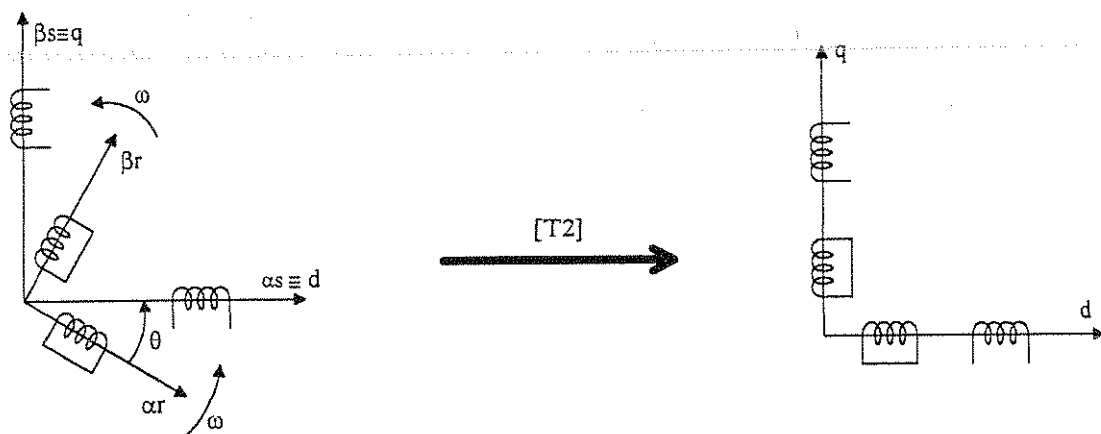


Figura 1.3: Transformada eixos móveis/eixos fixos.

É possível passar do sistema de eixos abc para dq0, de uma só vez, através da transformada de Park. Esta transformada consiste na aplicação sucessiva das duas transformadas anteriores.

$$[i_{dq0}] = [T2][T1][i_{abc}] \quad (1.9)$$

$$[P] = [T2][T1] \quad (1.10)$$

Em que $[P]$ é a matriz da transformada de Park.

1.2.3 Transformada de Park

A transformada de Park pode ser interpretada como uma substituição dos enrolamentos das fases abc do estator e do rotor do motor original, em dois equivalentes do ponto de vista eléctrico e magnético, segundo cada um dos eixos dq.

A transformação do número de fases, representada na figura 1.2, consiste, neste caso, em projectar as grandezas do referencial trifásico abc num referencial difásico, em que fizemos coincidir o eixo α com o respectivo eixo a. Resulta assim, um sistema difásico para o estator fixo, $\alpha_s\beta_s$, e outro para o rotor, $\alpha_r\beta_r$, solidário com este.

Sejam dq dois eixos fixos coincidentes com os eixos magnéticos das bobinas estatóricas no referencial $(\alpha_s\beta_s)$, como na figura 1.3. Naturalmente que nesta situação, os eixos magnéticos do estator ficam automaticamente no referencial do dq e os eixos magnéticos do rotor podem ser referidos a esse mesmo referencial fazendo a projecção das grandezas em $\alpha_r\beta_r$ sobre dq, resultando a matriz de transformação T2, da equação (1.12).

A aplicação desta transformada permite escrever as indutâncias mútuas do modelo do motor, independentes da velocidade de rotação do rotor e assim, são eliminados os termos das indutâncias variantes no tempo.

Para além da vantagem referida, é possível, utilizando os modelos nos eixos dq, resolver o sistema de equações do motor e conversor electrónico associado, simultaneamente, [Chang 92].

A modelização do motor de indução trifásico, para identificação dos seus parâmetros, é obtida, na maior parte dos trabalhos, utilizando a transformada de Park, [Liu 92], [Jayme 95], [Ségard 95] e [Roboam 95].

1.2.4 Matrizes da transformada de Park

Existe uma infinidade de transformadas de Park possíveis, mas apenas duas são utilizadas classicamente. A primeira conserva a amplitude das grandezas transformadas:

$$[T1] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$[T2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

$$[P] = [T2][T1] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-120) & \cos(\theta+120) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta-120) & -\sin(\theta+120) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

E a segunda conserva a potência:

$$[T1] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$[T2] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

$$[P] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-120) & \cos(\theta+120) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta-120) & -\sin(\theta+120) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

As matrizes de transformação, invariantes em relação à potência, são ortogonais, isto é:

$$[P]^T = [P]^{-1} \quad \text{e} \quad [T2]^T = [T2]^{-1}$$

1.2.5 Aplicação da transformada de Park

Aplicando a transformada de Park às correntes, tensões e fluxos, resultam as equações que se seguem, sem fixar, para já, o referencial.

Equações eléctricas do estator:

$$u_{ds} = R_s i_{ds} - \phi_{qs} \frac{d\theta_s}{dt} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} \quad (1.17)$$

$$u_{qs} = R_s i_{qs} + \phi_{ds} \frac{d\theta_s}{dt} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} \quad (1.18)$$

Equações eléctricas do rotor:

$$u_{dr} = 0 = R_r i_{dr} - \phi_{qr} \frac{d\theta_r}{dt} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} \quad (1.19)$$

$$u_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \phi_{dr} \frac{d\theta_r}{dt} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} \quad (1.20)$$

Equações magnéticas:

$$\phi_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr} \quad (1.21)$$

$$\phi_{dr} = M i_{ds} + L_r i_{dr} \quad (1.22)$$

$$\phi_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr} \quad (1.23)$$

$$\phi_{qr} = M i_{qs} + L_r i_{qr} \quad (1.24)$$

Sendo:

L_s o coeficiente de auto-indução do estator

L_r o coeficiente de auto-indução do rotor

M o coeficiente de indução mútua entre o rotor e o estator

1.2.6 Equações nos diferentes referenciais

Há três possibilidades de escrever as equações anteriores num referencial comum, como se verá a seguir.

1.2.6.1 Referencial fixo em relação ao estator

Neste referencial temos:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\theta_r}{dt} = -\omega$$

Assim:

$$u_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} \quad (1.25)$$

$$u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} \quad (1.26)$$

$$0 = R_r i_{dr} + \phi_{qr} \omega + \frac{d\phi_{dr}}{dt} \quad (1.27)$$

$$0 = R_r i_{qr} - \phi_{dr} \omega + \frac{d\phi_{qr}}{dt} \quad (1.28)$$

1.2.6.2 Referencial fixo em relação ao rotor

Neste referencial temos:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega \quad \text{e} \quad \frac{d\theta_r}{dt} = 0$$

Assim:

$$u_{ds} = R_s i_{ds} - \phi_{qs} \omega + \frac{d\phi_{ds}}{dt} \quad (1.29)$$

$$u_{qs} = R_s i_{qs} + \phi_{ds} \omega + \frac{d\phi_{qs}}{dt} \quad (1.30)$$

$$0 = R_r i_{dr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} \quad (1.31)$$

$$0 = R_r i_{qr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} \quad (1.32)$$

1.2.6.3 Referencial fixo em relação ao campo girante

Neste referencial:

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \omega_s \quad \text{e} \quad \frac{d\theta_r}{dt} = \omega_s - \omega = s\omega_s$$

Sendo s o deslizamento, dado por:

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s} \quad (1.33)$$

Assim:

$$u_{ds} = R_s i_{ds} - \phi_{qs} \omega_s + \frac{d\phi_{ds}}{dt} \quad (1.34)$$

$$u_{qs} = R_s i_{qs} + \phi_{ds} \omega_s + \frac{d\phi_{qs}}{dt} \quad (1.35)$$

$$0 = R_r i_{dr} - \phi_{qr} s \omega_s + \frac{d\phi_{dr}}{dt} \quad (1.36)$$

$$0 = R_r i_{qr} + \phi_{dr} s \omega_s + \frac{d\phi_{qr}}{dt} \quad (1.37)$$

1.2.7 Equação do binário electromagnético

$$T_{em} = \frac{3}{2} p (\phi_{ds} i_{qs} - \phi_{qs} i_{ds}) \quad (1.38)$$

ou

$$T_{em} = \frac{3}{2} p \frac{M}{L_r} (\phi_{dr} i_{qs} - \phi_{qr} i_{ds}) \quad (1.39)$$

Onde:

p representa o número de pares de pólos

T_{em} é o binário electromagnético

1.2.8 Equação mecânica

$$T_{em} - T_c = J \frac{d\omega_m}{dt} + f \omega_m \quad (1.40)$$

Onde:

T_c é o binário de carga

J é o momento de inércia

f é o coeficiente de atrito ou viscosidade

ω_m é a velocidade mecânica

Esta equação não é utilizada, a não ser nos casos em que também se pretende identificar os parâmetros J e f . Quando a modelização da parte mecânica não pode ser descrita de uma forma simples, ou quando os parâmetros mecânicos não são

necessários, a aquisição da velocidade de rotação evita a necessidade de considerar esta equação para a identificação dos parâmetros do motor.

Outro método (notação) de modelização do motor de indução trifásico pode ser encontrado em diversos trabalhos de identificação dos parâmetros, [Boussak 92], [Macek-Kaminska 95], [Jemli 94], designado habitualmente por método dos fasores espaciais.

1.3 Modelização através do Método dos Fasores Espaciais

É, actualmente, o mais indicado para a modelização do motor de indução trifásico quando alimentado por conversores electrónicos de potência, [Guedes 94].

Sempre que o motor de indução trifásico é alimentado por um conversor electrónico de potência, o seu regime de funcionamento é uma sucessão permanente de estados transitórios. Para estudar o seu funcionamento neste regime peculiar, pode ser utilizado o método dos fasores espaciais, que é uma representação duma grandeza física com variação sinusoidal no espaço, por uma quantidade complexa. Recorde-se que no entreferro do motor de indução trifásico distribuem-se ondas de grandezas eléctricas e magnéticas com desenvolvimento sinusoidal no espaço.

1.3.1 Ilustração do método dos fasores espaciais

Na figura 1.4(a), as fases correspondentes, do estator e do rotor, estão desfasadas do ângulo θ , que é a posição angular do rotor. Também aqui se substitui o sistema trifásico abc por um difásico equivalente $\alpha\beta$, como na aplicação da matriz [T1] (figura 1.4(b)). Neste caso, em vez de trabalhar com o cálculo matricial, tem-se em conta o desfasamento de 90° e o operador $j = \exp(j90^\circ)$ e reduz-se o sistema das duas fases no estator e no rotor para um único fasor complexo, em cada uma destas partes (figura 1.4(c)). Assim a tensão do estator u_e^s e as correntes i_s^s e i_r^r , do rotor, são grandezas complexas variantes no tempo, de modo a produzir os mesmos efeitos que o sistema difásico ou trifásico. Neste sistema de um eixo complexo é possível descrever o comportamento estático e dinâmico do motor de indução trifásico de uma forma relativamente simples.

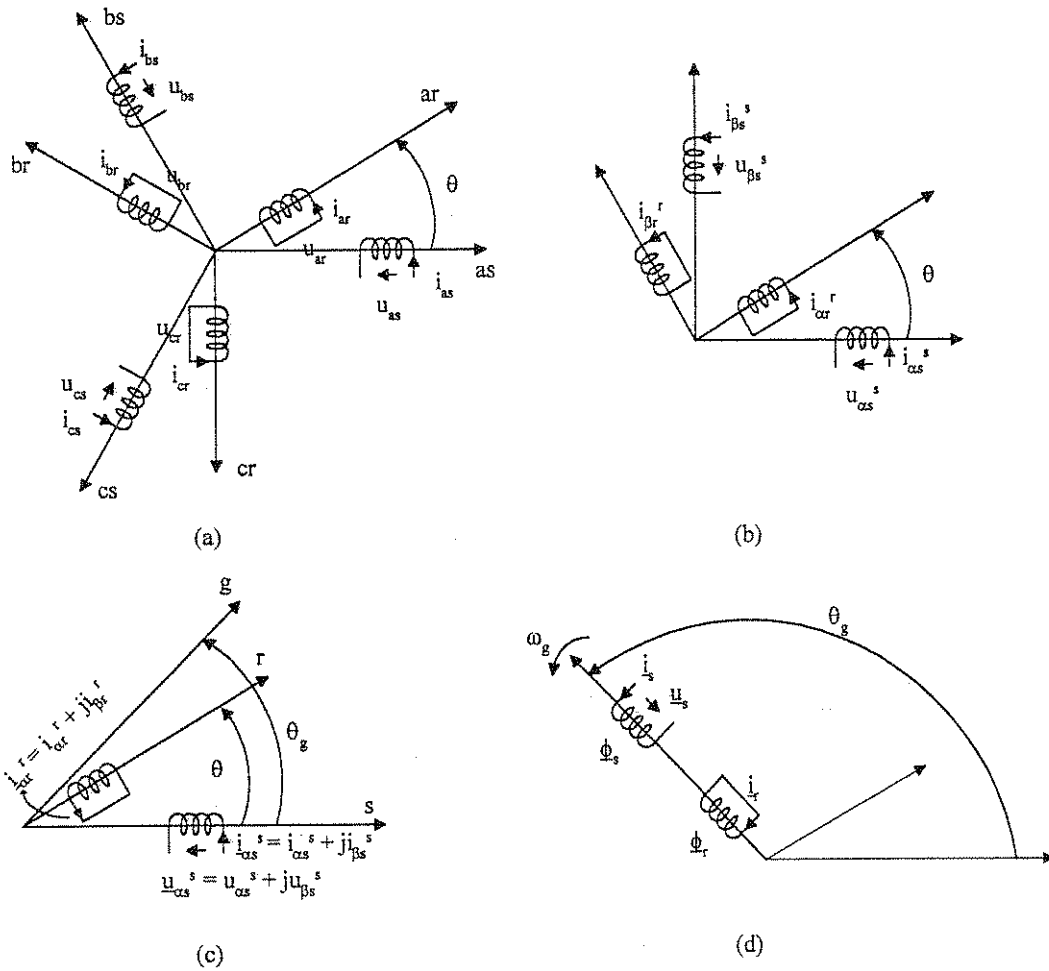


Figura 1.4: Ilustração do método dos fasores espaciais. (a) Sistema trifásico do estator e do rotor. (b) Sistema bifásico do estator e do rotor. (c) Fasores referidos ao estator e ao rotor. (d) Fasores referidos a um referencial geral g , único.

A passagem do sistema trifásico para o sistema de um eixo complexo da tensão do estator, por exemplo, é feita através da relação:

$$\underline{u}_s^s(t) = \frac{2}{3} \left[u_{as}(t) + \underline{a} u_{bs}(t) + \underline{a}^2 u_{cs}(t) \right] \quad (1.41)$$

Onde $u_{as}(t)$, $u_{bs}(t)$ e $u_{cs}(t)$ são os valores instantâneos das três tensões estatóricas no sistema trifásico e o factor complexo \underline{a} é igual a $\exp(j120^\circ)$. Para as outras grandezas podemos estabelecer relações equivalentes.

No tratamento analítico do método dos fasores espaciais aparece uma dificuldade acrescida, pelo facto de o acoplamento entre o estator e o rotor, depender do ângulo θ que é variante no tempo. Resolve-se esta dificuldade referenciando o estator e o rotor a um sistema de coordenadas geral g (comum), que apresenta um ângulo θ_g em relação ao estator (figura 1.4(c)).

Assim, é possível imaginar dois enrolamentos ligados ao referencial geral g , um para o estator outro para o rotor, como indicado na figura 1.4(d). Entre estes dois enrolamentos, equivalentes aos seis iniciais, existe um acoplamento constante. É então possível estudar os fenómenos que se desenvolvem quer no estator quer no rotor, através destes dois enrolamentos.

1.3.2 Escolha do referencial

Tal como na aplicação da transformada de Park, há três possibilidades de escolher o referencial geral g .

- Fixo em relação ao referencial do estator:

$$\theta_g = \theta_{g0} \quad (1.42)$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = \omega_g = 0 \quad (1.43)$$

- Fixo em relação ao referencial do rotor:

$$\theta_g = \theta_{g0} + \int_0^t \omega dt \quad (1.44)$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = \omega_g = \omega \quad (1.45)$$

Se ω for constante então:

$$\theta_g = \theta_{g0} + \omega t \quad (1.46)$$

- Fixo em relação à velocidade de sincronismo (acompanha o campo girante):

$$\theta_g = \theta_{g0} + \int_0^t \omega_s dt \quad (1.47)$$

$$\frac{d\theta_g}{dt} = \omega_g = \omega_s \quad (1.48)$$

Se ω_s for constante então:

$$\theta_g = \theta_{g0} + \omega_s t \quad (1.49)$$

Conforme a aplicação em causa, a escolha do referencial será, de entre as três, aquela que conduzir às relações mais simples. O resultado final é, evidentemente, independente dessa escolha, o cálculo é que poderá ser mais ou menos complexo.

1.4 Síntese da modelização

Consideremos as equações gerais do motor de indução trifásico, relativamente a um referencial geral g , em que:

$$\frac{d\theta_g}{dt} = \omega_g$$

- Se $\omega_g=0$, o referencial geral coincide com o referencial do estator;
- Se $\omega_g=\omega$, o referencial geral coincide com o referencial do rotor e
- Se $\omega_g=\omega_s$, o referencial geral acompanha o campo girante (gira à velocidade angular de sincronismo).

1.4.1 Método dos fasores espaciais

Aplicando o método dos fasores espaciais:

Equações magnéticas:

$$\underline{\phi}_s = L_s \underline{i}_s + M \underline{i}_r \quad (1.50)$$

$$\underline{\phi}_r = M \underline{i}_s + L_r \underline{i}_r \quad (1.51)$$

Equações eléctricas:

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + j \frac{d\theta_g}{dt} \underline{\phi}_s + \frac{d\underline{\phi}_s}{dt} \quad (1.52)$$

$$\underline{u}_r = 0 = R_r \underline{i}_r + j \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} \underline{\phi}_r + \frac{d\underline{\phi}_r}{dt} \quad (1.53)$$

Equação do binário electromagnético:

$$T_{em} = \frac{3}{2} p \operatorname{Re}(j \underline{\phi}_s \underline{i}_s^*) = k(\underline{\phi}_s \times \underline{i}_s) \quad (1.54)$$

1.4.2 Transformada de Park

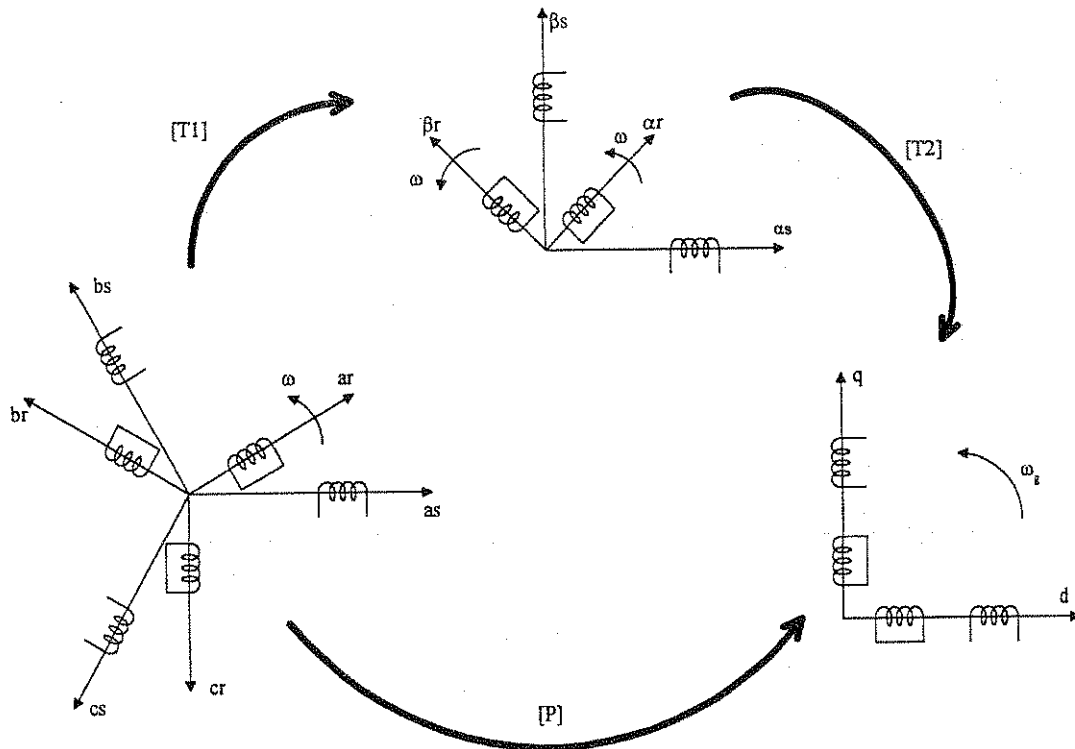


Figura 1.5: Ilustração da aplicação da transformada de Park.

Aplicando a transformada de Park:

Equações magnéticas:

$$\phi_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr} \quad (1.55)$$

$$\phi_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr} \quad (1.56)$$

$$\phi_{dr} = M i_{ds} + L_r i_{dr} \quad (1.57)$$

$$\phi_{qr} = M i_{qs} + L_r i_{qr} \quad (1.58)$$

Equações eléctricas:

$$u_{ds} = R_s i_{ds} - \frac{d\theta_g}{dt} \phi_{qs} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} \quad (1.59)$$

$$u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\theta_g}{dt} \phi_{ds} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} \quad (1.60)$$

$$u_{dr} = 0 = R_r i_{dr} - \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} \phi_{qr} + \frac{d\phi_{dr}}{dt} \quad (1.61)$$

$$u_{qr} = 0 = R_r i_{qr} + \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} \phi_{dr} + \frac{d\phi_{qr}}{dt} \quad (1.62)$$

Equação do binário electromagnético:

$$T_{em} = \frac{3}{2} p (\phi_{ds} i_{qs} - \phi_{qs} i_{ds}) \quad (1.63)$$

1.5 Sinais para a estimação

Os parâmetros dos modelos do motor de indução trifásico, acima descritos, não estão directamente disponíveis. O fabricante apenas fornece ao utilizador as curvas características (binário, corrente e factor de potência, função da velocidade) em regime permanente, ou simplesmente os valores nominais na chapa de características (velocidade e correntes nominais e factor de potência a plena carga).

É natural que estes dados não caracterizem correctamente o funcionamento dinâmico do motor quando, por exemplo, alimentado por conversor electrónico de potência.

A estimação dos parâmetros é realizada, com base na aquisição dos sinais de entrada e saída, em condições normais de funcionamento, que são, em geral:

- Sinais de entrada:

Duas tensões, correspondentes a duas fases do estator

- Sinais de saída:

Duas correntes, correspondentes às mesmas fases do estator anteriores

Velocidade de rotação

1.6 Conclusão

Neste capítulo fizemos uma revisão do estudo da modelização do motor de indução trifásico segundo a Teoria Generalizada das máquinas eléctricas.

Em primeiro lugar vimos uma representação do modelo matemático do motor que resultou da aplicação da transformada de Park que, por sua vez, é uma aplicação sucessiva de duas transformadas: a transformada do número de fases e a transformada eixos móveis/eixos fixos. A primeira consistiu na transformação do sistema trifásico num difásico, para o rotor e para o estator, equivalente aos enrolamentos reais do ponto de vista magnético. A segunda consistiu na representação, num único referencial, dos dois referenciais (resultantes da primeira transformada), animados de uma velocidade relativa, um solidário com o rotor e outro solidário com o estator.

Em segundo lugar, fizemos uma revisão da notação complexa na representação do modelo do motor, utilizando o conceito de fasor espacial. Assim, as tensões e correntes do estator e do rotor passam a ser grandezas complexas variantes no tempo. Com este sistema de um eixo complexo, descreve-se o comportamento estático e dinâmico do motor de uma forma relativamente simples. A dificuldade inerente ao facto de o acoplamento entre o estator e o rotor ser variante no tempo, foi ultrapassada referenciando quer o estator quer o rotor a um referencial geral (comum).

Aproveitando esta ideia de um referencial geral, apresentamos uma síntese das duas formas de modelização (a notação de Park e a notação complexa), referenciando os respectivos modelos a esse referencial, que se torna extremamente vantajoso, dada a forma, simples e imediata, como se podem, posteriormente, rescrever os modelos no referencial do estator, do rotor, do campo girante, etc., a partir da sua representação no referencial geral.

Tratando-se de notações diferentes das mesmas equações que descrevem o funcionamento do motor, podemos converter uma notação na outra, facilmente, bastando para isso, considerar as componentes das grandezas segundo o eixo d e q do referencial de Park, as componentes real e imaginária, respectivamente, do fasor espacial.

Capítulo 2

Modelos de sistemas e estruturas de modelos

2. Modelos de sistemas e estruturas de modelos	23
2.1 Introdução	25
2.2 Descrição e classificação de modelos	25
2.3 Descrição de modelos lineares invariantes no tempo	27
2.3.1 Modelos com sinais determinísticos contínuos	27
2.3.1.1 Descrição do tipo entrada-saída	28
2.3.1.2 Descrição no espaço de estados	28
2.3.2 Modelos com sinais determinísticos amostrados	29
2.3.2.1 Descrição do tipo entrada-saída	29
2.3.2.2 Descrição no espaço de estados	29
2.3.3 Modelos com sinais estocásticos	29
2.4 Controlabilidade, observabilidade e identificabilidade	30
2.5 Estruturas de modelos de sistemas lineares invariantes no tempo	31
2.5.1 Representação polinomial das funções de transferência	32
2.5.1.1 Estrutura de modelos ARX	33
2.5.1.2 Estrutura de modelos ARMAX	34
2.5.1.3 Estrutura de modelos do tipo "Output Error"	35
2.5.1.4 Estrutura de modelos "Box-Jenkins"	36
2.5.1.5 Forma geral das estruturas de modelos	37
2.5.1.6 Identificabilidade das estruturas de modelos	37
2.5.2 Representação em espaço de estados	38
2.6 Descrição de modelos lineares variantes no tempo	39
2.7 Descrição de modelos não lineares	39
2.7.1 Linearidade nos parâmetros	40
2.7.2 A importância do conhecimento à priori	40
2.7.3 Linearização	41
2.8 Conclusão	42

2. Modelos de sistemas e estruturas de modelos

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos classificar os modelos que descrevem os sistemas, com base nas suas características e propriedades fundamentais, nomeadamente, o seu comportamento ao longo do tempo, a sua dimensão e a natureza dos seus sinais.

Os conjuntos de modelos cujas representações têm uma estrutura semelhante, são agrupados em famílias, as quais se designam, habitualmente, por estruturas de modelos e vamos apresentar as mais usuais.

2.2 Descrição e classificação de modelos

Não é possível, ainda, descrever num modelo, único e coerente, todo o universo. Este, é então subdividido em inúmeras partes, descritas individualmente por modelos. Cada uma destas partes é designada, habitualmente, como sistema, sendo todo o resto do universo o meio envolvente. As interacções entre estas duas entidades são descritas como entradas e saídas.

Podemos distinguir, fundamentalmente, três tipos de modelos:

- Mentais
- Matemáticos
- Físicos

Os primeiros são os que utilizamos em cada instante na nossa mente.

Os modelos matemáticos descrevem os sistemas de uma forma quantitativa. Se forem constituídos por gráficos ou tabelas que relacionam as diferentes variáveis do sistema, são designados por modelos gráficos ou paramétricos. Quando a relação entre as diferentes variáveis é descrita através de expressões analíticas, tais como, equações diferenciais ou equações às diferenças, então estas expressões formam os modelos analíticos ou paramétricos.

Os modelos físicos, são sistemas com um funcionamento análogo ao do que pretendem representar. Podem ser simples miniaturizações, ou sistemas de natureza diferente como os computadores, por exemplo.

Sendo o objectivo básico deste trabalho, a estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico, são os modelos matemáticos, que mais nos interessam no estudo que se segue.

Uma forma histórica de estudar a dinâmica de um sistema, é através da sua representação utilizando equações diferenciais, expressas em termos da sua entrada e saída, $u=u(t)$ e $y=y(t)$, respectivamente.

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y = b_0 \frac{d^n u}{dt^n} + \dots + b_{n-1} \frac{du}{dt} + b_n u + c \quad (2.1)$$

De acordo com aspectos bem conhecidos, os modelos são distinguidos, em três classes fundamentais:

- Modelos lineares invariantes no tempo
- Modelos lineares variantes no tempo
- Modelos não lineares

Os primeiros, são aqueles onde os coeficientes a_i e b_i não dependem de u , y ou das suas derivadas. São, portanto, constantes. A uma combinação linear de sinais de entrada o sistema responde com a mesma combinação linear nos respectivos sinais de saída.

Nos segundos, a_i e b_i são variantes no tempo, o que não destrói a linearidade. Num sistema linear variante no tempo, continua a verificar-se o princípio da sobreposição.

Nos modelos não lineares, a_i e b_i dependem de u , y ou das suas derivadas.

Considerando ainda, a representação clássica anterior, podemos referir aqueles cuja representação se reduz a:

$$y - bu = 0 \quad (2.2)$$

Neste caso, diz-se que o sistema não tem memória, uma vez que não inclui elementos que acumulam energia. Se, por outro lado, existirem elementos que reflectem um tipo de energia, então diz-se que o sistema possui memória e isso reflecte-se no aparecimento de termos, função das derivadas da entrada e/ou saída do sistema. Neste caso, existe uma dependência dos valores passados da entrada, $u(t)$.

Segundo McGhee, podemos descrever os modelos de duas formas pertinentes: a primeira, designa-se por espaço de funções, e consiste em representar o sinal de entrada num dado espaço e o problema da estimação é encontrar a transformação da função do espaço da entrada, para a função do espaço da saída, que caracteriza o sistema. Como, neste caso, não há informação acerca da estrutura física do sistema ou das suas equações matemáticas, a identificação é dita de “caixa preta”.

A segunda, designada por espaço de parâmetros, tem em conta uma descrição do sistema, baseada em equações matemáticas. A descrição é um modelo de dimensão finita, que pode aumentar, mas permanece finita, enquanto que, em princípio, um número infinito de parâmetros tem de ser determinado na descrição pelo espaço de funções.

As coordenadas do espaço de parâmetros, são valores numéricos de quantidades que determinam a saída do modelo.

Podemos, assim, fazer a distinção entre modelos

- Paramétricos
- Não paramétricos

Como exemplos de modelos não paramétricos referem-se:

1. A resposta impulsional e/ou resposta ao degrau
2. A função de covariância
3. A resposta em frequência
4. O espectro

Os modelos paramétricos são representados por:

1. Equações diferenciais de uma forma ou ordem previamente determinada
2. Descrição no espaço de estados

Os modelos paramétricos levam a erros consideráveis se a ordem do modelo não está de acordo com a ordem do sistema.

Os modelos não paramétricos têm a vantagem de não ser necessário especificar expressamente a ordem do sistema. Esta representação tem, intrinsecamente, uma ordem infinita, o que significa que, frequentemente, é possível obter um modelo em que a sua saída seja exactamente a do sistema.

Para além da representação poder ser paramétrica ou não paramétrica, os modelos lineares variantes e invariantes no tempo, podem ter uma descrição:

- do tipo entrada-saída
- no espaço de estados

2.3 Descrição de modelos lineares invariantes no tempo

2.3.1 Modelos com sinais determinísticos contínuos

Um sinal determinístico, caracteriza-se por estar perfeitamente determinado em relação à variável independente. Pode ser constante ou variável e, neste caso, pode ainda ser não periódico, periódico ou alternado.

2.3.1.1 Descrição do tipo entrada-saída

É do conhecimento geral de que um sistema linear, contínuo, causal e invariante no tempo, é descrito pelo integral de convolução, como consequência do princípio da sobreposição. Fisicamente, cada sinal de entrada $u(t)$, pode ser uma combinação linear de impulsos de Dirac e/ou degraus. Isto leva ao integral de convolução:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

Para ser fisicamente realizável, deve ser $h(t)=0$, para $t<0$. Ou seja o sistema deve ser causal.

Trata-se, portanto, de uma representação não paramétrica.

2.3.1.2 Descrição no espaço de estados

Na representação de espaço de estados, a relação entre os sinais de entrada, de ruído e de saída, são escritos na forma de um sistema diferencial, ou equações diferenciais, de 1ª ordem, utilizando um vector de estado composto por variáveis de estado.

Para a maior parte dos sistemas físicos é mais fácil construir modelos com significado físico, no tempo contínuo do que no tempo discreto, simplesmente porque a maior parte das leis físicas (a lei de Newton, as leis dos circuitos eléctricos, etc.) são representadas no tempo contínuo.

Nestes casos, a modelização leva a uma representação da forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.5)$$

A figura 2.1 apresenta a correspondente representação gráfica.

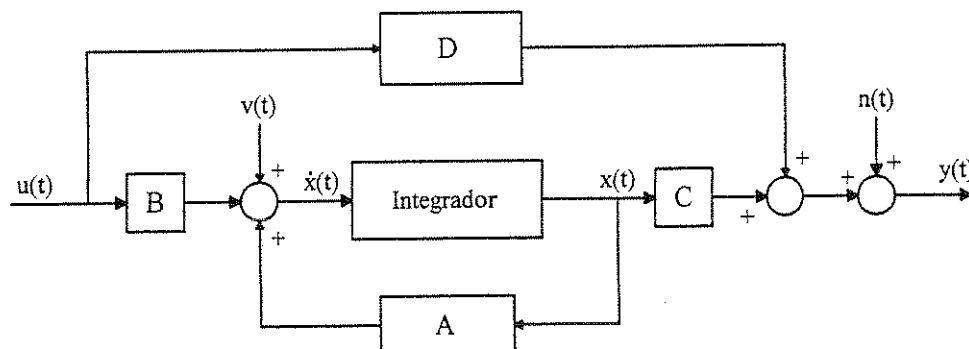


Figura 2.1: Descrição no espaço de estados.

Em que:

A - Matriz do sistema

B - Matriz de distribuição

C - Matriz de saída ou de medida

D - Matriz de entrada-saída

$v(t)$ - Ruído do sistema

$n(t)$ - Ruído de observação

(2.4) e (2.5) são, respectivamente, a equação de estado e de saída. A modelização é apoiada num vector de estado, cujas variáveis de estado têm significado físico (posição, velocidade, etc.) e as saídas serão combinações conhecidas destes estados. É portanto, uma representação paramétrica.

2.3.2 Modelos com sinais determinísticos amostrados

2.3.2.1 Descrição do tipo entrada-saída

$$a_0 y(k) + a_1 y(k+1) + \dots + a_n y(k+n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k+m) \quad (2.6)$$

O integral de convolução é agora:

$$y(k) = \sum_{i=-\infty}^k h(k-i) y(i) \quad (2.7)$$

Mostra-se, [Eykhoff 79], que a função de transferência toma a forma:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \quad (2.8)$$

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots \quad (2.9)$$

2.3.2.2 Descrição no espaço de estados

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.10)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \quad (2.11)$$

2.3.3 Modelos com sinais estocásticos

Um sinal é de natureza estocástica quando tem um carácter aleatório e descrito com ferramentas de inferência estatística. A quantificação do sinal, num dado instante, depende da informação recolhida ao longo de um certo tempo anterior.

O princípio, das descrições anteriores, mantém-se com este tipo de sinais. Consequentemente, as questões mais importantes têm a ver com as propriedades estatísticas dos parâmetros, tais com o valor esperado, a variância, a função de correlação, etc..

2.4 Controlabilidade, observabilidade e identificabilidade

Cabe aqui sumariar estes conceitos e sê-lo-á feito para o caso de sistemas descritos por equações diferenciais de coeficientes lineares e invariantes. Assim, consideremos um dado sistema na descrição de espaço de estados:

$$x(k+1)=Ax(k)+Bu(k) \quad (2.12)$$

$$y(k)=Cx(k) \quad (2.13)$$

Onde x é um vector de dimensão n .

O sistema será controlável se for possível encontrar um vector de controlo, que leve o sistema de um estado inicial qualquer, para um qualquer estado final especificado, num tempo finito. Num sistema controlável a matriz,

$$[A^{n-1}B | A^{n-2}B | \dots | B]$$

tem dimensão n e nesse caso A, B é designado por par controlável.

O sistema será observável, se a partir das medidas da saída é possível determinar o estado do sistema. Num sistema observável a matriz,

$$[C^T | A^T C^T | \dots | A^{(n-1)T} C^T]$$

tem dimensão n e nesse caso A, C é designado por par observável. O índice T indica a matriz transposta.

O sistema será identificável, se a partir das medidas das variáveis de estado é possível determinar a matriz do sistema, A , cujo determinante não pode ser nulo. Num sistema identificável a matriz,

$$[x(0) | Ax(0) | \dots | A^{n-1}x(0)]$$

tem dimensão n .

Repare-se que, atendendo à definição, se $x(0)=0$, o sistema não pode ser identificado.

Em geral, um sistema poderá não ser identificável, se os valores iniciais do vector de estado não excitarem todos os modos do sistema.

2.5 Estruturas de modelos de sistemas lineares invariantes no tempo

A representação básica entrada-saída de um sistema, está representada na figura 2.2.

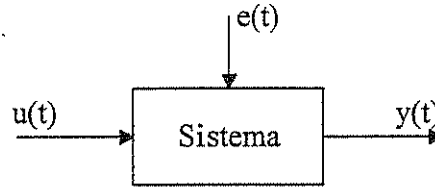


Figura 2.2: Representação básica entrada-saída, de um sistema.

Um sistema linear pode ser completamente caracterizado por:

$$y(t) = H(q)u(t) + G(q)e(t) \quad (2.14)$$

juntamente com $f_e(\cdot)$, a função densidade de probabilidade (f.d.p.) de $\{e(t)\}$, que representa as perturbações de ruído aditivo. Aqui, $\{e(t)\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias com valor médio nulo e variância λ .

A variável q corresponde ao operador de atraso:

$$q^{-1}u(t) = u(t-1) \quad (2.15)$$

$H(q)$ e $G(q)$ são as funções de transferência de $u(t)$ e $\{e(t)\}$ para $y(t)$, respectivamente, em que:

$$H(q) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)q^{-k} \quad (2.16)$$

$$G(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g(k)q^{-k} \quad (2.17)$$

Um modelo particular corresponde à especificação das funções $H(q)$, $G(q)$ e $f_e(\cdot)$. Na maior parte das situações é impraticável fazer esta especificação à custa de $h(t)$, $g(t)$ e $f_e(\cdot)$. Uma alternativa, consiste em utilizar estruturas de modelos que permitam uma especificação de $H(q)$ e $G(q)$ através de um número finito de coeficientes. As funções de transferência racionais e a notação de espaço de estados são o exemplo mais concreto desta situação. Também a f.d.p. $f_e(\cdot)$, em vez de uma função, é especificada, muitas vezes, em termos de um número pequeno de características ou coeficientes, tipicamente:

$$E\{e(t)\} = \int x f_e(x) dx = 0 \quad (2.18)$$

$$E\{e^2(t)\} = \int x^2 f_e(x) dx = \lambda \quad (2.19)$$

Sendo $E\{e(t)\}$ e λ o valor esperado e a variância de $\{e(t)\}$, respectivamente. Também é habitual admitir que $\{e(t)\}$ é Gaussiano e, neste caso, a f.d.p. é completamente caracterizada através de (2.18) e (2.19).

A descrição de sistemas à custa de um número finito de coeficientes é uma consequência dos objectivos da identificação. Muitas vezes, não é possível determinar estes coeficientes à priori, a partir do conhecimento físico do sistema em causa. Assim, a determinação destes coeficientes, ou parte deles, é uma tarefa dos procedimentos de identificação. Deste modo, estes coeficientes são introduzidos em (2.14) e $f_e(\cdot)$ como parâmetros a serem estimados.

$$y(t) = H(q, \theta)u(t) + G(q, \theta)e(t) \quad (2.20)$$

$$f_e(x, \theta), \text{ a f.d.p. de } e(t) \text{ (ruído branco)} \quad (2.21)$$

θ é o vector de parâmetros a estimar.

De entre o conjunto de modelos descrito através de (2.20) e (2.21), é necessário escolher aquele que estiver melhor vocacionado para os fins pretendidos e será utilizado no procedimento da estimação dos parâmetros θ .

Se considerarmos que $\{e(t)\}$ mede o erro entre a saída do sistema $y(t)$, e a saída do modelo $\hat{y}(t|\theta)$, escrito desta forma para salientar que é a saída estimada com base no vector de parâmetros θ , podemos escrever:

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \quad (2.22)$$

Substituindo (2.22) em (2.20) obtemos:

$$\hat{y}(t|\theta) = G^{-1}(q, \theta)H(q, \theta)u(t) + [1 - G^{-1}(q, \theta)]y(t) \quad (2.23)$$

A expressão (2.23) de $\hat{y}(t|\theta)$ é uma predição da saída do sistema que não depende de $f_e(x, \theta)$ e, portanto, representa um conjunto de modelos de predição ou determinísticos, enquanto que (2.20) e (2.21), juntas, representam um conjunto de modelos probabilísticos ou estocásticos.

A um conjunto de modelos tal como (2.23), chamaremos, estrutura de modelos e será representada por \mathcal{M} .

2.5.1 Representação polinomial das funções de transferência

A forma mais directa de parametrizar uma estrutura de modelos é, talvez, a sua representação através de funções racionais, em que os parâmetros são os coeficientes dos polinómios do numerador e denominador. Modelos de “caixa preta”, é a designação habitual para estas estruturas de modelos.

2.5.1.1 Estrutura de modelos ARX

Provavelmente a descrição mais simples do tipo entrada-saída é a da equação às diferenças:

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_{na} y(t-na) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{nb} u(t-nb) + e(t) \quad (2.24)$$

Uma vez que o ruído branco $\{e(t)\}$, entra directamente como um erro na equação (2.24), estes modelos são designados por estrutura de erro de equação. O vector de parâmetros será:

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{nb}]^T \quad (2.25)$$

Definindo:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \quad (2.26)$$

$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \quad (2.27)$$

Podemos, então, escrever as funções de transferência:

$$H(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad G(q, \theta) = \frac{1}{A(q)} \quad (2.28)$$

O conjunto de modelos (2.24) formam a estrutura ARX e no caso particular de ser $na=0$ então $y(t)$ será modelizado como um filtro FIR. Na figura 2.3, podemos verificar que não é uma representação muito natural, do ponto de vista físico, uma vez que o ruído actua através do denominador antes de ser adicionado à saída.

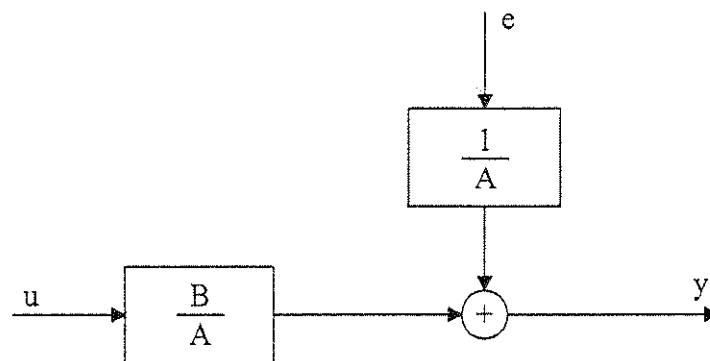


Figura 2.3: Estrutura de modelos ARX.

A predição da saída do sistema (2.23), será:

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q, \theta)u(t) + [1 - A(q, \theta)]y(t) \quad (2.29)$$

Quando não houver qualquer ferramenta estocástica, a predição (2.29) é uma escolha natural se $\{e(t)\}$ em (2.24) é insignificante ou não se conhecem as suas características.

Portanto, é perfeitamente aceitável trabalhar com (2.29), ou mais genericamente com (2.23), também para modelos determinísticos.

Seja:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \cdots -y(t-na) \ u(t) \ u(t-1) \cdots u(t-nb)]^T \quad (2.30)$$

Tendo em conta (2.30) podemos reescrever (2.29) como:

$$\hat{y}(t|\theta) = \theta^T \varphi(t) = \varphi^T(t) \theta \quad (2.31)$$

A partir de (2.31) podemos tirar uma conclusão importante: esta forma de predição mostra que $\hat{y}(t|\theta)$ é um produto escalar entre o vector conhecido $\varphi(t)$ e o vector de parâmetros a estimar θ . Trata-se, portanto, de uma regressão linear e o vector de dados $\varphi(t)$ não é mais do que o vector de regressão.

2.5.1.2 Estrutura de modelos ARMAX

A principal desvantagem da estrutura anterior, prende-se com a falta de liberdade para descrever as características das perturbações de ruído. É possível acrescentar maior flexibilidade se reescrevermos (2.24) da forma:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y(t-1) + \cdots + a_{na} y(t-na) = \\ = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \cdots + b_{nb} u(t-nb) + e(t) + c_1 e(t-1) + \cdots + c_{nc} e(t-nc) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Com

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{nc} q^{-nc} \quad (2.33)$$

Reescrevendo (2.32) e (2.28)

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + C(q)e(t) \quad (2.34)$$

$$H(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}, \quad G(q, \theta) = \frac{C(q)}{A(q)} \quad (2.35)$$

$$\theta = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{na} \ b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{nb} \ c_1 \ \cdots \ c_{nc}]^T \quad (2.36)$$

A estrutura (2.34) é designada por ARMAX e substituindo (2.35) em (2.23) resulta:

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{B(q)}{C(q)} u(t) + \left[1 - \frac{A(q)}{C(q)} \right] y(t) \quad (2.37)$$

ou

$$C(q)\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [C(q) - A(q)]y(t) \quad (2.38)$$

Adicionando $[1-C(q)]\hat{y}(t|\theta)$ em ambos os lados de (2.38) obtém-se:

$$\hat{y}(t|\theta) = B(q)u(t) + [1-A(q)]y(t) + [C(q)-1][y(t) - \hat{y}(t|\theta)] \quad (2.39)$$

Definindo

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \quad (2.40)$$

Em que $\varepsilon(t, \theta)$ é designado por erro de predição e

$$\varphi(t, \theta) = [-y(t-1) \dots -y(t-na) \ u(t) \ u(t-1) \dots u(t-nb) \ \varepsilon(t-1, \theta) \dots \varepsilon(t-nc, \theta)]^T \quad (2.41)$$

Então (2.31) pode escrever-se agora

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t, \theta)\theta \quad (2.42)$$

Repare-se que (2.42) é muito semelhante à regressão linear (2.31). Contudo, a relação (2.42) não é uma regressão linear devido ao efeito não linear de θ no vector $\varphi(t, \theta)$, pelo que é designada por regressão pseudo-linear.

2.5.1.3 Estrutura de modelos do tipo “Output Error”

As estruturas de modelos de erro de equação correspondem todas, a descrições onde o polinómio $A(q)$, aparece nas funções de transferência $H(q)$ e $G(q)$ como factor comum no denominador, figura 2.4, a que corresponde a descrição (2.43).

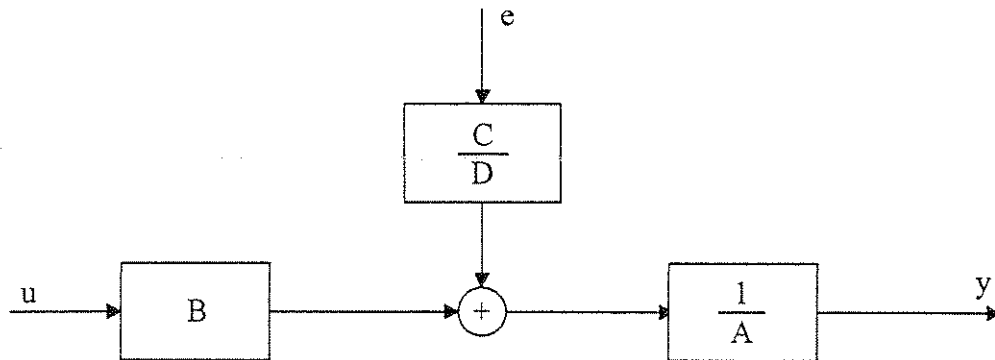


Figura 2.4: Estruturas de modelos de erro de equação.

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (2.43)$$

Se admitirmos que a relação entre a entrada e uma saída não contaminada de ruído, w , pode ser descrita como uma equação linear às diferenças e que as perturbações consistem na contaminação por ruído branco da saída, obtemos a seguinte descrição:

$$w(t) + f_1 w(t-1) + \dots + f_{nf} w(t-nf) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + \dots + b_{nb} u(t-nb) \quad (2.44)$$

$$y(t) = w(t) + e(t) \quad (2.45)$$

Com

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{nf} q^{-nf} \quad (2.46)$$

Podemos reescrever

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + e(t) \quad (2.47)$$

O conjunto de modelos representado na figura 2.5 e descrito através de (2.47), é designado por estrutura de modelos do tipo "Output Error".

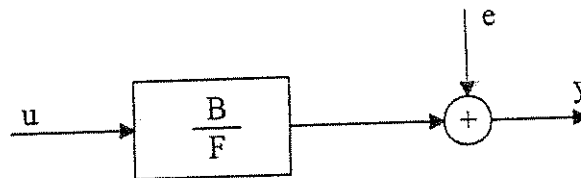


Figura 2.5: Estrutura de modelos do tipo "Output Error".

Uma vez que $w(t)$ não é observável, será estimado à custa de (2.48) e, portanto, dependente de θ .

$$\hat{y}(t|\theta) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) = w(t, \theta) \quad (2.48)$$

Com o vector

$$\varphi(t, \theta) = [u(t) \ u(t-1) \ \dots \ u(t-nb) \ -w(t-1, \theta) \ \dots \ -w(t-nf, \theta)]^T \quad (2.49)$$

Resulta

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t, \theta) \theta \quad (2.50)$$

2.5.1.4 Estrutura de modelos "Box-Jenkins"

Esta estrutura de modelos tem a seguinte descrição:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t) \quad (2.51)$$

Esta é a forma mais natural de modelização de sistemas em que as funções de transferência $H(q)$ e $G(q)$ são parametrizadas independentemente como funções racionais.

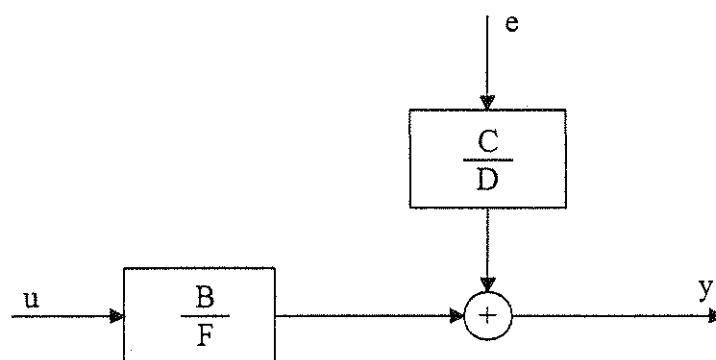


Figura 2.6: Estrutura de modelos “Box-Jenkins”.

2.5.1.5 Forma geral das estruturas de modelos

A descrição geral das estruturas de modelos inclui um total de 32 conjuntos de modelos diferentes, consoante os polinómios A, B, C, D e F, que forem utilizados.

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (2.52)$$

A “Toolbox” de identificação do “software MATLAB”, inclui esta descrição geral, com a possibilidade de modelização do atraso, ou tempo morto, do sistema em causa. Neste caso a descrição (2.52) toma a forma:

$$A(q)y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}u(t-nk) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (2.53)$$

Em que nk é o número de atrasos desde a entrada até à saída.

O mesmo “software” inclui, naturalmente, as estruturas anteriores e outros casos particulares de (2.53), que no caso de corresponder a um sistema com n_y saídas e n_u entradas, toma a forma:

$$A(q)y(t) = \frac{B_1(q)}{F_1(q)}u_1(t-nk_1) + \frac{B_2(q)}{F_2(q)}u_2(t-nk_2) + \dots + \frac{B_{n_u}(q)}{F_{n_u}(q)}u_{n_u}(t-nk_{n_u}) + \frac{C(q)}{D(q)}e(t) \quad (2.54)$$

Em que $A(q)$ é uma matriz de dimensão $n_y \times n_y$ e $B(q)$ uma matriz de dimensão $n_y \times n_u$.

2.5.1.6 Identificabilidade das estruturas de modelos

Um sistema é identificável se o método de identificação conduzir a um vector de parâmetros estimados, $\hat{\theta}$, único e/ou se o modelo resultante é igual ao sistema em causa. Este aspecto, tem a ver com o facto de se saber se os dados observados (condições experimentais) são suficientemente informativos para distinguir diferentes

modelos, bem como as suas propriedades, dentro da estrutura de modelos. Se o conjunto de dados é suficientemente informativo, então, a questão é saber se diferentes vectores estimados $\hat{\theta}$, podem dar modelos iguais. (Este último caso está directamente relacionado com a invertibilidade da estrutura de modelos.)

Seja

$D_{\mathcal{M}}$ - o domínio do vector de parâmetros θ , da estrutura de modelos \mathcal{M}

D_C - o domínio do vector de parâmetros onde a estimação converge

θ^* - um vector de parâmetros tal que $\theta^* \in D_C$

Segundo [Ljung 87], uma estrutura de modelos, \mathcal{M} , é globalmente identificável se:

$$\mathcal{M}(\theta) = \mathcal{M}(\theta^*), \theta \in D_{\mathcal{M}} \Rightarrow \theta = \theta^*, \text{ para quase todos os vectores } \theta^* \in D_{\mathcal{M}}$$

Será totalmente identificável se:

$$\mathcal{M}(\theta) = \mathcal{M}(\theta^*), \theta \in D_{\mathcal{M}} \Rightarrow \theta = \theta^*, \forall \theta^* \in D_{\mathcal{M}}$$

Será localmente identificável se:

$$\mathcal{M}(\theta) = \mathcal{M}(\theta^*), \theta \in \mathcal{V}_{(\theta^*, \varepsilon)} \Rightarrow \theta = \theta^*,$$

em que $\mathcal{V}_{(\theta^*, \varepsilon)}$ é a vizinhança de θ^* de raio ε .

O conceito de identificabilidade refere-se a uma descrição única, de um dado sistema, numa estrutura de modelos.

A estrutura de modelos (2.52) é globalmente identificável. Quando $C(q)$ e $F(q)$ são de ordem zero, a estrutura é totalmente identificável. As restantes estruturas do tipo "caixa preta", podem ser igualmente identificáveis, em termos gerais, fazendo com que tenham uma ordem coincidente com o número de saídas [Ljung 87].

2.5.2 Representação em espaço de estados

Em alternativa às estruturas de modelos de "caixa preta", a modelização de sistemas pode ser realizada através de modelos em espaço de estados, que é uma solução adequada quando se pretende inserir significado físico nos modelos e mais concretamente, vectores de parâmetros físicos. Esta questão torna-se mais pertinente no caso dos sistemas lineares variantes no tempo e sistemas não lineares. Se θ for o vector de parâmetros a estimar, então podemos escrever:

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t) \quad (2.55)$$

$$y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t) \quad (2.56)$$

Em sùmula, podemos salientar que as estruturas de “caixa preta” são conjuntos de modelos flexíveis para englobar a modelização de uma grande variedade de sistemas, sem olhar às suas leis físicas. Quando se pretende uma estrutura de modelos com parâmetros físicos, é necessário entrar com as equações que descrevem a estrutura física do sistema e os modelos contínuos de espaço de estados constituem a solução básica.

2.6 Descrição de modelos lineares variantes no tempo

Como referido anteriormente, a dependência do tempo dos coeficientes das equações diferenciais, não destroi a linearidade. Consequentemente, a análise feita para os modelos lineares invariantes no tempo, continua válida. Contudo, a transformada simples de Laplace, já não tem a mesma utilidade.

2.7 Descrição de modelos não lineares

Nos modelos lineares (e o princípio da sobreposição associado), o conhecimento da resposta impulsional, por exemplo, é suficiente para determinar a saída para uma dada entrada arbitrária. Tal procedimento tem vantagens, as quais gostaríamos de ter para descrever os sistemas não lineares:

- Dá uma relação explícita entre a entrada e a saída
- Facilita a discussão de combinações de sistemas
- Permite considerar entradas aleatórias

Para algumas classes de sistemas, estes requisitos são contemplados pela série de Volterra. A representação de Volterra trata os sistemas lineares como um caso particular dos sistemas não lineares. Torna possível utilizar a análise no domínio dos tempos, das frequências, etc., em sistemas não lineares.

A descrição através da série de Volterra é uma generalização directa da descrição de sistemas lineares usando o integral de convolução.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \int_0^t h_1(\tau_1)u(t-\tau_1)d\tau_1 + \int_0^t \int_0^t h_2(\tau_1, \tau_2)u(t-\tau_1)u(t-\tau_2)d\tau_1 d\tau_2 + \\
 & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)(\dots)
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

A resposta impulsional $h(\tau)$ de sistemas lineares dá lugar a:

$$h_1(\tau_1), \quad h_2(\tau_1, \tau_2), \quad h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3), \quad \text{etc.}
 \tag{2.58}$$

Onde h_i é a resposta impulsional de grau i .

O desenvolvimento de modelos para sistemas não lineares é semelhante ao dos sistemas lineares. A principal diferença, de um ponto de vista prático, é que a função de predição torna-se numa função não linear das observações passadas. É de salientar que um modelo é, em primeiro lugar, uma função de predição para futuras saídas, a partir de observações passadas.

2.7.1 Linearidade nos parâmetros

Para a estimação paramétrica, outra distinção entre linearidade e não linearidade (além da já feita) é importante: Um modelo pode ser linear ou não linear nos parâmetros. Diz-se linear nos parâmetros se o erro é linear nos parâmetros.

Para uma parte de sistemas não lineares, uma representação não paramétrica é obtida através da série de Volterra, utilizando respostas impulsivas de grau crescente. Uma aproximação a estas funções, com um número finito de pontos, conduz a um modelo linear nos parâmetros. Para a maioria dos casos práticos, o número de parâmetros necessários para esta descrição é demasiado elevado. Além disso, a interpretação física dos parâmetros torna-se impossível.

2.7.2 A importância do conhecimento à priori

Mais do que para processos lineares (para os quais os modelos não paramétricos são realizáveis), é necessário escolher a modelização paramétrica quando estudamos sistemas não lineares, e o uso do conhecimento, à priori, do sistema físico, ganha uma importância acentuada.

Habitualmente, nos casos em que não é utilizado aquele conhecimento, surgem dois tipos de problemas:

- A dimensionalidade causada pelo número elevado de coeficientes a serem estimados
- O elevado número de amostras dos dados de entrada e saída, necessários para a estimação

Para sistemas não lineares é altamente desejável o uso do conhecimento à priori, do sistema em causa, para a construção de modelo. Isto leva a uma ampla variedade de modelos direccionados para casos particulares com objectivos específicos.

O uso de modelos do tipo “caixa preta”, pode ser atractivo de um ponto de vista teórico, mas leva, muitas vezes, a soluções dispendiosas e desajustadas, pelo facto de não se ter em conta algum conhecimento do sistema.

Assim, a potencial riqueza de possibilidades dos modelos de “caixa preta”, deixa de ser aplicável na maior parte dos casos. Em contrapartida, o conhecimento do carácter da não linearidade deve ter-se em conta na construção dos modelos. Contudo, a não linearidade não deve incluir-se na forma analítica da estrutura de modelos, mas

poderá, muito bem, ser definida em tabelas e o modelo paramétrico terá entradas nessas tabelas.

O conhecimento à priori, pode estar ligado a vários aspectos como, por exemplo:

- O conhecimento físico ou matemático do sistema bem como da estrutura e possíveis valores de alguns parâmetros
- Valores iniciais dos parâmetros
- Conhecimento da variação dos parâmetros

O conhecimento da variação dos parâmetros é uma necessidade básica e pode determinar a aplicabilidade, ou não, de qualquer tipo de implementação para o problema.

2.7.3 Linearização

Outra forma de tratar os sistemas não lineares consiste em transformá-los em sistemas lineares variantes no tempo. Talvez o uso mais comum destes, seja a linearização dos sistemas não lineares em torno de uma dada trajetória ou ponto de funcionamento.

Mesmo os sistemas lineares invariantes no tempo, tornam-se variantes no tempo, quando:

- As diferentes variáveis são amostradas com frequências de amostragem diferentes
- O intervalo de amostragem não é constante

Neste caso, os coeficientes das matrizes da representação no espaço de estados, são dependentes do tempo.

Existem várias possibilidades de parametrizar as funções que representam a não linearidade, numa dada representação (por exemplo a aproximação polinomial), mas na maior parte dos casos é necessário conhecer por dentro o carácter da não linearidade, para obter estruturas de modelos aceitáveis, como referido anteriormente.

Se o carácter da não linearidade é conhecido, muitas vezes, é possível tratar essa não linearidade de modo a obter um modelo linear para o sistema. Vamos admitir que se trata de uma não linearidade estática à entrada, enquanto que o sistema é em si linear, figura 2.7. Se a não linearidade é conhecida, é possível redefinir a entrada como

$$u_v = f(u(t)) \quad (2.59)$$

e tratar o sistema como linear. O resultado desta linearização é conhecido como modelo de Hammerstein.

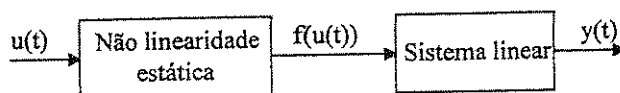


Figura 2.7: Sistema linear com não linearidade estática à entrada.

De modo semelhante, mas com uma análise mais complexa, é possível ter um sistema não linear mais geral, com várias entradas e várias saídas e redefinir quer as entradas, quer as saídas, quer combinações entre ambas, de modo a obter um sistema linear, virtual, com uma ou mais entradas virtuais e uma ou mais saídas virtuais.

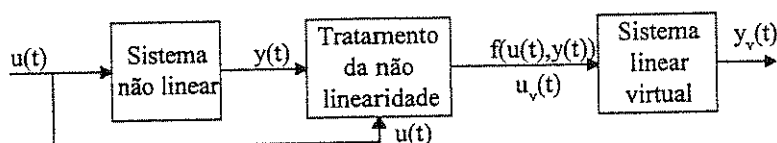


Figura 2.8: Linearização de um sistema não linear.

A figura 2.8 mostra o que acabámos de dizer para o caso de uma única entrada e uma única saída, quer no sistema não linear inicial, quer no sistema linear virtual resultante.

2.8 Conclusão

Neste capítulo vimos que os modelos podem ser mentais, físicos ou matemáticos, mas são os modelos matemáticos que mais nos interessam, porque descrevem os sistemas de uma forma quantitativa.

Classificamos os modelos (sistemas) em três classes fundamentais:

- Modelos lineares invariantes no tempo
- Modelos lineares variantes no tempo
- Modelos não lineares

Além da classificação anterior, os modelos são parametrizados em termos de um número finito ou infinito de parâmetros e, por isso, designam-se por modelos paramétricos ou não paramétricos, respectivamente. Podem ainda, ter um carácter determinístico ou estocástico consoante a natureza dos sinais de entrada e de saída, incluindo as perturbações de ruído. Os modelos estocásticos têm implícita uma representação de partes dos sistemas pouco conhecidas, ou impossíveis de conhecer. É através do conhecimento adquirido ao longo do tempo que estas partes, por exemplo as perturbações de ruído, são tratadas com ferramentas de inferência estatística.

Para sistemas descritos utilizando modelos lineares invariantes no tempo, apresentamos as principais estruturas de modelos, ditas de “caixa preta” e em alternativa a estas, referimos a estrutura designada por espaço de estados. A opção

entre estes dois tipos de estruturas de modelos paramétricos, pode fazer-se do seguinte modo:

- Estruturas de modelos de “caixa preta”: Quando o objectivo é obter conjuntos de modelos flexíveis, de modo que possam englobar uma grande variedade de sistemas sem olhar para o interior da estrutura física do sistema.
- Estruturas de modelos com parâmetros físicos: Neste caso, a ideia é incorporar significado físico no interior do conjunto de modelos, de modo a que sejam parametrizados com um vector de parâmetros físicos desconhecidos que descrevem a dinâmica dos sistemas em causa e por isso pretendemos estimá-los. Os modelos contínuos no espaço de estados são o exemplo típico desta estratégia.

Vimos também como se podem linearizar os modelos que descrevem sistemas não lineares. Basicamente, um sistema pode ser em si não linear, mas o modelo que o descreve pode ser linearizado em torno de um ponto de funcionamento, ou pode ser transformado num modelo linear nos parâmetros, se o erro que mede a qualidade do modelo for linear nos parâmetros. Vimos ainda, como é importante, nos sistemas não lineares, o conhecimento à priori, nomeadamente, o carácter da não linearidade.

Capítulo 3

Estudo dos métodos de identificação paramétrica

3. Estudo dos métodos de identificação paramétrica	45
3.1 Introdução	47
3.2 O conceito de identificação	47
3.3 Análise das características do sinal de entrada	49
3.4 Critérios para a selecção do melhor modelo	50
3.4.1 Critério de minimização dos erros de predição	51
3.4.2 Condições para a existência de um mínimo do critério de erro	53
3.4.3 Critério de minimização dos erros de predição, variante no tempo	55
3.4.4 Método dos mínimos quadrados	56
3.4.5 Critério de máxima verosimilhança	57
3.4.6 Critério de minimização dos erros de predição correlacionados com os dados anteriores	59
3.5 Métodos numéricos de minimização do critério de erro	60
3.6 Classificação dos métodos paramétricos	64
3.6.1 Métodos determinísticos e métodos estocásticos	64
3.6.2 Identificação em tempo real e em tempo diferido	65
3.7 Métodos recursivos de identificação paramétrica	67
3.7.1 Método dos mínimos quadrados recursivo	67
3.7.2 Método do Filtro de Kalman	70
3.7.3 Métodos recursivos de erro de predição	70
3.7.4 Regressões pseudo-lineares	73
3.7.5 Selecção das modificações de cada iteração	74
3.7.5.1 Escolha da direcção de convergência	74
3.7.5.2 Escolha do ganho e do factor de esquecimento	74
3.7.5.3 Método com inclusão de variações nos parâmetros do modelo	76
3.8 Conclusão	76

3. Estudo dos métodos de identificação paramétrica

3.1 Introdução

No capítulo anterior vimos as estruturas de modelos mais frequentemente utilizadas na identificação de sistemas. Neste capítulo, admitimos que já foi seleccionado um conjunto de modelos parametrizados com um vector de parâmetros θ , numa estrutura de modelos, \mathcal{M} .

A procura do melhor modelo, entre o conjunto de modelos seleccionados, consiste em determinar ou estimar os parâmetros θ . Existem várias formas de organizar aquilo que define o melhor modelo, bem como de realizar a tarefa de encontrar esse modelo, entre os modelos do conjunto seleccionado.

Vamos começar, por uma tentativa de sintetizar o conceito de identificação, que inclui cinco entidades básicas: a aquisição de dados; a escolha da estrutura de modelos, \mathcal{M} ; a definição do critério que define o melhor modelo; a estimação dos parâmetros desse modelo e verificação e validação do modelo, $\mathcal{M}(\theta)$, tendo sempre em conta, o conhecimento à priori que se tem do sistema. Iremos referir-nos, também, às principais características, para a identificação, dos sinais de excitação do sistema, mas o principal objectivo deste capítulo prende-se com a definição do critério de selecção do melhor modelo e a estimação dos seus parâmetros.

Este último aspecto, em muitos casos, tem de ser realizado em tempo real, devido à necessidade de tomar decisões “on line”, como por exemplo, em controlo vectorial no motor de indução trifásico. Deste modo, vamos apresentar os principais métodos recursivos de identificação paramétrica.

3.2 O conceito de identificação

A construção de um modelo envolve três entidades fundamentais:

- Os dados
- Um conjunto de modelos candidatos
- Um critério para a selecção do melhor modelo

Segundo Ljung, o problema da identificação consiste, simplesmente, em encontrar um modelo, de entre o conjunto de modelos candidatos, o qual representará tão bem quanto possível, de acordo com um determinado critério, a informação contida nos dados dos sinais de entrada e de saída de um sistema específico.

Os dados resultam da observação dos sinais à entrada e à saída do sistema. Sempre que possível, devem ser recolhidos durante a execução de procedimentos previamente determinados. Através de experiências programadas, o operador pode definir os sinais

de entrada e saída, os instantes em que vai efectuar as medições e seleccionar os sinais de entrada mais adequados por forma que a informação, neles contida, seja máxima. Quando não é possível a realização de uma experiência específica para a identificação, os dados devem ser adquiridos durante o funcionamento normal do sistema. Existem, porém, situações em que os dados não são suficientemente informativos, pelo que, por vezes, é conveniente perturbar as entradas do sistema para que a identificação seja bem sucedida.

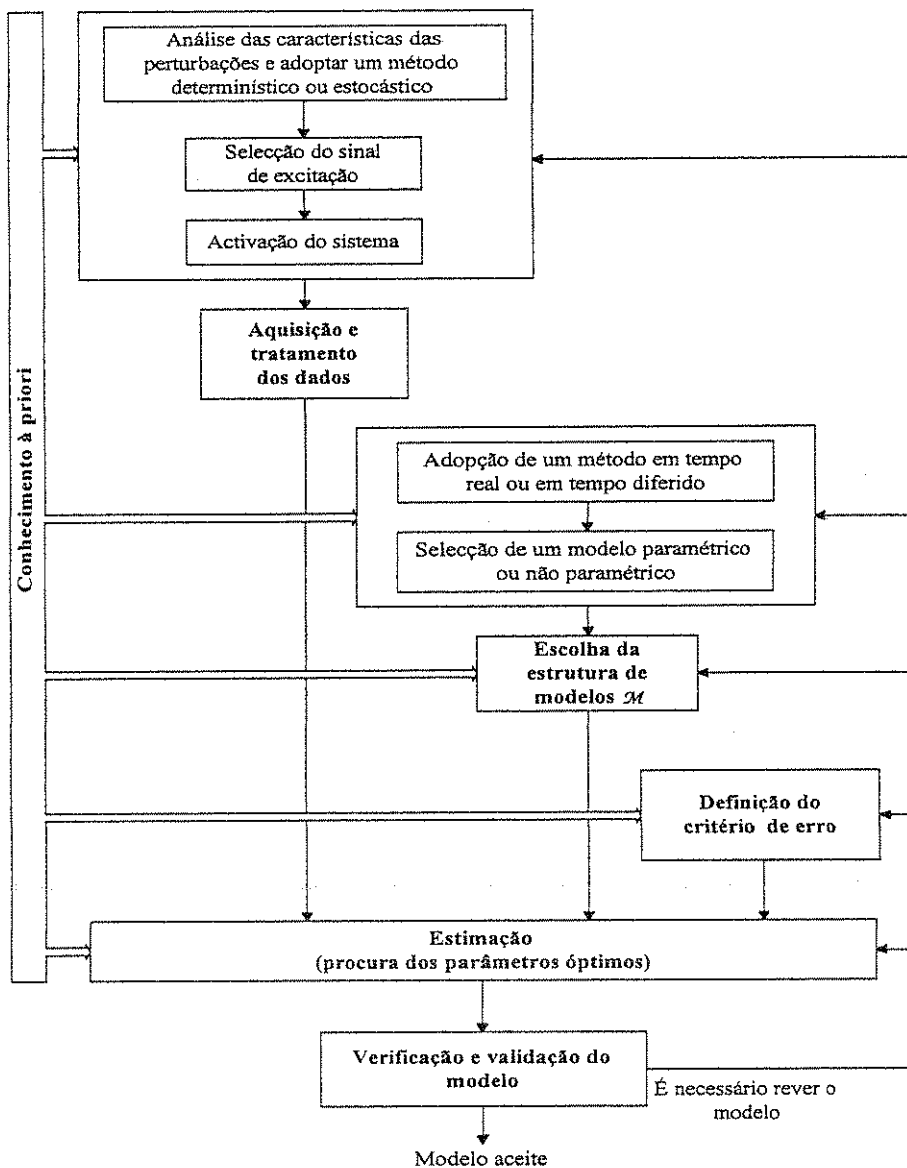


Figura 3.1: Procedimentos da identificação de sistemas.

A escolha do conjunto de modelos candidatos é um dos passos mais importantes na identificação de um sistema. Habitualmente, é necessário combinar toda a intuição do analista com o conhecimento à priori do sistema. O conjunto de modelos resulta, muitas vezes, de um procedimento prévio de modelização. Noutras situações, são utilizados modelos lineares, sem recorrer a qualquer conhecimento do sistema. Nestes,

os parâmetros são, simplesmente, ajustados de modo a reflectir a dinâmica do sistema e são os que já designamos por modelos de “caixa preta”.

A selecção do melhor modelo é aquilo a que nós chamamos o método ou algoritmo de identificação. Normalmente, consiste na minimização de um critério de um erro que, em princípio, mede a precisão com que o modelo consegue reproduzir os dados.

A sequência dos procedimentos necessários à identificação de um modelo surge de uma forma natural, figura 3.1. Assim, teremos de seleccionar o modelo a partir do conjunto de modelos candidatos, recolher os dados, verificar e validar o modelo adoptado. Na validação de um modelo não nos podemos limitar aos dados utilizados na sua determinação. Devemos, também, comparar o modelo com o sistema, a partir de dados adquiridos noutras situações que recriem, o mais possível, o objectivo que se tem em vista com a identificação. Se os resultados não forem satisfatórios, teremos de determinar as causas possíveis e se necessário repetir os respectivos procedimentos. A validação de modelos é um aspecto crucial no problema da identificação, mas não existe um procedimento absoluto para esse fim.

3.3 Análise das características do sinal de entrada

A identificação de um sistema dinâmico obriga a que o sinal de entrada tenha de satisfazer certas condições. Uma dessas condições é que a dinâmica do sistema tenha de ser permanentemente excitada (durante o período de identificação) pelo sinal de entrada.

Outro aspecto a ter em conta é o de seleccionar um sinal de entrada, de modo a minimizar certos tipos de erros, como por exemplo a saturação magnética, no caso do motor de indução trifásico.

Como referimos, é de vital importância que o sinal de entrada excite todos os modos do sistema, (isto é, o sistema tem de ser controlável) e deve ser de excitação persistente para o sistema ser identificável. Analisemos, mais em detalhe, estes conceitos.

Definição:

Um sinal quase estacionário, $u(t)$, com espectro $\Phi_u(\omega)$, é de excitação persistente de ordem n , se para qualquer filtro da forma:

$$F_n(q) = f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \dots + f_n q^{-n}$$

a relação $|F_n(e^{j\omega})|^2 \Phi_u(\omega) \equiv 0$, implica que $F_n(e^{j\omega}) \equiv 0$, [Ljung 87].

Por outras palavras, $u(t)$ é de excitação persistente de ordem n , se o seu espectro, $\Phi_u(\omega)$, é diferente de zero em, pelo menos, n pontos no intervalo $-\pi < \omega < +\pi$.

Um conjunto de dados adquiridos é suficientemente informativo em relação à estrutura de modelos, \mathcal{M} , se permitir distinguir quaisquer dois modelos de \mathcal{M} . Assim o funcionamento do sistema, durante a identificação, será suficientemente informativo, se permitir recolher dados suficientemente informativos. Por sua vez, o funcionamento do sistema (em malha aberta) será suficientemente informativo se for persistentemente excitado.

A estrutura de modelos é fortemente ditada pelo seu objectivo final. Neste estudo, surge naturalmente uma estrutura paramétrica como resultado das equações do modelo matemático que descreve a dinâmica do motor de indução trifásico. Trata-se, portanto, de um modelo paramétrico, cujos parâmetros aparecem nas equações diferenciais.

3.4 Critérios para a selecção do melhor modelo

Depois de termos visto as estruturas de modelos básicas, no capítulo anterior, estamos agora numa fase em que se admite seleccionada a estrutura, \mathcal{M} , melhor adequada ao sistema, com um conjunto de modelos, $\mathcal{M}(\theta)$, parametrizados com um vector de parâmetros θ .

Seja Z , o conjunto de dados observados:

$$Z \rightarrow \hat{\theta} \in D_{\mathcal{M}} \quad (3.1)$$

em que:

$$Z = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)] \quad (3.2)$$

e o erro de predição:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \quad (3.3)$$

Pretendemos conhecer um teste através do qual possamos avaliar diferentes modelos, aptos a descrever os dados observados. Uma característica fundamental de um modelo é a sua capacidade de predição, com base nestes dados.

A forma como os diferentes modelos descrevem os dados observados é quantificada através do erro de predição. Um “bom” modelo, é aquele que gera uma boa predição, isto é, aquele que produz erros de predição pequenos quando aplicado aos dados observados. Existe uma flexibilidade considerável, na selecção das várias funções de predição e, portanto, uma correspondente liberdade na definição daquilo que é um “bom” modelo, em termos da sua performance na predição.

Um princípio básico da estimação de parâmetros é o seguinte: com base no conjunto de dados Z , calcula-se o erro de predição utilizando a equação (3.3). Ao fim da iteração k , seleccionamos o vector de parâmetros $\hat{\theta}$, de modo que os erros de predição

$\varepsilon(k, \theta)$, sejam tão pequenos quanto possível. A questão está em qualificar o significado de pequeno, neste contexto.

3.4.1 Critério de minimização dos erros de predição

Vamos admitir que o erro de predição (3.3) é filtrado através de um filtro linear $L(q)$:

$$\varepsilon_F(t, \theta) = L(q)\varepsilon(t, \theta), \quad 1 < t < N \quad (3.4)$$

Utilizemos o seguinte critério:

$$J(\theta, Z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ell(\varepsilon_F(t, \theta)) \quad (3.5)$$

Onde $\ell(\cdot)$ é uma função, em geral positiva. O critério (3.5) é uma medida natural da validade do modelo, $\mathcal{M}(\theta)$. A estimação do vector de parâmetros, $\hat{\theta}$, é obtida minimizando (3.5):

$$\hat{\theta} = \arg \min J(\theta, Z) \quad (3.6)$$

A minimização de (3.6) leva a procedimentos de estimação bem conhecidos e utilizados, designados por métodos de identificação de erro de predição, PEM - "Prediction-Error Methods". Métodos particulares, com nomes próprios, resultam de (3.6), dependendo da escolha de $\ell(\cdot)$, do filtro $L(\cdot)$, da estrutura de modelos e, em alguns casos, da forma como a minimização é realizada.

Escolha de $L(\cdot)$:

O efeito do filtro $L(\cdot)$ é permitir uma maior liberdade em determinadas situações, no que diz respeito às propriedades do erro de predição. Se este é linear e invariante no tempo, e se $u(t)$ e $y(t)$ são escalares, então a aplicação do filtro ao erro $\varepsilon(t, \theta)$ tem o mesmo resultado que uma pré-filtragem dos sinais $u(t)$ e $y(t)$.

No domínio das frequências, o filtro $L(\cdot)$ tem um efeito de pesagem de frequências. Assim, certas propriedades podem ser reforçadas ou removidas e fenómenos de frequência altas, nomeadamente as perturbações de ruído, podem ser retirados.

Quando se trata da análise e descrição de métodos com modelos de ruído genéricos, em sistemas lineares, a escolha habitual é $L(q) \equiv 1$.

Escolha de $\ell(\cdot)$:

Quanto à escolha da função $\ell(\cdot)$, a primeira candidata é a função quadrática:

$$\ell(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 \quad (3.7)$$

Se considerássemos para a função $\ell(\cdot)$, directamente o erro ε , era possível que os erros negativos e positivos se compensassem mutuamente em (3.5), no conjunto das N amostras. Também poderíamos considerar o valor absoluto do erro, $|\varepsilon|$, mas o quadrado do erro é preferível, relativamente ao valor absoluto, porque tem a particularidade de evidenciar os erros de maior significado e, portanto, permite uma melhor adaptação na compensação dos parâmetros, embora o valor absoluto seja mais rápido muito próximo do mínimo, figura 3.2. Podem-se sumariar algumas razões que justificam a utilização da função quadrática:

1. A função quadrática é uma das mais simples com um mínimo bem definido.
2. Uma função geral, desenvolvida em torno de um mínimo local, é convenientemente aproximada pela função quadrática (série de Taylor de ordem dois).
3. Embora seja mais lenta muito próximo do mínimo, a função quadrática é mais eficaz do que a aproximação linear numa vizinhança mais alargada, sendo portanto, preferível.
4. Os métodos baseados numa função quadrática podem ser invariantes quando se fazem transformações lineares de variáveis.

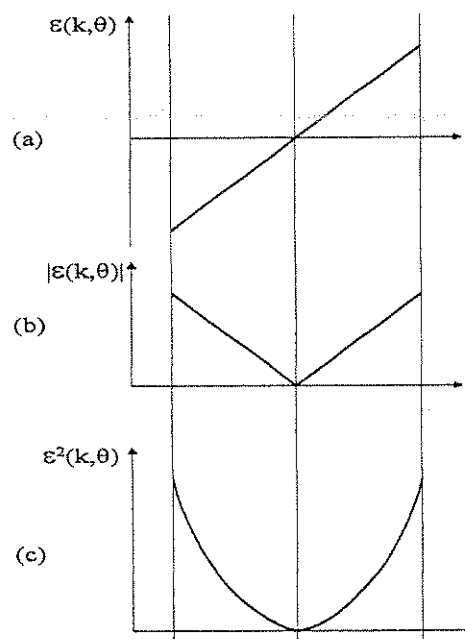


Figura 3.2: Algumas funções de $\ell(\cdot)$.

A escolha (3.7) e $L(q) \equiv 1$, torna o critério (3.5) uma função de θ , figura 3.3. Para $\hat{\theta}$, na vizinhança do vector óptimo, podemos estabelecer facilmente que $J(\theta)$ tem um comportamento do tipo parabólico.

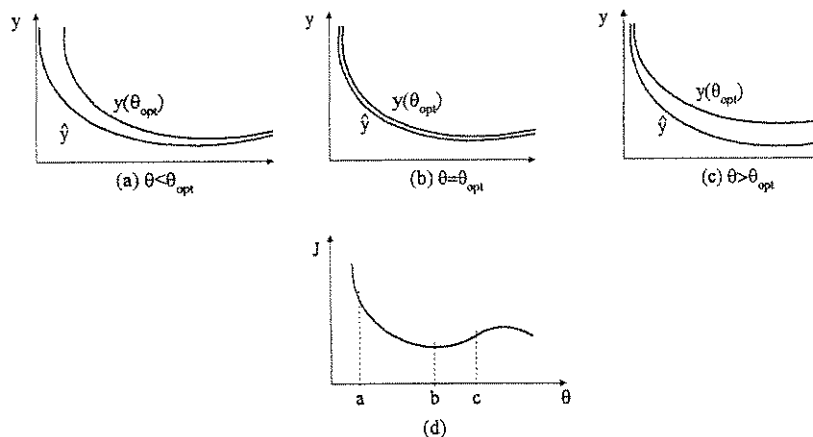


Figura 3.3: Interpretação geométrica da função $J(\theta)$.

Como exemplo, a figura 3.4 representa algumas curvas de erro quadrático constante, designadas por curvas de isocritério, num plano definido, apenas, por dois parâmetros estimados.

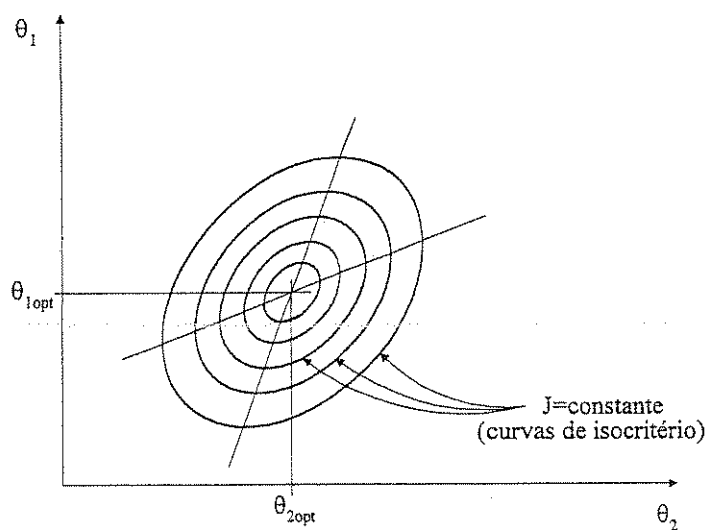


Figura 3.4: Traçado das curvas de isocritério.

3.4.2 Condições para a existência de um mínimo do critério de erro

O problema da minimização do critério de erro, não é mais do que encontrar um mínimo da função $J(\theta)$, no espaço dos parâmetros, que designamos por θ_{opt} no ponto mínimo da função. Na prática podemos encontrar um mínimo que poderá não ser o mínimo global que pretendemos, mas um mínimo local, num dado ponto do espaço dos parâmetros. A figura 3.5 dá um exemplo para o caso de um único parâmetro.

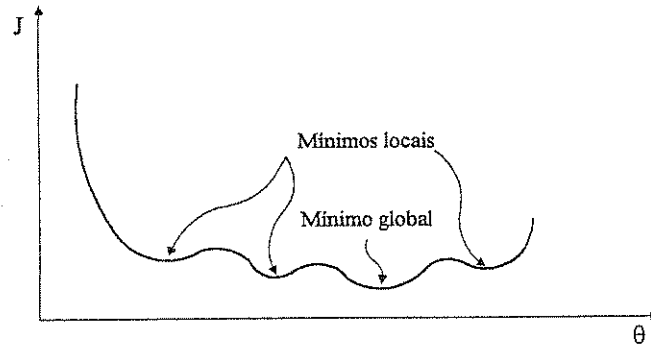


Figura 3.5: Mínimos locais e mínimo global.

As dificuldades encontradas para garantir a convergência para o mínimo global são consideráveis, principalmente se este se encontra numa região do espaço dos parâmetros com vários mínimos locais. O procedimento de minimização, pode convergir, de forma não desejada, para um mínimo local que tomaremos, erradamente, por mínimo global.

Podem-se colocar duas questões:

1. Como determinar se o vector de parâmetros estimados é a solução óptima?
2. Se não é a solução óptima, como prosseguir no espaço dos parâmetros, de modo a encontrá-la?

A primeira questão leva ao desenvolvimento dos critérios de minimização que permitem determinar se um dado ponto é ou não a solução óptima da função a minimizar.

Para resolver o problema da segunda questão é possível fazer uma procura sistemática no espaço dos parâmetros, mas tal procedimento pode requerer um tempo não desprezável e portanto, devem procurar-se estratégias mais expeditas. Todavia, muitos dos métodos, limitam-se a resolver a primeira questão.

Os critérios de minimização de uma função, com mais de uma variável, são obtidos a partir do desenvolvimento da série de Taylor da função a minimizar. Na ausência de conhecimento à priori sobre a natureza da função no domínio dos parâmetros, os critérios caracterizam apenas, os mínimos locais. É suposto que a função a minimizar é continuamente derivável, pelo menos, na primeira e segunda derivadas.

As condições necessárias e suficientes para um mínimo local θ_{opt} , são:

1. $J'(\theta_{opt}) = 0$
2. $d^T H d \geq 0, \forall d$

onde:

- $J'(\theta_{opt})$ é o gradiente da função a minimizar, no ponto mínimo
- H é a matriz Hessiana da função (matriz das segundas derivadas parciais)
- d é a direcção de procura do mínimo, no espaço dos parâmetros

Grande parte dos métodos, baseiam-se na primeira condição para encontrar o vector de parâmetros óptimo. Neste caso, o mínimo é um ponto estacionário e, para que seja um mínimo local, é necessário que se verifique a segunda condição.

Um vector gradiente nulo, significa, simplesmente, que não existe nenhuma direcção, a partir de θ_{opt} , onde a função $J(\theta)$ aumente ou diminua. Podemos ter, então, um mínimo, um máximo ou um patamar de $J(\theta)$. Uma matriz Hessiana, positivamente definida, corresponde ao conceito geométrico de convexidade local estrita. Isto significa que $J(\theta)$ apresenta uma curvatura crescente em todas as direcções, a partir de θ_{opt} .

3.4.3 Critério de minimização dos erros de predição, variante no tempo

Pode acontecer que os dados observados nos diferentes instantes, tenham um grau de confiança que varia ao longo do tempo. Por exemplo, devido a modificações nas perturbações de ruído, ou o nível de informação nos sinais não se manter sensivelmente constante. Nestes casos a função $\ell(\cdot)$ passa a ser variante no tempo:

$$J(\theta, Z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ell(\varepsilon(t, \theta), \theta, t) \quad (3.8)$$

Deste modo, os dados menos fiáveis podem ter um peso menor no critério (3.8). É frequente trabalhar-se com um critério que tenha explicitamente uma função de pesagem, $\beta(N, t)$:

$$J(\theta, Z) = \sum_{t=1}^N \beta(N, t) \ell(\varepsilon(t, \theta), \theta) \quad (3.9)$$

Quando as estimações do vector de parâmetros $\hat{\theta}$, para diferentes valores de N , são comparadas, como por exemplo na identificação recursiva, torna-se interessante discutir a variação da função $\beta(N, t)$ com N .

3.4.4 Método dos mínimos quadrados

Vimos no capítulo anterior que as estruturas de modelos sob a forma de uma regressão linear, são muito úteis para descrever sistemas lineares e não lineares. Uma regressão linear toma a forma:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t)\theta \quad (3.10)$$

que é linear em θ . O vector de regressão $\varphi(t)$, para o caso da estrutura ARX, era:

$$\varphi(t) = [-y(t-1) \cdots -y(t-na) \ u(t) \ u(t-1) \cdots u(t-nb)]^T \quad (3.11)$$

Substituindo (3.10) em (3.3), o erro de predição fica:

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T(t)\theta \quad (3.12)$$

Se escolhermos:

$$L(q) \equiv 1 \quad \text{e} \quad \ell(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \quad (3.13)$$

resulta o critério:

$$J(\theta, Z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} (y(t) - \varphi^T(t)\theta)^2 \quad (3.14)$$

$J(\theta, Z)$ em (3.14), é o chamado critério dos mínimos quadrados, para uma regressão linear. A estimação de mínimos quadrados obtém-se da forma:

$$\hat{\theta} = \arg \min J(\theta, Z) = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \quad (3.15)$$

Definindo a matriz,

$$R(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (3.16)$$

e o vector coluna,

$$f(N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t)y(t) \quad (3.17)$$

podemos reescrever (3.15) da forma:

$$\hat{\theta} = [R(N)]^{-1} f(N) \quad (3.18)$$

O método dos mínimos quadrados é um caso particular dos métodos de identificação de erro de predição.

Para o caso de se pretender dar uma importância relativa aos dados, introduzimos uma função de pesagem, $\beta(N,t)$, de modo que (3.15) fica:

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \beta(N,t) \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \beta(N,t) \varphi(t) y(t) \quad (3.19)$$

O método dos mínimos quadrados tem muitas vantagens, mas a mais importante é que o mínimo global é garantidamente atingido (não existem mínimos locais). A principal dificuldade deste método verifica-se quando, em certas estruturas como a ARX, o ruído não for ruído branco. Nestes casos o método dos mínimos quadrados não converge para os verdadeiros valores dos parâmetros.

3.4.5 Critério de máxima verosimilhança

A área da inferência estatística, bem como a identificação de sistemas e estimação de parâmetros, trabalham com o problema da extracção de informação a partir de dados observados pouco fiáveis, ou sobre os quais temos alguma incerteza. Esses dados adquiridos são então representados como variáveis estocásticas.

Vamos admitir que antes de adquirir os dados, sabemos que o vector de saída y é uma sequência de amostras que são variáveis aleatórias com uma função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = f_y(x; \theta) \quad (3.20)$$

isto é:

$$P(y) = \int f_y(x; \theta) dx \quad (3.21)$$

Depois de adquiridos os dados, conhecemos as amostras $\{y(1), y(2), \dots, y(k)\}$, que são os valores das variáveis aleatórias $\{x(1), x(2), \dots, x(k)\}$. Pretendemos agora, determinar as estimativas $\hat{\theta}$. A relação entre as amostras $\{y(1), y(2), \dots, y(k)\}$ e $\hat{\theta}$ é a mesma que (3.20) e θ . Assim:

$$L(y_1, y_2, \dots, y_N; \theta) = L_y(y; \theta) \quad (3.22)$$

é a função de verosimilhança e uma vez que conhecemos $y(1), y(2), \dots, y(k)$, será apenas função de $\hat{\theta}$. Por conveniência é, habitualmente, considerado o logaritmo de $L(\cdot)$, uma vez que o máximo de $L(\cdot)$ e do seu logaritmo, ocorrem para o mesmo valor de $\hat{\theta}$. Deste modo,

$$\hat{\theta} = \arg \max \ln L_y(y; \theta) \quad (3.23)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L_y(y; \theta) \Big|_{\theta = \hat{\theta}} = 0 \quad (3.24)$$

O resultado, $\hat{\theta}$, é uma estimação de máxima verosimilhança.

Caso particular do critério de máxima verosimilhança

Consideremos um modelo descrito por:

$$\hat{y}(t|\theta) = f(t, Z; \theta) \quad (3.25)$$

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \quad (3.26)$$

$\varepsilon(t, \theta)$ é uma variável independente com função densidade de probabilidade $f_e(x, t; \theta)$.

De acordo com (3.26)

$$y(t) = f(t, Z; \theta) + \varepsilon(t, \theta) \quad (3.27)$$

A partir de (3.20), substituindo as variáveis x_i pelas respectivas amostras adquiridas, obtemos a função de verosimilhança, [Ljung 87]:

$$L_y(y; \theta) = \prod_{t=1}^N f_e(\varepsilon(t, \theta), t; \theta) \quad (3.28)$$

Maximizar esta função é o mesmo que maximizar

$$\frac{1}{N} \log L_y(y; \theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log f_e(\varepsilon(t, \theta), t; \theta) \quad (3.29)$$

Definindo,

$$\ell(\varepsilon, t, \theta) = -\log f_e(\varepsilon, t, \theta) \quad (3.30)$$

obtemos:

$$\hat{\theta} = \arg \min \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ell(\varepsilon(t, \theta), t, \theta) \quad (3.31)$$

Verificamos assim, que o método de máxima verosimilhança pode ser visto como um caso especial do critério do erro de predição. Quando este erro for considerado como uma variável independente, com distribuição Gaussiana, valor médio nulo e variância λ , vem:

$$\ell(\varepsilon, t, \theta) = -\log f_e(\varepsilon, t, \theta) = \text{const} + \frac{1}{2} \log \lambda + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\lambda} \quad (3.32)$$

Se λ for conhecida então (3.32) é equivalente ao critério quadrático (3.7). Se λ não for conhecida temos um critério parametrizado. Conforme a estrutura em causa, λ pode ser parametrizada, ou não, independentemente dos parâmetros da função de predição.

3.4.6 Critério de minimização dos erros de predição correlacionados com os dados anteriores

No capítulo anterior referimo-nos a modelos de predição da forma:

$$\hat{y}(t, \theta) = \varphi^T(t, \theta) \theta \quad (3.33)$$

que designamos por regressão pseudo-linear pelo facto do vector de regressão, $\varphi(t)$, depender de θ . Em (3.33), o vector de regressão contém dados referentes a instantes anteriores, reconstruídos à custa do próprio modelo, parametrizado com o vector de parâmetros θ . Idealmente, $\varepsilon(t, \theta)$, para um bom modelo, deveria ser independente dos dados passados, Z^{t-1} .

Se $\varepsilon(t, \theta)$ é correlacionado com Z^{t-1} , então é porque existia mais informação em Z^{t-1} acerca de $y(t)$ do que aquela que se conseguiu com $\hat{y}(t|\theta)$. Assim, a predição não é ideal. Um bom modelo produzirá erros de predição que são independentes de dados anteriores.

Podemos seleccionar um vector de dados, $\xi(t)$, a partir de Z^{t-1} , de modo que $\varepsilon(t, \theta)$ seja não correlacionado com esse vector, pelo que:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t) \varepsilon(t, \theta) = 0 \quad (3.34)$$

O vector $\hat{\theta}$ que satisfaz (3.34) é a melhor estimativa de θ . A equação (3.34) é já uma simplificação da equação mais geral:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t) \alpha(\varepsilon(t, \theta)) = 0 \quad (3.35)$$

em que, normalmente, se escolhe $\alpha(\varepsilon(t, \theta)) = \varepsilon(t, \theta)$.

Se fizermos $\xi(t) = \varphi(t, \theta)$, obtemos:

$$\hat{\theta} = \text{soluções de } \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t, \theta) (y(t) - \varphi^T(t, \theta) \theta) = 0 \right\} \quad (3.36)$$

Os métodos que geram as soluções como em (3.36), são designados por **métodos de correlação ou regressões pseudo-lineares, PLR** - "Pseudolinear Regression".

Se aplicarmos (3.36) ao caso de uma regressão linear, resulta:

$$\hat{\theta} = \text{soluções de } \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) (y(t) - \varphi^T(t)\theta) = 0 \right\} \quad (3.37)$$

O resultado de (3.37) corresponde à estimação de mínimos quadrados, visto que (3.37) é outra forma de escrever (3.15). O método dos mínimos quadrados não converge para o verdadeiro valor de θ quando se trata de uma regressão linear contaminada por ruído, isto é:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + e(t) \quad (3.38)$$

Isto deve-se à correlação entre $\{e(t)\}$ e $\varphi(t)$. Se substituirmos $\varphi(t)$ por um vector genérico $\xi(t)$, em que:

$$E(\xi(t)\varphi^T(t)) \Big|_{N \rightarrow \infty} \text{ é não singular} \quad (3.39)$$

$$E(\xi(t)e(t)) \Big|_{N \rightarrow \infty} = 0 \quad (3.40)$$

então:

$$\hat{\theta} = \text{soluções de } \left\{ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t) (y(t) - \varphi^T(t)\theta) = 0 \right\} \quad (3.41)$$

ou

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t)y(t) \quad (3.42)$$

correspondem ao método conhecido por **IV** - "Instrumental Variable Methods". $\xi(t)$, são designados por instrumentos e devem ser correlacionados com o vector de regressão, mas não correlacionados com o ruído, de acordo com (3.39) e (3.40).

3.5 Métodos numéricos de minimização do critério de erro

Em geral, a função (3.8) não pode ser minimizada através de métodos analíticos nem a equação (3.35) pode ser resolvida directamente. A solução passa por métodos numéricos iterativos.

Os métodos numéricos actualizam os parâmetros estimados, minimizando iterativamente, o critério $J(\theta)$ em cada ponto, pelo que podemos escrever:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \alpha(k)d(k) \quad (3.43)$$

Onde $d(k)$ e $\alpha(k)$ são a direcção de procura do mínimo e o ganho, respectivamente, na iteração k , figura 3.7. Dependendo da informação de que se dispõe para determinar a direcção de procura, $d(k)$, os métodos numéricos de minimização do critério de erro, também chamados de métodos de convergência, podem utilizar: apenas valores da função a minimizar; além dos valores da função, também o seu gradiente; ou ainda, os valores da função, do seu gradiente e da matriz Hessiana (matriz das segundas derivadas). A figura 3.6 apresenta-se uma lista, não exaustiva, de diferentes estratégias dos métodos de convergência e na figura 3.7 uma ilustração simplificada.

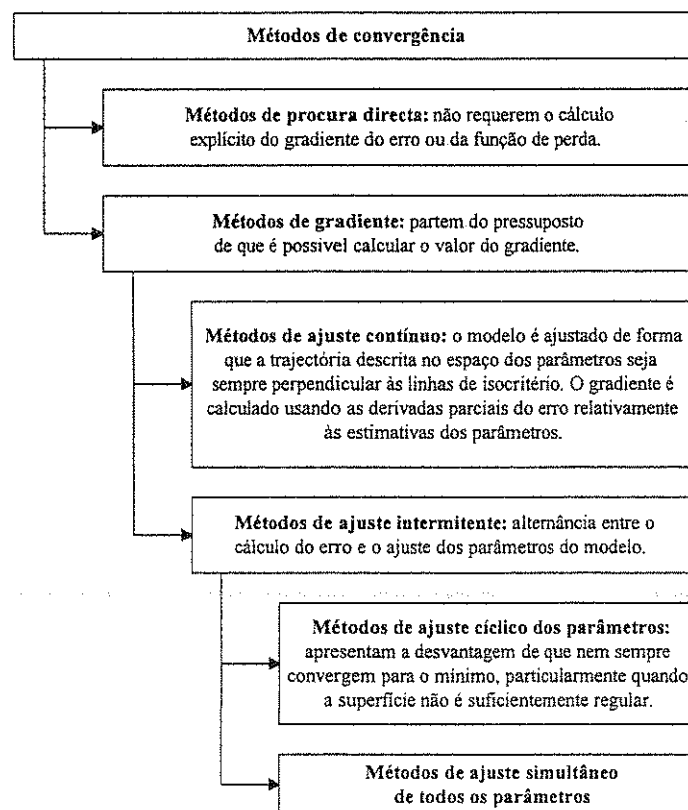


Figura 3.6: Métodos numéricos de convergência.

Alguns métodos de convergência:

Consideremos o caso do critério quadrático:

$$J(\theta, Z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2(t, \theta) \quad (3.44)$$

cujo gradiente é:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta, Z) = J'(\theta, Z) = -\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) \quad (3.45)$$

em que $\psi(t, \theta)$ é o gradiente de $\hat{y}(t|\theta)$, relativamente a θ :

$$\psi(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}(t, \theta) \quad (3.46)$$

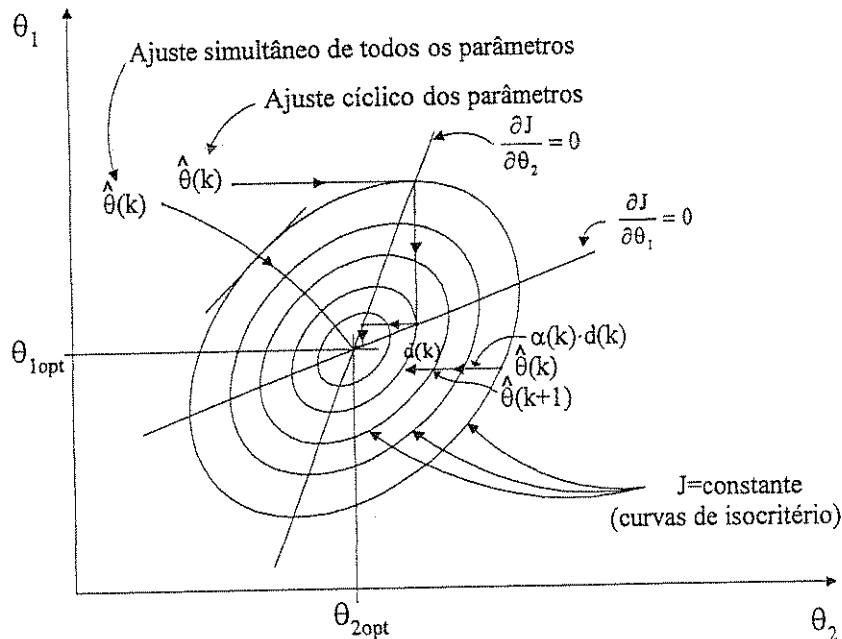


Figura 3.7: Ilustração dos métodos numéricos de convergência.

Uma família de métodos de convergência pode escrever-se da forma:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - \mu(t) [R(t)]^{-1} J'(\hat{\theta}(t-1), Z) \quad (3.47)$$

$R(t)$ é uma matriz que modifica a direcção de procura e $\mu(t)$ o ganho, escolhido de modo a garantir a diminuição do critério J , isto é:

$$J(\hat{\theta}(t), Z) < J(\hat{\theta}(t-1), Z) \quad (3.48)$$

A escolha mais simples de $R(t)$ é a matriz identidade, ou seja: $R(t) = I$, o que torna (3.47) no **método do gradiente ou máximo declive** ("steepest-descent method"). Este método é frequentemente ineficiente próximo do mínimo. Os métodos de Newton, normalmente, comportam-se melhor nesta situação. A matriz Hessiana para (3.44), como se pode ver em [Ljung 87], fica:

$$J''(\theta, Z) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \theta) \psi^T(t, \theta) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi'(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) \quad (3.49)$$

$\psi'(t, \theta)$ é a matriz Hessiana de $\varepsilon(t, \theta)$. Se escolhermos $R(t) = J''(\theta, Z)$, então (3.47) corresponde ao método de Newton. Contudo, pode ser bastante custoso calcular todos os termos de $\psi'(t, \theta)$, mas próximo do mínimo global, θ tende para θ_{opt} e a segunda soma de (3.49) será aproximadamente zero, pelo que é possível fazer a seguinte aproximação, [Ljung 87]:

$$J''(\theta, Z) \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \theta) \psi^T(t, \theta) = H(\theta) \quad (3.50)$$

Substituindo $R(\cdot)$ por $H(\cdot)$ em (3.47), temos o chamado **método de Gauss-Newton**. Na literatura de controlo é designado por **método de Newton-Raphson**. O método de Gauss-Newton é muito interessante pela sua rapidez de convergência, mas ao mesmo tempo, muito sensível à inicialização dos parâmetros. Devido a vários problemas, tem a desvantagem de não convergência global. Para evitar a divergência do algoritmo é necessário aperfeiçoar a inicialização, particularmente para um número elevado de parâmetros. Esta, é uma razão que leva, muitas vezes, a optar-se por métodos de estimação directa, onde a estimação pode ser, eventualmente enviesada (como nos mínimos quadrados), para se conseguir uma boa inicialização. Segundo [Eykhoff 79], o viés ou desvio corresponde à diferença entre o valor das estimativas dos parâmetros e os verdadeiros valores destes. Assim, uma estimativa é não enviesada, se para cada conjunto de N amostras se verificar:

$$E\{\hat{\theta}\} = \theta_{opt} \quad (3.51)$$

e em [Ljung 87] pode ler-se que o desvio é pouco afectado pelo comprimento do vector de dados, potência dos sinais, etc. e sofre mais a influência das características do conjunto de modelos. Nomeadamente, um conjunto de modelos amplo, flexível e bem adaptado resulta num desvio pequeno.

Mesmo que sejam garantidas certas condições em (3.50), pode acontecer que a matriz Hessiana seja singular ou próxima de uma matriz singular. É o que acontece, por exemplo, se o modelo está sobreparametrizado, ou os dados não são suficientemente informativos. Nestes casos, a solução (3.47) levanta alguns problemas. Existem várias técnicas, ditas de regularização, para resolver estes problemas. Uma destas técnicas consiste num procedimento conhecido por **método de Levenberg-Marquardt**. Surge assim, a seguinte aproximação para a matriz Hessiana:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \psi(t, \theta) \psi^T(t, \theta) + \delta I \quad (3.52)$$

Onde δ é um número positivo, pequeno.

O segundo termo da soma (3.49), pode não ser desprezável na vizinhança do mínimo e (3.50) deixa de ser uma boa aproximação da matriz Hessiana, por isso, se os erros de predição não são independentes no ponto mínimo, o que acabamos de dizer não se mantém.

3.6 Classificação dos métodos paramétricos

Como já referimos anteriormente, os métodos paramétricos são utilizados quando a estrutura do modelo, $\mathcal{M}(\theta)$, do sistema a identificar é conhecida e parametrizada com um vector de parâmetros θ . O objectivo é determinar os valores desconhecidos dos parâmetros, a partir das medidas adquiridas em ensaios relevantes para a identificação, que influenciam directamente o domínio de validade do modelo.

Além de paramétricos, os métodos para identificação podem ser classificados em:

- Determinísticos ou estocásticos
- Em tempo real (“on line”) ou em tempo diferido (“off line”)

3.6.1 Métodos determinísticos e métodos estocásticos

A adopção de um método determinístico ou estocástico, está, como já referimos, directamente ligada à natureza dos sinais do sistema, nomeadamente os de excitação. Os métodos determinísticos não formulam quaisquer hipóteses sobre as propriedades das perturbações de ruído e portanto, não fornecem qualquer informação sobre a precisão dos parâmetros identificados. Em contrapartida, os métodos estocásticos têm em conta as perturbações de ruído do sistema, associando, deste modo, uma certa precisão a cada parâmetro.

Os métodos determinísticos permitem utilizar os sinais de entrada e saída, quaisquer que sejam, e estimar os parâmetros de modelos matemáticos com estruturas bastante diversificadas (equações diferenciais, funções de transferência, espaço de estados, etc.).

Os dados de entrada e saída do sistema, $u(t)$ e $y(t)$, respectivamente, são recolhidos de acordo com as condições desejadas e/ou possíveis. De seguida, é realizada a estimação do vector de parâmetros $\hat{\theta}$, por minimização do critério de erro. Se este é linear nos parâmetros, o seu mínimo, se existir, pode ser encontrado através do método dos mínimos quadrados, se é não linear nos parâmetros, a solução é aproximada por algoritmos iterativos de programação não linear.

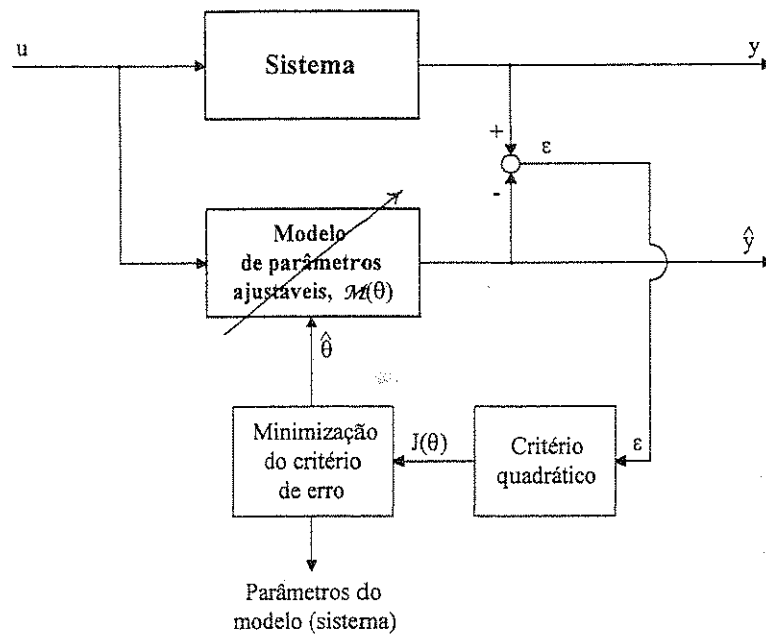


Figura 3.8: Estimação de parâmetros.

3.6.2 Identificação em tempo real e em tempo diferido

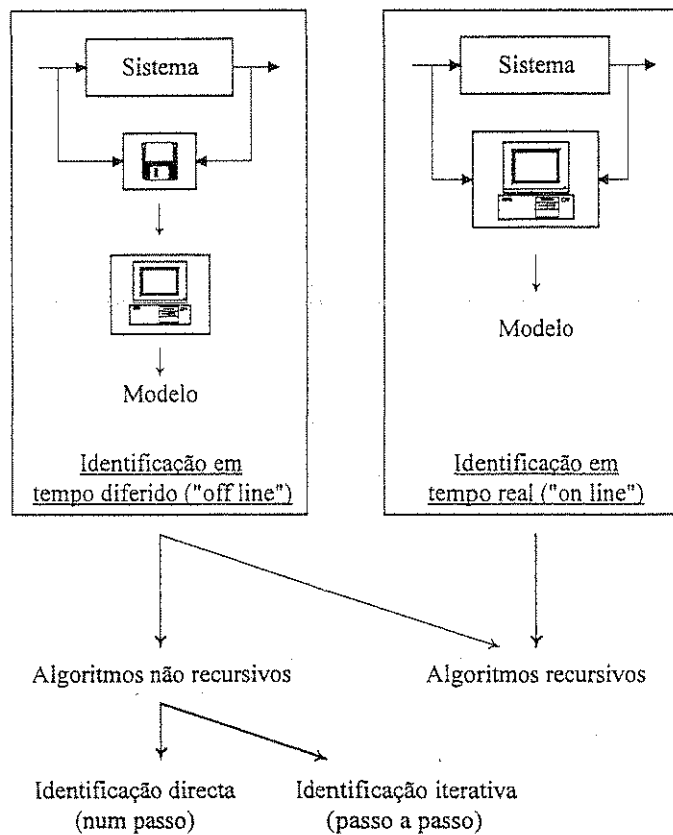


Figura 3.9: Identificação em tempo real e em tempo diferido.

Sobre a identificação em tempo real e em tempo diferido, ainda nada foi dito e entendemos ser oportuno fazer algumas considerações breves. Na identificação em tempo diferido, os dados são primeiro armazenados e posteriormente transferidos para um computador, de modo a serem tratados e processados. Na identificação em tempo real, os dados são processados imediatamente, depois da chegada de cada amostra.

Os métodos que utilizam o processamento em tempo real, em geral, não manifestam grandes necessidades de extensão de memória. São utilizados algoritmos recursivos de identificação, da forma geral:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + C(k)\varepsilon(k) \quad (3.53)$$

onde $\hat{\theta}$ é o vector dos valores estimados dos parâmetros, C o vector das correcções e ε o erro. O modelo desenvolve os seus valores à medida que os dados vão chegando. São processos adaptados à identificação de sistemas variantes no tempo.

Em muitos casos, torna-se necessário fazer uma estimação em tempo real porque é necessário tomar decisões “on line”, tal como, por exemplo, no controlo adaptativo, filtragem adaptativa, predição adaptativa ou controlo vectorial para o caso do motor de indução trifásico.

Termos como, identificação recursiva, estimação paramétrica adaptativa, estimação sequencial e algoritmos “on line”, são habitualmente usados para referir os algoritmos de identificação em tempo real.

A identificação em tempo real, dos parâmetros do motor de indução trifásico, tem sido um enorme desafio para a realização de “drives” em aplicações de alta performance. A técnica de controlo vectorial é um exemplo, uma vez que a determinação, em tempo real, da constante de tempo do rotor do motor é de extrema importância. Não é de estranhar pois, a publicação de muitos trabalhos, por exemplo, [Holtz 91], [Bussak 92], [Marino 95] e [Zhang 95], destinados à estimação, em tempo real, dos parâmetros do modelo do motor de indução trifásico associado ao rotor, tal como a constante de tempo do mesmo.

Os algoritmos de identificação iterativos/recursivos convencionais não são, na maior parte dos casos, aplicáveis na obtenção dos parâmetros do motor de indução trifásico, devido à necessidade de ter uma frequência de amostragem elevada, normalmente, acima de 1kHz, de modo a satisfazer o teorema da amostragem e devido à incerteza na convergência. No entanto, actualmente, os algoritmos recursivos estão muito mais próximos das aplicações reais, tendo em conta a performance recente de computadores cada vez mais rápidos e processadores digitais de sinal (DSP). A realização e a robustez do algoritmo de identificação toma uma importância crucial, principalmente, quando a tarefa da estimação é mais uma função a realizar, além do controlo, por exemplo. É possível ter computadores a trabalhar em multitarefa, sendo o procedimento de identificação, uma das funções a desempenhar, necessariamente, tão rápida quanto possível.

Devido à grande diversidade de métodos de identificação, a escolha de um ou outro método é muito subjectiva e depende fortemente, não só das características do problema mas também do grau de familiarização da analista com os métodos de estimação.

3.7 Métodos recursivos de identificação paramétrica

3.7.1 Método dos mínimos quadrados recursivo

Vamos reescrever o algoritmo de estimação de mínimos quadrados, com base no critério quadrático e numa função de pesagem, $\beta(t,k)$, como em [Ljung 87]:

$$\hat{\theta} = \arg \min \frac{1}{N} \sum_{k=1}^t \beta(t,k) (y(k) - \varphi^T(k)\theta)^2 \quad (3.54)$$

Também se pode escrever da forma:

$$\hat{\theta} = [R(t)]^{-1} f(t) \quad (3.55)$$

em que:

$$R(t) = \sum_{k=1}^t \beta(t,k) \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (3.56)$$

$$f(t) = \sum_{k=1}^t \beta(t,k) \varphi(k) y(k) \quad (3.57)$$

É óbvio que $\hat{\theta}(t)$ e $\hat{\theta}(t-1)$ estão intimamente relacionados e não tem interesse entrar com todos os dados até ao instante t , se já calculamos $\hat{\theta}(t-1)$. Vamos admitir que a função de pesagem tem a seguinte propriedade:

$$\beta(t,k) = \lambda(t) \beta(t-1,k), \quad 1 \leq k \leq t-1 \quad (3.58a)$$

$$\beta(t,t) = 1 \quad (3.58b)$$

Em (3.58a), $\lambda(t)$ representa o factor de esquecimento.

Podemos escrever:

$$\beta(t,k) = \prod_{j=k}^t \lambda(j) \quad (3.59)$$

Pelo que (3.56) e (3.57), ficam agora:

$$R(t) = \lambda(t)R(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (3.60)$$

$$f(t) = \lambda(t)f(t-1) + \varphi(t)y(t) \quad (3.61)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= R^{-1}(t)f(t) = R^{-1}(t)[\lambda(t)f(t-1) + \varphi(t)y(t)] = \\ &= R^{-1}(t)[\lambda(t)R(t-1)\hat{\theta}(t-1) + \varphi(t)y(t)] = \\ &= R^{-1}(t)\{[R(t) - \varphi(t)\varphi^T(t)]\hat{\theta}(t-1) + \varphi(t)y(t)\} = \\ &= \hat{\theta}(t-1) + R^{-1}(t)\varphi(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \end{aligned}$$

Temos assim, que

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + R^{-1}(t)\varphi(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad (3.62a)$$

$$R(t) = \lambda(t)R(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad (3.62b)$$

é um algoritmo recursivo, de modo que no instante $t-1$, guardamos apenas $\hat{\theta}(t-1)$ e $R(t-1)$. Para evitar a inversão da matriz $R(t)$, em cada iteração, é conveniente fazer:

$$P(t) = R^{-1}(t) \quad (3.63)$$

Mostra-se, [Ljung 87], que:

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (3.64)$$

Reescrevendo (3.62a) e (3.62b), temos o **método dos mínimos quadrados recursivo**, que se apresenta da forma:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (3.65a)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + P(t)\varphi(t)\varepsilon(t) \quad (3.65b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \right] \quad (3.65c)$$

Também se pode escrever:

$$R^{-1}(t)\varphi(t) = \frac{P(t-1)\varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (3.66)$$

Assim, o método dos mínimos quadrados toma a forma:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \quad (3.67a)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1) \varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \quad (3.67b)$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \right] \quad (3.67c)$$

As dimensões da matriz $R(t)$ em (3.60) e (3.62) vão depender de $\lambda(t)$. Para clarificar as modificações produzidas em $\hat{\theta}(t-1)$, em (3.62), é conveniente normalizar $R(t)$ e então a nova matriz $R(t)$ passa a ser igual a $\gamma(t)R(t)$:

$$R(t) \leftarrow \gamma(t)R(t), \quad \gamma(t) = \left[\sum_{k=1}^t \beta(t,k) \right]^{-1} \quad (3.68)$$

Note-se que

$$\frac{1}{\gamma(t)} = \frac{\lambda(t)}{\gamma(t-1)} + 1 \quad (3.69)$$

de acordo com (3.58a) e atendendo a que $R(t)$ é agora uma média pesada de $\varphi^T(t)\varphi(t)$.

A partir de (3.62b) e (3.69),

$$\begin{aligned} R(t) &= \gamma(t) \left[\lambda(t) \frac{1}{\gamma(t-1)} R(t-1) - \varphi(t) \varphi^T(t) \right] = \\ &= R(t-1) + \gamma(t) [\varphi(t) \varphi^T(t) - R(t-1)] \end{aligned} \quad (3.70)$$

Deste modo, escrevemos (3.62) da forma

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \quad (3.71a)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) R^{-1}(t) \varphi(t) \varepsilon(t) \quad (3.71b)$$

$$R(t) = R(t-1) + \gamma(t) [\varphi(t) \varphi^T(t) - R(t-1)] \quad (3.71c)$$

Os sistemas variantes no tempo, constituem uma forte razão para a utilização de métodos recursivos de identificação, porque pretende-se que o algoritmo de estimação acompanhe essas variações. Esta acção é realizada naturalmente, pela equação (3.54), associando um peso menor a dados mais antigos e um peso maior aos dados mais recentes. Podemos então, escrever para (3.58):

$$\beta(t,k)=\lambda^{t-k}, \quad \lambda(t)\equiv\lambda < 1 \quad (3.72)$$

de modo que os dados mais antigos têm um peso que decresce exponencialmente. Deste modo, λ é designado por factor de esquecimento. O valor correspondente de $\gamma(t)$, de acordo com (3.58), será:

$$\gamma(t)\equiv\gamma=1-\lambda \quad (3.73)$$

3.7.2 Método do Filtro de Kalman

Uma forma alternativa, mais formal, de trabalhar com os parâmetros variantes no tempo, é postular que os verdadeiros parâmetros não são constantes mas variam ao longo do tempo, de modo aleatório:

$$\theta(t+1)=\theta(t)+w(t) \quad (3.74)$$

$$E\{w(t)w^T(t)\}=R_1(t) \quad (3.75)$$

$$R_2(t)=E\vartheta^2(t) \quad (3.76)$$

em que $w(t)$ é ruído branco, com distribuição Gaussiana, $R_1(t)$ é a matriz de covariância e $R_2(t)$ a variância de $\vartheta(t)$, em que:

$$\vartheta(t)=y(t)-\varphi^T(t)\theta \quad (3.77)$$

Com base nesta exposição, apresentamos de seguida, o algoritmo conhecido por **Filtro de Kalman, KF** - "Kalman Filter":

$$\varepsilon(t)=y(t)-\varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1) \quad (3.78a)$$

$$\hat{\theta}(t)=\hat{\theta}(t-1)+L(t)\varepsilon(t) \quad (3.78b)$$

$$L(t)=\frac{P(t-1)\varphi(t)}{R_2(t)+\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad (3.78c)$$

$$P(t)=P(t-1)-\frac{P(t-1)\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{R_2(t)+\varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)}+R_1(t) \quad (3.78d)$$

3.7.3 Métodos recursivos de erro de predição

De modo semelhante ao caso dos mínimos quadrados, com função de pesagem, consideremos o critério quadrático, definido por:

$$J(\theta,Z,t)=\gamma(t)\frac{1}{2}\sum_{k=1}^t\beta(t,k)\varepsilon^2(k,\theta) \quad (3.79)$$

O gradiente será:

$$\begin{aligned}
 J'(\theta, Z, t) &= -\gamma(t) \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \psi(k, \theta) \varepsilon(k, \theta) = \\
 &= \gamma(t) \left[\lambda(t) \frac{1}{\gamma(t-1)} J'(\theta, Z, t-1) - \psi(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) \right] \\
 &= J'(\theta, Z, t-1) + \gamma(t) [-\psi(t, \theta) \varepsilon(t, \theta) - J'(\theta, Z, t-1)]
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

Para o caso do erro de predição temos a formula geral (3.47):

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) - \mu(t) [R(t)]^{-1} J'(\hat{\theta}(t-1), Z, t-1) \tag{3.81}$$

Vamos assumir que $\hat{\theta}(t-1)$ minimiza $J(\theta, Z, t-1)$, de modo que

$$J'(\hat{\theta}(t-1), Z, t-1) \approx 0 \tag{3.82}$$

A partir de (3.80) temos:

$$J'(\hat{\theta}(t-1), Z, t) = -\gamma(t) \psi(t, \hat{\theta}(t-1)) \varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1)) \tag{3.83}$$

Fazendo $\mu(t)=1$, temos o algoritmo,

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) R^{-1}(t) \psi(t, \hat{\theta}(t-1)) \varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1)) \tag{3.84}$$

Para obter $\hat{y}(t|\hat{\theta}(t-1))$ são necessários todos os dados Z^{t-1} . Isto significa que o cálculo de $\hat{y}(t|\hat{\theta}(t-1))$ e $\psi(t, \hat{\theta}(t-1))$, não pode ser feito de modo recursivo (com um comprimento fixo de memória), pelo que se faz a seguinte aproximação:

$$\hat{y}(t|\hat{\theta}(t-1)) \approx y(t) \tag{3.85}$$

$$\psi(t, \hat{\theta}(t-1)) \approx \psi(t) \tag{3.86}$$

Quanto a $R(t)$, para o método de "Gauss-Newton", é:

$$R(t) = \gamma(t) \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \psi(t) \psi^T(t) \tag{3.87}$$

Tendo em conta (3.85), (3.86), (3.87) e (3.84), fica, finalmente, o **algoritmo recursivo de erro de predição de "Gauss-Newton"**:

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.88a)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) R^{-1}(t) \psi(t) \varepsilon(t) \quad (3.88b)$$

$$R(t) = R(t-1) + \gamma(t) (\psi(t) \psi^T(t) - R(t-1)) \quad (3.88c)$$

Dependendo da estrutura de modelos, bem como da escolha de $R(t)$, (3.88b) corresponde a um conjunto de algoritmos específicos, designados por **métodos recursivos de erro de predição, RPEM** - “Recursive Prediction-Error Methods”, [Ljung 87].

Alguns métodos recursivos de erro de predição

1. Por exemplo, consideremos o caso de uma regressão linear:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t) \theta \quad (3.89)$$

Neste caso,

$$\psi(t, \theta) = \psi(t) = \varphi(t) \quad (3.90)$$

e (3.88) corresponde ao método dos mínimos quadrados recursivo, (3.71).

2. Para o caso do algoritmo do gradiente, $R(t) = I$, resulta:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) \varphi(t) \varepsilon(t) \quad (3.91)$$

onde $\gamma(t)$ pode ser normalizado por:

$$\gamma(t) = \frac{\gamma^1(t)}{\varphi^2(t)} \quad (3.92)$$

Assim, (3.91) corresponde ao **método LMS** - “Least Mean Squares”.

3. Se considerarmos a estrutura ARMAX, obtemos o **método recursivo de máxima verosimilhança**.

4. Aplicando o algoritmo à estrutura ARARX (referida em [Ljung 87], utiliza os polinómios A, B e D), temos um outro método de máxima verosimilhança, enquanto que se for dada uma forma diagonal a $R(t)$, resulta no **método RGLS** - “Recursive Generalised Least Squares”.

5. Aplicado à estrutura de modelos de espaço de estados, o algoritmo RPEM é muito próximo do **método EKF** - “Extended Kalman Filter”.

O único requisito destes métodos é o cálculo do gradiente.

3.7.4 Regressões pseudo-lineares

Consideremos de novo a regressão pseudo-linear:

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t, \theta)\theta \quad (3.93)$$

para a qual é apresentado o método (3.43), [Ljung 87], na forma:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + [R(t-1)]^{-1} f(\hat{\theta}(t-1), Z) \quad (3.94a)$$

$$R(t-1) = \gamma(t) \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k, \hat{\theta}(t-1)) \varphi^T(k, \hat{\theta}(t-1)) \quad (3.94b)$$

$$f(\theta, Z) = \gamma(t) \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k, \hat{\theta}(t-1)) \varepsilon(k, \hat{\theta}(t-1)) \quad (3.94c)$$

De modo semelhante ao caso dos métodos RPEM, obtém-se:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) R^{-1}(t) \varphi(t, \hat{\theta}(t-1)) \varepsilon(t, \hat{\theta}(t-1)) \quad (3.95a)$$

$$R(t) = R(t-1) + \gamma(t) \left[\varphi(t, \hat{\theta}(t-1)) \varphi^T(t, \hat{\theta}(t-1)) - R(t-1) \right] \quad (3.95b)$$

Este algoritmo tem o mesmo problema dos RPEM: o cálculo de $\hat{y}(t|\hat{\theta}(t-1))$ e $\psi(t, \hat{\theta}(t-1))$, não pode ser feito recursivamente. Resolve-se esta dificuldade de modo semelhante aos RPEM e obtemos o **métodos recursivos de correlação ou regressões pseudo-lineares, RPLR** - “Recursive Pseudolinear Regression”,

$$\hat{y}(t|\theta) = \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1) \quad (3.96a)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \quad (3.96b)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \gamma(t) R^{-1}(t) \varphi(t) \varepsilon(t) \quad (3.96c)$$

$$R(t) = R(t-1) + \left[\varphi(t) \varphi^T(t) - R(t-1) \right] \quad (3.96d)$$

Estes métodos parecem-se com o método dos mínimos quadrados recursivo (3.71). O mesmo “software” pode ser utilizado tanto para estes métodos, como para o método dos mínimos quadrados recursivo. A diferença prática é que $\varphi(t)$ em (3.96) contém entradas que são construídas a partir de dados obtidos à custa de modelos resultantes de iterações anteriores.

Os métodos RPLR podem obter-se a partir dos RPEM, substituindo $\psi(t)$, em (3.88), por $\varphi(t)$.

Os algoritmos particulares resultantes de (3.96), representam uma família de métodos, entre os quais, o mais conhecido, talvez seja o que resulta da sua aplicação na estrutura de modelos ARMAX, conhecido por ELS - “Extended Least Squares”.

3.7.5 Selecção das modificações de cada iteração

O cálculo da função de predição resulta da correspondente estrutura de modelos e a escolha de $\varphi(t)$ ou $\psi(t)$, tem as suas raízes na adopção do erro de predição ou no erro de predição correlacionado com os dados anteriores, como nas regressões pseudo-lineares. A questão que ainda se mantém é a escolha da direcção de procura do mínimo do critério de erro e o ganho de cada iteração. O que a seguir vamos dizer, refere-se aos métodos RPEM, mas para ser válido nos RPLR, basta substituir $\psi(t)$ por $\varphi(t)$.

3.7.5.1 Escolha da direcção de convergência

Há duas escolhas básicas para a direcção de convergência:

1. A direcção de Gauss-Newton, que corresponde a aproximar a matriz $R(t)$ à matriz Hessiana:

$$R(t) = R(t-1) + \gamma(t) (\psi(t)\psi^T(t) - R(t-1)) \quad (3.97)$$

2. A direcção do gradiente, que corresponde a escolher $R(t)$ como a matriz identidade, modificada:

$$R(t) = |\psi(t)|^2 I \quad (3.98)$$

$$R(t) = R(t-1) + \gamma(t) (|\psi(t)|^2 I - R(t-1)) \quad (3.99)$$

A escolha entre as duas direcções é um compromisso entre a rapidez de convergência e a complexidade do algoritmo. A direcção de Gauss-Newton requer, claramente, maior volume de cálculo. Tipicamente, se a direcção do gradiente requer k operações por iteração, então a direcção de Gauss-Newton requer k^2 .

Por outro lado, a convergência é, muitas vezes, drasticamente mais rápida segundo a direcção de Gauss-Newton. Contudo, isto só é válido em sistemas onde os parâmetros sejam constantes e não variantes no tempo. Se os verdadeiros parâmetros variam no tempo é melhor utilizar outra direcção (método) como adiante em (3.105).

3.7.5.2 Escolha do ganho e do factor de esquecimento

Um aspecto importante dos algoritmos recursivos é a sua adaptação aos sistemas variantes no tempo. Há duas formas diferentes de o conseguir:

1. Seleccionando um factor de esquecimento, $\beta(t,k)$, ou ganho, $\gamma(t)$, adequados, embora estes dois aspectos sejam equivalentes, como se constata em (3.69).
2. Introduzindo uma matriz de covariância conhecida ou assumida, $R_1(t)$, para as variações reais dos parâmetros como em (3.78d).

Em ambos os casos, a escolha do ganho é um compromisso entre o acompanhamento da dinâmica dos parâmetros e da sensibilidade ao ruído. Um ganho elevado significa que o algoritmo está alertado para modificações nos parâmetros, mas ao mesmo tempo, sensível a perturbações de ruído nos dados, desde que sejam interpretadas como alteração nos valores dos parâmetros.

Escolha do factor de esquecimento

A escolha do factor de esquecimento é conceptualmente simples: deve ser tal que o critério contenha essencialmente os dados relevantes para as propriedades actuais do sistema. Para um sistema que varia gradualmente no tempo, o factor de esquecimento pode ser um valor constante:

$$\beta(t,k) = \lambda^{t-k}, \quad \text{isto é} \quad \lambda(t) = \lambda \quad (3.100)$$

λ é sempre ligeiramente inferior a 1, de modo que:

$$\beta(t,k) = e^{(t-k)\log\lambda} \approx e^{-(t-k)(1-\lambda)} \quad (3.101)$$

Isto significa que os dados que são mais antigos do que,

$$T_0 = \frac{1}{1-\lambda} \quad (3.102)$$

amostras, são incluídos no critério com peso que é: $e^{-1} \approx 36\%$ dos dados mais recentes. Por isso, (3.102) é chamada constante de tempo da memória do critério.

Se o sistema permanece aproximadamente invariável durante T_0 amostras, um valor conveniente para λ , pode tirar-se de (3.102). Uma vez que o intervalo de amostragem reflecte, em princípio, as constantes de tempo dinâmicas do sistema, podemos seleccionar λ de modo que T_0 reflecta a relação entre as constantes de tempo das variáveis e a própria dinâmica. A gama típica de valores para o factor de esquecimento é de 0.97 a 0.995.

Também podemos considerar a resposta do sistema a uma mudança abrupta, por exemplo um degrau, que ocorreu k amostras atrás. A razão entre os dados relevantes e obsoletos para o critério é $1-\lambda^k$. A resposta a um degrau no sistema, é como um sistema de 1ª ordem com constante de tempo (3.102).

É possível conceber um factor de esquecimento adaptativo, para sistemas que sofrem mudanças bruscas nos seus parâmetros, seguidas de variações lentas: quando a

variação brusca é detectada, $\lambda(t)$ deve ser pequeno de modo a cortar as amostras mais antigas do critério, e depois deve aumentar novamente até próximo de 1.

Escolha do ganho $\gamma(t)$

Intuitivamente, o ganho deverá reflectir a informação relativa contida nas observações actuais. Dados com informação importante (tendo em conta o que já é conhecido), devem ter um ganho elevado e vice versa. Isto é um princípio básico que pode ser aplicado a várias situações: para um sistema que se mantenha invariante, a importância de uma amostra decai $1/t$; depois de alterações substanciais na dinâmica do sistema, a informação relativa dos dados aumenta; aquisições com fortes perturbações de ruído têm baixo conteúdo de informação; etc..

3.7.5.3 Método com inclusão de variações nos parâmetros do modelo

De modo análogo à versão do filtro de Kalman, (3.78), podemos assumir que os verdadeiros parâmetros variam de acordo com:

$$\theta(t) = \theta(t-1) + w(t) \quad (3.103)$$

$$E\{w(t)w^T(t)\} = R_1(t) \quad (3.104)$$

Se admitirmos que a variância do ruído é $R_2(t)$, então podemos escrever a versão geral do algoritmo recursivo de erro de predição, (3.88):

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.105a)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t)\varepsilon(t) \quad (3.105b)$$

$$L(t) = \frac{P(t-1)\psi(t)}{R_2(t) + \psi^T(t)P(t-1)\psi(t)} \quad (3.105c)$$

$$P(t) = P(t-1) - \frac{P(t-1)\psi(t)\psi^T(t)P(t-1)}{R_2(t) + \psi^T(t)P(t-1)\psi(t)} + R_1(t) \quad (3.105d)$$

3.8 Conclusão

Neste capítulo vimos dois procedimentos habituais para encontrar modelos que representam os dados observados. Ambos se apoiam na sequência dos erros de predição $\{\varepsilon(t, \theta)\}$, calculados a partir do modelo e dos dados observados, e ambos procuram torná-los tão pequenos quanto possível.

- PEM - Métodos de erro de predição: definidos por (3.4) a (3.6) e englobam algoritmos bem conhecidos como o método dos mínimos quadrados e o de máxima verosimilhança.
- PLR - Métodos de correlação ou regressão pseudo-linear: definidos por (3.34) a (3.36), para as funções de predição definidas por regressões pseudo-lineares, e incluem a técnica conhecida por IV - "Instrumental Variable", bem como outros métodos para modelos sob a forma de funções de transferência racionais.

Apresentamos, com algum detalhe, os métodos recursivos de identificação paramétrica, descritos, genericamente, por (3.53) e vimos, fundamentalmente, duas classes:

- RPEM - Métodos recursivos de erro de predição, cujo algoritmo é descrito por (3.88) e
- RPLR - Métodos recursivos de correlação ou regressões pseudo-lineares, cujo algoritmo é (3.96).

Dependendo da estrutura de modelos, da escolha de $R(t)$ e $\gamma(t)$ e da selecção de $\varphi(t)$ ou $\psi(t)$, em (3.88) e (3.96), estas duas classes de métodos recursivos, correspondem a um conjunto de algoritmos bem conhecidos como o método dos mínimos quadrados recursivo, método recursivo de máxima verosimilhança, método do gradiente (LMS, regressões lineares), RGLS, EKF, ELS; etc.

Por fim, apresentamos um algoritmo geral (3.105), que inclui a possibilidade de os verdadeiros parâmetros não serem constantes, mas variarem no tempo, de modo aleatório como descrevemos de (3.74) a (3.76). O algoritmo (3.105) é formalmente equivalente ao método do filtro de Kalman, (3.78), e corresponde a uma série de métodos recursivos bem conhecidos, fazendo determinadas considerações. Por exemplo: se, em (3.105), for $R_1(t)=0$, $R_2(t)=\lambda(t)$ e substituirmos $\psi(t)$ por $\varphi(t)$, temos o método dos mínimos quadrados recursivo, com factor de esquecimento $\lambda(t)$, (3.67). Se fizermos a matriz $L(t)=P(t)=k(t)I$ (múltipla da matriz identidade), então temos o método do gradiente.

Capítulo 4

Técnicas de identificação paramétrica do motor de indução trifásico

4. Técnicas de identificação paramétrica do motor de indução trifásico	79
4.1 Introdução	81
4.2 O estado actual da identificação dos parâmetros do motor de indução trifásico	81
4.3 Variação dos parâmetros	84
4.3.1 Variação das resistências	85
4.3.2 Variação das indutâncias	86
4.4 A escolha do referencial	86
4.5 Linearização do modelo do motor de indução, no referencial do estator	88
4.6 Identificação de todos os parâmetros	92
4.7 Identificação dos parâmetros, admitindo que a resistência do estator é conhecida	100
4.7.1 Identificação dos parâmetros com estimação de ϕ_{ds}	102
4.7.2 Identificação dos parâmetros com estimação de ϕ_{ds} e ϕ_{qs}	103
4.8 Modelo complexo do motor de indução trifásico	104
4.8.1 Função de transferência complexa num referencial geral	104
4.8.2 Função de transferência complexa no referencial do estator	106
4.8.3 Função de transferência para velocidade nula	107
4.8.4 Modelo de “caixa preta”	108
4.9 Conclusão	110

4. Técnicas de identificação paramétrica do motor de indução trifásico

4.1 Introdução

Neste capítulo vamos recuperar o modelo matemático do motor, fortemente não linear, e trabalhar as suas equações de modo a procurar eliminar as grandezas não observáveis, nomeadamente, as que estão associadas ao rotor. Vamos chegar a um modelo não linear, que através de uma transformação de parâmetros e da medida da velocidade, é linearizado em torno de um ponto de funcionamento.

O modelo resultante é linear nos parâmetros e permite uma aplicação directa do método dos mínimos quadrados recursivo. A partir deste modelo, estudamos outros, que alargam o domínio de validade e simplificam o cálculo necessário à identificação, por admitir que a resistência do estator é conhecida e trabalhar no referencial do estator. Alguns destes modelos são uma inovação do presente trabalho.

Em seguida, vamos mostrar como se pode chegar à função de transferência racional, num referencial geral, para o motor e aplicá-la ao referencial do estator. É apresentado, também, o modo como podem ser obtidos os parâmetros do motor a partir deste modelo de “caixa preta”. Esta abordagem, juntamente com alguns modelos a que nos referimos no parágrafo anterior, são assuntos inovadores deste trabalho, uma vez que não foram tratados até agora, pelo menos, nos trabalhos a que o autor teve acesso e referenciados nesta dissertação.

No capítulo seguinte, apresentamos os resultados práticos obtidos com a aplicação das técnicas de identificação descritas neste capítulo.

Para começar, fazemos uma revisão sucinta e não exaustiva do estado actual da identificação dos parâmetros do motor de indução trifásico, bem como algumas considerações acerca das variações destes.

4.2 O estado actual da identificação dos parâmetros do motor de indução trifásico

As características mais importantes do motor de indução trifásico, como a robustez, a ausência de manutenção e o preço, fazem dele o substituto do motor de corrente contínua, em quase todas as aplicações industriais actuais. O conhecimento de modelos e respectivos parâmetros, tem sido objecto de estudo desde o aparecimento do motor e, particularmente, desde a sua utilização em aplicações com a teoria de controlo moderna. A utilização de modelos para descrever o comportamento dinâmico do motor de indução e das máquinas eléctricas em geral, pode ter diversos objectivos, dentro dos quais se podem distinguir:

- Projecto de motores

- Controlo de qualidade numa linha de produção
- Simulação
- Dimensionamento de conversores
- Aplicação das técnicas de controlo moderno

Este último aspecto, fez despontar uma grande actividade na identificação dos parâmetros do motor de indução trifásico. As técnicas tradicionais de estimação dos parâmetros, baseadas nos ensaios clássicos, não são minimamente adequadas, quando, actualmente, se requer um conhecimento suficientemente preciso e em cada instante, desses parâmetros, para explorar convenientemente as potencialidades das técnicas de controlo moderno, nomeadamente, os métodos baseados em controlo vectorial.

Os métodos de identificação, em tempo real, são imprescindíveis em sistemas electrónicos de controlo em que se pretende ajustar os parâmetros do controlador automaticamente, para diferentes motores e pontos de funcionamento. Outra aplicação é na detecção de falhas.

Em contraste com as vantagens apontadas, a controlabilidade do motor de indução é difícil porque não existe uma equação simples de binário produzido e o modelo resultante é fortemente não linear.

Os trabalhos publicados mostram, claramente, que não existe nenhum procedimento que permita tratar o motor de indução de uma forma geral, com o objectivo de estimar os seus parâmetros em condições normais de funcionamento, com um bom desempenho. Isto mostra que devem ser desenvolvidos trabalhos de investigação de modo a caminhar para um método de identificação normalizado, para o motor de indução e para as máquinas eléctricas em geral.

Os métodos para a estimação dos parâmetros, utilizados nos trabalhos de investigação são bastante diversificados, contudo, o método dos mínimos quadrados recursivo, ou versões deste, é utilizado em cerca de metade dos trabalhos que se ocupam da estimação dos parâmetros em tempo real, nas condições normais de funcionamento.

O objectivo fundamental, não é estimar os coeficientes, de modo a ajustar uma função de transferência do sistema para que produza uma réplica fiel da saída para uma dada entrada. O objectivo é, simplesmente, estimar os parâmetros físicos do motor, o que é globalmente diferente e cria mais dificuldades, no caso do motor de indução.

É relativamente fácil, dar às equações que descrevem o funcionamento do motor uma apresentação em espaço de estados. Seria mesmo, a estrutura de modelos melhor vocacionada para o nosso objectivo que é a estimação dos parâmetros físicos do modelo matemático do motor, como vimos no capítulo 2. Contudo, o problema é globalmente mais complicado, porque algumas variáveis de estado, nomeadamente os fluxos, não são possíveis de medir. Se fosse possível adquirir os sinais dos fluxos,

então era relativamente imediato conceber um algoritmo recursivo de identificação para estimar os parâmetros do motor.

Inversamente, se os parâmetros fossem conhecidos com alguma exactidão, então era possível construir um observador de estado para estimar os fluxos. No entanto, o facto de não se poder adquirir os fluxos, nem conhecer os parâmetros do motor, em simultâneo, torna o problema bastante mais complicado e difícil, porque não cai directamente nas ferramentas de identificação adaptativa, devido à não linearidade do modelo do motor.

Os trabalhos desenvolvidos, que apresentam os procedimentos mais robustos, na identificação dos parâmetros, prendem-se com situações específicas e particulares de funcionamento, distantes das condições reais de funcionamento normal. Uma destas situações é a estimação dos parâmetros com o motor parado, isto é, velocidade nula. O anular da velocidade nas equações do motor, cria um desacoplamento entre as equações de Park e torna o procedimento de identificação muito mais simples. É uma técnica utilizada, por exemplo, em [Costa 88] e [Caussat 95]. Neste último caso, o objectivo é uma calibração automática do sistema de controlo de velocidade, enquanto o motor se encontra parado, antes de iniciar o seu funcionamento normal. A velocidade nula é garantida através de duas possibilidades diferentes de alimentação do motor, para esse fim.

A situação mais ambiciosa, mais difícil e talvez menos robusta, é a que consiste na situação mais geral, da identificação de todos os parâmetros, em tempo real, no ambiente normal de trabalho. Nenhum procedimento se mostra suficientemente robusto, para realizar tal tarefa, em quaisquer condições. Contudo, os trabalhos [Holtz 91], [Stephan 94], [Caussat 95], [Moons 95] e [Jayme 95], são exemplos de um bom contributo para esse fim. Nestes trabalhos, há ainda a distinguir os que se dedicam a modelos que permitem uma identificação individual de todos os parâmetros, embora de implementação mais difícil, como por exemplo, [Moons 95] e [Jayme 95], e os que identificam os quocientes $\frac{L_r}{R_r}$ e $\frac{M^2}{L_r}$ e não os parâmetros L_r , R_r e M , individualmente,

como por exemplo, [Stephan 94] e [Caussat 95]. Por outro lado, a identificação dos parâmetros não é, em geral, realizada de uma única vez. A estratégia seguida é, quase sempre, a realização de identificações parciais. A razão prende-se com as dificuldades inerentes a uma identificação simultânea de todos os parâmetros, pelo facto de terem diferentes dinâmicas, condições de funcionamento do motor não suficientemente informativas e a persistência dos sinais de entrada não favorecer do mesmo modo todos os parâmetros.

Em [Caussat 95], admite-se que R_s , a resistência do estator, é a que, de entre todos os parâmetros, melhor se conhece, que pode ser medida facilmente através da lei de Ohm e com uma dinâmica que se pode considerar relativamente lenta. Assim, é utilizado o valor de R_s , para reformular o modelo e estimar os restantes parâmetros em duas etapas:

- Estimação de τ_r e L_s com R_s e σL_s conhecidos

- Estimação de σL_s com τ_r , L_s e R_s conhecidos

Na estimação de σL_s é utilizado um sinal de frequência elevada, de modo a produzir um sinal persistente para esta situação, mas que não perturbe o funcionamento normal do motor.

Em [Jayme 95], são sugeridas as seguintes etapas:

- Estimação de R_s e R_r
- Estimação de L_s , L_r e M
- Estimação de R_r , L_s , L_r e M
- Estimação dos parâmetros mecânicos

Outros trabalhos têm como objectivo, a identificação de um parâmetro particular, como, por exemplo, a constante de tempo do rotor em [Boussak 92], a resistência do rotor em [Marino 95] e a resistência do estator em [Umanand 95].

Um procedimento diferente, para a estimação da constante de tempo do rotor, é através do cálculo das potências activa e reactiva e é realizado em [Caussat 95] e também em [Ségard 94]. Esta técnica é simples e robusta, é eficaz, mesmo nos transitórios, e pode ser implementada em tempo real. Contudo, em [Caussat 95], são apresentadas diversas desvantagens e dificuldades, nomeadamente, no domínio de validade dos resultados e só permite estimar a constante de tempo do rotor.

Outra ferramenta utilizada em alguns trabalhos, por exemplo em [Atkinson 91], é o filtro de Kalman. É um procedimento de identificação de natureza estocástica que pode ser implementado em tempo real e permite identificar estados do sistema que não se podem medir directamente, como por exemplo, as correntes do rotor. Em [Atkinson 91] e [Jayme 95] é utilizado o filtro de Kalman estendido - EKF, para estimar a resistência rotórica. Em [Bassi 94], refere-se que a eficácia do algoritmo EKF é questionável: por um lado, parece ser realizável, independentemente do ruído contido nos sinais, mas, por outro lado, a necessidade de uma escolha correcta dos valores iniciais das matrizes, ainda mantém difícil a sua utilização.

4.3 Variação dos parâmetros

A identificação dos parâmetros do motor de indução trifásico, antes de entrar em funcionamento normal, constitui um ponto de partida necessário e importante quando este é controlado por um sistema de controlo. Com efeito, permite um arranque correcto do motor e melhora a robustez do sistema de controlo. Contudo, é necessário ajustar os valores dos parâmetros, em tempo real, quer para afinar a estimação obtida inicialmente, quer para acompanhar as suas variações ao longo do tempo de funcionamento do motor.

Em [Caussat 95] é apresentado um estudo das causas principais das variações dos parâmetros do motor, que vamos resumir para o caso das resistências e das indutâncias.

4.3.1 Variação das resistências

As resistências do estator e do rotor variam devido, fundamentalmente, ao efeito térmico e ao efeito pelicular.

Efeito térmico

A corrente eléctrica ao percorrer os condutores que compõem os circuitos eléctricos do estator e do rotor, provoca um aquecimento destes que leva ao aumento das suas resistências. Com efeito, a resistividade dos condutores varia em função da temperatura de um modo aproximadamente linear, através de uma relação simples que, habitualmente, se escreve:

$$R = R_0(1 + \alpha T)$$

Onde R_0 é a resistência a 0°C , α é o coeficiente de temperatura e T a temperatura em graus centígrados. Num motor de indução o coeficiente α para os enrolamentos do estator em cobre vale 4.1×10^{-3} e para as barras do rotor em alumínio 4×10^{-3} . Os dois coeficientes de temperatura são idênticos e, portanto, as resistências do estator e do rotor variam, em função do tempo, aproximadamente, na mesma proporção.

Se o motor pertencer à classe de isolamento B, onde a temperatura pode atingir 120°C , podemos calcular a variação máxima que podem ter as resistências dos enrolamentos, quando a temperatura subir até aos 120°C , a partir da temperatura ambiente:

$$R_{120^\circ} = \frac{1 + 120\alpha}{1 + 20\alpha} R_{20^\circ}$$

Para os enrolamentos estatóricos, $\alpha = 4.1 \times 10^{-3}$, dá:

$$R_{120^\circ} = 1.38 R_{20^\circ}$$

Para os enrolamentos estatóricos, $\alpha = 4 \times 10^{-3}$, dá:

$$R_{120^\circ} = 1.37 R_{20^\circ}$$

Assim, se a temperatura dos enrolamentos do motor aumentar de 20°C par 120°C , os valores das resistências variam cerca de 38%, o que corresponde a uma variação importante para as leis do comando.

As variações das resistências são consideradas como fenómenos relativamente lentos, no que diz respeito ao efeito térmico.

Efeito pelicular

O efeito pelicular é responsável por uma distribuição não homogênea da densidade de corrente nos condutores. A densidade de corrente pode concentrar-se na periferia dos condutores e ser quase nula no seu interior, se a frequência de trabalho for elevada. Contudo, a variação da resistência estática é diferente da variação da resistência rotórica, relativamente à variação da frequência.

4.3.2 Variação das indutâncias

As indutâncias variam, fundamentalmente, devido ao efeito de saturação magnética. A não linearidade do material ferromagnético nas zonas ditas de saturação, afecta os valores das indutâncias. A dinâmica da variação das indutâncias é a da corrente de magnetização. São, portanto, fenómenos relativamente rápidos porque a sua dinâmica corresponde à da constante de tempo do rotor.

Nos materiais sujeitos a fenómenos de saturação magnética, são considerados dois tipos de indutâncias: a indutância estática e a indutância dinâmica. A primeira é definida pela relação entre o fluxo e a corrente e é utilizada quando o estado magnético do motor é constante. A segunda resulta de uma alteração do estado magnético do motor e é definida como sendo a relação entre a variação do fluxo e a variação da corrente, em torno do valor da corrente.

A indutância estática é sempre superior à dinâmica. Contudo, quando a corrente de magnetização atinge o seu valor nominal, a indutância estática sofreu uma variação de 20% a 30%, enquanto que a indutância dinâmica teve uma variação de 70% a 80%. Após o motor ter atingido a sua magnetização nominal, as indutâncias têm tendência a diminuir, o que permite definir os valores máximos das zonas lineares de magnetização.

Em conclusão, podemos dizer que as resistências do estator e do rotor aumentam com o funcionamento do motor, devido ao aquecimento deste. As suas variações são praticamente idênticas pelo facto dos coeficientes do material dos condutores do estator e do rotor, serem muito próximos. Estas variações podem-se considerar como lentas, porque a constante de tempo corresponde à do aquecimento do motor. Deste modo, a estimação das resistências pode ser realizada com intervalos de tempo relativamente grandes.

Em contrapartida, as indutâncias estão relacionadas com o nível de magnetização do motor e, portanto, são fenómenos acompanhados por uma dinâmica relativamente rápida, pelo que a sua estimação deve ser realizada com maior frequência.

4.4 A escolha do referencial

Como vimos no primeiro capítulo, a escolha do referencial, para referir as equações do estator e do rotor, resume-se aos três referenciais habituais:

- Referencial do campo girante
- Referencial do rotor
- Referencial do estator

O primeiro é o que tem as expressões mais complexas e é necessário conhecer correctamente a fase do campo girante, que é geralmente dependente dos próprios parâmetros do motor. Contudo, em [Boussak 92] é utilizado este referencial para estimar a constante de tempo do rotor através do método dos mínimos quadrados recursivo. No entanto, segundo [Caussat 95], a técnica utilizada será de difícil aplicação industrial, por ser pouco robusta e não se aplicar da mesma maneira em diferentes motores.

A maior parte dos trabalhos de estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico, não utiliza este referencial e dividem-se entre o referencial do rotor e do estator.

A escolha do referencial do rotor é relativamente sedutora, porque, segundo os seus aderentes, corresponde a um bom compromisso entre as expressões relativamente simples e as variáveis de entrada-saída, à frequência das grandezas do rotor, que é muito baixa (alguns Hz). Esta é a principal razão, apontada em [Stephan 94] e [Boussak 92], devido à necessidade de realizar a derivada da tensão e a primeira e segunda derivadas da corrente, que são operações delicadas por amplificarem o ruído. As grandezas, quando referidas a este referencial, sofrem uma filtragem natural o que facilita as operações de derivação e de filtragem do ruído a altas frequências. Por outro lado, exige que a medida da velocidade ou posição, tenha uma boa precisão para que a transformação dos sinais, para o referencial do rotor, se faça com um erro mínimo.

A escolha deste referencial impõe ainda restrições no domínio de validade dos parâmetros estimados porque existe uma zona de funcionamento que não excita suficientemente o motor para a identificação de certos parâmetros, nomeadamente a resistência do rotor. Assim, por exemplo:

- Quando o motor está em vazio ou o binário de carga é baixo, a frequência rotórica é directamente proporcional ao binário electromagnético, que assim é igualmente baixa. Deste modo, os sinais de informação entrada-saída fornecidos ao sistema de identificação são praticamente contínuos, sendo necessário um binário de carga mínimo para haver confiança no resultado da estimação.
- A frequência das grandezas no referencial do rotor é também influenciada pela velocidade de rotação do motor. A um binário de carga constante, uma diminuição da velocidade introduz uma diminuição da amplitude dos sinais que, por sua vez, faz baixar a relação sinal-ruído. A informação confunde-se com o ruído e perde-se o desempenho da identificação.

No referencial do estator as dificuldades aumentam porque é maior a gama de frequências e a derivada de um sinal amplifica o ruído. Por outro lado, a frequência de

corde dos filtros dos sinais deverá ser maior, bem como a frequência de amostragem. Neste referencial, os sinais adquiridos já estão referidos ao estator pelo que não é necessário fazer qualquer transformação e, deste modo, a precisão na medida de velocidade ou posição não é tão importante, para este efeito.

O referencial do estator é utilizado em [Jayme 95] e [Moons 95]. No primeiro, são utilizados os métodos de Levenberg-Marquardt, Hook e Double-Dogleg, para estimar os parâmetros do motor síncrono e assíncrono. No segundo, é apresentado um modelo mais trabalhado, onde vão até à terceira derivada da corrente com a vantagem de poder estimar os parâmetros físicos individuais do motor. Em contrapartida, são necessários certos cuidados com o ruído, pelo que utilizam a versão do método dos mínimos quadrados designada por TLS - "Total Least Squares".

As equações no referencial do estator permitem o estudo da identificação dos parâmetros em situações particulares que não foram referidas até agora, pelo menos, nos trabalhos que referenciamos. Estas situações, só possíveis no referencial do estator, tornam-se pertinentes de estudar, quando se depara com a conveniência de se conhecer, de algum modo, a resistência do estator, como veremos nas secções seguintes. Naturalmente que, ao contrário do referencial do rotor, no referencial do estator não há necessidade de medir a velocidade ou posição, mas essa informação é de todo conveniente e preciosa como veremos.

4.5 Linearização do modelo do motor de indução, no referencial do estator

Retomemos as equações fundamentais do motor de indução trifásico, no referencial do estator:

$$u_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} \quad (4.1)$$

$$u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} \quad (4.2)$$

$$0 = R_r i_{dr} + \phi_{qr} \omega + \frac{d\phi_{dr}}{dt} \quad (4.3)$$

$$0 = R_r i_{qr} - \phi_{dr} \omega + \frac{d\phi_{qr}}{dt} \quad (4.4)$$

$$\phi_{dr} = M i_{ds} + L_r i_{dr} \quad (4.5)$$

$$\phi_{qr} = M i_{qs} + L_r i_{qr} \quad (4.6)$$

$$\phi_{ds} = L_s i_{ds} + M i_{dr} \quad (4.7)$$

$$\phi_{qs} = L_s i_{qs} + M i_{qr} \quad (4.8)$$

No motor de indução trifásico as grandezas do rotor não estão acessíveis e, portanto, não se podem medir directamente. Sendo as tensões u_{dr} e u_{qr} nulas, procuremos eliminar as restantes grandezas do rotor, que são, as correntes e fluxos. Assim, a partir de (4.7) temos:

$$i_{dr} = \frac{1}{M} \phi_{ds} - \frac{L_s}{M} i_{ds} \quad (4.9)$$

A partir de (4.8) temos:

$$i_{qr} = \frac{1}{M} \phi_{qs} - \frac{L_s}{M} i_{qs} \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) em (4.5) vem:

$$\phi_{dr} = \frac{L_r}{M} (\phi_{ds} - \sigma L_s i_{ds}) \quad (4.11)$$

Derivando resulta:

$$\frac{d\phi_{dr}}{dt} = \frac{L_r}{M} \left(\frac{d\phi_{ds}}{dt} - \sigma L_s \frac{di_{ds}}{dt} \right) \quad (4.12)$$

Substituindo (4.10) em (4.6) vem:

$$\phi_{qr} = \frac{L_r}{M} (\phi_{qs} - \sigma L_s i_{qs}) \quad (4.13)$$

Derivando resulta:

$$\frac{d\phi_{qr}}{dt} = \frac{L_r}{M} \left(\frac{d\phi_{qs}}{dt} - \sigma L_s \frac{di_{qs}}{dt} \right) \quad (4.14)$$

Substituindo (4.9), (4.12) e (4.13) em (4.3) temos:

$$0 = \frac{1}{\tau_r} \phi_{ds} - \frac{L_s}{\tau_r} i_{ds} + \omega \phi_{qs} - \sigma L_s \omega i_{qs} + \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \sigma L_s \frac{di_{ds}}{dt} \quad (4.15)$$

Substituindo $\frac{d\phi_{ds}}{dt}$, utilizando (4.1) resulta:

$$\sigma L_s \frac{di_{ds}}{dt} + \left(R_s + \frac{L_s}{\tau_r} \right) i_{ds} + \sigma L_s \omega i_{qs} - \frac{1}{\tau_r} \phi_{ds} - \omega \phi_{qs} = u_{ds} \quad (4.16)$$

Substituindo agora (4.10), (4.11) e (4.14) em (4.4) vem:

$$0 = \frac{1}{\tau_r} \phi_{qs} - \frac{L_s}{\tau_r} i_{qs} - \omega \phi_{ds} + \sigma L_s \omega i_{ds} + \frac{d\phi_{qs}}{dt} - \sigma L_s \frac{di_{qs}}{dt} \quad (4.17)$$

Substituindo $\frac{d\phi_{qs}}{dt}$, utilizando (4.2) resulta:

$$\sigma L_s \frac{di_{qs}}{dt} + \left(R_s + \frac{L_s}{\tau_r} \right) i_{qs} - \sigma L_s \omega i_{ds} - \frac{1}{\tau_r} \phi_{qs} - \omega \phi_{ds} = u_{qs} \quad (4.18)$$

Dividindo as equações (4.16) e (4.18) por σL_s e reescrevendo-as juntamente com (4.1), (4.2) e a equação mecânica, apresentada no primeiro capítulo, obtemos o modelo do motor sem grandezas associadas ao rotor:

$$\frac{di_{ds}}{dt} = - \left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \right) i_{ds} - \omega i_{qs} + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \phi_{ds} + \frac{1}{\sigma L_s} \omega \phi_{qs} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{ds} \quad (4.19a)$$

$$\frac{di_{qs}}{dt} = - \left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \right) i_{qs} + \omega i_{ds} + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \phi_{qs} - \frac{1}{\sigma L_s} \omega \phi_{ds} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{qs} \quad (4.19b)$$

$$\frac{d\phi_{ds}}{dt} = u_{ds} - R_s i_{ds} \quad (4.19c)$$

$$\frac{d\phi_{qs}}{dt} = u_{qs} - R_s i_{qs} \quad (4.19d)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{f}{J} \omega + \frac{p}{J} (T_{em} - T_c) \quad (4.19e)$$

A dedução completa das equações (4.19) é apresentada no anexo A. Estas equações descrevem o motor de indução trifásico, apenas, à custa das grandezas do estator. Contudo, a medida directa do fluxo do estator não é possível a menos que sejam introduzidas modificações na estrutura do motor durante a sua construção, o que é inaceitável, só por necessidade de posterior identificação dos seus parâmetros.

No que diz respeito à equação mecânica, vamos admitir que a velocidade é medida e, sendo assim, podemos eliminá-la, a menos que também desejássemos identificar os parâmetros mecânicos, o que não é o objectivo do presente trabalho.

Com o intuito de eliminar os fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs} , trabalhemos um pouco mais as equações (4.19a) a (4.19d). Consideremos, então, as derivadas de (4.19a) e (4.19b):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} = & - \left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \right) \frac{di_{ds}}{dt} - \omega \frac{di_{qs}}{dt} - \frac{d\omega}{dt} i_{qs} + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \frac{d\phi_{ds}}{dt} + \\ & + \omega \frac{1}{\sigma L_s} \frac{d\phi_{qs}}{dt} + \frac{1}{\sigma L_s} \frac{d\omega}{dt} \phi_{qs} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{ds} \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} = & - \left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \right) \frac{di_{qs}}{dt} + \omega \frac{di_{ds}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} i_{ds} + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \frac{d\phi_{qs}}{dt} \\ & - \omega \frac{1}{\sigma L_s} \frac{d\phi_{ds}}{dt} - \frac{1}{\sigma L_s} \frac{d\omega}{dt} \phi_{ds} + \frac{1}{\sigma L_s} u_{qs} \end{aligned} \quad (4.20b)$$

Substituindo (4.19c) e (4.19d) em (4.20a) e (4.20b) e reescrevendo estas últimas, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \right) \frac{di_{ds}}{dt} + \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} i_{ds} + \omega \frac{di_{qs}}{dt} + \frac{R_s}{\sigma L_s} \omega i_{qs} + \\ + \left(i_{qs} - \frac{1}{\sigma L_s} \phi_{qs} \right) \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} \frac{du_{ds}}{dt} + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} u_{ds} + \omega \frac{1}{\sigma L_s} u_{qs} \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \right) \frac{di_{qs}}{dt} + \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} i_{qs} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} - \frac{R_s}{\sigma L_s} \omega i_{ds} + \\ + \left(\frac{1}{\sigma L_s} \phi_{ds} - i_{ds} \right) \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{\sigma L_s} \frac{du_{qs}}{dt} + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} u_{qs} - \omega \frac{1}{\sigma L_s} u_{ds} \end{aligned} \quad (4.21b)$$

Não foi possível, ainda, eliminar completamente os fluxos nas equações que descrevem o motor e já uma nova dificuldade começa a emergir, relacionada com a necessidade de realizar a derivada da tensão e a segunda derivada da corrente. Recorde-se que a derivação amplifica o ruído dos sinais. Para mais, as tensões que alimentam o motor são fortemente recortadas, resultantes da modulação da largura de impulsos, quando alimentado através do conversor electrónico de potência, o que leva à utilização das tensões de referência e não aquelas que realmente alimentam o motor.

Nesta fase, em diversos trabalhos, são apresentados algoritmos de identificação que se baseiam nas equações (4.21), considerando apenas o regime permanente ou de acelerações lentas, isto é, $\frac{d\omega}{dt} \approx 0$, desprezando assim o termo que, nestas equações, aparece multiplicado pela derivada da velocidade. Nomeadamente, em [Stephan 94], é apresentado um método de identificação, segundo esta estratégia mas com as equações referidas ao referencial solidário com o rotor, em que é definido o domínio de validade, de acordo com a condição:

$$\left| \frac{d\omega}{dt} \right| \ll \left\langle \frac{1}{\tau_r} \right\rangle |\omega| \quad (4.22)$$

Vamos considerar a hipótese, de que a velocidade é medida e constante durante a identificação ou, pelo menos, varia lentamente, isto é:

$$\frac{d\omega}{dt} \approx 0 \quad (4.23)$$

4.6 Identificação de todos os parâmetros

Naturalmente que o motor de indução trifásico, descrito através das equações (4.19), ou (4.21), é um sistema não linear, devido ao produto da velocidade de rotação eléctrica, ω , pelos restantes sinais de entrada e saída do sistema (ou suas derivadas), em vários termos das equações que descrevem o motor. Infelizmente os métodos de identificação paramétrica baseiam-se em igualdades onde os sinais que conhecemos dependem linearmente dos parâmetros que se pretendem conhecer. Tal não é o caso do motor de indução trifásico. A forma de contornar esta dificuldade, consiste em medir a velocidade e entrar com ela como uma constante nas equações. Contudo, esta solução não resolve totalmente o problema da não linearidade porque os modelos de identificação dos parâmetros do motor, baseados nestas equações são, “fortemente”, não lineares nos parâmetros R_s , τ_r , σ e L_s , que aparecem multiplicados e divididos, uns pelos outros, nas equações dos diferentes modelos.

Para transformar esta estrutura de modelos, não lineares nos parâmetros do motor, noutra em que os seus modelos sejam lineares nos parâmetros, é necessário transformar o vector de parâmetros, $[R_s \ \tau_r \ \sigma \ L_s]^T$, do motor, num outro vector de parâmetros $[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4 \ \theta_5]^T$, formando uma nova estrutura de modelos lineares nos parâmetros. Uma possibilidade de efectuar essa transformação é a seguinte:

$$\theta_1 = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \quad (4.24)$$

$$\theta_2 = \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} \quad (4.25)$$

$$\theta_3 = \frac{R_s}{\sigma L_s} \quad (4.26)$$

$$\theta_4 = \frac{1}{\sigma L_s} \quad (4.27)$$

$$\theta_5 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \quad (4.28)$$

Assim, o modelo descrito através das equações (4.21), de acordo com a condição (4.23), toma a forma:

$$\frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} + \omega \frac{di_{qs}}{dt} = -\frac{di_{ds}}{dt} \theta_1 - i_{ds} \theta_2 - \omega i_{qs} \theta_3 + \left(\frac{du_{ds}}{dt} + \omega u_{qs} \right) \theta_4 + u_{ds} \theta_5 \quad (4.29a)$$

$$\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} = -\frac{di_{qs}}{dt} \theta_1 - i_{qs} \theta_2 + \omega i_{ds} \theta_3 + \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) \theta_4 + u_{qs} \theta_5 \quad (4.29b)$$

ou, sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} + \omega \frac{di_{qs}}{dt} \\ \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{di_{ds}}{dt} & -i_{ds} & -\omega i_{qs} & \frac{du_{ds}}{dt} + \omega u_{qs} & u_{ds} \\ -\frac{di_{qs}}{dt} & -i_{qs} & \omega i_{ds} & \frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} & u_{qs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Acrescente-se que as equações (4.29) (ou (4.30)) são redundantes, não acrescentando mais informação qualquer uma, face à outra, pelo que podemos utilizar apenas uma delas.

A transformação inversa não é única, podendo determinar-se os parâmetros R_s , τ_r , σ e L_s , através de duas expressões diferentes, função dos parâmetros θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 e θ_5 . Temos assim:

$$R_s = \frac{\theta_3}{\theta_4} \quad (4.31a)$$

$$R_s = \frac{\theta_2}{\theta_5} \quad (4.31b)$$

$$\tau_r = \frac{\theta_4}{\theta_5} \quad (4.32a)$$

$$\tau_r = \frac{\theta_3}{\theta_2} \quad (4.32b)$$

$$\sigma = \frac{\theta_5}{(\theta_1 - \theta_3)\theta_4} \quad (4.33a)$$

$$\sigma = \frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3} \quad (4.33b)$$

$$L_s = \frac{(\theta_1 - \theta_3)}{\theta_5} \quad (4.34a)$$

$$L_s = \frac{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3}{\theta_2\theta_4} \quad (4.34b)$$

Não é possível determinar separadamente os parâmetros L_r , R_r e M , mas apenas os quocientes $\frac{L_r}{R_r}$ ($= \tau_r$) e $\frac{M^2}{L_r}$. Esta situação é inerente à identificação sem medida dos fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs} , em que motores com diferentes L_r , R_r e M terão as mesmas características de entrada/saída (tensão/corrente).

Há aqui uma sobreparametrização, ou seja, temos cinco equações, (4.24) a (4.28), para determinar apenas quatro parâmetros do motor R_s , τ_r , σ e L_s . Existe, pois, uma relação não linear entre os parâmetros θ_1 a θ_5 , bem visível através da seguinte equação:

$$\theta_2 = \frac{\theta_3 \theta_5}{\theta_4} \quad (4.35)$$

Contudo, diferentes resultados dos parâmetros θ_1 a θ_5 , satisfazendo ainda a equação (4.35) correspondem a motores diferentes.

De acordo com a transformação anterior, as entradas e saídas do “novo sistema” passam a ser uma combinação das entradas e saídas do sistema real, nomeadamente, para a equação (4.29b), o vector de entradas será:

$$[u] = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5] = \left[\begin{array}{c} -\frac{di_{qs}}{dt} \quad -i_{qs} \quad \omega i_{ds} \quad \frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \quad u_{qs} \end{array} \right] \quad (4.36)$$

Em que:

$$u_1 = -\frac{di_{qs}}{dt} \quad (4.37)$$

$$u_2 = -i_{qs} \quad (4.38)$$

$$u_3 = \omega i_{ds} \quad (4.39)$$

$$u_4 = \frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \quad (4.40)$$

$$u_5 = u_{qs} \quad (4.41)$$

A saída será:

$$y = \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} \quad (4.42)$$

Resultando assim num modelo, linear nos parâmetros, de cinco entradas e uma saída, cuja representação mais simplificada é:

$$y = \begin{bmatrix} u_1(1) & \cdots & u_5(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(N) & \cdots & u_5(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ou sob a forma de regressão linear:

$$y = [u]\theta \quad (4.44)$$

à qual pode ser aplicado o método dos mínimos quadrados recursivo.

A identificabilidade dos parâmetros θ_1 a θ_5 , poderá não ser indiferente à forma com são agrupados os termos das equações (4.21). Repare-se que podemos escrever as mesmas equações da forma:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} - \omega \frac{di_{qs}}{dt} &= \frac{R_s}{\sigma L_s} \left(\frac{di_{ds}}{dt} + \omega i_{qs} \right) + \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} i_{ds} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \frac{di_{ds}}{dt} - \\ & - \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{du_{ds}}{dt} + \omega u_{qs} \right) - \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} u_{ds} \end{aligned} \quad (4.45a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} + \omega \frac{di_{ds}}{dt} &= \frac{R_s}{\sigma L_s} \left(\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} \right) + \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} i_{qs} + \frac{1}{\sigma \tau_r} \frac{di_{qs}}{dt} - \\ & - \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) - \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} u_{qs} \end{aligned} \quad (4.45b)$$

Os novos parâmetros definem-se agora do seguinte modo:

$$K_1 = \frac{R_s}{\sigma L_s} \quad (4.46)$$

$$K_2 = \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} \quad (4.47)$$

$$K_3 = \frac{1}{\sigma \tau_r} \quad (4.48)$$

$$K_4 = \frac{1}{\sigma L_s} \quad (4.49)$$

$$K_5 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \quad (4.50)$$

O estudo destas duas possibilidades de agrupar os termos das equações (4.21) constitui um aspecto inovador deste trabalho.

As equações (4.45) escrevem-se como:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} - \omega \frac{di_{qs}}{dt} = \\ & = \left(\frac{di_{ds}}{dt} + \omega i_{qs} \right) K_1 + i_{ds} K_2 + \frac{di_{ds}}{dt} K_3 - \left(\frac{du_{ds}}{dt} + \omega u_{qs} \right) K_4 - u_{ds} K_5 \end{aligned} \quad (4.51a)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} + \omega \frac{di_{ds}}{dt} = \\ & = \left(\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} \right) K_1 + i_{qs} K_2 + \frac{di_{qs}}{dt} K_3 - \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) K_4 - u_{qs} K_5 \end{aligned} \quad (4.51b)$$

Atendendo à redundância das equações (4.51a) e (4.51b) e seleccionando novamente a segunda equação, por exemplo, obtemos um modelo ligeiramente diferente do da equação (4.43), porque, neste caso,

$$\begin{aligned} [u] &= [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5] = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} & i_{qs} & \frac{di_{qs}}{dt} & -\frac{du_{qs}}{dt} + \omega u_{ds} & -u_{qs} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.52)$$

As entradas são diferentes, mas a saída mantém-se, a menos do sinal:

$$y = -\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} + \omega \frac{di_{ds}}{dt} \quad (4.53)$$

Assim, será:

$$y = \begin{bmatrix} u_1(1) & \dots & u_5(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(N) & \dots & u_5(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \\ K_5 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Novamente a transformação inversa não é única, podendo determinar-se os parâmetros R_s , τ_r , σ e L_s , através de duas expressões diferentes, função dos parâmetros K_1 a K_5 . Assim:

$$R_s = \frac{K_2}{K_5} \quad (4.55a)$$

$$R_s = \frac{K_1}{K_4} \quad (4.55b)$$

$$\tau_r = \frac{K_1}{K_2} \quad (4.56a)$$

$$\tau_r = \frac{K_4}{K_5} \quad (4.56b)$$

$$\sigma = \frac{K_2}{K_1 K_3} \quad (4.57a)$$

$$\sigma = \frac{K_5}{K_3 K_4} \quad (4.57b)$$

$$L_s = \frac{K_1 K_3}{K_2 K_4} \quad (4.58a)$$

$$L_s = \frac{K_3}{K_5} \quad (4.58b)$$

Continua a haver uma sobreparametrização, daí resultando, novamente, uma relação não linear entre os parâmetros K_1 a K_5 :

$$K_5 = \frac{K_2 K_4}{K_1} \quad (4.59)$$

Vamos definir S_i como $u_i \times K_i$ (ou $u_i \times \theta_i$), em que u_i é a entrada índice i e θ_i o verdadeiro valor do parâmetro θ , correspondente. Então, de acordo com (4.43) ou (4.54), podemos escrever:

$$y = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \quad (4.60)$$

Na equação (4.60) interessa estudar a importância relativa de cada um dos termos S_i , na estimação do parâmetro θ_i . Se, por exemplo S_2 , tiver um peso desprezável na equação (4.60), isso significa que o parâmetro θ_2 ou K_2 (conforme o modelo utilizado, (4.43) ou (4.54)), não será identificável ou, pelo menos, será estimado com uma margem de erro muito grande. Na situação ideal, os S_i deveriam ter um peso relativo semelhante.

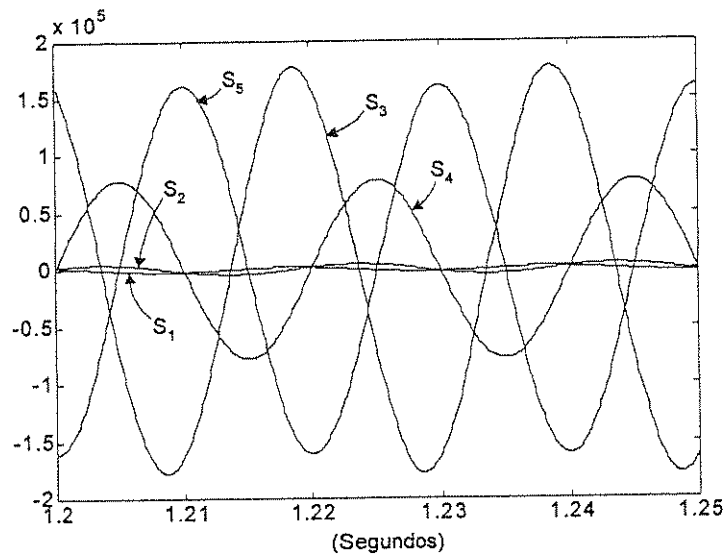


Figura 4.1: Componentes do modelo de estimação de todos os parâmetros.

Para exemplificar, vamos verificar qual é o peso relativo dos termos S_i , na equação (4.60), quando se tratar do modelo (4.54). A figura 4.1, mostra esta situação para um motor concreto, utilizado no capítulo seguinte. Os valores máximos são apresentados na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Valores máximos dos termos S_i .

S_i	$S_{i,máx.}$
$u_1 \cdot \theta_{1real} = \left(\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} \right) \theta_{1real}$	2.1×10^3
$u_2 \cdot \theta_{2real} = (i_{qs}) \theta_{2real}$	4.3×10^3
$u_3 \cdot \theta_{3real} = \left(\frac{di_{qs}}{dt} \right) \theta_{3real}$	1.8×10^5
$u_4 \cdot \theta_{4real} = \left(-\frac{du_{qs}}{dt} + \omega u_{ds} \right) \theta_{4real}$	0.8×10^5
$u_5 \cdot \theta_{5real} = (-u_{qs}) \theta_{5real}$	1.6×10^5

Podemos verificar que S_1 e S_2 são desprezáveis face aos restantes, isto é, têm um peso muito menor na soma (4.60). Assim, é de esperar que os erros em K_1 e K_2 sejam grandes e que isso também se reflecta, nos restantes parâmetros. Podemos verificar facilmente, que a resistência do estator R_s , entra precisamente nestes parâmetros, como se pode ver nas equações (4.46) a (4.50). Se admitirmos que R_s é conhecida,

obtemos o modelo (4.67), figura 4.2, que corresponde a uma situação mais equilibrada, para as mesmas condições de análise, em que os valores máximos se apresentam na tabela 4.2.

Tabela 4.2: Valores máximos dos termos S_i , com R_s conhecida.

S_i	$S_{i,máx.}$
$u_1 \cdot \theta_1 = \left(-\frac{di_{qs}}{dt} \right) \theta_1$	1.8×10^5
$u_2 \cdot \theta_2 = \left(\frac{d(u_{qs} - R_s i_{qs})}{dt} - \omega(u_{ds} - R_s i_{ds}) \right) \theta_2$	0.8×10^5
$u_3 \cdot \theta_3 = (u_{qs} - R_s i_{qs}) \theta_3$	0.2×10^5

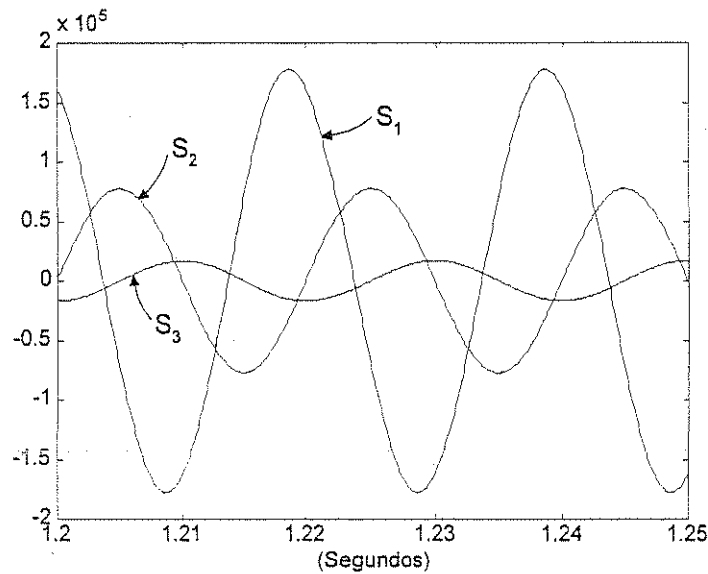


Figura 4.2: Componentes do modelo de estimação dos parâmetros, com R_s conhecida.

No modelo utilizado em [Stephan 94], semelhante ao da equação (4.54) mas no referencial do rotor, um dos parâmetros não era correctamente identificado e, portanto, a solução resultante da aplicação do método dos mínimos quadrados recursivo vinha influenciada negativamente por esse facto. O problema resulta da sobreparametrização e a solução consiste, genericamente, em fazer estimações parciais em vez da estimação simultânea de todos os parâmetros.

Uma possibilidade, também seguida em [Caussat 95], é admitir que R_s é conhecida. Outra técnica possível, admitindo a hipótese de que o parâmetro K_2 não é satisfatoriamente estimado, é considerar $K_2=0$ no modelo da equação (4.54) e estimar

os outros parâmetros. Assim, reescrevendo novamente a equação (4.51b), com $K_2=0$, resulta:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} = \\ & = \left(-\frac{di_{qs}}{dt} + \omega i_{ds} \right) K_1 - \frac{di_{qs}}{dt} K_3 + \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) K_4 + u_{qs} K_5 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Uma vez que o parâmetro K_2 não é zero e contribui para o sistema global (4.54), é necessário entrar com esta informação. Através de (4.61) estimamos os parâmetros K_1 , K_3 , K_4 e K_5 , depois, à custa dos valores estimados podemos determinar K_2 através da equação (4.59):

$$K_2 = \frac{K_1 K_5}{K_4} \quad (4.62)$$

De seguida, entrando com este valor de K_2 , estimamos novamente os outros parâmetros K_1 , K_3 , K_4 e K_5 , com o modelo:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} + i_{qs} K_2 = \\ & = \left(-\frac{di_{qs}}{dt} + \omega i_{ds} \right) K_1 - \frac{di_{qs}}{dt} K_3 + \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) K_4 + u_{qs} K_5 \end{aligned} \quad (4.63)$$

Utilizando (4.63) e (4.62) iterativamente, estimaremos os parâmetros do motor em cerca de 3 a 5 iterações. Contudo, não é garantida a convergência deste procedimento e naturalmente que o tempo de identificação aumenta.

4.7 Identificação dos parâmetros, admitindo que a resistência do estator é conhecida

O conhecimento da resistência do estator permite-nos utilizar qualquer uma das equações (4.29) ou (4.51) e passar para um modelo com apenas três parâmetros a estimar e não cinco.

Se o valor de R_s é conhecido, podemos partir das equações (4.45), por exemplo, e chegar facilmente às seguintes:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{ds}}{dt^2} + \omega \frac{di_{qs}}{dt} &= -\frac{1}{\sigma\tau_r} \frac{di_{ds}}{dt} + \\ + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{du_{ds}}{dt} - R_s \frac{di_{ds}}{dt} + \omega(u_{qs} - R_s i_{qs}) \right) &+ \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} (u_{ds} - R_s i_{ds}) \end{aligned} \quad (4.64a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} &= -\frac{1}{\sigma\tau_r} \frac{di_{qs}}{dt} + \\ + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{du_{qs}}{dt} - R_s \frac{di_{qs}}{dt} - \omega(u_{ds} - R_s i_{ds}) \right) &+ \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} (u_{qs} - R_s i_{qs}) \end{aligned} \quad (4.64b)$$

Definindo:

$$u_{iq} = u_{qs} - R_s i_{qs} \quad (4.65)$$

$$u_{id} = u_{ds} - R_s i_{ds} \quad (4.66)$$

Considerando a equação (4.64b), obtemos o novo modelo:

$$\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{qs}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{di_{qs}}{dt} & \frac{du_{iq}}{dt} - \omega u_{id} & u_{iq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Em que:

$$X_1 = \frac{1}{\sigma\tau_r} \quad (4.68)$$

$$X_2 = \frac{1}{\sigma L_s} \quad (4.69)$$

$$X_3 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \quad (4.70)$$

Neste caso, a transformação inversa é única, e não existe a dificuldade resultante da sobreparametrização, que existia anteriormente. Então, determinamos os parâmetros do motor através das equações:

$$L_s = \frac{X_1}{X_3} \quad (4.71)$$

$$\tau_r = \frac{X_2}{X_3} \quad (4.72)$$

$$\sigma = \frac{X_3}{X_1 X_2} \quad (4.73)$$

4.7.1 Identificação dos parâmetros com estimação de ϕ_{ds}

No referencial do estator, a simples constatação da conveniência de conhecer o valor da resistência do estator, leva-nos ao estudo da possibilidade de estimação dos outros parâmetros, estimando simultaneamente o fluxo. Isto resulta de um facto inerente ao referencial do estator e que é o seguinte: de acordo com as equações (4.1) e (4.2) é possível estimar o fluxo, apenas com o conhecimento de um único parâmetro! Precisamente a resistência do estator!

Encarando esta hipótese, podemos experimentar sair de um domínio de validade, restringido ao regime permanente, ou variações lentas da velocidade, para uma validade total do novo modelo, se recuperarmos as equações (4.21) e estimarmos o fluxo ϕ_{ds} , através da equação (4.1), o que ainda não foi tratado até agora, pelo menos, nos trabalhos a que o autor teve acesso e referenciados nesta dissertação. Não deve ser alheio a este facto, a escolha do referencial do rotor, em muitos desses trabalhos, o que impossibilita, desde logo, esta hipótese.

Vamos reescrever a equação (4.21b), admitindo então, que conhecemos a resistência do estator e , com ela, estimamos o sinal do fluxo ϕ_{ds} .

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} - \frac{d\omega}{dt} i_{ds} = -\frac{1}{\sigma\tau_r} \frac{di_{qs}}{dt} + \\ + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{du_{qs}}{dt} - R_s \frac{di_{qs}}{dt} - \omega(u_{ds} - R_s i_{ds}) - \frac{d\omega}{dt} \phi_{ds} \right) + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} (u_{qs} - R_s i_{qs}) \end{aligned} \quad (4.74)$$

Atendendo às equações (4.65) e (4.66), podemos simplificar, resultando:

$$\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} - \frac{d\omega}{dt} i_{ds} = -\frac{di_{qs}}{dt} \beta_1 + \left(\frac{du_{iq}}{dt} - \omega u_{id} - \frac{d\omega}{dt} \phi_{ds} \right) \beta_2 + u_{iq} \beta_3 \quad (4.75)$$

Em que:

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma\tau_r} \quad (4.76)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sigma L_s} \quad (4.77)$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \quad (4.78)$$

A transformação inversa é única, determinando-se os parâmetros do motor através das expressões:

$$L_s = \frac{\beta_1}{\beta_3} \quad (4.79)$$

$$\tau_r = \frac{\beta_2}{\beta_3} \quad (4.80)$$

$$\sigma = \frac{\beta_3}{\beta_1 \beta_2} \quad (4.81)$$

Podemos estimar os fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs} no intervalo de integração, não muito curto, t_1 a t_2 , da forma:

$$\phi_{ds} = \int_{t_1}^{t_2} (u_{ds}(\tau) - R_s i_{ds}(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} (u_{id}(\tau)) d\tau \quad (4.82)$$

$$\phi_{qs} = \int_{t_1}^{t_2} (u_{qs}(\tau) - R_s i_{qs}(\tau)) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} (u_{iq}(\tau)) d\tau \quad (4.83)$$

Deste modo, podemos escrever (4.75) como:

$$\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} - \frac{d\omega}{dt} i_{ds} = \begin{bmatrix} \frac{di_{qs}}{dt} & \frac{du_{iq}}{dt} - \omega u_{id} - \frac{d\omega}{dt} \phi_{ds} & u_{iq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Este novo modelo é válido em qualquer regime de funcionamento do motor, nomeadamente, durante o arranque. Contudo, continua a ser necessário realizar o cálculo da primeira e segunda derivada da corrente e a derivada da tensão que, como já referimos, em processamento de sinal não é muito atraente devido à amplificação do ruído.

4.7.2 Identificação dos parâmetros com estimação de ϕ_{ds} e ϕ_{qs}

Tendo em conta o que foi dito na secção anterior, acerca da estimação do fluxo e a dificuldade na determinação prática das derivadas, é possível, pelo menos teoricamente, estimar os parâmetros do motor através de um modelo que use uma das equações (4.19a) ou (4.19b), evitando o cálculo da derivada da tensão e da velocidade, bem como da segunda derivada da corrente. Acrescente-se ainda, a diminuição drástica do cálculo a realizar.

Seleccionando novamente a equação (4.19b), vamos reescreve-la do seguinte modo:

$$\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} = -\frac{1}{\sigma \tau_r} i_{qs} + \frac{1}{\sigma L_s} (u_{qs} - R_s i_{qs} - \omega \phi_{ds}) + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} \phi_{qs} \quad (4.85)$$

Onde ϕ_{ds} e ϕ_{qs} são estimados através das equações (4.82) e (4.83), resultando:

$$\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} = \begin{bmatrix} -i_{qs} & u_{iq} - \omega \phi_{ds} & \phi_{qs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Em que W_1 , W_2 e W_3 têm as mesmas expressões que β_1 , β_2 e β_3 , respectivamente. Os parâmetros do motor determinam-se como em (4.79), (4.80) e (4.81).

4.8 Modelo complexo do motor de indução trifásico

A esperança de encontrar um modelo para o motor, em que a estimação dos seus parâmetros seja possível, apenas, à custa dos sinais adquiridos directamente do sistema, ou seja, velocidade de rotação, correntes e tensões do estator, leva-nos a um modelo complexo. A aplicação do método dos fasores espaciais ao modelo matemático que descreve a dinâmica do motor, permite-nos obter uma função de transferência racional, em regime permanente. O grande inconveniente, para a identificação, é que os coeficientes do numerador e denominador desta função de transferência, são números complexos. Além dos coeficientes, também os sinais de entrada e saída passam a ser sequências de amostras complexas. Esta abordagem e particularmente, a determinação dos parâmetros físicos do motor, é um aspecto inovador do presente trabalho.

4.8.1 Função de transferência complexa num referencial geral

Para obtermos a função de transferência, vamos retomar as equações do motor na notação complexa, que resultaram da modelização do motor através do método dos fasores espaciais, num referencial geral g , como vimos no primeiro capítulo:

$$\underline{\phi}_s = L_s i_s + M i_r \quad (4.87a)$$

$$\underline{\phi}_r = M i_s + L_r i_r \quad (4.87b)$$

$$\underline{u}_s = R_s i_s + j \frac{d\theta_g}{dt} \underline{\phi}_s + \frac{d\underline{\phi}_s}{dt} \quad (4.87c)$$

$$\underline{u}_r = 0 = R_r i_r + j \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} \underline{\phi}_r + \frac{d\underline{\phi}_r}{dt} \quad (4.87d)$$

Recorde-se que $\frac{d\theta_g}{dt}$ e $\frac{d\theta}{dt}$ são, respectivamente, a velocidade do referencial geral e a velocidade de rotação do motor. Vamos partir da seguinte hipótese de trabalho:

$$\hat{\theta}_g \equiv \frac{d\theta_g}{dt} \quad \text{e} \quad \hat{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} \approx \text{constantes} \quad (4.88)$$

Deste modo, aplicando a transformada de Laplace, à equação (4.87d), obtemos:

$$0 = R_r \dot{i}_r + \left(j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) + S \right) \phi_r \quad (4.89)$$

Para obter \dot{i}_r função de \dot{i}_s vamos substituir (4.87b) em (4.89),

$$0 = \left[R_r + \left(S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) L_r \right] \dot{i}_r + \left(S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) M \dot{i}_s \quad (4.90)$$

dividindo por L_r , fica:

$$\dot{i}_r = - \frac{M}{L_r} \frac{S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})}{S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})} \dot{i}_s \quad (4.91)$$

Para obter \dot{i}_s função de \underline{u}_s vamos aplicar a transformada de Laplace, de acordo com (4.88), à equação (4.87c):

$$\underline{u}_s = R_s \dot{i}_s + \left(S + j\dot{\theta}_g \right) \phi_s \quad (4.92)$$

Substituindo (4.87a) em (4.92), vem:

$$\underline{u}_s = R_s \dot{i}_s + \left(S + j\dot{\theta}_g \right) L_s \dot{i}_s + \left(S + j\dot{\theta}_g \right) M \dot{i}_r \quad (4.93)$$

Substituindo (4.91) em (4.93) e simplificando convenientemente, obtemos:

$$\frac{\dot{i}_s}{\underline{u}_s} = \frac{S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})}{\sigma L_s \left(S + j\dot{\theta}_g \right) \left(S + \frac{1}{\sigma \tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) + \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) R_s} \quad (4.94)$$

Por questões de simplificação, apresentamos em anexo todos os passos intermédios.

Podemos agora, escrever a relação \dot{i}_s função de \underline{u}_s e reescreve-la na forma de uma função de transferência racional:

$$\frac{\dot{i}_s}{\underline{u}_s} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right)}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} + j(\dot{\theta}_g + (\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} - \dot{\theta}_g (\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) + j \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} \dot{\theta}_g + \frac{R_s}{\sigma L_s} (\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) \right)} \quad (4.95)$$

A função de transferência (4.95) descreve o funcionamento do motor, em regime permanente, relativamente a um referencial geral g e é completamente demonstrada no anexo A. Para referir este referencial ao estator, ao rotor ou ao campo girante basta entrar com as considerações feitas na síntese da modelização do primeiro capítulo.

4.8.2 Função de transferência complexa no referencial do estator

Para o caso do referencial geral g , ser fixo em relação ao estator, ou simplesmente, no referencial do estator, é:

$$\frac{d\theta_g}{dt} = \omega_g = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} = -\omega \quad (4.96)$$

Entrando com (4.96) em (4.95), obtemos a função de transferência, no referencial do estator:

$$\frac{i_s}{u_s} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{1}{\sigma L_s}}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} - j\omega \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{R_s}{\sigma L_s} \right)} \quad (4.97)$$

ou,

$$\frac{i_s}{u_s} = \frac{\underline{b}_1 S + \underline{b}_0}{S^2 + \underline{a}_1 S + \underline{a}_0} \quad (4.98)$$

em que:

$$\underline{b}_1 = \frac{1}{\sigma L_s} \quad (4.99a)$$

$$\underline{b}_0 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{1}{\sigma L_s} \quad (4.99b)$$

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} - j\omega \quad (4.99c)$$

$$\underline{a}_0 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{R_s}{\sigma L_s} \quad (4.99d)$$

Repare-se que, atendendo às equações (4.24) a (4.28), podemos escrever as equações (4.99) como se segue:

$$\underline{b}_1 = \theta_4 \quad (4.100a)$$

$$\underline{b}_0 = \theta_5 - j\omega \theta_4 \quad (4.100b)$$

$$\underline{a}_1 = \theta_1 - j\omega \quad (4.100c)$$

$$\underline{a}_0 = \theta_2 - j\omega \theta_3 \quad (4.100d)$$

Atendendo às equações (4.46) a (4.50), temos:

$$\underline{b}_1 = K_4 \quad (4.101a)$$

$$\underline{b}_0 = K_5 - j\omega K_4 \quad (4.101b)$$

$$\underline{a}_1 = K_3 + K_1 - j\omega \quad (4.101c)$$

$$\underline{a}_0 = K_2 - j\omega K_1 \quad (4.101d)$$

De facto, a função de transferência (4.97) não é mais do que uma forma compacta especial de escrever as equações (4.29) e (4.51). Estas, podem ser obtidas atendendo a que:

$$\underline{i}_s = i_{ds} + j i_{qs} \quad (4.102a)$$

$$\underline{u}_s = u_{ds} + j u_{qs} \quad (4.102b)$$

Substituindo (4.102) em (4.97), fica:

$$\begin{aligned} & (i_{ds} + j i_{qs}) \left(S^2 + \left(\frac{1}{\sigma\tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} - j\omega \right) S + \left(\frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{R_s}{\sigma L_s} \right) \right) = \\ & = \left(\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{1}{\sigma L_s} \right) (u_{ds} + j u_{qs}) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Se na equação (4.103), igualarmos as partes real e imaginária do membro da esquerda, às partes real e imaginária do membro da direita, respectivamente, obtemos facilmente as equações (4.29) ou (4.51).

4.8.3 Função de transferência para velocidade nula

Para completar este estudo, vamos admitir que em (4.97), a velocidade é nula e assim resulta:

$$\frac{i_{ds}}{u_{ds}} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r}}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma\tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} \right)} \quad (4.104)$$

ou

$$\frac{i_{qs}}{u_{qs}} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r}}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma\tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} \right)} \quad (4.105)$$

Temos, neste caso uma função de transferência racional de coeficientes reais, cujos sinais de entrada e saída são adquiridos directamente e a sua identificação não oferece grandes dificuldades. Contudo, num ponto de funcionamento, com uma dada velocidade, a situação é bem mais complexa.

4.8.4 Modelo de “caixa preta”

Para podermos estimar os parâmetros do motor utilizando, apenas, os sinais ω , u_{ds} , u_{qs} , i_{ds} e i_{qs} , isto é, sem ter de recorrer ao cálculo das suas derivadas, então teremos de discretizar a função de transferência do motor. Note-se que é neste sentido que, aqui, falamos em modelo de “caixa preta”. Este modelo é uma inovação apresentada neste trabalho.

Vamos discretizar a função de transferência (4.98), utilizando a transformação bilinear:

$$S = \frac{2z-1}{Tz+1} \quad (4.106)$$

T é o tempo de amostragem. Aplicando (4.106) a (4.98), temos então:

$$\frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{\frac{2}{T}b_1 \frac{z-1}{z+1} + b_0}{\left(\frac{2}{T}\right)^2 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T}a_1 \frac{z-1}{z+1} + a_0} \quad (4.107)$$

simplificando, obtemos (ver anexo A):

$$\frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{\frac{2b_1T+b_0T^2}{4+2a_1T+a_0T^2}z^2 + \frac{2b_0T^2}{4+2a_1T+a_0T^2}z + \frac{b_0T^2-2b_1T}{4+2a_1T+a_0T^2}}{z^2 + \frac{-8+2a_0T^2}{4+2a_1T+a_0T^2}z + \frac{4-2a_1T+a_0T^2}{4+2a_1T+a_0T^2}} \quad (4.108)$$

ou

$$\frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{N_0z^2 + N_1z + N_2}{z^2 + D_1z + D_2} \quad (4.109)$$

ou ainda

$$\frac{\underline{I}(q)}{\underline{U}(q)} = \frac{N_0 + N_1q^{-1} + N_2q^{-2}}{1 + D_1q^{-1} + D_2q^{-2}} \quad (4.110)$$

Em que:

$$\underline{N}_0 = \frac{2\underline{b}_1 T + \underline{b}_0 T^2}{4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2} \quad (4.111a)$$

$$\underline{N}_1 = \frac{2\underline{b}_0 T^2}{4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2} \quad (4.111b)$$

$$\underline{N}_2 = \frac{\underline{b}_0 T^2 - 2\underline{b}_1 T}{4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2} \quad (4.111c)$$

$$\underline{D}_1 = \frac{-8 + 2\underline{a}_0 T^2}{4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2} \quad (4.111d)$$

$$\underline{D}_2 = \frac{4 - 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2}{4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2} \quad (4.111e)$$

Partindo do princípio de que podemos estimar os parâmetros (4.111), trabalhando com números complexos, através da função de transferência (4.109), então obtemos os coeficientes de (4.98), do seguinte modo (ver anexo A):

$$\underline{a}_0 = \frac{4}{T^2} \frac{\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} \quad (4.112a)$$

$$\underline{a}_1 = \frac{4}{T} \frac{1 - \underline{D}_2}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} \quad (4.112b)$$

$$\underline{b}_0 = \frac{8}{T^2} \frac{\underline{N}_1}{(-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1)} \quad (4.112c)$$

$$\underline{b}_1 = \frac{4}{T} \frac{\underline{N}_0 - \underline{N}_2}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} \quad (4.112d)$$

Os parâmetros do motor podem-se determinar atendendo às equações (4.100) ou (4.101), ou então utilizando as equações seguintes (ver anexo A):

$$R_s = \frac{a_0}{b_0} \quad (4.113a)$$

$$\tau_r = \frac{b_1}{b_0 + j\omega b_1} \quad (4.113b)$$

$$\sigma = \frac{b_0(b_0 + j\omega b_1)}{b_1(a_1 b_0 - a_0 b_1 + j\omega b_0)} \quad (4.113c)$$

$$L_s = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1 + j\omega b_0}{b_0(b_0 + j\omega b_1)} \quad (4.113d)$$

4.9 Conclusão

Neste capítulo, começamos por fazer uma exposição, não exaustiva, da situação actual no que diz respeito às técnicas de identificação paramétricas dos parâmetros do motor de indução trifásico. A conclusão a que se chega é que ainda não foi possível desenvolver um procedimento geral, robusto e preciso para a identificação, em tempo real, dos parâmetros, com o motor no seu funcionamento normal.

Depois fizemos uma breve revisão da variação dos parâmetros, nomeadamente, as resistências do estator e do rotor e as indutâncias. As primeiras variam, fundamentalmente, devido ao aquecimento e as segundas, ao estado de magnetização do motor. Deste modo, as resistências têm uma dinâmica relativamente lenta e as indutâncias uma dinâmica rápida, pelo que devem ser identificadas em intervalos de tempo mais curtos, enquanto que as resistências podem ter intervalos de estimação mais espaçados no tempo por exemplo, alguns minutos.

Fizemos, também, várias considerações acerca da escolha do referencial. A opção está relacionada com o próprio algoritmo, o seu objectivo e o domínio de validade. Normalmente, é utilizado o referencial do estator ou do rotor.

As técnicas de identificação, apresentadas neste capítulo, são baseadas em modelos no referencial do estator e apontamos as razões que nos levaram a esta opção. Linearizamos as equações de Park, de modo a eliminar os sinais que não se podem medir directamente. O modelo resultante é linear nos parâmetros e permite uma aplicação directa do método dos mínimos quadrados recursivo.

Através do estudo realizado e de uma análise de sensibilidade à identificação dos parâmetros, concluímos que alguns podem não ser correctamente identificados e apresentamos soluções que passam pelo conhecimento à priori de R_s , a resistência do estator.

Inerente ao referencial do estator, é o facto de ser possível estimar o fluxo à custa de um único parâmetro, precisamente R_s . Esta possibilidade surge, apenas, neste

referencial e conduz a modelos com expressões mais simples e com menos quantidade de cálculo, nomeadamente o cálculo de derivadas, ou então alargam o domínio de validade. Foi o que vimos na secção [4.7].

Os modelos para a estimação de parâmetros que resultam da linearização das equações de Park, impõem o cálculo da derivada da tensão e da primeira e segunda derivadas da corrente, que é um problema, por questões de ruído. Por esta razão, construímos um modelo, sob a forma de função de transferência racional complexa, que utiliza como entrada e saída, sinais directamente amostrados, que são a parte real e imaginária dos sinais que entram no procedimento de identificação. Este modelo é uma inovação do presente trabalho.

Como o nosso objectivo é a estimação dos parâmetros físicos que aparecem nas equações do motor, e não o ajuste dos coeficientes da função de transferência para que esta produza uma réplica fiel da saída do sistema, este modelo de “caixa preta” dificulta um pouco mais a tarefa de recuperação dos parâmetros físicos do motor, a partir dos coeficientes estimados da função de transferência, quando este for o objectivo, face à computação adicional que é necessária.

Capítulo 5

Estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico

5. Estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico	113
5.1 Introdução	115
5.2 Simulação do motor no referencial do estator	115
5.3 Estimação simultânea de todos os parâmetros	120
5.3.1 Estimação do vector de parâmetro θ	120
5.3.1.1 Sinais obtidos com a simulação do motor A	123
5.3.1.2 Sinais obtidos com a simulação do motor B	129
5.3.2 Estimação do vector de parâmetros K	132
5.4 Estimação dos parâmetros com a resistência do estator conhecida	137
5.4.1 Estimação do vector de parâmetros X	137
5.4.2 Estimação do vector de parâmetros β e do fluxo ϕ_{ds}	141
5.4.3 Estimação do vector de parâmetros W e dos fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs}	146
5.5 Optimização da estimação simultânea de todos os parâmetros	147
5.6 Obtenção dos parâmetros do motor a partir da função de transferência	150
5.7 Conclusão	153

5. Estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico

5.1 Introdução

No capítulo anterior, apresentamos várias técnicas para a estimação dos parâmetros do motor de indução trifásico. Neste capítulo, utilizando a simulação do motor, vamos realizar algumas experiências que nos permitem testar, comparar e validar, essas mesmas técnicas.

Vamos estimar os vectores de parâmetros θ , K , X , β e W , que parametrizam os respectivos modelos, referidos no capítulo anterior, utilizando o método dos mínimos quadrados recursivo. Os dois primeiros correspondem à estimação simultânea de todos os parâmetros do motor, isto é, R_s , L_s , σ e τ_r . Os restantes, admitem que é conhecida a resistência do estator e os dois últimos requerem a estimação simultânea dos fluxos do estator.

A estimação dos parâmetros é realizada paralelamente para dois motores, designados por motor A e motor B, cujas características são referidas no anexo B.

Na secção 5.5 apresentamos os resultados de um procedimento de optimização da estimação dos vectores de parâmetros θ e K .

Por fim, na secção 5.6, mostramos os resultados obtidos na estimação dos parâmetros do motor de indução, a partir da estimação dos coeficientes complexos da função de transferência.

Naturalmente, para estimar os parâmetros do motor é necessário dispor dos dados, nomeadamente, das tensões u_{ds} e u_{qs} , das correntes i_{ds} e i_{qs} e da velocidade de rotação. Para isso, vamos começar por apresentar o modelo de simulação implementado no programa MATLAB e mostrar os sinais típicos obtidos, bem como os que são utilizados na estimação dos parâmetros dos dois motores.

5.2 Simulação do motor no referencial do estator

A simulação foi realizada no programa "MATLAB with Simulink", com o objectivo de gerar sinais, que permitissem testar os algoritmos de identificação dos parâmetros do motor, utilizando o método dos mínimos quadrados recursivo. O modelo utilizado na simulação foi construído com base nas equações do motor com binário de carga T_c , reescritas do seguinte modo:

$$\frac{di_{ds}}{dt} = \frac{L_r}{L_r L_s - M^2} \left(u_{ds} - R_s i_{ds} - \frac{M}{L_r} \frac{d\phi_{dr}}{dt} \right) \quad (5.1a)$$

$$\frac{di_{qs}}{dt} = \frac{L_r}{L_r L_s - M^2} \left(u_{qs} - R_s i_{qs} - \frac{M}{L_r} \frac{d\phi_{qr}}{dt} \right) \quad (5.1b)$$

$$\frac{d\phi_{dr}}{dt} = \frac{R_r M}{L_r} i_{ds} - \frac{R_r}{L_r} \phi_{dr} - \omega \phi_{qr} \quad (5.1c)$$

$$\frac{d\phi_{qr}}{dt} = \frac{R_r M}{L_r} i_{qs} - \frac{R_r}{L_r} \phi_{qr} + \omega \phi_{dr} \quad (5.1d)$$

$$T_{em} = \frac{3}{2} p \frac{M}{L_r} (\phi_{dr} i_{qs} - \phi_{qr} i_{ds}) \quad (5.1e)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{f}{J} \omega + \frac{p}{J} (T_{em} - T_c) \quad (5.1f)$$

A figura 5.1 mostra uma representação gráfica destas equações, onde se vê, claramente, o carácter não linear, do modelo do motor, provocado pelo sinal da velocidade que interliga as duas equações de Park, segundo os eixos d e q.

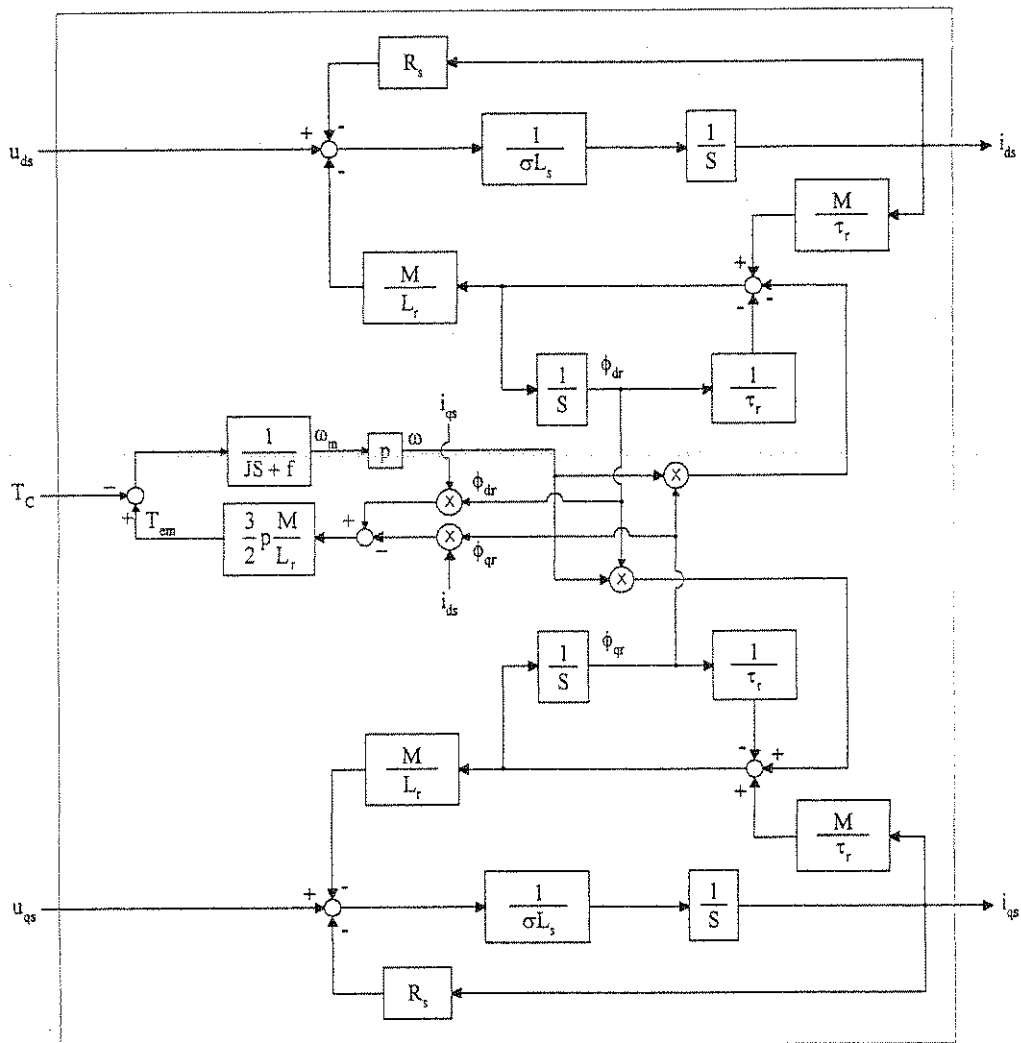


Figura 5.1: Representação do modelo do motor.

Quando a velocidade é nula, a interligação entre as equações de Park, deixa de existir e a representação do motor torna-se muito mais simples, figura 5.2. Esta é uma situação particular de funcionamento, explorada, muitas vezes, para a estimação dos parâmetros do motor, como referimos no capítulo anterior.

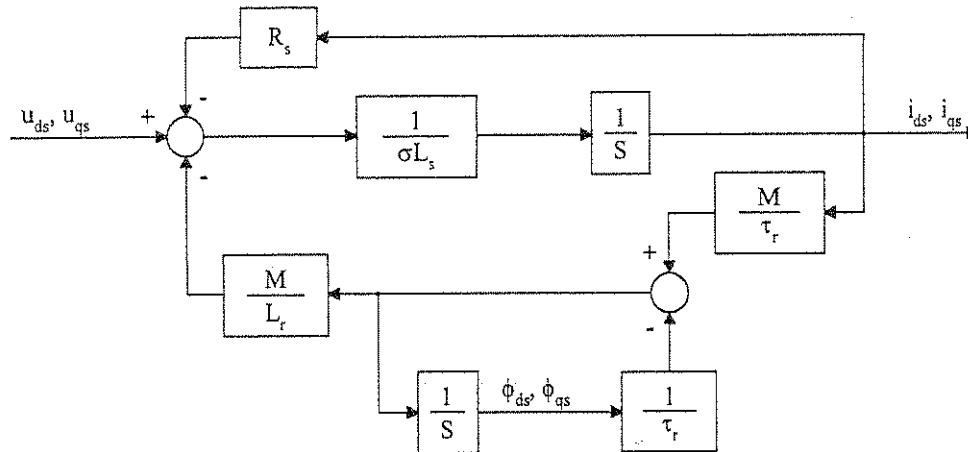


Figura 5.2: Representação do modelo do motor com velocidade nula.

A simulação é uma implementação da figura 5.1 no programa “Matlab with Simulink”.

O modelo de simulação do motor utiliza como sinais de entrada, as tensões u_{ds} e u_{qs} no referencial do estator, que são duas sinusóides em quadratura representando, teoricamente, as componentes fundamentais das verdadeiras tensões, em funcionamento normal. Não estamos, pois, preocupados com a transformação do sistema trifásico para o sistema bifásico dp, uma vez que isso se traduz numa operação matemática simples. Os sinais de entrada u_{ds} e u_{qs} , assim como os sinais i_{ds} , i_{qs} e ω_m , que resultam da simulação, ficam gravados, num ficheiro de dados, para serem lidos, posteriormente, pelo algoritmo de estimação.

Para ilustrar os sinais típicos gerados na simulação e utilizados no algoritmo de estimação dos parâmetros, vamos simular o motor de indução trifásico A, cujas características são apresentadas no anexo B.

Condições de simulação:

$$u_{ds} = 312 \cdot \sin(2\pi \cdot 50t)$$

$$u_{qs} = 312 \cdot \sin\left(2\pi \cdot 50t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Binário de carga: $T_c = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$

Tempo de amostragem: $T = 0.1 \text{ ms}$ (10 kHz)

Velocidade inicial nula

Nas figuras seguintes encontram-se os sinais obtidos, em que, por questões de legibilidade, apenas se apresentam os instantes iniciais, até o motor estabilizar.

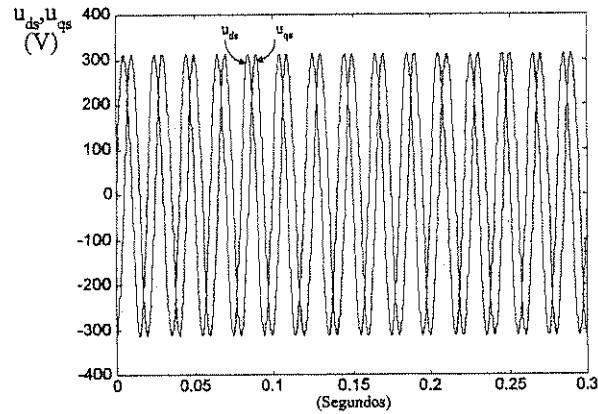


Figura 5.3: Sinais de tensão u_{ds} e u_{qs} .

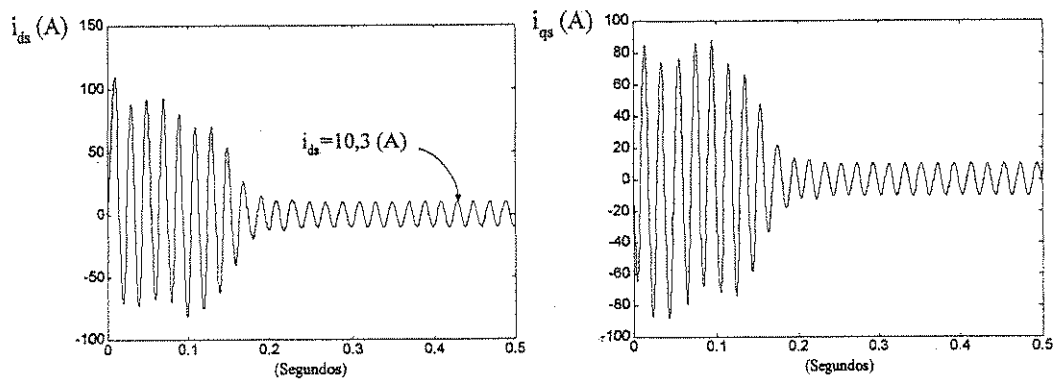


Figura 5.4: Sinais de corrente i_{ds} e i_{qs} , simulados.

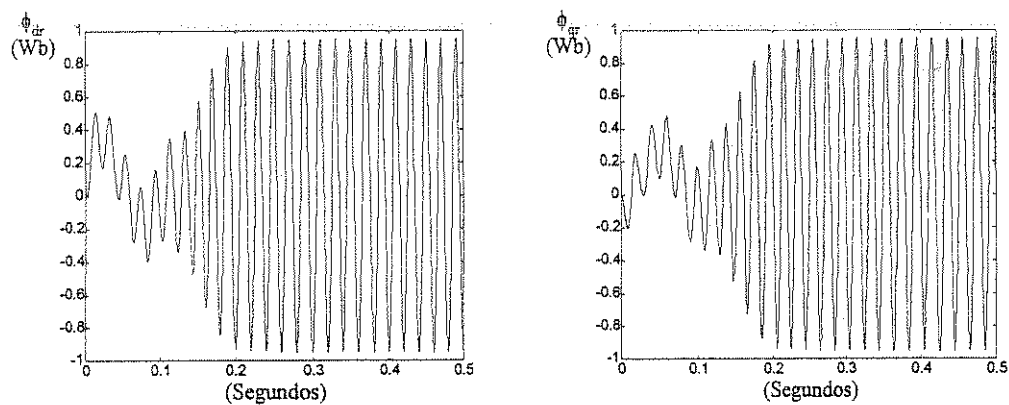


Figura 5.5: Sinais de fluxo, ϕ_{dr} e ϕ_{qr} , simulados.

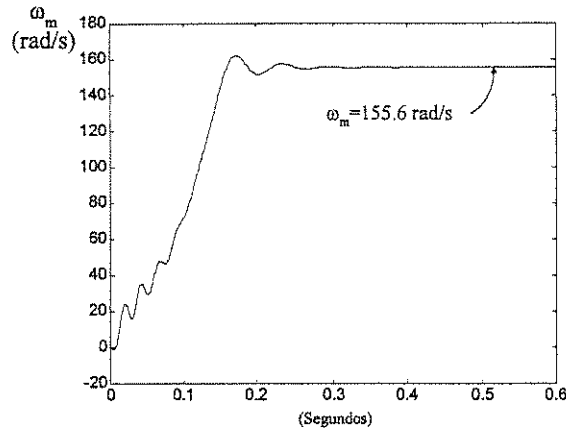


Figura 5.6: Velocidade mecânica simulada.

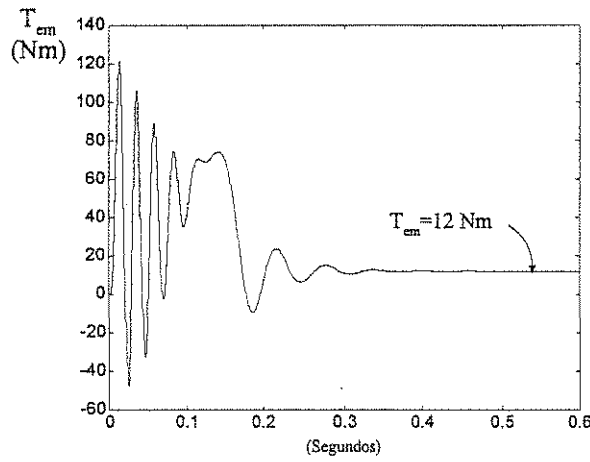


Figura 5.7: Binário electromagnético simulado.

Na aquisição dos dados, vamos ter em conta o ruído nas medidas que, na realidade, estará sempre presente, figura 5.8. A modelização da cadeia de medidas das grandezas necessárias aos algoritmos de estimação é baseada no modelo apresentado em [Araújo 94].

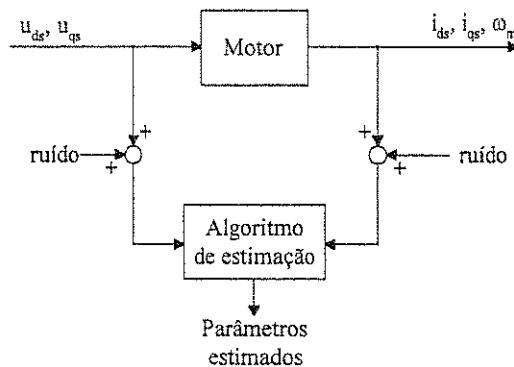


Figura 5.8: Representação do ruído nos sinais de entrada e saída do sistema.

A produção dos sinais simulados do motor contaminados por ruído, utiliza ainda filtros passa baixo de Butterworth em todos os sinais para eliminar componentes de altas frequências, indesejáveis sob todos os aspectos, nomeadamente por serem causadoras de erros elevados nos cálculos das derivadas e nos algoritmos de identificação a aplicar.

5.3 Estimação simultânea de todos os parâmetros

5.3.1 Estimação do vector de parâmetro θ

Para se obter os parâmetros do motor de indução trifásico, vamos começar por estimar o vector de parâmetros θ (θ_1 a θ_5), segundo o modelo obtido no capítulo anterior:

$$\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} - \omega \frac{di_{ds}}{dt} = -\frac{di_{qs}}{dt} \theta_1 - i_{qs} \theta_2 + \omega i_{ds} \theta_3 + \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) \theta_4 + u_{qs} \theta_5 \quad (5.2)$$

Vimos que a equação (5.2) pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) & \cdots & u_5(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(N) & \cdots & u_5(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

à qual vamos aplicar o método dos mínimos quadrados recursivo, apresentado no terceiro capítulo.

Cálculo das derivadas em (5.2):

A estimação dos parâmetros θ_1 a θ_5 , de acordo com o modelo (5.2), requer o cálculo da derivada da tensão e da primeira e segunda derivadas da corrente. Estas operações de derivação são realizadas recursivamente, considerando a definição de derivada num ponto, que será tanto mais exacta quanto menor for o tempo da amostragem, T , de acordo com a expressão:

$$\frac{dx(k)}{dt} = \frac{x(k+1) - x(k-1)}{2T} \quad (5.4)$$

O cálculo das derivadas através de (5.4), corresponde a filtrar o sinal $x(k)$ com um filtro digital, passa alto.

Para a segunda derivada utiliza-se:

$$\frac{d^2 x(k)}{dt^2} = \frac{x(k+2) - 2x(k) + x(k-2)}{4T^2} \quad (5.5)$$

Algoritmo dos mínimos quadrados recursivo:

Considerando o factor de esquecimento igual a 1 ($\lambda(t)=1$), e atendendo a que $\varphi(t)=u(t)$, o método dos mínimos quadrados recursivo, como vimos no capítulo 3, pode escrever-se da forma:

$$\varepsilon(k)=y(k)-\varphi^T(k)\hat{\theta}(k-1) \quad (5.6a)$$

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+P(k)\varphi(k)\varepsilon(k) \quad (5.6b)$$

$$P(k)=P(k-1)-\frac{P(k-1)\varphi(k)\varphi^T(k)P(k-1)}{1+\varphi^T(k)P(k-1)\varphi(k)} \quad (5.6c)$$

A escolha do factor de esquecimento igual a 1, resulta de, no modelo de simulação, os parâmetros do motor serem constantes. Portanto, uma vez que o modelo de simulação não trabalha com parâmetros variantes no tempo, o factor de esquecimento não tem, de facto, qualquer influência.

Para diminuir o tempo de cálculo, vamos considerar algumas etapas elementares. No instante (k), conhecemos $\theta(k-1)$ e $P(k-1)$ e, assim, construímos o vector m, de modo que:

$$m(k-1)=P(k-1)\varphi(k) \quad (5.7)$$

De acordo com (5.7) o denominador calcula-se por:

$$\text{den}=1+\varphi^T(k)m(k-1) \quad (5.8)$$

A matriz de ganhos calcula-se através de:

$$P(k)=P(k-1)-\frac{m(k-1)m^T(k-1)}{\text{den}} \quad (5.9)$$

Depois calculamos o erro de acordo com (5.6a) e o vector m no instante k:

$$m(k)=P(k)\varphi(k) \quad (5.10)$$

Assim, atendendo a (5.6b), os parâmetros são actualizados através de:

$$\hat{\theta}(k)=\hat{\theta}(k-1)+m(k)\varepsilon(k) \quad (5.11)$$

Para simplificar a escrita, sem perigo de confusão, podemos escrever:

$$\theta(k)=\theta(k-1)+m(k)\varepsilon(k) \quad (5.12)$$

Finalmente, o algoritmo base é implementado, no programa MATLAB:

```

...
k=k+1;
deriv_ids(k)=(ids(k+1)-ids(k-1))/(2*ts); % derivada de ids
deriv_uqs(k)=(uqs(k+1)-uqs(k-1))/(2*ts); % derivada de uqs
deriv_iqs(k)=(iqs(k+1)-iqs(k-1))/(2*ts); % derivada de iqs
se_d_iqs(k)=(iqs(k+2)-2*iqs(k)+iqs(k-2))/(4*ts^2); % segunda derivada de iqs
u1=-deriv_iqs(k);
u2=-iqs(k);
u3=ids(k)*(Wm(k)*pp); % pp é o n° de pares de pólos
u4=deriv_uqs(k)-uds(k)*(pp*Wm(k));
u5=uqs(k);
u=[u1 u2 u3 u4 u5];
y=se_d_iqs(k)-deriv_ids(k)*(Wm(k)*pp);
m=p0*u; % p0=P(k-1)
den=1+u'*m;
p=p0-(1/den)*m*m'; % matriz de ganhos P(k)
erro(k)=y-u'*teta0; % teta0 é a estimativa anterior
m=p*u;
teta=teta0+m*erro(k);
p0=p;
teta0=teta;
...

```

De acordo com as características do motor A, apresentadas no anexo B, os valores reais dos parâmetros θ_1 a θ_5 são:

$$\theta_1 = \frac{R_s}{\sigma L_s} + \frac{1}{\sigma \tau_r} = 125.495 \quad (5.13)$$

$$\theta_2 = \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} = 411.718 \quad (5.14)$$

$$\theta_3 = \frac{R_s}{\sigma L_s} = 70.942 \quad (5.15)$$

$$\theta_4 = \frac{1}{\sigma L_s} = 88.678 \quad (5.16)$$

$$\theta_5 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} = 514.648 \quad (5.17)$$

A simulação é realizada de modo que os sinais adquiridos são contaminados por ruído branco, cuja amplitude é cerca de 10% dos respectivos valores em regime permanente. Os sinais são filtrados através de um filtro passa baixo, de Butterworth, de ordem 4 e frequência de corte 100Hz.

5.3.1.1 Sinais obtidos com a simulação do motor A

Condições de simulação:

$$u_{ds} = 312 \cdot \sin(2\pi \cdot 50t)$$

$$u_{qs} = 312 \cdot \sin\left(2\pi \cdot 50t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Binário de carga: $T_c=10 \text{ N}\cdot\text{m}$

Tempo de amostragem: $T=0.1 \text{ ms}$ (10 kHz)

Velocidade inicial nula

Os sinais de tensão, corrente e velocidade de rotação obtidos com a simulação do motor A, estão ilustrados nas figuras 5.9, 5.10 e 5.11, respectivamente.

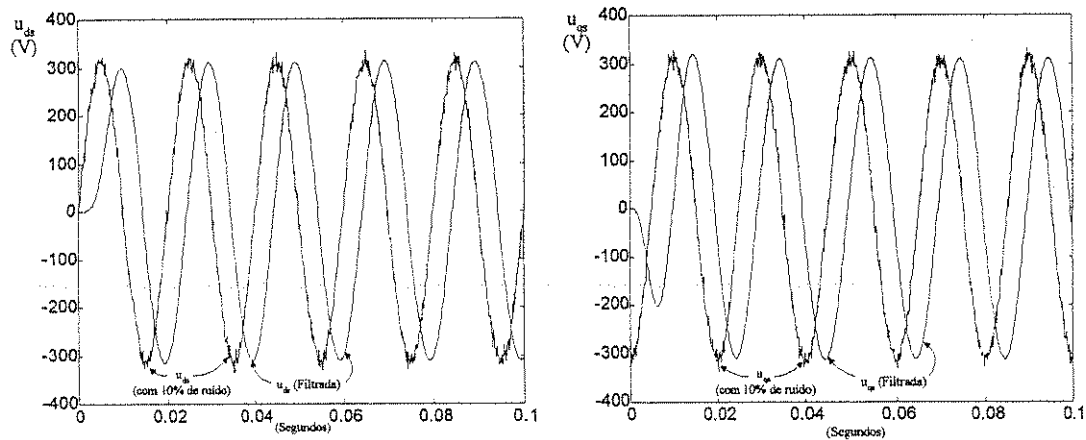


Figura 5.9: Sinais de tensão do motor A, com ruído e filtrados.

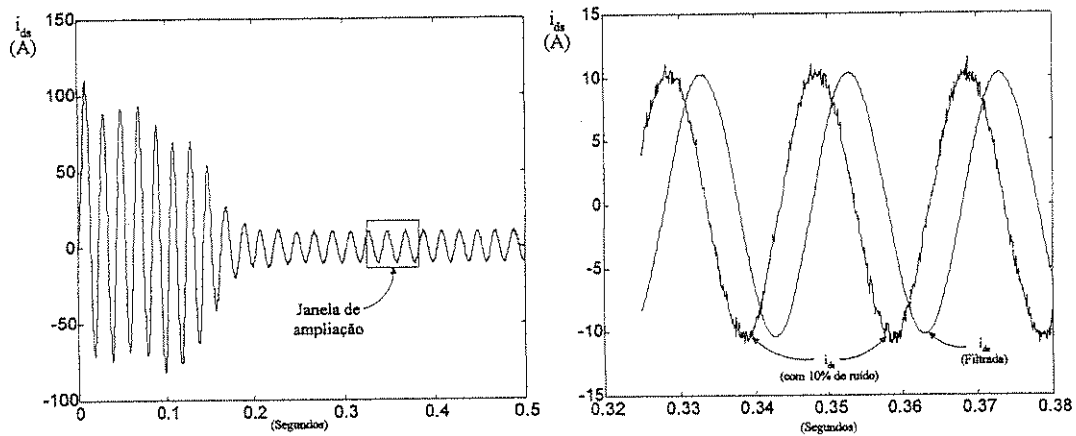


Figura 5.10: Corrente i_{ds} do motor A. Ampliação de i_{ds} com ruído e filtrada.

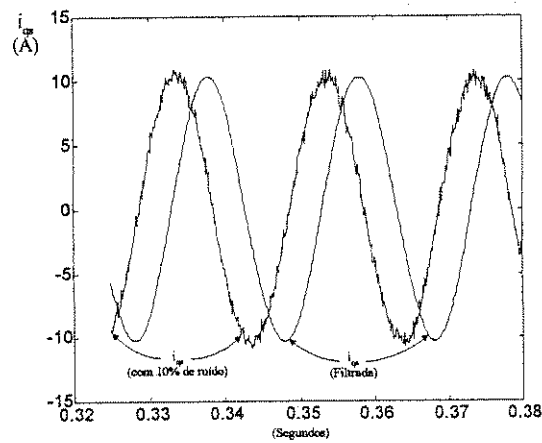


Figura 5.11: Corrente i_{qs} do motor A, com ruído e filtrada.

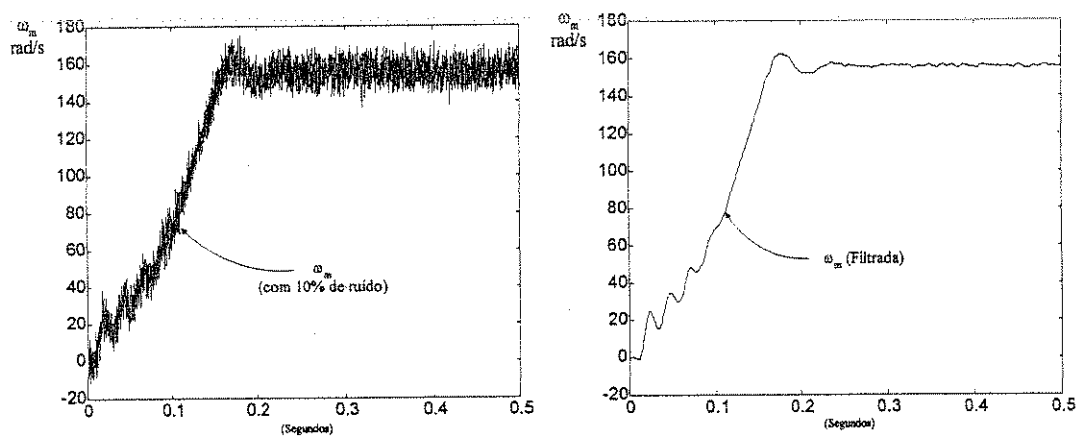


Figura 5.12: Velocidade do motor A, com ruído e filtrada.

Resultados para o motor A

Valores estimados ao fim de 0.3 segundos:

Tabela 5.1: Vector de parâmetros θ estimado, do motor A.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
θ_1	125.495	$\theta_{1\text{real}}+30\%$	125.781	-0.23
θ_2	411.718	$\theta_{2\text{real}}-30\%$	1.06e3	-158.03
θ_3	70.942	$\theta_{3\text{real}}+30\%$	71.077	-0.19
θ_4	88.678	$\theta_{4\text{real}}-30\%$	89.071	-0.44
θ_5	514.648	$\theta_{5\text{real}}+30\%$	505.242	1.83

Estes primeiros resultados mostram, desde logo, que o parâmetro θ_2 não é identificado correctamente. Consequentemente, os parâmetros do motor não podem determinar-se à custa deste parâmetro. Como vimos no capítulo anterior, podemos determinar os parâmetros físicos do motor à custa dos restantes parâmetros do modelo θ_1 , θ_3 , θ_4 , e θ_5 , o que permite obter bons resultados, quando não se tem em conta o parâmetro θ_2 , como se mostra na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros θ estimados.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
R_s	$\frac{\theta_3}{\theta_4}$	0.8 Ω	0.798	0.25
	$\frac{\theta_2}{\theta_5}$		2.103	-162.84
τ_r	$\frac{\theta_4}{\theta_5}$	172.3 ms	176.3	-2.32
	$\frac{\theta_3}{\theta_2}$		66.9	61.17
σ	$\frac{\theta_5}{(\theta_1 - \theta_3)\theta_4}$	10.6 %	10.37	2.55
	$\frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3}$		27.32	-156.79

L_s	$\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_5}$	106 mH	108.3	-2.14
	$\frac{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3}{\theta_2\theta_4}$		41.1	61.24

Com o objectivo de verificar a dependência, ou não, dos valores estimados, em relação aos seus valores iniciais, fizemos vários ensaios, com diferentes valores iniciais, dos quais apresentamos dois casos, nas tabelas 5.3 e 5.4.

Tabela 5.3: Vector de parâmetros θ estimado, do motor A, com valores iniciais mais afastados.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
θ_1	125.495	$\theta_{1real}-40\%$	125.781	-0.23
θ_2	411.718	$\theta_{2real}+40\%$	1.06e3	-158.04
θ_3	70.942	$\theta_{3real}-40\%$	71.077	-0.19
θ_4	88.678	$\theta_{4real}+40\%$	89.071	-0.44
θ_5	514.648	$\theta_{5real}-40\%$	505.243	1.83

Tabela 5.4: Vector de parâmetros θ estimado, do motor A, com valores iniciais nulos.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
θ_1	125.495	0	125.781	-0.23
θ_2	411.718	0	1.06e3	-158.03
θ_3	70.942	0	71.077	-0.19
θ_4	88.678	0	89.071	-0.44
θ_5	514.648	0	505.24	1.83

Os ensaios realizados mostram que o resultado da estimação não depende dos valores iniciais, como também se pode ver nas figuras 5.13 a 5.17.

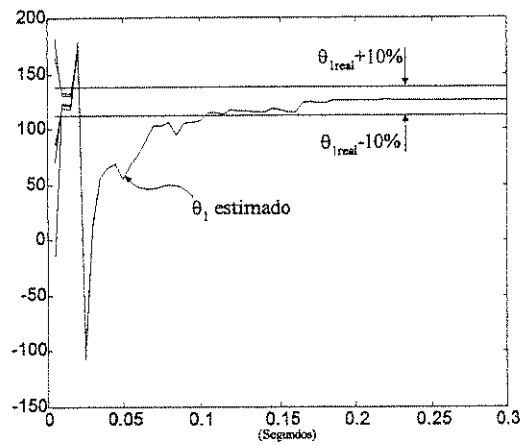


Figura 5.13: Evolução do parâmetro θ_1 do motor A, para diferentes valores iniciais.

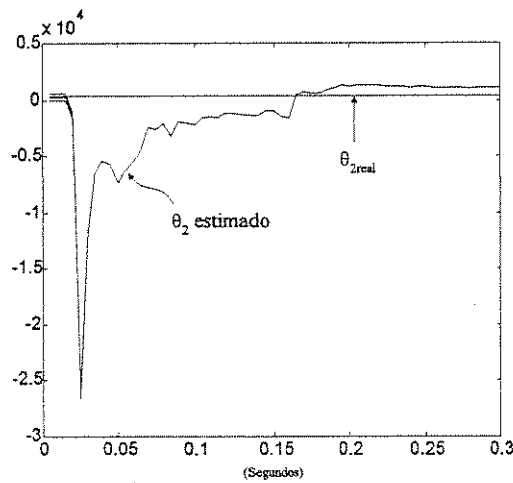


Figura 5.14: Evolução do parâmetro θ_2 do motor A, para diferentes valores iniciais.

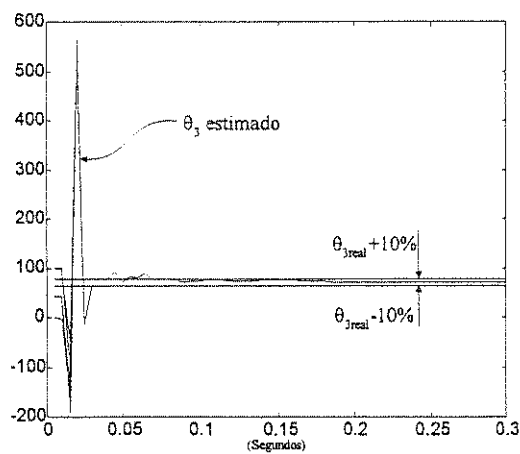


Figura 5.15: Evolução do parâmetro θ_3 , para diferentes valores iniciais.

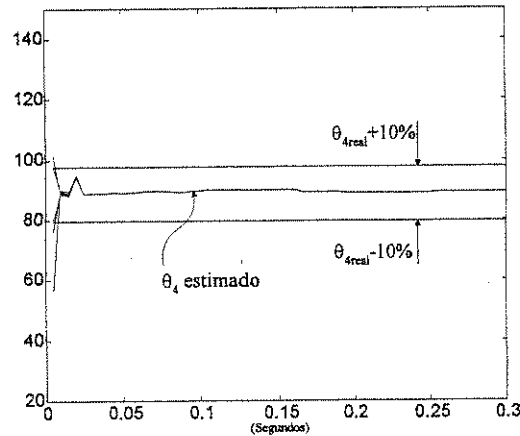


Figura 5.16: Evolução do parâmetro θ_4 do motor A, para diferentes valores iniciais.

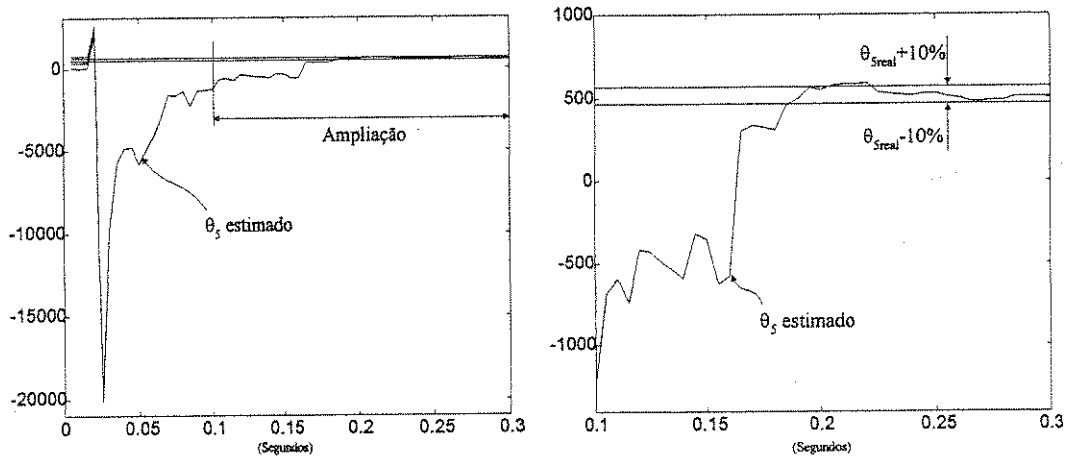


Figura 5.17: Evolução do parâmetro θ_5 do motor A, para diferentes valores iniciais.

Observando com algum cuidado as figuras anteriores, que mostram a evolução dos valores estimados dos parâmetros do modelo partindo de diferentes valores iniciais, podemos constatar que o parâmetro θ_4 é o que apresenta uma melhor e mais rápida convergência. Os parâmetros θ_1 e θ_3 , também convergem relativamente depressa e o parâmetro θ_5 apresenta uma convergência mais lenta. O parâmetro θ_2 não é identificável, contudo, podemos determinar os parâmetros físicos do motor, sem utilizar o seu valor mal estimado.

Como vimos no capítulo 4, a equação (5.2) pode escrever-se da forma:

$$y = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \quad (5.18)$$

em que:

$$S_i = u_i \times \theta_{i,\text{real}} \quad (5.19)$$

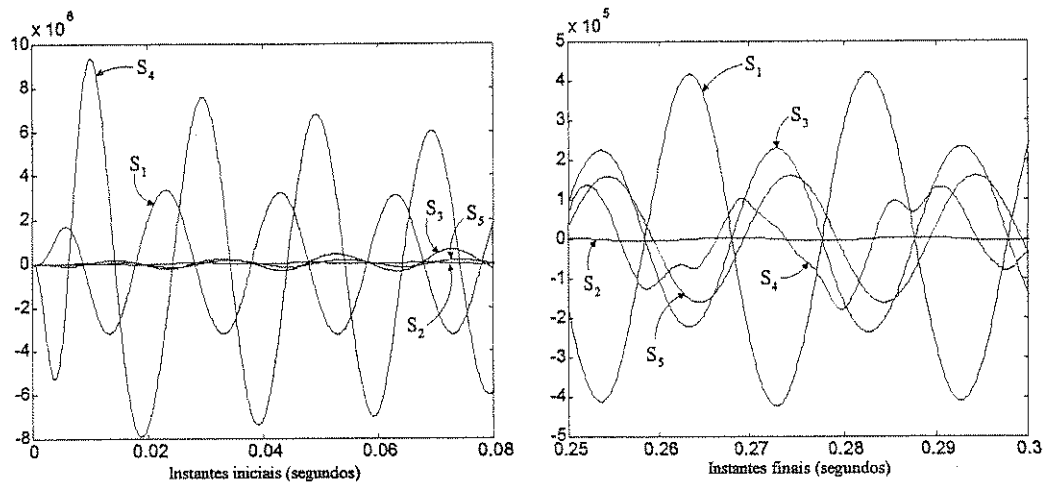


Figura 5.18: Análise da identificabilidade dos parâmetros θ , do motor A.

O facto de θ_2 não ser correctamente estimado, significa que o termo S_2 , em (5.18), é desprezável face aos restantes, como se pode ver na figura 5.18. Por exemplo, nos instantes iniciais, S_2 , S_3 , e S_5 são muito menores do que S_1 e S_4 , pelo que θ_2 , θ_3 e θ_5 são mais oscilantes.

Repare-se que, no modelo (5.2), se a velocidade de rotação ω , for muito baixa o termo S_3 pode diminuir significativamente, face aos restantes, e o parâmetro θ_3 deixa de ser estimado correctamente.

5.3.1.2 Sinais obtidos com a simulação do motor B

Para o motor B, cujas características apresentamos no anexo B, as condições de simulação foram as seguintes:

$$u_{ds} = 312 \cdot \text{seno}(2\pi \cdot 50t)$$

$$u_{qs} = 312 \cdot \text{seno}\left(2\pi \cdot 50t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Binário de carga: $T_c = 2 \text{ N}\cdot\text{m}$

Tempo de amostragem: $T = 0.1 \text{ ms}$ (10 kHz)

Velocidade inicial nula

Ruído branco de amplitude 10% do valor das amostras em regime permanente

As tensões são as mesmas da figura 5.9.

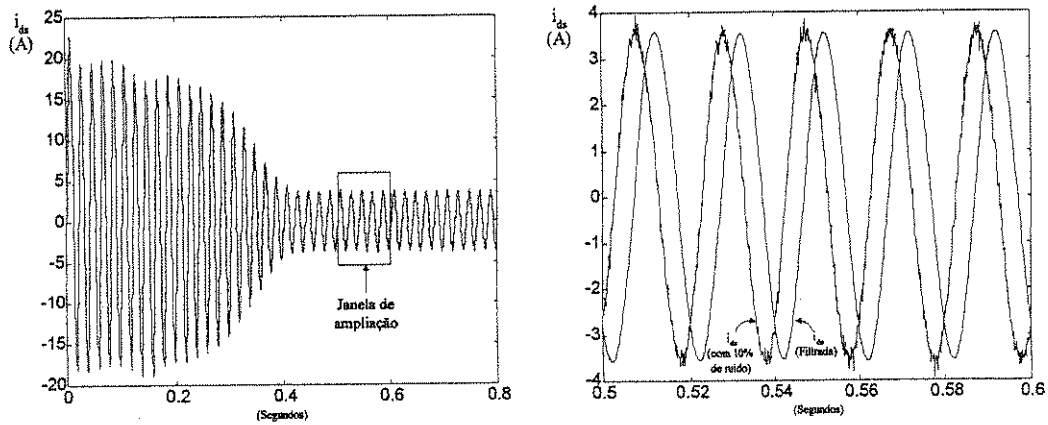


Figura 5.19: Corrente i_{ds} do motor B. Ampliação de i_{ds} com ruído e filtrada.

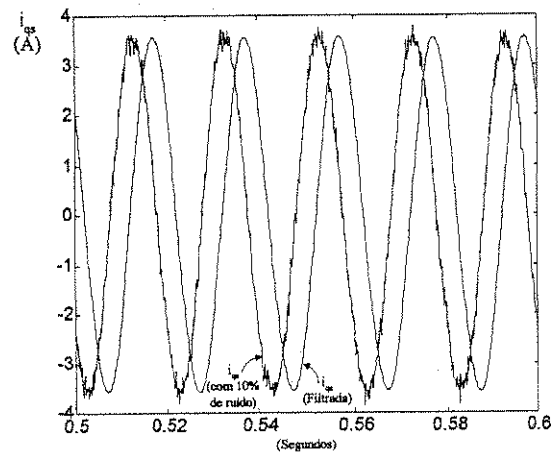


Figura 5.20: Ampliação de i_{qs} do motor B, com ruído e filtrada.

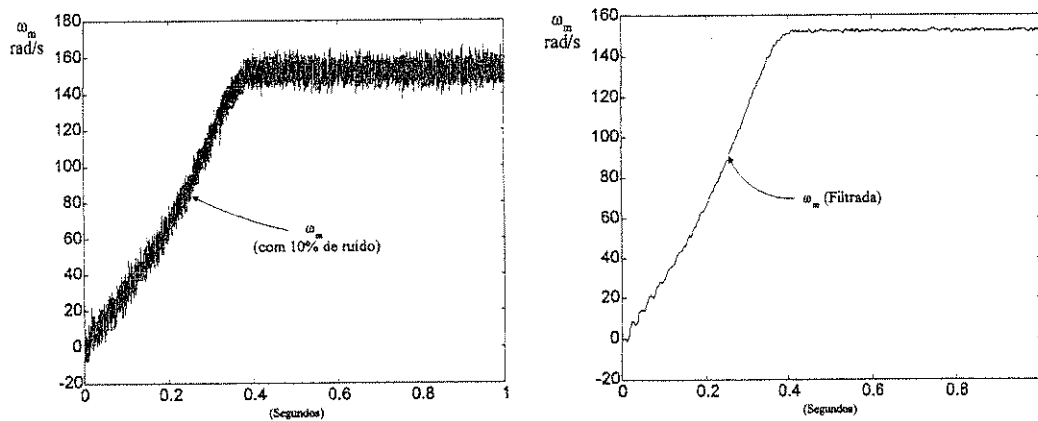


Figura 5.21: Velocidade do motor B, com ruído e filtrada.

Resultados para o motor B

Valores estimados ao fim de 0.5 segundos:

Tabela 5.5: Vector de parâmetros θ estimado do motor B.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
θ_1	199.903	$\theta_{1real}+40\%$	199.486	0.21
θ_2	1092.085	$\theta_{2real}-40\%$	1.71e3	-56.43
θ_3	123.259	$\theta_{3real}+40\%$	123.316	-0.05
θ_4	22.411	$\theta_{4real}-40\%$	22.345	0.3
θ_5	198.561	$\theta_{5real}+40\%$	199.238	-0.34

Tabela 5.6: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros θ estimados.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
R_s	$\frac{\theta_3}{\theta_4}$	5.5 Ω	5.519	-0.34
	$\frac{\theta_2}{\theta_5}$		8.74	-55.9
τ_r	$\frac{\theta_4}{\theta_5}$	112.9 ms	112.2	0.66
	$\frac{\theta_3}{\theta_2}$		72.2	36.06
σ	$\frac{\theta_5}{(\theta_1 - \theta_3)\theta_4}$	11.56 %	11.71	-1.26
	$\frac{\theta_2}{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3}$		18.19	-57.33
L_s	$\frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_5}$	386 mH	382.3	0.96
	$\frac{(\theta_1 - \theta_3)\theta_3}{\theta_2\theta_4}$		246.1	36.25

5.3.2 Estimação do vector de parâmetros K

No capítulo anterior reescrevemos o modelo (5.2), utilizando os parâmetros K_1 a K_5 :

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2 i_{qs}}{dt^2} + \omega \frac{di_{ds}}{dt} = \\ & = \left(\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} \right) K_1 + i_{qs} K_2 + \frac{di_{qs}}{dt} K_3 - \left(\frac{du_{qs}}{dt} - \omega u_{ds} \right) K_4 - u_{qs} K_5 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Os valores reais dos parâmetros K_1 a K_5 , para o motor A, são:

$$K_1 = \frac{R_s}{\sigma L_s} = 71.2 \quad (5.21)$$

$$K_2 = \frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} = 413.231 \quad (5.22)$$

$$K_3 = \frac{1}{\sigma \tau_r} = 54.753 \quad (5.23)$$

$$K_4 = \frac{1}{\sigma L_s} = 89 \quad (5.24)$$

$$K_5 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} = 516.539 \quad (5.25)$$

Resultados para o motor A

Resultados estimados ao fim de 0.3 segundos:

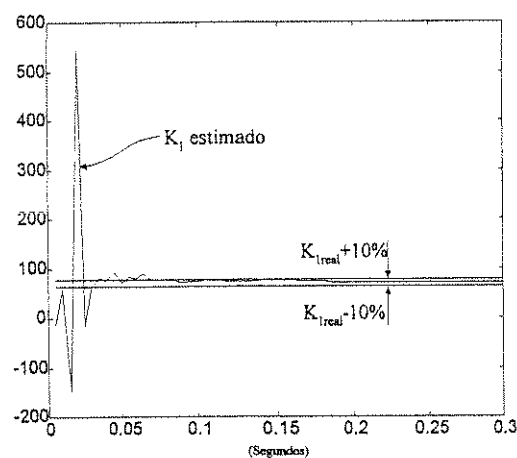
Tabela 5.7: Vector de parâmetros K estimado, do motor A.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
K_1	71.2	$K_{1real}+30\%$	71.077	0.17
K_2	413.231	$K_{2real}-30\%$	1.06e3	-157.09
K_3	54.753	$K_{3real}+30\%$	54.704	0.09
K_4	89	$K_{4real}-30\%$	89.071	-0.08
K_5	516.539	$K_{5real}+30\%$	505.242	2.19

Tabela 5.8: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros K estimados.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
R_s	$\frac{K_2}{K_5}$	0.8 Ω	2.1027	-162.84
	$\frac{K_1}{K_4}$		0.798	0.26
τ_r	$\frac{K_1}{K_2}$	172.3 ms	66.9	61.17
	$\frac{K_4}{K_5}$		176.3	-2.32
σ	$\frac{K_2}{K_1 K_3}$	10.6 %	27.32	-156.79
	$\frac{K_5}{K_3 K_4}$		10.37	2.55
L_s	$\frac{K_1 K_3}{K_2 K_4}$	106 mH	41.1	61.24
	$\frac{K_3}{K_5}$		108.3	-2.14

O modelo (5.20), baseado no vector de parâmetros K, é muito semelhante ao modelo parametrizado com o vector de parâmetros θ . Também neste caso, o segundo parâmetro (K_2) não é correctamente estimado. A evolução dos parâmetros K, mostra que K_4 é o de convergência mais rápida, seguido de K_1 e K_3 .

Figura 5.22: Evolução do parâmetro K_1 do motor A.

Admitindo um erro de +5% no valor de R_s :

Tabela 5.21: Vector de parâmetros β do motor A, estimado com um erro de 5% no valor de R_s .

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
β_1	54.753	0	51.447	6.04
β_2	89	0	88.71	0.33
β_3	516.539	0	482.74	6.54

Tabela 5.22: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros β , estimados com um erro de 5% no valor de R_s .

		Valor real	Valor estimado	Erro %
τ_r	$\frac{\beta_2}{\beta_3}$	172.3 ms	183.8	-6.65
σ	$\frac{\beta_3}{\beta_1\beta_2}$	10.6 %	10.58	0.58
L_s	$\frac{\beta_1}{\beta_3}$	106 mH	106.6	-0.54

Admitindo um erro de +10% no valor de R_s :

Tabela 5.23: Vector de parâmetros β do motor A, estimado com um erro de 10% no valor de R_s .

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
β_1	54.753	0	48.83	10.82
β_2	89	0	88.734	0.3
β_3	516.539	0	456.361	11.65

Tabela 5.24: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros β , estimados com um erro de 10% no valor de R_s .

		Valor real	Valor estimado	Erro %
τ_r	$\frac{\beta_2}{\beta_3}$	172.3 ms	194.4	-12.85
σ	$\frac{\beta_3}{\beta_1\beta_2}$	10.6 %	10.53	1.01
L_s	$\frac{\beta_1}{\beta_3}$	106 mH	107	-0.94

Resultados para o motor B

Valores estimados ao fim de 1.5 segundos, com $R_s = R_{s,real}$:

Tabela 5.25: Vector de parâmetros β estimado, do motor B.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
β_1	76.644	$\beta_{1real}+40\%$	76.734	0.35
β_2	22.411	$\beta_{2real}+40\%$	22.39	0.08
β_3	198.561	$\beta_{3real}+40\%$	198.442	0.06

Tabela 5.26: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros β estimados.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
τ_r	$\frac{\beta_2}{\beta_3}$	112.9 ms	112.8	0.05
σ	$\frac{\beta_3}{\beta_1\beta_2}$	11.56 %	11.6	-0.37
L_s	$\frac{\beta_1}{\beta_3}$	386 mH	384.9	0.29

Os resultados são aparentemente bons, mas a estimação do parâmetro β_3 é mais difícil, à semelhança do parâmetro X_3 . Neste caso, é necessário 1 segundo para obter bons resultados, para o motor A e 1.5 segundos para o motor B. Além disso, os parâmetros X_3 e β_3 são vitais na determinação dos parâmetros do motor, uma vez que entram directamente nas equações de τ_r , σ e L_s .

5.4.3 Estimação do vector de parâmetros W e dos fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs}

De acordo com o capítulo 4, o modelo escreve-se da forma:

$$\frac{di_{qs}}{dt} - \omega i_{ds} = -i_{qs} W_1 + (u_{qs} - R_s i_{qs} - \omega \phi_{ds}) W_2 + \phi_{qs} W_3 \quad (5.30)$$

Resultados para o motor A

Valores estimados ao fim de 1 segundo:

Tabela 5.27: Vector de parâmetros W estimado, para o motor A.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
W_1	54.753	$W_{1real}+30\%$	52.392	4.31
W_2	89	$W_{2real}+30\%$	79.836	10.3
W_3	516.539	$W_{3real}+30\%$	643.575	-24.59

Tabela 5.28: Parâmetros do motor A, obtidos a partir dos parâmetros W estimados.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
τ_r	$\frac{w_2}{w_3}$	172.3 ms	124.1	28
σ	$\frac{w_3}{w_1 w_2}$	10.6 %	153.9	-44.61
L_s	$\frac{w_1}{w_3}$	106 mH	81.4	23.2

Resultados para o motor B

Valores estimados ao fim de 1.5 segundos, com $R_s = R_{s,real}$:

Tabela 5.29: Vector de parâmetros W estimado, para o motor B.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
W_1	76.644	$W_{1real}+40\%$	73.464	4.14
W_2	22.411	$W_{2real}+40\%$	20.61	8.04
W_3	198.561	$W_{3real}+40\%$	226.15	-13.89

Tabela 5.30: Parâmetros do motor B, obtidos a partir dos parâmetros W estimados.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
τ_r	$\frac{w_2}{w_3}$	112.9 ms	91.1	19.28
σ	$\frac{w_3}{w_1 w_2}$	11.56 %	14.94	29.2
L_s	$\frac{w_1}{w_3}$	386 mH	324.9	15.84

Este modelo está fora de questão, por ser demasiado sensível às perturbações de ruído e ao erro no valor de R_s . Além dos valores estimados serem inaceitáveis, os parâmetros não convergem para os verdadeiros valores, com o nível de ruído em causa. A estimação dos parâmetros à custa da estimação simultânea dos fluxos ϕ_{ds} e ϕ_{qs} só são bons, na ausência de perturbações de ruído o que, obviamente, não tem interesse.

5.5 Optimização da estimação simultânea de todos os parâmetros

No final da secção 4.6 do capítulo 4, referimos uma possibilidade de melhorar a estimação simultânea de todos os parâmetros e apresentamos a solução para o caso do modelo parametrizado com o vector K, onde o parâmetro K_2 não é estimado correctamente. Para recordar, podemos dizer que o procedimento consiste em anular o parâmetro K_2 no modelo (5.20) e estimar os restantes parâmetros. De seguida, calculamos K_2 utilizando os valores estimados de K_1 , K_3 , K_4 e K_5 . Executando este procedimento sucessivamente, obtemos resultados globalmente melhores, ao fim de algumas iterações.

Resultados para o motor A

Parâmetro K_2 ($K_{2,real}=413.231$):

Tabela 5.31: Valores do parâmetro K_2 , do motor A, para as primeiras 3 iterações.

Iteração	Valor estimado	Erro %
1 ^a	395.415	4.31
2 ^a	404.7	2.06
3 ^a	404.915	2.01

Parâmetros K_1 , K_3 , K_4 e K_5 :

Tabela 5.32: Parâmetros estimados do motor A, K_1 , K_3 , K_4 e K_5 , ao fim de 3 iterações.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
K_1	71.2	$K_{1real}+30\%$	71.846	-0.91
K_3	54.753	$K_{3real}+30\%$	54.77	-0.03
K_4	89	$K_{4real}+30\%$	89.709	-0.8
K_5	516.539	$K_{5real}+30\%$	505.588	2.12

Parâmetros do motor:

Tabela 5.33: Parâmetros físicos do motor A.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
R_s	$\frac{K_2}{K_5}$	0.8 Ω	0.801	-0.11
	$\frac{K_1}{K_4}$		0.801	-0.11
τ_r	$\frac{K_1}{K_2}$	172.3 ms	177.4	-2.98
	$\frac{K_4}{K_5}$		177.4	-2.98
σ	$\frac{K_2}{K_1 K_3}$	10.6 %	10.29	3.29
	$\frac{K_5}{K_3 K_4}$		10.29	3.29
L_s	$\frac{K_1 K_3}{K_2 K_4}$	106 mH	108.3	2.2
	$\frac{K_3}{K_5}$		108.3	2.2

Resultados para o motor B

Parâmetro K_2 ($K_{2,real}=1092.085$):

Tabela 5.34: Valores do parâmetro K_2 , do motor B, para as primeiras 4 iterações.

Iteração	Valor estimado	Erro %
1 ^a	961.822	11.93
2 ^a	1029.3	5.75
3 ^a	1033.9	5.32
4 ^a	1034.3	5.3

Parâmetros K_1 , K_3 , K_4 e K_5 :

Tabela 5.35: Parâmetros estimados do motor B, K_1 , K_3 , K_4 e K_5 , ao fim de 4 iterações.

	Valor real	Valor inicial	Valor estimado	Erro %
K_1	123.259	$K_{1real}+30\%$	124.835	-1.28
K_3	76.644	$K_{3real}+30\%$	75.441	1.57
K_4	22.411	$K_{4real}+30\%$	22.485	-0.33
K_5	198.561	$K_{5real}+30\%$	186.289	6.18

Parâmetros do motor:

Tabela 5.36: Parâmetros físicos do motor B.

		Valor real	Valor estimado	Erro %
R_s	$\frac{K_2}{K_5}$	5.5 Ω	5.552	-0.94
	$\frac{K_1}{K_4}$		5.552	-0.94
τ_r	$\frac{K_1}{K_2}$	112.9 ms	120.7	0.11
	$\frac{K_4}{K_5}$		120.7	0.11
σ	$\frac{K_2}{K_1 K_3}$	11.56 %	10.98	5
	$\frac{K_5}{K_3 K_4}$		10.98	5

L_s	$\frac{K_1 K_3}{K_2 K_4}$	386 mH	405	4.91
	$\frac{K_3}{K_5}$		405	4.91

Conclusão:

Estes resultados mostram que é possível estimar convenientemente todos os parâmetros dos modelos parametrizados com os vectores de parâmetros θ e K , embora à custa de mais tempo de cálculo. Naturalmente que, agora, as duas possibilidades de determinar os parâmetros físicos do motor, levam-nos aos mesmos resultados, como se pode ver nas tabelas 5.33 e 5.36.

Esta técnica atenua o problema, que referimos anteriormente, de desprezar o termo S_2 em (5.18). Isso correspondia a ignorar o parâmetro θ_2 ou K_2 , conforme o modelo, na determinação dos parâmetros físicos do motor. Esta situação pode ser razoável ou não, dependendo, por exemplo, do ponto de funcionamento do motor. Se este, favorece o termo S_2 , então não é conveniente ignorar θ_2 e esta técnica pode ser utilizada. Contudo, os testes que foi possível realizar, não permitem tirar conclusões acerca da sua convergência, em todas as situações e independentemente do motor em causa. Em [Stephan 94], refere-se que não é garantida a convergência deste procedimento, pelo que é conveniente realizar mais trabalhos de investigação sobre esta possibilidade.

5.6 Obtenção dos parâmetros do motor a partir da função de transferência

No final do capítulo 4, estudamos a possibilidade de estimar os parâmetros físicos do motor, utilizando um modelo do tipo “caixa preta”. Isso levou-nos a uma função de transferência de coeficientes complexos, em que os sinais de entrada e saída, \underline{u}_s e \underline{i}_s , respectivamente, são constituídos por amostras complexas.

A função de transferência complexa do motor, referida ao referencial do estator, é, como vimos, dada por:

$$\frac{\underline{i}_s}{\underline{u}_s} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{1}{\sigma L_s}}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} - j\omega \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{R_s}{\sigma L_s} \right)} \quad (5.31)$$

Utilizando, por exemplo, o vector de parâmetros θ , podemos reescrevê-la da forma:

$$\frac{\underline{i}_s}{\underline{u}_s} = \frac{b_1 S + b_0}{S^2 + a_1 S + a_0} = \frac{\theta_4 S + \theta_5 - j\omega \theta_4}{S^2 + (\theta_1 - j\omega) S + (\theta_2 - j\omega \theta_3)} \quad (5.32)$$

Substituindo os valores reais dos parâmetros θ_i , no o caso do motor A, temos:

$$\frac{i_s}{u_s} = \frac{88.678S + 514.648 - j88.678\omega}{S^2 + (125.495 - j\omega)S + (411.718 - j70.942\omega)} \quad (5.33)$$

Para um dado ponto de funcionamento, em que $\omega = 154.96$ rad/s, temos, sob a forma discreta:

$$\frac{i_s(z)}{u_s(z)} = \frac{(4.408e-3 - j1.655e-7)Z^2 + (4.667e-6 - j1.365e-4)Z + (-4.403e-3 - j1.363e-4)}{Z^2 + (-1.987 - j3.082e-2)Z + (9.871e-1 + j3.06e-2)} \quad (5.34)$$

Simplificando, vem:

$$\frac{i_s(z)}{u_s(z)} = \frac{N_0 z^2 + N_1 z + N_2}{z^2 + D_1 z + D_2} \quad (5.35)$$

De acordo com o capítulo 4, obtemos:

$$a_0 = \frac{4}{T^2} \frac{D_1 + D_2 + 1}{-D_1 + D_2 + 1} \quad (5.36a)$$

$$a_1 = \frac{4}{T} \frac{1 - D_2}{-D_1 + D_2 + 1} \quad (5.36b)$$

$$b_0 = \frac{8}{T^2} \frac{N_1}{(-D_1 + D_2 + 1)} \quad (5.36c)$$

$$b_1 = \frac{4}{T} \frac{N_0 - N_2}{-D_1 + D_2 + 1} \quad (5.36d)$$

Atendendo a (5.32) podemos determinar os parâmetros θ do seguinte modo:

$$\theta_1 = \text{Re}(a_1)$$

$$\theta_2 = \text{Re}(a_0)$$

$$\theta_3 = -\text{Im}(a_0)/\omega$$

$$\theta_4 = \text{Re}(b_1), \text{ ou } \theta_4 = -\text{Im}(b_0)/\omega$$

$$\theta_5 = \text{Re}(b_0)$$

A estimação dos parâmetros físicos do motor, foi realizada através de dados relativos ao regime permanente, onde a velocidade é constante. Nestes casos, podemos obter os parâmetros θ_i a partir dos coeficientes estimados da função de transferência (5.35),

utilizando o conjunto de equações anteriores. Por outro lado, a estimação da função de transferência pode ser realizada utilizando as várias funções de identificação do programa MATLAB.

Os resultados observados mostraram, claramente, que nestas situações, os dados não são suficientemente informativos e a função de transferência não é correctamente estimada.

Para estudar as potencialidades de identificação de funções de transferência de coeficientes complexos, oferecidas pelo programa MATLAB, construímos um sinal de amostras complexas:

$$\underline{u}_s(k) = u_{ds}(k) + j u_{qs}(k)$$

Com o sinal de entrada anterior, simulamos a função de transferência (5.34). Os sinais u_{ds} e u_{qs} são formados por ruído branco.

Resultados:

Os resultados seguintes foram obtidos com ambas as funções do MATLAB, ARX e ARMAX, em que a primeira utiliza um algoritmo baseado no método dos mínimos quadrados e a segunda o método iterativo de Gauss-Newton.

$$\frac{i_s(z)}{u_s(z)} = \frac{(4.416e-3 - j5.559e-8)Z^2 + (-1.291e-5 - j1.368e-4)Z + (-4.394e-3 - j1.362e-4)}{Z^2 + (-1.987 - j3.082e-2)Z + (9.871e-1 + j3.06e-2)}$$

ou:

$$\frac{i_s}{u_s} = \frac{(88.6767 - j5.064e-4)S - 3.0226e+3 - j2.7485e+4}{S^2 + (125.51 - j3.0994e+2)S + (412.37 - j2.1975e+4)} \quad (5.37)$$

A partir dos coeficientes estimados de (5.37) obtemos:

Tabela 5.37: Parâmetros θ , do motor A, obtidos a partir dos coeficientes da função de transferência estimada.

	Valor real	Valor estimado	Erro %
$\theta_1 = \text{Re}(\underline{a}_1)$	125.495	125.506	-0.01
$\theta_2 = \text{Re}(\underline{a}_0)$	411.718	412.366	-0.16
$\theta_3 = -\text{Im}(\underline{a}_0)/\omega$	70.942	70.905	0.05
$\theta_4 = \text{Re}(\underline{b}_1)$	88.678	88.677	0
$\theta_4 = -\text{Im}(\underline{b}_0)/\omega$		88.684	-0.01
$\theta_5 = \text{Re}(\underline{b}_0)$	514.648	-3.023e3	687.32

Para o caso do motor B, os resultados obtidos são qualitativamente iguais.

Os resultados da tabela 5.37 mostram que é possível utilizar esta técnica para estimar os parâmetros do motor, sem necessidade de reconstruir as derivadas, utilizando apenas os sinais directamente adquiridos do sistema. Contudo, também neste caso há um parâmetro que não se consegue estimar, θ_5 , por não ser identificável o parâmetro b_0 (ou N_1). À semelhança do que vimos anteriormente, devido à sobreparametrização podemos determinar os parâmetros físicos do motor sem utilizar um dos parâmetros θ , nomeadamente θ_5 , ou então, não determinar b_0 à custa de N_1 .

Um dos grandes desafios no desenvolvimento desta técnica, consiste em garantir que os dados sejam suficientemente informativos e para isso é de importância vital, estudar a possibilidade da inclusão da informação do valor da velocidade no procedimento de estimação. Caso contrário, a velocidade não é utilizada senão no cálculo do parâmetro θ_3 e θ_4 , embora este último possa ser determinado apenas à custa de b_1 .

5.7 Conclusão

Neste capítulo começamos por apresentar o modelo de simulação do motor de indução trifásico, que permitiu obter os sinais utilizados na estimação dos parâmetros de dois motores, simulados com os seus parâmetros físicos conhecidos.

Aos sinais ideais, do ponto de vista teórico, acrescentamos um forte nível de ruído branco, correspondente a 10% dos valores dos sinais em regime permanente do funcionamento do motor. Esses sinais são, naturalmente, as tensões u_{ds} e u_{qs} , as correntes i_{ds} e i_{qs} e a velocidade de rotação ω .

Com as características do modelo de simulação implementado no programa MATLAB e o nível de ruído utilizado, foi possível tirar conclusões importantes quanto à identificabilidade dos parâmetros do motor de indução, segundo cada um dos modelos apresentados no capítulo 4, através do método dos mínimos quadrados recursivo.

No que diz respeito à estimação simultânea de todos os parâmetros, os resultados são semelhantes com ambos os modelos parametrizados com os vectores θ e K . Nas condições normais de funcionamento, foi possível estimar os parâmetros do motor de indução. Contudo, em cada um dos modelos, o segundo parâmetro (θ_2 e K_2) não é correctamente estimado. Isso deve-se ao facto de o segundo termo (S_2), na equação à qual é aplicado o método dos mínimos quadrados recursivo, ser praticamente nulo face aos restantes. Isto significa que os parâmetros θ_2 e K_2 não são suficientemente excitados, uma vez que as entradas de excitação destes parâmetros, correspondem à corrente i_{qs} que é significativamente menor do que a sua derivada e a tensão u_{qs} , sendo estas, as entradas de excitação de outros dois parâmetros. Os casos extremos correspondem à situação do motor em vazio e com carga máxima. No primeiro caso, a corrente i_{qs} é mínima, o termo S_2 tem menos peso, e os parâmetros θ_2 e K_2 são ainda

menos excitados. Ao contrário, com binário de carga máximo, a corrente i_{qs} é máxima e, deste modo, θ_2 e K_2 são mais excitados, contudo, não suficientemente.

Como nestes modelos existe um parâmetro a mais, relativamente aos parâmetros do motor que se pretendem conhecer, podemos ignorar o parâmetro que não é bem estimado, θ_2 ou K_2 , conforme o modelo, e determinar os parâmetros físicos do motor à custa dos restantes. Este procedimento é tanto mais aceitável quanto menor for o termo S_2 (e portanto, a corrente i_{qs}), ou seja, próximo da situação do motor em vazio, ou baixo nível de corrente.

Se em relação ao segundo parâmetro, os modelos se comportam da mesma maneira, o mesmo já não acontece relativamente ao terceiro: a confiança nos valores estimados para os parâmetros θ_3 e K_3 pode ser significativamente diferente, em diferentes pontos de funcionamento do motor. O termo S_3 é directamente proporcional à velocidade de rotação no modelo parametrizado com o vector θ , enquanto que no modelo parametrizado com o vector K , não depende directamente da velocidade. Assim, se esta for muito baixa, o termo S_3 que é igual a $\omega \times i_{ds} \times \theta_3$, no modelo dos θ_i , pode tornar-se insignificante face aos restantes e, deste modo, o parâmetro θ_3 deixa de ser suficientemente excitado.

A procura de um modelo mais robusto, para a gama de pontos de funcionamento do motor e a eliminação da sobreparametrização dos modelos parametrizados com os vectores θ e K , levou-nos ao modelo parametrizado com o vector de parâmetros X , onde se admite que a resistência do estator é conhecida. Este modelo é, aparentemente mais robusto em relação à gama de variação da velocidade e do binário de carga, mas para fortes níveis de ruído (como foi o caso) não conduz a melhores resultados nos valores estimados e a convergência é mais lenta. Além disso, com o nível de ruído nas medidas, utilizado na simulação, a confiança no valor conhecido da resistência do estator, deve ter um erro inferior a 10% o que pode ser, manifestamente, difícil de garantir.

Pelas mesmas razões, os modelos parametrizados com os vectores β e W , que requerem a estimação dos fluxos à custa do valor conhecido da resistência do estator, são ainda mais falíveis e dificilmente implementados na prática. Para mais, era necessário garantir que o integrador necessário à estimação dos fluxos, não tivesse um desvio crescente, ao longo do tempo.

Assim, fomos conduzidos a procurar um procedimento de optimização, na estimação dos vectores de parâmetros θ e K . A técnica utilizada, embora exija mais tempo de cálculo, permite-nos estimar correctamente todos os parâmetros θ e K , nomeadamente, θ_2 e K_2 . Contudo, é conveniente aprofundar o estudo da convergência do procedimento.

Por fim, procuramos estimar os coeficientes complexos da função de transferência do motor de indução e, com eles, determinar os parâmetros físicos do motor. Os resultados não são suficientemente conclusivos e carecem de um grande esforço de investigação. No entanto, verificamos que os sinais relativos ao funcionamento do

motor em regime permanente não são suficientemente informativos e o facto de a velocidade aparecer nos coeficientes do numerador e denominador da função de transferência, dificulta o problema da identificação, a não ser que também se pretenda estimar a velocidade, mas, neste caso, aumenta o número de parâmetros a estimar e diminuem os dados. A estimação dos parâmetros e da velocidade, em simultâneo, parece-nos ser mais difícil de conseguir, não do ponto de vista matemático, mas informativo, relativamente aos sinais.

Através da simulação da função de transferência real do motor, verificamos que é possível estimar os parâmetros utilizando um modelo do tipo “caixa preta”, com a vantagem de poder utilizar as ferramentas de identificação existentes e evita o cálculo das derivadas, muito pouco desejável nas aplicações de processamento de sinal. Contudo, os sinais utilizados para excitar a função de transferência não são os que alimentam o motor, uma vez que, como vimos, não são suficientemente informativos.

Conclusão geral

Conclusão geral

O trabalho apresentado nesta dissertação teve como tarefa principal, o estudo de várias técnicas de modelização paramétrica e identificação aplicadas ao motor de indução trifásico. A vantagem da estimação automática dos parâmetros, reside na autonomia que se consegue para o sistema de controlo, relativamente ao motor a controlar e à carga, que evita, por um lado, o custo de preparação do sistema para cada motor e, por outro, optimiza, em tempo real, o desempenho do controlo para diferentes condições de funcionamento, nomeadamente, térmicas e magnéticas.

No primeiro capítulo, aplicamos a transformada de Park e o método dos fasores espaciais ao modelo matemático que descreve o comportamento dinâmico do motor, para transformar este modelo trifásico, num bifásico, com as equações referidas a um referencial comum único. Concluímos com uma síntese da modelização, quer da aplicação da transformada de Park, quer do método dos fasores espaciais, escrevendo as respectivas equações num referencial geral único, que foi posteriormente tratado e linearizado no capítulo quatro.

No segundo capítulo, vimos que os sistemas podem ser descritos por modelos lineares variantes ou invariantes no tempo e modelos não lineares, de acordo com as suas características fundamentais. Essa descrição pode ser realizada, basicamente, através da representação sob a forma de uma função de transferência racional ou na forma de espaço de estados. Conforme a sua representação, os modelos agrupam-se em famílias designadas por estruturas de modelos. Para o caso dos sistemas não lineares, vimos como podem ser linearizados de modo a serem tratados como modelos lineares, geralmente, variantes no tempo. Vimos, ainda, que os modelos podem ser paramétricos ou não paramétricos e de natureza determinística ou estocástica.

O terceiro capítulo foi dedicado ao estudo da identificação paramétrica de sistemas e, particularmente, aos métodos recursivos de identificação. Descrevemos as duas principais famílias destes métodos: os métodos recursivos de erro de predição (RPEM) e os de correlação ou regressões pseudo-lineares (RPLR). Dependendo da estrutura de modelos, bem como da matriz de ganhos, as duas famílias dão origem a métodos bem conhecidos como, por exemplo, o método dos mínimos quadrados recursivo. Este método, que utilizamos na estimação dos parâmetros do motor de indução, resulta dos RPEM quando a estrutura é definida através de uma regressão linear, ou dos RPLR, se na regressão linear o vector de dados é correlacionado com valores estimados em iterações anteriores.

Os capítulos quarto e quinto constituem o núcleo central deste trabalho. No capítulo quatro tratamos o modelo que resulta da aplicação da transformada de Park e do método dos fasores espaciais, no referencial do estator, de modo a tornar possível a estimação dos parâmetros do motor. Em qualquer dos casos, trata-se de um modelo não linear e com grandezas que não se podem medir directamente. Deste modo, derivamos sucessivamente as equações até à segunda derivada das correntes, procurando eliminar as correntes rotóricas e os fluxos. De seguida, linearizamos o modelo resultante em

torno de um ponto de funcionamento, com velocidade aproximadamente constante. Contudo, o modelo continua não linear nos parâmetros, o que obrigou a uma transformação de modo a resultar, finalmente, um modelo linear nos parâmetros, em que as entradas e as saídas são combinações das entradas e das saídas e suas derivadas, do sistema real. A este modelo, sob a forma de regressão linear, aplicamos o método dos mínimos quadrados recursivo.

O modelo linear nos parâmetros, que obtivemos, foi parametrizado com dois vectores de parâmetros diferentes, de modo que ficamos com dois modelos, cada um com cinco parâmetros a estimar. Como os parâmetros físicos do motor, possíveis de extrair à custa dos parâmetros estimados desses modelos, são apenas quatro, existe uma sobreparametrização, pelo que um dos parâmetros dos modelos não foi utilizado. Ao constatar, como vimos no capítulo cinco, que o segundo parâmetro de ambos os modelos não era correctamente estimado, por não ser suficientemente excitado, foi então preterido, determinando os parâmetros do motor a partir dos restantes parâmetros dos modelos. Ignorar um parâmetro estimado, corresponde a desprezar um erro nos restantes, erro esse que é dependente, nomeadamente, do ponto de funcionamento do motor. Deste modo, uma análise mais profunda aos modelos levou-nos a admitir que a resistência do estator era conhecida. Obtivemos um modelo com três parâmetros a estimar, não sobreparametrizado, aparentemente mais robusto. Neste caso, em que a resistência do estator é conhecida, se trabalharmos no referencial do estator, então surge a possibilidade, inerente a este referencial, de estimar os fluxos do estator, utilizando apenas o valor de R_s e os sinais da tensão e da corrente. Esta possibilidade levou-nos a outros dois modelos, válidos em qualquer regime de funcionamento e não apenas em torno de um ponto de funcionamento em regime permanente. Além disso, o segundo reduzia fortemente a complexidade das equações, principalmente no que diz respeito às derivadas. Contudo, os resultados, apresentados no capítulo cinco, mostram que estes modelos são falíveis, fundamentalmente, por duas razões: a primeira tem a ver com o ruído, que só se for muito baixo é que dá bons resultados e a segunda, resulta do erro associado ao valor de R_s , que deveria ser inferior a 5% num modelo e no outro, mesmo com o valor exacto, o algoritmo não converge convenientemente.

Com base nestes resultados, regressamos aos modelos iniciais com os cinco parâmetros, em vez de três (quando R_s é conhecida) e realizamos a estimação correcta de todos os parâmetros através de um procedimento de optimização, de modo a resolver o problema da não identificação do segundo parâmetro.

Quando utilizamos a notação complexa, resultante da aplicação do método dos fasores espaciais, em vez de utilizarmos as equações que resultam da transformada de Park, obtivemos uma função de transferência racional de coeficientes complexos, que é possível de identificar utilizando as funções de identificação disponíveis no programa MATLAB. Esta função é válida em regime permanente onde a velocidade é constante. Se esta for medida, é possível determinar os parâmetros do motor, caso contrário, estes ficam dependentes de um parâmetro que não é correctamente estimado. Contudo, se não é medida pode ser estimada, juntamente com os parâmetros, mas, neste caso, será muito difícil garantir que os sinais sejam suficientemente

informativos. Como vimos, os sinais correspondentes ao regime permanente de funcionamento do motor estão longe de o ser.

O facto de a velocidade aparecer nos coeficientes da função de transferência, dificulta o procedimento de identificação, uma vez que, por um lado, os dados não são suficientemente informativos para também estimar a velocidade e, por outro lado, para se dar a informação do seu valor ao sistema de identificação, faz com que este não caia, directamente, nas ferramentas de identificação existentes.

Naturalmente que este tópico não foi completamente esgotado e parece-nos ser conveniente e importante desenvolver trabalhos de investigação que permitam explorar a utilização da notação complexa na estimação dos parâmetros físicos do motor.

Não só em relação a este tópico, mas tendo em conta todos os trabalhos dedicados ao motor de indução trifásico, podemos concluir que ainda não está completamente desenvolvido um procedimento normalizado, robusto e preciso, em tempo real, para a identificação dos seus parâmetros, no seu ambiente normal de trabalho. Todavia demonstrou-se no presente trabalho, que, em condições verosímeis, é possível fazer a identificação destes parâmetros e apontar para a sua determinação em tempo real e adaptativa, como importa para o controlo contínuo e preciso da máquina eléctrica, robusta e com bom desempenho, que é o motor de indução trifásico.

Bibliografia

Referências

- [Araújo 94] “Influência da Quantificação no Estimador de Fluxo Rotórico no Controlo do Motor de Indução Trifásico com Orientação do Campo”, R. Araújo, D. Freitas, 1º Encontro Português de Controlo Automático, Controlo 94, Setembro 14-16, 1994.
- [Atkinson 91] “Observers for Induction Motor State and Parameter Estimation”, David J. Atkinson, Paul P. Acarnley, John W. Finch, IEEE on Transactions on Industry Applications, Vol. 27, Nº 6, November/December 1991.
- [Bassi 94] “Identification of a Direct-drive Motor for Automatic Tuning”, E. Bassi, F. Benzi, 3rd International Workshop on Advanced Motion Control, Berkeley, USA, 20-23 March, 1994.
- [Boussak 92] “Recursive Least Squares Rotor Time Constant Identification for Vector Controlled Induction Machine”, M. Boussak, G. A. Capolino, Electric Machines and Power Systems, 20:137-147, 1992.
- [Carvalho 85] “Apontamentos para a disciplina de Complementos de Máquinas Eléctricas”, Carlos Castro Carvalho, FEUP, 1985.
- [Caussat 95] “Pilotage Vectoriel Autonome d’une Machine Asynchrone Alimentée par Convertisseur Statique”, Thèse de Docteur de L’INP de Toulouse, 1995.
- [Costa 88] “Identificação de Sistemas - Aplicação à Estimação de Parâmetros em Máquinas Eléctricas”. Parte I: “Teoria e modelização de Máquinas Eléctricas”. Parte II: “Teste e Implementação dos Algoritmos de Identificação”, João Carlos H. R. Costa, Eduardo de Sousa Saraiva, Eduardo A. Baptista Veiga, Congresso da Ordem dos Engenheiros, Porto, 18-22 de Janeiro, 1988.
- [Eykhoff 79] “System Identification - Parameter and State Estimation”, Pieter Eykhoff, John Willey & Sons, 1979.
- [Guedes 94] “O motor de indução trifásico - modelização”, Manuel Vaz Guedes, FEUP, 1994.

- [Holtz 91] "Identification of the Machine Parameters in a Vector-Controlled Induction Motor Drive", Joachim Holtz, Thomas Thimm, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 27, N° 6, November/December 1991.
- [Jayme 95] "Identification des paramètres des machines électriques à courant alternatif", Thèse de Docteur de L'INP de Toulouse, Salvador Carlos de Lara Jayme, 1995.
- [Jemli 94] "Rotor Time Constant Identification in Vector Controlled Induction Machine Applied Flux Model Reference Adaptive System (MRAS)", M. Jemli, M. Boussak, M. Gossa, A. Chaâri, Melecon Industry Applications in Power System Computer Science and Telecommunications, 1994.
- [Liu 92] "A Generalised Technique for Modelling Switch-Controlled Induction Machine Circuits", C. T. Liu, W. L. Chang, C. T. Liu, IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 7, N° 1, March 1992.
- [Ljung 87] "System Identification - Theory for the User", Lennart Ljung, Prentice Hall, 1987.
- [Macek-Kaminska 95] "Estimation of the Induction Motor Parameters", Krystyna Macek-Kaminska, Electric Machines and Power Systems, 23:329-344, 1995.
- [Marino 95] "Exponentially Convergent Rotor Resistance Estimation for Induction Motors", Riccardo Marino, Sergei Peresada, Patrizio Tomei, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 42, N°5, October 1995.
- [Moons 95] "Parameter Identification of Induction Motor Drives", Christiaan Moons, Bart de Moor, Automatica, Vol. 31, N° 8, pp. 1137-1147, 1995.
- [Roboam 95] "De la Modélisation à la Command des Machines Asynchrones", Xavier Roboam, COMETT, Mai 1995.
- [Ségard 94] "Mathematical Estimation for Induction Motor Parameters", C. Ségard, J. P. Caron, J. P. Hautier, EPE Symposium on Electric Drives Design and Applications, Lausanne, 1994.

- [Stephan 94] "Real-Time Estimation of the Parameters and Fluxes of Induction Motors", Jannifer Stephan, Marc Bodson, John Chiasson, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 30, N° 3, May/June, 1994.
- [Umanand 95] "Online Estimation of Stator Resistance of an Induction Motor for Speed Control Applications", L. Umanand, S. R. Bhat, IEE Proceedings-Electric Power Applications, vol. 142, N° 2, March 1995.
- [Zhang 95] "Microcontroller Based On-Line Identification of Variable Parameters in Induction Motors", Zuorong Zhang, Graham E. Dawson, Tony R. Eastham, Electric Machines and Power Systems, 23:535-360, 1995.

Bibliografia

"Adaptive Filtering Prediction and Control"

Graham C. Goodwin, Kawai S. Sin

Prentice-Hall, 1984

"Analysis of a Series-Delta Connected Tandem Induction Motor"

Jacob Perahia, Chemmangot V. Nayar

Electric Machines and Power Systems, 23:321, 1995

"Control of Electrical Drives"

W. Leonhard

Springer-Verlag, 1985

"DSP-based Algorithm for Electric Power Measurement"

J.-C. Montaño, A. Lopez, M. Castilla, J. Gutierrez

IEE Proceedings-A, vol. 140, N° 6, November 1993

"Electronique de Réglage et de Commande"

H. Buhler

Dunod, 1979

- “Modelização Paramétrica de Funções de Transferência Electroacústica”
Diamantino R. da Silva Freitas
Dissertação de Doutoramento
FEUP, Outubro de 1990
- “Modelling of Induction From Standstill Frequency Response Tests and Parameter Estimation Algorithm”
S. A. Soliman, G. S. Christensen
Electric Machines and Power Systems, 20:123-136, 1992
- “Rotor Flux Computation in Saturated Field-Oriented Induction Machines”
Emil Levi, Vladan Vuckovic
Electric Machines and Power Systems, 21:741-754,1993.
- “Self-Tuning Control”
D. W. Clarke, P. J. Gawthrop
Proc. IEE, Vol. 126, Nº 6, June 1979
- “Simplified Frequency-Dependent Model for Induction Machines”
Dario Zaninelli, Paolo Zanotti
Electric Machines and Power Systems, 22:727-742, 1994
- “Sistema de Controlo do Motor de Indução Trifásico Baseado no Princípio da Orientação do Campo”
Rui Manuel Esteves Araújo
Dissertação de Mestrado
FEUP, Julho de 1991
- “Solving Least Square Problems”
Charles L. Lawson, Richard J. Hanson
Prentice-Hall, 1974
- “Statistical Signal Processing.
Detection, Estimation, and Time Series Analysis”
Louis L. Scharf
Addison-Wesley Publishing Company, 1991
- “System Identification Toolbox For Use with MATLAB”
Lennart Ljung
Mathworks, 1993
- “The Dynamic Representation of AC Drive Systems by Complex Signal Flow Graphs”
Joachim Holtz
IEEE International Symposium on Industry Electronics
Santiago, Chile, 25-27 May, 1994

“Theory and Practice of Recursive Identification”

Lennart Ljung, Torsten Soderstrom

The MIT Press

Cambridge, Massachusetts, 1983

“Vector Control of AC Machines”

Peter Vas

Oxford Science Publications, 1994

Anexos

Anexo A

Obtenção da função de transferência do motor de indução trifásico

No primeiro capítulo vimos que as equações do modelo matemático do motor, utilizando a modelização do método dos fasores espaciais, escrevem-se da forma:

$$\underline{\phi}_s = L_s \dot{i}_s + M \dot{i}_r \quad (\text{A.1})$$

$$\underline{\phi}_r = M \dot{i}_s + L_r \dot{i}_r \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{u}_s = R_s \dot{i}_s + j \frac{d\theta_g}{dt} \underline{\phi}_s + \frac{d\phi_s}{dt} \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{u}_r = 0 = R_r \dot{i}_r + j \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} \underline{\phi}_r + \frac{d\phi_r}{dt} \quad (\text{A.4})$$

Considerando que,

$$\dot{\theta}_g \equiv \frac{d\theta_g}{dt} \quad \text{e} \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt} \approx \text{constantes} \quad (\text{A.5})$$

vamos aplicar a transformada de Laplace à equação (A.4):

$$\begin{aligned} 0 &= R_r \dot{i}_r + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \underline{\phi}_r + S \underline{\phi}_r \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= R_r \dot{i}_r + (j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) + S) \underline{\phi}_r \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Substituindo (A.2) em (A.6) vem:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 0 &= R_r \dot{i}_r + (j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) + S)(M \dot{i}_s + L_r \dot{i}_r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 &= \left[R_r + (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) L_r \right] \dot{i}_r + (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) M \dot{i}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\frac{R_r}{L_r} + (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right] \dot{i}_r &= -\frac{M}{L_r} (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \dot{i}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \dot{i}_r &= -\frac{M}{L_r} \frac{S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})}{S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})} \dot{i}_s \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Considerando (A.5) e aplicando a transformada de Laplace a (A.3) vem:

$$\begin{aligned}\underline{u}_s &= R_s \dot{i}_s + j\dot{\theta}_g \underline{\phi}_s + S \underline{\phi}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &= R_s \dot{i}_s + (S + j\dot{\theta}_g) \underline{\phi}_s \Leftrightarrow\end{aligned}\quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.1) em (A.8) temos, sucessivamente:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \underline{u}_s &= R_s \dot{i}_s + (S + j\dot{\theta}_g)(L_s \dot{i}_s + M \dot{i}_r) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &= R_s \dot{i}_s + (S + j\dot{\theta}_g)L_s \dot{i}_s + (S + j\dot{\theta}_g)M \dot{i}_r \Leftrightarrow\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Substituindo (A.7) em (A.9) fica:

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \underline{u}_s &= \left(R_s + (S + j\dot{\theta}_g)L_s \right) \dot{i}_s + (S + j\dot{\theta}_g)M \left(\frac{M}{L_r} \frac{S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})}{S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})} \dot{i}_s \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &= \left(R_s + (S + j\dot{\theta}_g)L_s \right) \dot{i}_s - \frac{M^2}{L_r} (S + j\dot{\theta}_g) \frac{S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})}{S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})} \dot{i}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &\left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) = \\ &= \left[\left(R_s + (S + j\dot{\theta}_g)L_s \right) \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) - \frac{M^2}{L_r} (S + j\dot{\theta}_g) (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right] \dot{i}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &\left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) = \\ &= \left[R_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) + (S + j\dot{\theta}_g)L_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) - \frac{M^2}{L_r} (S + j\dot{\theta}_g) (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right] \dot{i}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &\left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) = \\ &= \left[R_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) + (S + j\dot{\theta}_g) \left[L_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) - \frac{M^2}{L_r} (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right] \right] \dot{i}_s \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{u}_s &\left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) = \\ &= \left[R_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) + (S + j\dot{\theta}_g) \left[\frac{L_s}{\tau_r} + L_s \left(1 - \frac{M^2}{L_r} \right) (S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right] \right] \dot{i}_s \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \underline{u}_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) = \\
&= \left[R_s \left(S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) + (S + j\dot{\theta}_g) \left[\sigma L_s \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + S + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) \right] \right] i_s \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{i_s}{\underline{u}_s} = \frac{1}{\sigma L_s} \frac{S + \frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta})}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) S + j\dot{\theta}_g S + j\dot{\theta}_g \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) + \frac{R_s}{\sigma L_s} S + \frac{R_s}{\sigma L_s} \left(\frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right)} \\
&\Leftrightarrow \frac{i_s}{\underline{u}_s} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s} \left(\frac{1}{\tau_r} + j(\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right)}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} + j(\dot{\theta}_g + (\dot{\theta}_g - \dot{\theta})) \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} - \dot{\theta}_g (\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) + j \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} \dot{\theta}_g + \frac{R_s}{\sigma L_s} (\dot{\theta}_g - \dot{\theta}) \right) \right)} \quad (A.10)
\end{aligned}$$

No referencial do estator é:

$$\frac{d\theta_g}{dt} = \omega_g = 0 \quad e \quad \frac{d(\theta_g - \theta)}{dt} = -\omega \quad (A.11)$$

Aplicando (A.11) a (A.10) vem:

$$\frac{i_s}{\underline{u}_s} = \frac{\frac{1}{\sigma L_s} S + \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{1}{\sigma L_s}}{S^2 + \left(\frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} - j\omega \right) S + \left(\frac{R_s}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{R_s}{\sigma L_s} \right)} \quad (A.12)$$

ou

$$\frac{i_s}{\underline{u}_s} = \frac{\underline{b}_1 S + \underline{b}_0}{S^2 + \underline{a}_1 S + \underline{a}_0} \quad (A.13)$$

$$\underline{b}_1 = \frac{1}{\sigma L_s} \quad (A.14)$$

$$\underline{b}_0 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{1}{\sigma L_s} \quad (A.15)$$

$$\underline{a}_1 = \frac{1}{\sigma \tau_r} + \frac{R_s}{\sigma L_s} - j\omega \quad (A.16)$$

$$\underline{a}_0 = \frac{1}{\sigma L_s \tau_r} - j\omega \frac{R_s}{\sigma L_s} \quad (A.17)$$

Aplicando a transformação bilinear,

$$S = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (\text{A.18})$$

a (A.13) vem, sucessivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} &= \frac{\frac{2}{T} b_1 \frac{z-1}{z+1} + b_0}{\left(\frac{2}{T}\right)^2 \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{2}{T} a_1 \frac{z-1}{z+1} + a_0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{2b_1 T(z-1)(z+1) + b_0 T^2 (z+1)^2}{4(z-1)^2 + 2a_1 T(z-1)(z+1) + a_0 T^2 (z+1)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{(2b_1 T + b_0 T^2) z^2 + (2b_0 T^2) z + (b_0 T^2 - 2b_1 T)}{(4 + 2a_1 T + a_0 T^2) z^2 + (-8 + 2a_0 T^2) z + (4 - 2a_1 T + a_0 T^2)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{\frac{2b_1 T + b_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} z^2 + \frac{2b_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} z + \frac{b_0 T^2 - 2b_1 T}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2}}{z^2 + \frac{-8 + 2a_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} z + \frac{4 - 2a_1 T + a_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

ou

$$\frac{\underline{I}(z)}{\underline{U}(z)} = \frac{N_0 z^2 + N_1 z + N_2}{z^2 + D_1 z + D_2} \quad (\text{A.20})$$

ou ainda

$$\frac{\underline{I}(q)}{\underline{U}(q)} = \frac{N_0 + N_1 q^{-1} + N_2 q^{-2}}{1 + D_1 q^{-1} + D_2 q^{-2}} \quad (\text{A.21})$$

Em que

$$N_0 = \frac{2b_1 T + b_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} \quad (\text{A.22})$$

$$N_1 = \frac{2b_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} \quad (\text{A.23})$$

$$\underline{N}_2 = \frac{b_0 T^2 - 2b_1 T}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\underline{D}_1 = \frac{-8 + 2a_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{D}_2 = \frac{4 - 2a_1 T + a_0 T^2}{4 + 2a_1 T + a_0 T^2} \quad (\text{A.26})$$

Obtenção dos parâmetros do motor de indução trifásico

A partir de (A.25) e (A.26) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\underline{D}_2}{\underline{D}_1} &= \frac{4 - 2a_1 T + a_0 T^2}{2a_0 T^2 - 8} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a_0 T^2 \underline{D}_2 - 8\underline{D}_2 &= 4\underline{D}_1 - 2\underline{D}_1 a_1 T + \underline{D}_1 a_0 T^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 &= \frac{8\underline{D}_2 + 4\underline{D}_1 + (\underline{D}_1 - 2\underline{D}_2) a_0 T^2}{2\underline{D}_1 T} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

a Partir de (A.25) vem:

$$\begin{aligned} 2a_0 T^2 - 8 &= (4 + 2a_1 T + a_0 T^2) \underline{D}_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a_0 T^2 - 8 &= 4\underline{D}_1 + \underline{D}_1 a_0 T^2 + 2\underline{D}_1 T a_1 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Substituindo (A.27) em (A.28) temos:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2a_0 T^2 - 8 &= 4\underline{D}_1 + \underline{D}_1 a_0 T^2 + 2\underline{D}_1 T \frac{8\underline{D}_2 + 4\underline{D}_1 + (\underline{D}_1 - 2\underline{D}_2) a_0 T^2}{2\underline{D}_1 T} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2 - 2\underline{D}_1 + 2\underline{D}_2) a_0 T^2 &= 8\underline{D}_1 + 8\underline{D}_2 + 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_0 &= \frac{4}{T^2} \frac{\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Substituindo (A.29) em (A.27) temos:

$$\begin{aligned} \underline{a}_1 &= \frac{8\underline{D}_2 + 4\underline{D}_1 + (\underline{D}_1 - 2\underline{D}_2) \frac{4(\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1)}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1}}{2\underline{D}_1 T} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{a}_1 &= \frac{4}{T - \underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

De (A.23) vem:

$$2\underline{b}_0 T^2 = (4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2) \underline{N}_1 \Leftrightarrow$$

Atendendo a (A.25), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2\underline{b}_0 T^2 &= \frac{2\underline{a}_0 T^2 - 8}{\underline{D}_1} \underline{N}_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{b}_0 T^2 \underline{D}_1 &= (\underline{a}_0 T^2 - 4) \underline{N}_1 \Leftrightarrow \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Aplicando (A.29) a (A.31), fica:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underline{b}_0 T^2 \underline{D}_1 &= \left(\frac{4(\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1)}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} - 4 \right) \underline{N}_1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underline{b}_0 &= \frac{8}{T^2 (-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1)} \underline{N}_1 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Subtraindo (A.24) a (A.22) obtemos:

$$\begin{aligned} \underline{N}_0 - \underline{N}_2 &= \frac{4\underline{b}_1 T}{(4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4\underline{b}_1 T &= (4 + 2\underline{a}_1 T + \underline{a}_0 T^2) (\underline{N}_0 - \underline{N}_2) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Atendendo (A.25) fica:

$$\Leftrightarrow 4\underline{b}_1 T = \frac{2\underline{a}_0 T^2 - 8}{\underline{D}_1} (\underline{N}_0 - \underline{N}_2) \Leftrightarrow \quad (\text{A.33})$$

Aplicando (A.29) a (A.33) vem:

$$\Leftrightarrow 2\underline{b}_1 T \underline{D}_1 = \left(\frac{4(\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1)}{-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1} - 4 \right) (\underline{N}_0 - \underline{N}_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{b}_1 = \frac{4(\underline{N}_0 - \underline{N}_2)}{T(-\underline{D}_1 + \underline{D}_2 + 1)} \quad (\text{A.34})$$

Vamos, agora, determinar os parâmetros do motor à custa de \underline{a}_0 , \underline{a}_1 , \underline{b}_0 , e \underline{b}_1 . Assim, a partir de (A.15) obtemos:

$$\underline{b}_0 = \frac{\underline{b}_1}{\tau_r} - j\omega \underline{b}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tau_r = \frac{\underline{b}_1}{\underline{b}_0 + j\omega \underline{b}_1} \quad (\text{A.35})$$

A partir de (A.17) podemos escrever:

$$\underline{a}_0 = R_s \underline{b}_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow R_s = \frac{\underline{a}_0}{\underline{b}_0} \quad (\text{A.36})$$

A partir de (A.16) obtemos:

$$\frac{1}{\sigma \tau_r} = \underline{a}_1 - R_s \underline{b}_1 + j\omega \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{1}{\tau_r (\underline{a}_1 - R_s \underline{b}_1 + j\omega)} \Leftrightarrow$$

Atendendo a (A.35) e (A.36) podemos escrever:

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{\underline{b}_0 + j\omega \underline{b}_1}{\underline{b}_1 \left(\underline{a}_1 - \frac{\underline{a}_0}{\underline{b}_0} \underline{b}_1 + j\omega \right)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma = \frac{\underline{b}_0 (\underline{b}_0 + j\omega \underline{b}_1)}{\underline{b}_1 (\underline{a}_1 \underline{b}_0 - \underline{a}_0 \underline{b}_1 + j\omega \underline{b}_0)} \quad (\text{A.37})$$

A partir de (A.14) obtemos, finalmente:

$$\frac{1}{\sigma L_s} = \sigma \underline{b}_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L_s = \frac{a_1 \underline{b}_0 - a_0 \underline{b}_1 + j\omega \underline{b}_0}{\underline{b}_0(\underline{b}_0 + j\omega \underline{b}_1)} \quad (\text{A.38})$$

Anexo B

Características dos motores de indução trifásicos, utilizados no capítulo 4.

As características dos motores que apresentamos de seguida, foram retiradas de [Jayme 95].

Motor A:

Potência nominal	$P_n=7.5 \text{ kW}$
Corrente nominal	$I_n=16/12 \text{ A}$
Tensão nominal	$U_n=220/380 \text{ V}$
Binário electromagnético nominal	$T_{em}=50 \text{ N}\cdot\text{m}$
Resistência, por fase, do estator	$R_s=0.8 \Omega$
Resistência, por fase, do rotor	$R_r=0.65 \Omega$
Indutância, por fase, do estator	$L_s=106 \text{ mH}$
Indutância, por fase, do rotor	$L_r=112 \text{ mH}$
Indutância mútua	$M=103 \text{ mH}$
Coefficiente de dispersão	$\sigma=10.64 \%$
Frequência rotórica nominal	$\omega_r=4.35\pi \text{ rad/s}$
Frequência nominal	$f_n=50 \text{ Hz}$
Nº de pares de pólos	$p=2$
Momento de inércia	$J=0.04 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
Coefficiente de viscosidade	$f=0.013 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s/rad}$

Motor B:

Potência nominal	$P_n=1.1 \text{ kW}$
Corrente nominal	$I_n=4.6/2.7 \text{ A}$
Tensão nominal	$U_n=220/380 \text{ V}$
Binário electromagnético nominal	$T_{em}=7.3 \text{ N}\cdot\text{m}$
Resistência, por fase, do estator	$R_s=5.5 \Omega$
Resistência, por fase, do rotor	$R_r=3.42 \Omega$
Indutância, por fase, do estator	$L_s=386 \text{ mH}$
Indutância, por fase, do rotor	$L_r=386 \text{ mH}$

Indutância mútua	$M=363 \text{ mH}$
Coefficiente de dispersão	$\sigma=11.56 \%$
Velocidade nominal	$\omega_m=1400 \text{ rpm}$
Frequência nominal	$f_n=50 \text{ Hz}$
Nº de pares de pólos	$p=2$
Momento de inércia	$J=0.0267 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
Coefficiente de viscosidade	$f=0.0297 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$