A Elasticidade e a Mecânica Relativista

João Carlos Oliveira Nunes

Setembro de 2003

Conteúdo

Lista de Figuras

Resumo

Com este trabalho pretende-se descrever a generalização da Lei de Hooke à Relatividade Restrita, que consiste em alargar os conceitos da teoria clássica da Elasticidade à formulação relativista. A Lei de Hooke é a lei material da elasticidade linear e descreve a deformação de um objecto linearmente elástico em função das suas propriedades físicas e da tensão aplicada. O refinamento relativista desta equação assenta na ideia de referencial e na contracção de Lorentz.

Será introduzido um 4-vector de deformação e um 4-vector força, sendo a lei de Hooke descrita por uma equação de 4-vectores.

Uma teoria macroscópica para corpos elásticos em que todas as quantidades apresentadas, excepto uma, são consistentes com a Mecânica de Newton e Relatividade Restrita, será apresentada. A excepção é a equivalência inercial da energia. Nesta teoria será analisado o problema da discrição da cinemática e dinâmica de um corpo linearmente elástico no qual actua uma força, induzindo neste uma velocidade v cujo módulo pode tomar qualquer valor menor do que o da velocidade da luz c.

A teoria macroscópica aqui apresentada para corpos elásticos assume cinco equações básicas que relacionam a tensão, velocidade do material, deformação, densidade inercial, fluxo inercial e densidade de momento, e o fluxo do momento. Será demonstrado que a dependência da densidade inercial, fluxo inercial e densidade de momento, fluxo do momento e deformação, da tensão e velocidade são unicamente determinadas por um conjunto de equações com um conjunto apropriado de condições fronteira.

Toda a teoria será descrita utilizando um único, e arbitrário, referencial inercial e num único sistema de coordenadas.

Abstract

In this work it is intended to describe the generalization of Hooke's law to Special Relativity, which consists of widening the concepts of the Classic Theory of Elasticity to the relativistic formulation. Hooke's law is linear elasticity material law and describes the linearly elastic deformation of one object in function of its physical properties and the applied tension. The relativistic refinement of this equation lies in the idea of referential and the Lorentz contraction.

It will be introduced a 4-vector for deformation and 4-vector for force, the Hooke's law will take a 4-vector form.

A macroscopic theory of elastic bodies is presented in which all assumptions but one are consistent with both Newton Mechanics and Special Relativity. The one distinguishing assumption is the inertial equivalence of energy. In this theory it will be analyzed the problem of kinematics and dynamics of a linearly elastic body in which acts a force, inducing in this a speed v whose module can take any value lesser than the speed of light c.

The macroscospic theory presented here for elastic bodies assumes five basic equations relating the stress, velocity of the material, strain, inertial density, inertial flux and momentum density and the momentum. It will be proved that the stress and velocity dependence of inertial density, inertial flux and momentum density, momentum flux and strain is uniquely determined by a set of equations with appropriate boundary conditions.

All the theory will be described by a single, arbitrarily chosen inertial frame by using only one coordinate system.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, à Dra. Piedade Ramos o apoio prestado durante toda a dissertação, o empenho e a disponibilidade demonstrada para levar a bom termo este trabalho.

Agradeço ainda à Direcção do Mestrado o facto de me terem aceite *já fora de prazo* como aluno.

Tenho que agradecer aos meus colegas de Mestrado, Sandra, Paula, Sofia, Rui a ajuda durante a parte curricular e, em especial, às minhas *coleguinhas* Carla e Florbela que tiveram de me *carregar às costas*. Sem eles todos, isto tinha corrido mal...

Agradeço o apoio da Direcção da Estig.

Quero ainda agradecer ao (grande) Exposto pelo ajuda no Latex (fiquei fã desta coisa) e ao Valdemar (sem o teu computador isto tinha sido mais complicado!). Ao João Paulo pela ajuda nas *coisas* da Matemática, aos meus colegas de Departamento por terem facilitado a minha vida e ao pessoal de Bragança pelos *copos fora d'horas*... Quando mais nada funciona, não há muita alternativa. De facto, depois de uma *certa idade* não há mesmo! Ao grupo do chá e por fim, no que toca a Bragança, falta a (potente) Comissão de Horários: somos os maiores!

À minha mãe o facto, lá de vez em quando, de me aturar, e ao meu irmão que acha que não devo ter mais nada para fazer na vida do que mestrados. Já que estou na família, agradeço à Michele; afinal não é todos os dias que uma gata acompanha a dissertação de uma segunda tese de Mestrado. Agradeço ainda, aos incontáveis cigarros que fumei: os apoios silenciosos são, na maior parte das ocasiões, os mais bem-vindos.

E para acabar com isto dos agradecimentos que se faz tarde, quero agradecer a mim mesmo, por me ter convencido (e não foi fácil) a fazer um segundo Mestrado. Esta tese pode ser má, mas é **minha**! Dois Mestrados... Poupem-me!

Capítulo 1

A Relatividade Restrita

Um dos maiores triunfos da teoria electromagnética de Maxwell (1864) foi a explicação da propagação da luz como um fenómeno ondulatório: a luz é uma onda electromagnética que se propaga no espaço. Mas, à luz da física do século XIX e do seu conceito mecanicista do universo, era necessário um meio para a propagação das referidas ondas – o *éter*. Isto levou a um dos maiores problemas físicos da época: a detecção do movimento terrestre através do éter. Das várias experiências realizadas para resolver esta questão, podemos referir as de Michelson e Morley (1887) que visavam medir a velocidade da luz em relação à Terra e a sua variação direccional. Fizeau (1860), Mascart (1872), e mais tarde Lord Rayleigh (1902), tentaram encontrar um efeito, esperado, do movimento da terra no índice de refracção de certos dieléctricos. Todas estas experiências falharam. A resposta mais fácil para estes resultados seria que o movimento da Terra arrastaria consigo o éter, mas esta explicação apenas levou a outras dificuldades. Numa outra tentativa de explicação, Lorentz entre 1892 e 1909 desenvolveu uma teoria para o éter que se baseava em duas hipóteses: a contracção longitudinal de corpos rígidos e o atraso de relógios (dilatação do tempo) em movimento no éter com velocidade v, através de um factor $\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}$, em que c é a velocidade da luz. Este factor influenciaria todos os aparelhos de mediada construídos para medir o "desvio do éter" servindo, também, para neutralizar os seus efeitos.

Em 1905 Einstein propôs o *Princípio da Relatividade* no qual ele elevava à condição de axioma, a completa equivalência de todos os referências de inércia. O princípio de Einstein explica porque todas as experiências para detectar o "desvio do éter" falharam, da mesma forma que o princípio da conservação da energia explica *a priori* (isto é, sem ser necessário conhecer de uma forma detalhada o mecanismo) a impossibilidade de construir uma máquina de movimento perpétuo.

À primeira vista, o princípio da Relatividade de Einstein parece ser não mais do que a pura aceitação dos resultados nulos das experiências para a detecção do "desvio do éter" mas, se olharmos para esses resultados como uma base empírica para uma nova teoria e visão do universo, em vez de procurarmos razões especiais para eles, verificamos que estamos numa nova fase da física: previsões eram agora possíveis. Esta situação é de certa forma comparável à encontrada na astronomia com o, complicado, sistema geocêntrico de Ptolomeu (que teria correspondência ao sistema "éterocêntrico" de Lorentz) que levaria a novas ideias por parte de Copérnico, Galileu e Newton. Em ambos os casos, o abandono de um inconveniente sistema de referencia levou a uma revolução no modo de pensar na física e, consequentemente, levou à descoberta de um novo e inesperado conjunto de resultados.

Em breve toda uma nova teoria baseada no princípio da Relatividade de Einstein (e num segundo axioma sobre a invariância da velocidade da luz) tomava forma e, a esta teoria, chamou-se **Teoria da Relatividade Restrita**. O seu objectivo era o de modificar todas as leis da física, fazendo com que estas fossem válidas em todos os referenciais inerciais. O princípio de Einstein é no fundo um *metaprincípio*: coloca restrições em todas as leis físicas. As modificações propostas por esta nova teoria (especialmente na mecânica), embora de grande importância em muitas aplicações actuais, têm uma importância pouco significativa na maior parte dos problemas do quotidiano, razão porque não foi descoberta antes.

Hoje, passados quase cem anos desde a sua publicação, o enorme sucesso da teoria da relatividade restrita tornou impossível que seja colocado em dúvida a validade dos seus princípios. Esta levou, entre outras coisas, a uma nova teoria do espaço-tempo, e em particular à relatividade da simultaneidade e à existência de uma velocidade limite para todas as partículas e ondas, a uma nova mecânica na qual a massa aumenta com a velocidade, à equação $E = mc^2$, e à teoria de Broglie sobre a dualidade onda--partícula.

Apesar desta teoria conduzir a novas leis, ela conduz-nos também a uma técnica bastante útil na resolução de problemas físicos, nomeadamente à possibilidade de mudar de referencial. Isto conduz na maior parte das vezes a uma simplificação do problema em causa já que, embora a totalidade das leis seja sempre a mesma, a configuração pode ser mais simples, a sua simetria aumentada, o número de incógnitas menor, e o subconjunto de leis físicas relevantes para o problema seja mais conveniente com uma escolha criteriosa do referencial.

O trabalho aqui desenvolvido tem como base as obras de Einstein [1, 2], Rindler [3], Smith [4], D'Inverno [5], Woodhouse [6], Das [7], Rowe [8], Naber [9], Bergmann [10], Pauli [11] e Schutz [12]. No campo da geometria diferencial citam-se as obras de

Kreyszig [13], Faber [14] e Boothby [15]. De interesse, temos Kay [16], Synge [17, 18], Aharoni [19], Møller [20] Lawden [21], Goldstein [22], Greenwood [23], Schutz [24] e Bradbury [25].

1.1 A Mecânica de Newton

Nos finais do século XVII, Newton criou a ciência que hoje designamos por Mecânica Newtoniana. Procurou imitar Euclides, fornecendo uma lista de leis das quais se poderia deduzir todo o resto. Afirmou que essas leis eram ditadas de maneira únivoca pela experiência. É certo que custa acreditar que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ou que a igualdade da acção e da reacção sejam verdadeiramente indiscutíveis; mas o facto de que as previsões pareciam adequar-se perfeitamente aos fenómenos deixava pouco lugar para dúvidas quanto à sua validade.

1.1.1 Referencial

Vamos tentar resumir as ideias desta teoria partindo da noção de referencial. Um **acontecimento** é um fenómeno que se passa numa zona do espaço suficientemente pequena para que se possa considerar como um ponto e num intervalo de tempo suficientemente pequeno para que se possa considerar um instante. Matematicamente, este conceito transforma-se num ponto no espaço e um instante no tempo Isto significa que podemos definir um acontecimento por quatro coordenadas: (x, y, z, t).

Vamos definir um **corpo rígido** ou **sólido**como aquele em que as distâncias entre as suas partículas não variarem com o tempo. Por meio de processos físicos de medição podemos determinar pontos P sujeitos à condição de manterem distâncias invariáveis às partículas do corpo. Idealmente, os pontos assim definidos prolongam o corpo rígido em todas as direcções. O sistema constituído pelo corpo rígido mais estes pontos P assim determinados constitui um sistema de referência ou **referencial**. O conjunto dos pontos P constitui o **espaço do referencial**. Se este corpo não tiver extensão física será considerado como uma **partícula** ou **ponto de massa**. Vamos, então, admitir que uma partícula ocupa em cada instante um simples ponto do espaço do referencial.

Consideremos agora um referencial cartesiano em que o corpo se desloca numa linha recta ao longo do eixo dos xx. Podemos, então, representar o movimento deste corpo através de um diagrama, em que marcamos a posição de alguns pontos do corpo em relação ao tempo. A esta curva no diagrama formada pelos pontos chamamos **história**. A indivíduos equipados com relógios e meios físicos de medição chamamos **observadores**. Na Mecânica Newtonian parte-se do princípio que dois observadores, a partir do momento em que sincronizam os seus relógios, estão sempre de acordo com o tempo de um acontecimento, independentemente do seu movimento relativo. Isto implica que para todos os observadores o tempo é um conceito absoluto. Em particular todos os observadores podem concordar na mesma origem para o tempo. Assim para representar um acontecimento no espaço, um observador terá apenas que escolher uma origem no espaço juntamente com um conjunto de três eixos cartesianos. O observador será então capaz de representar nesses eixos esse acontecimento (ou um outro qualquer), ou seja, determinar o instante t em que o acontecimento ocorre e a sua posição relativa (x, y, z). Podemos dizer, de acordo com o que foi exposto atrás, que o relógio do observador, o equipamento de medida e os três eixos formam um referencial. Então, o papel desempenhado pelo observador na Mecânica Newtoniana será o de representar a história de corpos.

1.1.2 Referencial de Inércia

Seja O um ponto na origem das coordenadas que coincida com uma dada partícula de um corpo rígido. Liguemos ao corpo três réguas rígidas rectilíneas não complanares que, prolongadas, definirão três eixos: Ox, Oy, Oz. Definamos três vectores de base $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ com a direcção destes eixos (ver figura 1.1).

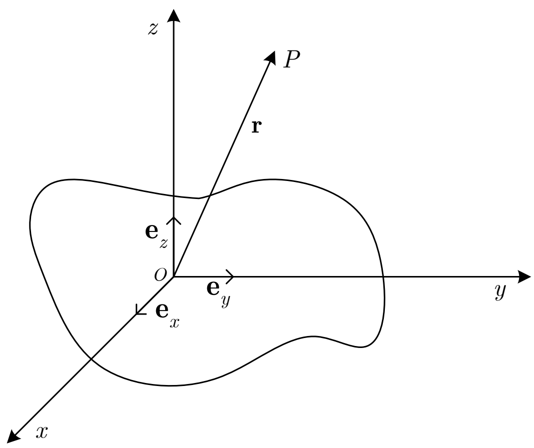


Figura 1.1: Representação do vector de posição $\mathbf{r}$ de um ponto P num referencial Cartesiano

Dado um ponto qualquer P do espaço do referencial, dizemos que o seu **vector de posição** é:

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \tag{1.1}$$

e que os números reais x, y, z são as **coordenadas cartesianas** de P.

Diz-se que uma partícula está em **repouso** (**movimento**) relativamente a um referencial S, se o seu vector posição relativamente a esse referencial for **invariável** (**variar**) com o tempo.

Seja $\mathbf{r}(t)$ o vector posição de uma partícula relativamente ao referencial S, define-se **velocidade da partícula** relativamente a S e **aceleração da partícula** relativamente a S como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \tag{1.2}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{d^2y}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{d^2z}{dt}\mathbf{e}_z \tag{1.3}$$

Definição 1.1 *Um **referencial de inércia** (ou **referencial inercial**) é aquele em que todas as partículas livres (isto é, não actuadas por forças, ou actuadas por um sistema de forças de resultante nula) têm velocidade constante, ou seja, aceleração nula.*

Galileu tinha tendência para pensar que todos os referenciais são equivalentes para o estudo do movimento. Newton compreende que isso é verdade quando se trata apenas da cinemática, mas deixa de ser verdade quando se trata da dinâmica. As leis de Newton, e nomeadamente a lei da inércia, só são válidas em certos referenciais. Hoje, chamamos a esses referenciais **referenciais de inércia** ou **referenciais inerciais**.

1.1.3 As Transformações de Galileu

A teoria da relatividade centra-se, principalmente, na forma como diferentes observadores observam um mesmo fenómeno. Na teoria de Newton é postulada a existência de referencias de inércia preferenciais. Este postulado está contido na primeira lei de Newton e pode ser traduzido da seguinte forma:

> *Um corpo (ou ponto material) conserva o seu estado de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme até que o modifique a aplicação da força exercida por outros corpos.*

A primeira lei de Newton mostra que o estado de repouso ou de movimento rectilíneo e uniforme não requer, para se conservar inalterável, a aplicação de quaisquer forças externas. Nisto manifesta-se a característica dinâmica específica dos corpos que tem o nome de *inércia* dos mesmos. Portanto, a primeira lei de Newton denomina-se, também, **princípio da inércia**, ao passo que o movimento dum corpo não sujeito à acção das forças exercidas por outros corpos tem o nome de **movimento de inércia**.

Verifica-se assim que, além de existirem um conjunto de referenciais privilegiados denominados de inerciais, uma vez encontrado um referencial de inércia, todos os outros que em relação a ele estejam em repouso ou em movimento rectilíneo uniforme também são referenciais inerciais (caso contrário a primeira lei de Newton deixaria de ser válida). As leis de transformação que relacionam um referencial de inércia a um outro denominam-se **transformações de Galileu** e constituem o **grupo de Galileu**.

Seja um dado referencial de inércia S e consideremos um outro referencial S' também de inércia ambos numa configuração *standard*, ou seja, de eixos paralelos e S' movendo-se ao longo do eixo positivo dos xx de S com velocidade constante (ver figura 1.2).

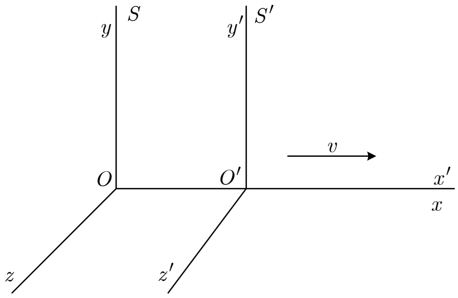


Figura 1.2: Dois referenciais, S e S', numa configuração *standard* num dado instante t.

Vamos também partir do princípio de que os observadores sincronizaram os seus relógios de forma a que as origens do tempo ($t = t' = 0$) nos dois referencias sejam tomadas no instante em que os dois referencias coincidem. Temos então, as seguintes condições:

1. $O'x'$ desliza sobre Ox;
2. $O'y'//Oy$ e $O'z'//Oz$;
3. $t = t' = 0$ quando $O' = O$.

Vamos considerar o acontecimento A. Este acontecimento consoante o referencial que o mede pode ser definido pelas seguintes coordenadas: três coordenadas espaciais (x, y, z) e uma temporal t em S e, da mesma forma, (x', y', z') e t' em S'. De acordo com a Física Clássica, se se acertarem ambos os relógios vamos ter $t = t'$. Por outro lado, nas condições postas, $|OO' = vt|$. Portanto, a relação entre as coordenadas espaciais e o tempo em S e S' é dada por:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \qquad & x &= x' + vt \\ y' &= y & y &= y' \\ z' &= z & z &= z' \\ t' &= t & t &= t' \end{aligned} \tag{1.4}$$

As equações (1.4) são as **transformações de Galileu**[1] e constituem **grupo de Galileu**. A última equação apresenta de uma forma clara a assunção de tempo absoluto na teoria de Newton.

As leis de Newton são apenas válidas para referenciais de inércia. Isto implica, de um ponto de vista matemático, que essas leis têm que ser **invariantes** perante uma transformação de Galileu. Dito de outra forma, as transformações de Galileu formam o **grupo de invariância da Mecânica Clássica**.

1.2 A Relatividade Restrita: Os Axiomas de Einstein

Os referenciais de inércia são referenciais em que as relações de Euclides são válidas e nos quais existe um tempo universal no qual partículas livres permanecem em repouso ou em movimento rectilíneo e uniforme (nos quais essas partículas livres obedecem, então, à primeira lei de Newton).

Por definição, partículas livres colocadas sem velocidade em pontos fixos num referencial de inércia permanecerão nesses pontos. Neste contexto podemos, então, visualizar um referencial deste tipo como um conjunto de partículas livres em repouso umas em relação às outras, sendo a distância entre elas determinada por escalas rígidas, satisfazendo estas distâncias os axiomas de Euclides. Em tais referenciais, linhas rectas podem ser definidas como sendo geodésicas (linhas de comprimento mínimo) e partículas livres que não pertençam ao referencial movem-se ao longo dessas linhas. Podemos, ainda, visualizar que as partículas do referencial são portadoras de relógios que indicam o *tempo universal* ao longo do referencial.

A importância destes factos está em a teoria da Relatividade Restrita ser a teoria de uma física ideal, física essa que se refere a um conjunto de referenciais livres de qualquer acção gravítica, ou seja, os referenciais de inércia. A razão da gravidade estar aqui incluída tem raízes na Física Clássica na qual a gravidade era vista como algo

[1]Estas transformações não foram escritas por Galileu.Trata-se duma homenagem: estas equações estão (implicitamente) na base de toda a Física Clássica, e Galileu é de algum modo o "pai"da Física Clássica.

que não afectava o resto da física. Era, então, lógico para Newton ver um conjunto de estrelas como um referencial de inércia, em relação ao qual partículas livres, apesar da gravidade, se moveriam uniformemente (algo que viria a ser contrariado na Teoria Geral da Relatividade).

1.2.1 O Princípio da Relatividade Restrita

O *princípio restrito* da relatividade restrita, é um princípio que vem, de certa forma, reforçar a teoria de Newton, afirmando que

> *Todos os observadores inerciais são iguais no que se refere a experiências dinâmicas.*

Isto significa que, se um determinado observador inercial conduzir uma experiência dinâmica e chegar como resultado à descoberta de uma lei física, então, qualquer outro observador inercial que realizar a mesma experiência terá que chegar, necessariamente, à mesma descoberta, ou seja, estas leis têm que ser invariantes numa transformação de Galileu. Isto é o mesmo que dizer que, se esta lei envolver as coordenadas x, y, z, t para um observador inercial S, então relativamente a um outro observador S' a lei será a mesma em que as coordenadas x, y, z, t serão substituídas por x', y', z', t' respectivamente.

Este princípio é equivalente a dizer que é impossível afirmar, ao realizar experiências dinâmicas, se um corpo está em repouso absoluto ou em movimento uniforme. Na teoria de Newton não é possível determinar a posição **absoluta** de um evento mas sim, a sua posição **relativa** em relação a um outro evento. Exactamente da mesma forma, a velocidade uniforme tem apenas um significado relativo; só é possível falar de velocidade de um corpo em relação a um outro. Então, tanto a velocidade como a posição são conceitos **relativos**.

Einstein compreendeu que o princípio acima citado era "vazio" já que não se pode falar de experiências puramente dinâmicas. Mesmo ao nível mais elementar, qualquer experiência dinâmica envolve **observação** (como, por exemplo, o simples acto de olhar para determinado fenómeno), que terá, de uma forma geral, envolvida a óptica. Na realidade, quanto mais analisarmos determinada experiência, mais nos apercebemos que praticamente todos os ramos da física nela estão envolvidos. Então, Einstein tomou a decisão mais lógica: retirou a restrição da dinâmica do princípio e enunciou o primeiro **postulado** (ou axioma) da sua teoria.

- **Postulado I**: Princípio da Relatividade Restrita:

Todos os observadores inerciais são equivalentes.

Verifica-se que este princípio não é uma negação da teoria de Newton; constitui, isso sim, um complemento lógico ao princípio da relatividade da Mecânica Clássica.

1.2.2 A Constância da Velocidade da Luz

Uma das consequências impostas pelas equações de Maxwell é que a propagação da luz no vácuo ser igual a c (sendo $c = 3 \times 10^8 ms^{-1}$), pelo menos, relativamente a um definido sistema de inércia S. De acordo com o princípio da relatividade restrita devemos admitir o mesmo para qualquer outro sistema de inércia, isto é, admitimos como válido **o princípio da constância da luz em todos os sistemas de inércia** .

Experiências contemporâneas a Einstein já demonstravam que a velocidade da luz era independente da fonte que a emitia (como as experiências de Michelson-Morley) e Einstein formulou o seu segundo postulado (ou axioma) da seguinte forma:

- Postulado II: A constância da velocidade da luz:

A velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais de inércia.

1.3 Tensores

As leis da física, para serem válidas, devem ser independentes dos sistemas de coordenadas usadas para exprimi-las matematicamente. Em mecânica, trabalha-se com quantidades físicas que são independentes de qualquer sistema de coordenadas em particular, que seja utilizado para as descrever. Ao mesmo tempo, estas quantidades físicas são, frequentemente, referidas a um sistema de coordenadas mais conveniente. A estas quantidades chamam-se **tensores**.

Como entidade matemática, um tensor tem uma existência que é independente de um qualquer sistema de coordenadas, embora possa ser especificado num determinado sistema de coordenadas por um outro conjunto de quantidades que são as **componentes do tensor**. Especificar as componentes de um tensor num determinado sistema de coordenadas implica que ficam determinadas as componentes desse tensor num qualquer outro sistema de coordenadas. De certa forma, a **lei de transformação das componentes** de um tensor pode ser utilizada como um meio para definir um tensor.

As leis físicas utilizadas em Mecânica são expressas através de equações tensoriais. Como as transformações tensoriais são lineares e homogéneas, estas equações se forem válidas em determinado sistema de coordenadas, também o são em outro sistema de coordenadas. Esta *invariância* das equações tensoriais durante uma transformação de coordenadas é uma das principais razões da utilização, e da sua utilidade, em mecânica.

O estudo dos tensores será feito em espaços de n dimensões, sendo estes tensores objectos definidos numa entidade geométrica chamada **variedade**.

1.3.1 O Espaço $\mathbb{R}^n$ como Espaço Vectorial e a sua Topologia

Considere-se o espaço de n dimensões $\mathbb{R}^n$; um ponto neste espaço é uma sequência de números reais $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Isto dá, de uma forma intuitiva, a noção de um *espaço contínuo*, em que há pontos em $\mathbb{R}^n$ perto uns dos outros, de uma forma arbitrária, e que uma linha a unir dois pontos pode ser dividida em partes menores, de uma forma também ela arbitrária, que vai unir outros pontos de $\mathbb{R}^n$.

Este facto leva-nos ao conceito de vizinhança Euclidiana de um ponto, introduzida através da distância entre dois pontos, $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$, de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|x - y\| \end{aligned} \tag{1.5}$$

que corresponde a um espaço normado com norma Euclidiana. Uma vizinhança de raio r de um ponto x de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto de pontos $U_r(x)$ cuja distância a x é menor que r. Para $\mathbb{R}^2$ isto está exemplificado na figura 1.3.

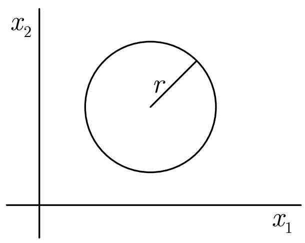


Figura 1.3: A distância $d(x, y)$ define uma vizinhança em $\mathbb{R}^2$ que é o interior do disco rodeado pelo círculo de raio r. O círculo não faz parte da vizinhança.

Definição 1.2 *Sejam* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *e* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *dois pontos no subconjunto* S *de* $\mathbb{R}^n$ *com* $a_i < b_i$, $\forall i$. *O espaço* $\{x : a < x < b\}$ *diz-se intervalo aberto de extremos* a *e* b *e representa-se por* $]a, b[$*; identifica-se com o produto Cartesiano de* n *intervalos abertos de* $\mathbb{R} :]a, b[=]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$.

No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ vamos ter:

Definição 1.3 *Chama-se bola (aberta) de centro c e raio* $r > 0$ *ao conjunto* $U_r(c) = \{x : \|x - c\| < r\}$. *O conjunto dos elementos x tais que* $\|x - c\| \leq r$ *é a bola fechada com o mesmo centro e raio.*

Definição 1.4 *Chama-se vizinhança de a a qualquer subconjunto que contenha uma bola de centro a.*

A ideia de uma linha que une dois pontos de $\mathbb{R}^n$ poder ser infinitamente subdividida pode ficar mais clara afirmando que dois pontos de $\mathbb{R}^n$ têm vizinhanças que não se intersectam. Esta é a chamada propriedade de Hausdorff[2] de $\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Variedade

Em termos simples uma variedade é um espaço contínuo que, localmente, se assemelha a um espaço Euclidiano de n dimensões, ou seja $\mathbb{R}^n$. Como exemplo podemos comparar uma esfera, S^2, com o plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$. São claramente diferentes mas, no entanto, é possível considerar que "pequenas partes"de S^2 são idênticas a outras pequenas partes de $\mathbb{R}^2$ (se não forem tomadas em consideração propriedades métricas). O facto de S^2 ser compacto e, de certa forma, finito, enquanto $\mathbb{R}^2$ tende para o infinito, é mais uma propriedade global do que uma propriedade local.

Qualquer espaço de m dimensões num espaço Euclidiano de n dimensões ($m \leq n$) pode ser considerado uma variedade. De uma forma mais abstracta, o conjunto de todas as rotações rígidas de coordenadas Cartesianas num espaço tridimensional Euclidiano pode ser considerado como uma variedade. Assim, uma variedade é qualquer conjunto que pode ser continuamente parametrizado. O número de parâmetros independentes é a dimensão da variedade e esses parâmetros são as coordenadas da variedade. Considere-se uma esfera; esta é parametrizada por duas coordenadas, θ e ϕ. O espaço de dimensão m tem m coordenadas Cartesianas, e o conjunto de todas as rotações pode ser parametrizado por três ângulos que vão dar a direcção do eixo de rotação e a quantidade de rotação. Então, o conjunto de rotações é uma variedade: cada ponto é uma rotação e as coordenadas são os três parâmetros. Temos, então, uma variedade tridimensional.

Observação 1.1 *Dois sistemas matemáticos (como dois espaços vectoriais ou dois grupos) são isomórficos se forem estruturalmente idênticos. No caso de dois espaços vectoriais, um* ***isomorfismo*** *é uma função* φ*, linear e bijectiva de um espaço para o outro,*

[2] Um espaço X diz-se de Hausdorff se, para todo o $x, y \in X, x \neq y$, existem vizinhanças U, V tal que $U \cap V = \emptyset$

em que o termo linear refere-se às propriedades (para todos os vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e escalares* λ*):*

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \varphi(\mathbf{u})+\varphi(\mathbf{v})\\ \varphi(\lambda\mathbf{u}) &= \lambda\,\varphi(\mathbf{u})\end{aligned}$$

Para grupos, um isomorfismo é uma função ψ *bijectiva com a propriedade*

$$\psi(uv) = \psi(u)\,\psi(v)$$

para todos os elementos do grupo. Um outro tipo de função, que se chama ***homomorfismo*** *requer apenas*

$$\psi(uv) = \psi(u)\,\psi(v)$$

não necessitando de ser bijectiva.

A métrica de $\mathbb{R}^n$, como visto atrás, serve de modelo topológico para um espaço Euclidiano E^n que, localmente, vai ser semelhante a $\mathbb{R}^n$. Para ser mais preciso, são espaços que para cada ponto x existe uma vizinhança de U_x cuja função φ que a relaciona com uma outra vizinhança de x, $\varphi_x(U_x)$ de $\mathbb{R}^n$ é um *homomorfismo.* Como referido, um espaço com estas propriedades é um espaço que localmente é Euclidiano de dimensão n, então, pode ser considerado uma variedade. Como definição de variedade podemos referir:

Definição 1.5 *Uma variedade* V *de dimensão* n*, é um espaço topológico com as seguintes propriedades:*

1. *V é um espaço de Hausdorff*

2. *V é localmente Euclidiano de dimensão n*

3. *V é parametrizável*

Uma variedade é um conjunto, com a propriedade de cada ponto dessa variedade poder servir para origem de coordenadas locais que são válidas numa vizinhança aberta[3] do ponto, vizinhança essa que vai ser uma *cópia* exacta de uma vizinhança de um ponto em $\mathbb{R}^n$.

[3]Seja A um subconjunto de X. A é uma vizinhança aberta de um ponto x se A for um conjunto aberto e $x \in A$.

Definição 1.6 *Uma variedade é um conjunto V tal que para cada ponto x de V existe uma vizinhança aberta $U_x \subseteq V$ e uma função contínua e bijectiva em φ_x que faz corresponder a U_x uma vizinhança em $\mathbb{R}^n$, e φ_x^{-1} é contínua (ver figura 1.4).*

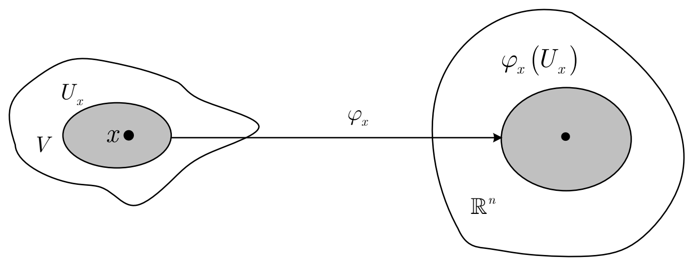


Figura 1.4: Representação da variedade V. Adaptado de [16]

1.3.3 Conceito de Curva

Considere-se um espaço Euclidiano de coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^3$. Então, cada ponto desse espaço é determinado pelo vector posição

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad (a \leq t \leq b)\,. \tag{1.6}$$

Em (1.6), as componentes

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad (a \leq t \leq b) \tag{1.7}$$

do vector $\mathbf{x}$ são funções da variável real t definida no intervalo $I : a \leq t \leq b$. A função vectorial (1.6) define um conjunto de pontos M em $\mathbb{R}^3$, sendo, então, a representação paramétrica do conjunto M e a variável t é o parâmetro desta representação. Considerem-se os seguintes pressupostos:

1. As funções $x_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ são $r\,(\geq 1)$ vezes diferenciáveis em I.

2. Para cada valor de t em I, pelo menos uma das três funções

   $$\bar{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt}$$

   é diferente de zero.

Uma função do tipo (1.6) que satisfaça as condições anteriores chama-se *representação paramétrica permitida*. Uma função de uma ou mais variáveis que é r vezes diferenciável, ou seja, que possui derivadas continuas até à ordem r, inclusive, chama-se **função de classe** r. Uma função vectorial diz-se de classe r se uma das suas funções componentes for desta classe, e se as outras forem pelo menos desta classe. Uma curva é de classe r se for representada por uma função vectorial $\mathbf{x}(t)$ de classe r.

1.3.4 Vector Tangente

Considere-se uma curva representada pelas suas equações paramétricas

$$x = x^a(u), \qquad a = 1, 2, ..., n \tag{1.8}$$

em que u é o parâmetro da curva e $x^1(u), x^2(u), ..., x^n(u)$ representam n funções de u. Isto implica que cada ponto da curva vai ter um conjunto de coordenadas que podem ser expressas em função de u. Se calcularmos a derivada dx^a/du, vamos obter um vector $\mathbf{v}$ de componentes $(dx^1/du, dx^2/du, \cdots, dx^n/du)$. Este vector, $\mathbf{v} = dx^a/du$, é o vector tangente à curva $x = x^a(u)$ (ver figura 1.5).

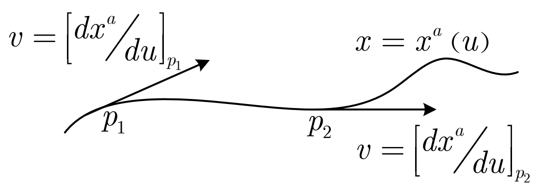


Figura 1.5: Vector tangente $\mathbf{v}$ em dois pontos da curva $x = x^a(u)$ (adaptado de [5]).

1.3.5 Espaço Tangente

Ao conjunto de todos os vectores tangentes numa variedade num determinado ponto p chama-se espaço tangente em V no ponto P e representa-se por $T_p(V)$. Cada vector tangente $\mathbf{v} \in T_p(V)$ é definido pelas suas coordenadas num determinado sistema de coordenadas. Então, o espaço tangente $T_p(V)$ pode ser identificado com o espaço vectorial $\mathbb{R}^n$, ou seja $T_p(V)$ pode ter uma estrutura de um espaço linear[4].

1.3.6 Sistemas de Coordenadas

Num espaço tridimensional um ponto é representado por um conjunto de três números a que se chamam de coordenadas, determinados pela especificação de um dado sistema

[4]Espaço vectorial em que todas as combinações lineares de elementos do espaço são também elementos desse espaço.

de coordenadas de referencia. Por exemplo, (x, y, z), (ρ, ϕ, z), (r, ϕ, θ) são as coordenadas de um ponto num sistema de coordenadas rectangulares, cilíndricas e esféricas, respectivamente.

Basicamente, um sistema de coordenadas fornece um meio de ordenar pontos num determinado espaço, de forma a que seja possível isolar um desses pontos através das suas coordenadas. As coordenadas de um ponto são sempre enunciadas em relação a uma determinada **base**. Esta base é um conjunto de vectores linearmente independentes num determinado espaço, ou seja, qualquer vector nesse espaço pode ser expresso em função desses *vectores de base*. Por exemplo, em $\mathbb{R}^3$ temos como vectores de base

$$(001), (010), (100).$$

De uma forma mais precisa, pode-se dizer que, quando especificamos um conjunto de coordenadas, escolhemos uma origem O num espaço afim V, uma base, e um conjunto de coordenadas locais; então, por exemplo, em $\mathbb{R}^1$, vamos ter $x : V \to \mathbb{R}$ como coordenada afim.

Tomemos em consideração, novamente, o espaço tridimensional Euclidiano equipado com um conjunto de coordenadas Cartesianas (x, y, z), e um conjunto de vectores unitários (i, j, k) como base dos eixos coordenados. Vamos, ainda, supor que temos um sistema de coordenadas alternativo (u, v, w) não Cartesiano, e que vamos exprimir as coordenadas Cartesianas neste sistema (u, v, w):

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w). \tag{1.9}$$

As três equações acima podem ser combinadas numa equação vectorial para o vector de posição $\mathbf{r}$ de pontos do espaço em função de u, v e w:

$$\mathbf{r} = x(u, v, w)\mathbf{i} + y(u, v, w)\mathbf{j} + z(u, v, w)\mathbf{k}\,. \tag{1.10}$$

Se fizermos $v = v_0$ e $w = w_0$, vamos obter

$$\mathbf{r} = x(u, v_0, w_0)\mathbf{i} + y(u, v_0, w_0)\mathbf{j} + z(u, v_0, w_0)\mathbf{k}\,. \tag{1.11}$$

Esta ultima equação é a equação paramétrica para a curva dada pela intersecção de $v = v_0$ e $w = w_0$ com o espaço Euclidiano tridimensional. Equações semelhantes podem ser obtidas para as outras duas curvas. Se derivarmos (1.11) em relação a u vamos obter o **vector tangente** à curva. Podemos fazer isto para as três curvas e obtemos as três seguintes relações:

$$\mathbf{e}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad \mathbf{e}_w = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \cdot \tag{1.12}$$

Estas três equações, definidas em (u_0, v_0, w_0) dão os vectores tangentes às três curvas que passam naquele ponto. Ao sistema (1.12) vamos chamar **base natural**. Então, para qualquer vector $\mathbf{v}$ do nosso espaço V, podemos escrever

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_u + \beta \mathbf{e}_v + \gamma \mathbf{e}_w \tag{1.13}$$

em que (α, β, γ) são as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base natural.

1.3.7 Índices

Um ponto de um espaço de n dimensões é, por analogia a um ponto de um espaço tridimensional, definido por um conjunto de n números designados por $(x^1, x^2, ..., x^n)$ em que $1, 2, ..., n$ são índices que indicam as componentes de um vector desse espaço, e que podem ser escritas na forma $x^i, i = 1, 2, ..., n$. A escolha de um índice superior é, neste caso, uma convenção. Sendo assim, podemos escrever qualquer vector com esta notação e o vector $\mathbf{v}$ no espaço V, equação (1.13), pode ser escrito na seguinte forma:

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + v^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v^i \mathbf{e}_i \tag{1.14}$$

e

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} v_i \mathbf{e}^i \,. \tag{1.15}$$

Convenção da soma

As duas equações anteriores podem ser ainda mais simplificadas introduzindo a **convenção da soma de Einstein**: sempre que um índice aparece repetido isso implica que existe uma soma sobre esse índice de 1 a n, sendo n a dimensão da variedade. Então, as duas equações anteriores passariam a ter a seguinte forma:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}^i \,. \tag{1.16}$$

Índices Mudos e Índices Livres

Um índice repetido é chamado de **índice mudo** e em cada termo só pode aparecer duas vezes. Um índice mudo (da mesma forma que uma variável de integração) pode ser substituído por um outro índice desde que esse outro índice não ocorra já nesse termo:

$$a^i_j x^j = a^i_k x^k \,. \tag{1.17}$$

Todos os outros índices que ocorrem são índices livres. Em (1.17) o índice livre é o índice i, enquanto que j e k são índices mudos.

1.3.8 Ordem de um Tensor

Os tensores podem ser classificados pela sua **ordem**. Esta classificação é um reflexo do número de componentes de um tensor num espaço de n dimensões. Desta forma, num espaço tridimensional Euclidiano, o número de componentes de um tensor é 3^r, em que r representa a ordem de um tensor. Assim, um tensor de **ordem zero** está especificado em qualquer sistema de coordenadas, num espaço tridimensional, por **uma** componente. Tensores de ordem zero chamam-se, então, **escalares**. Tensores de **ordem** um, num espaço tridimensional, têm três componentes e chamam-se **vectores**.

O número e posição dos índices livres revela de imediato a ordem de um tensor (ver 1.3.7). Tensores de ordem um (ou de primeira ordem) têm apenas um índice livre. Desta forma, um vector **v** pode ser representado por um símbolo tendo um único índice, superior ou inferior

$$\mathbf{v}_i, \mathbf{v}^i \,.$$

Os seguintes tensores, tendo apenas um índice livre, também são tensores de ordem um:

$$\alpha_{ij}\beta^j, A^i_{ik}, B^p_{qp} \,.$$

Tensores de ordem dois, por analogia, têm dois índices livres e podem ser da seguinte forma:

$$A_{ij}, B^i_j, C^{ij} \,.$$

De acordo com o que foi dito atrás, tensores de ordem três são expressos por símbolos com três índices livres. Um símbolo, por exemplo η, sem qualquer índice representa um escalar ou um tensor de ordem zero.

1.3.9 Componentes de um Tensor

Num espaço de n dimensões, um tensor de ordem r tem n^r componentes. De uma forma particular, um tensor de ordem zero tem uma componente A e chama-se escalar. Um tensor de ordem um tem n componentes $(A_1, A_2, ..., A_n)$ e chama-se vector. Da mesma forma, num espaço tridimensional, A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ representa as nove componentes do tensor de segunda ordem A e que se podem representar de uma forma matricial, da seguinte forma:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

De uma forma mais geral, num espaço de n dimensões, um tensor de ordem dois tem n^2 componentes A_{ij}, com $i, j = 1, 2, ...n$, e pode ser representado na seguinte forma:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Nesta representação, as componentes de um tensor de ordem um, ou seja um vector, num espaço tridimensional, pode ser representado, de uma forma matricial, por uma coluna ou por uma linha:

$$a_i = (a_1, a_2, a_2) \qquad ou \qquad a_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

1.3.10 Transformação de Coordenadas

Como já referido em (1.3.2), uma variedade é representada por um conjunto de pontos, correspondendo a cada ponto um conjunto de coordenadas. Sejam $(x^1, x^2, ..., x^n)$ as coordenadas desse mesmo ponto no sistema de coordenadas x^a. Existem n relações independentes entre as coordenadas dos dois sistemas e, a transformação de coordenadas $x^a \to \overline{x}^a$ é dada pelo seguinte conjunto de equações:

$$\overline{x}^a = f^a(x^1, x^2, ..., x^n) \qquad (a = 1, 2, ..., n) \tag{1.21}$$

em que f^a representa n equações unívocas, contínuas e de derivadas contínuas. Este conjunto de n equações faz com que um ponto da variedade que antes era definido pelo sistema de coordenadas $(x^1, x^2, ..., x^n)$, seja agora descrito pelo conjunto de coordenadas $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, ..., \overline{x}^n)$. A equação (1.21) pode ainda ser escrita na forma $\overline{x}^a = f^a(x^a)$, em que $a = 1, 2, ..., n$, n é a dimensão da variedade, e f^a são funções do antigo sistema de coordenadas . Como $\overline{x}^a(x)$ representa as n funções $f^a(x)$, a equação (1.21) pode ser escrita na forma

$$\overline{x}^a = \overline{x}^a(x)\,. \tag{1.22}$$

Derivando a equação (1.22) em relação às coordenadas x^b vamos obter n^2 derivadas parciais de primeira ordem, então, pela regra da cadeia vamos ter

$$\begin{aligned}
d\overline{x}^1 &= \frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^n}dx^n \\
d\overline{x}^2 &= \frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^n}dx^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots \\
d\overline{x}^n &= \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^2}dx^2 + \cdots + \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^n}dx^n
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Este conjunto de equações pode ser escrito na forma

$$d\overline{x}^a = \frac{\partial\overline{x}^a}{\partial x^b}\,dx^b\,. \tag{1.24}$$

Colocado numa forma matricial, vamos obter a matriz de transformação $n \times n$, M, de coeficientes

$$M = \left[\frac{\partial\overline{x}^a}{\partial x^b}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\overline{x}^1}{\partial x^n} \\ \frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\overline{x}^2}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^1} & \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial\overline{x}^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

A matriz M é a **matriz Jacobiana** e o seu determinante $\overline{J}$ é o **Jacobiano da transformação**:

$$\overline{J} = \left|\frac{\partial\overline{x}^a}{\partial x^b}\right| \tag{1.26}$$

que é diferente de zero no intervalo de valores de x^b. Pelo teorema da função implícita podemos resolver a equação (1.22) para o antigo sistema de coordenadas x^a e obter a transformação inversa de (1.22)

$$M^{-1} : x^a = x^a(\overline{x})\,. \tag{1.27}$$

Pela regra do produto dos determinantes, podemos definir o Jacobiano da transformação inversa como sendo

$$J = \left| \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^b} \right| . \tag{1.28}$$

e, então conclui-se que

$$J = \frac{1}{\overline{J}} . \tag{1.29}$$

Transformação de Coordenadas Infinitesimais

Sejam p_1 e p_2 dois pontos vizinhos, numa variedade de dimensão n, de coordenadas x^a e $x^a + dx^a$ respectivamente. Estes dois pontos assim definidos representam um vector infinitesimal $\overrightarrow{p_1 p_2}$ com origem em p_1 (ver figura 1.6).

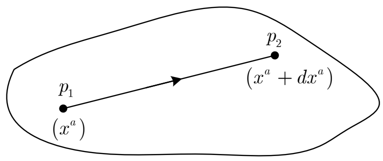


Figura 1.6: Vector infinitesimal $\overrightarrow{p_1 p_2}$ com origem em p_1. Adaptado de [5].

As componentes deste vector no sistema de coordenadas x^a são dx^a, enquanto que num outro sistema de coordenadas $\overline{x}^a$ serão $d\overline{x}^a$, e de acordo com (1.24), relacionadas com dx^a por

$$d\overline{x}^a = \frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^b} dx^b \tag{1.30}$$

em que a matriz de transformação, nesta equação, está definida em p_1. Assim a equação (1.30) toma a forma

$$d\overline{x}^a = \left[\frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^b} \right] dx^b \tag{1.31}$$

sendo esta transformação linear e homogénea.

1.3.11 Tensores Contravariantes

Seja a transformação de coordenadas

$$u^a = u^a(\overline{u}^1, \overline{u}^2, ..., \overline{u}^n) \qquad (a = 1, 2, ..., n) \tag{1.32}$$

que se assume ser de classe $r \geq 1$, e que a sua inversa

$$\overline{u}^a = \overline{u}^a(u^1, u^2, ..., u^n) \qquad (a = 1, 2, ..., n) \tag{1.33}$$

existe e é da mesma classe. Se estas duas equações forem escritas na forma

$$u^a = f^a(z^1, z^2, ..., z^n) \quad \text{e} \quad \overline{u}^a = z^a(f^1, f^2, ..., f^n) \quad (a = 1, 2, ..., n) \tag{1.34}$$

temos

$$\frac{\partial u^a}{\partial u^b} = \frac{\partial f^a}{\partial z^d}\frac{\partial z^d}{\partial u^b}\,. \tag{1.35}$$

Como u^a e u^b são independentes se $a \neq b$, o valor que $\partial u^a/\partial u^b$ será 0 ou 1, consoante $a \neq b$ ou $a = b$ respectivamente. As seguintes relações são, assim, obtidas (em que δ é o símbolo de Kronecker[5]):

$$\frac{\partial u^a}{\partial \overline{u}^d}\frac{\partial \overline{u}^d}{\partial u^b} = \delta^a_b \qquad (a, b = 1, 2, ..., n) \tag{1.36}$$

e de uma forma idêntica

$$\frac{\partial \overline{u}^a}{\partial u^d}\frac{\partial u^d}{\partial \overline{u}^b} = \delta^a_b \qquad (a, b = 1, 2, ..., n)\,. \tag{1.37}$$

Em $\mathbf{R}^3$, a equação de uma superfície é dada por $z = f(x, y)$, sendo o seu diferencial total definido por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,. \tag{1.38}$$

Verifica-se, assim, que é possível estabelecer relações entre os diferenciais du^a e as coordenadas u^a, o mesmo se verificando para $d\overline{u}^b$ e as coordenadas $\overline{u}^b$:

$$d\overline{u}^b = \frac{\partial \overline{u}^b}{\partial u^a}\,du^a \qquad (b = 1, 2, ..., n)\,. \tag{1.39}$$

Podemos dizer que (1.32) *induz* uma transformação linear homogénea nos diferenciais sendo os coeficientes desta transformação funções das coordenadas.

A um conjunto de n quantidades $X^a\left(x^b\right)$, definidas num ponto p, que transformam mediante a mudança de coordenadas de x^b para $\overline{x}^b$ de acordo com a regra

$$\overline{X}^a = \frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^b}\,X^b, \quad X^a\left(x^b\right) \tag{1.40}$$

chama-se **tensor contravariante** de ordem um ou **vector contravariante**.

Podemos generalizar esta definição para tensores de ordem dois: um tensor contravariante de ordem dois, é um conjunto de n^2 quantidades associadas a um ponto p,

[5]O símbolo de Kronecker é definido por $\delta_{ij} = \delta^i_j = \delta^{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$X^{ab}(x^c)$, que obedecem à lei de transformação

$$\overline{X}^{ab} = \frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial \overline{x}^b}{\partial x^d} X^{cd}\,;\ \overline{X}^{ab}(\overline{x}^c)\ . \tag{1.41}$$

Para tensores de ordem três ou superior a generalização é análoga, e chega-se à seguinte definição para um tensor de ordem r $(r \geq 1)$: um tensor contravariante de ordem r, é um conjunto de n^r quantidades associadas a um ponto p, $X^{ab...r}(x^c)$, que obedecem à seguinte lei de transformação:

$$\overline{X}^{ab...r} = \frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial \overline{x}^b}{\partial x^d}\cdots\frac{\partial \overline{x}^r}{\partial x^s} X^{cd...s}\,;\ \overline{X}^{ab...r}(\overline{x}^c)\ . \tag{1.42}$$

1.3.12 Tensores Covariantes

Seja $I = b_\alpha a^\alpha$ uma forma linear das componentes de um vector contravariante a^α e assuma-se que I é invariante em relação a qualquer lei de transformação de co-ordenadas da forma (1.39). Se $\overline{a}^\beta\left(\overline{u}^\beta\right)$ forem as componentes do vector em relação a outro sistema de coordenadas, temos

$$\overline{b}_\beta \overline{a}^\beta = b_\alpha a^\alpha\,. \tag{1.43}$$

Como a^α e $\overline{a}^\beta$ se relacionam da seguinte forma

$$a^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \overline{u}^\beta}\overline{a}^\beta \tag{1.44}$$

obtemos

$$\overline{b}_\beta \overline{a}^\beta = b_\alpha a^\alpha = b_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial \overline{u}^\beta}\overline{a}^\beta\,. \tag{1.45}$$

Esta relação tem que ser válida para quaisquer vectores a^α, b^α. Analisando a equação (1.45), encontramos a seguinte relação entre os coeficientes b_α e $\overline{b}_\beta$,

$$\overline{b}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \overline{u}^\beta} b_\alpha \qquad (\beta = 1, 2, ..., n)\,. \tag{1.46}$$

O campo vectorial $\mathbf{T}$ é um **vector covariante** ou um **tensor covariante de ordem um** definido em p, se as suas n componentes $X_a\left(x^b\right)$ obedecerem à seguinte lei de transformação de coordenadas

$$\overline{X}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^a} X_b\,; \overline{X}_a\left(\overline{x}^b\right)\ . \tag{1.47}$$

Um tensor covariante de ordem dois, é um conjunto de n^2 quantidades associadas a um ponto p, $X_{ab}\left(x^c\right)$ que obedece à lei de transformação

$$\overline{X}_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial \overline{x}^a}\frac{\partial x^d}{\partial \overline{x}^b}X_{cd}\,;\ \overline{X}_{ab}\left(x^c\right)\,. \tag{1.48}$$

Para tensores covariantes de ordem três e superior, a definição é análoga. Um tensor covariante de ordem r, é o conjunto de n^r quantidades associadas a um ponto p, $X_{ab\ldots r}\left(x^c\right)$ que obedecem à seguinte lei de transformação

$$\overline{X}_{ab\ldots r} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^a}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^b}\cdots\frac{\partial x^\varphi}{\partial \overline{x}^r}X_{\alpha\beta\ldots\varphi}\,;\ \overline{X}_{ab\ldots r}\left(\overline{x}^c\right)\,. \tag{1.49}$$

1.3.13 Tensores Mistos

T é um **tensor misto** de ordem dois, contravariante de ordem um e covariante de ordem um, se as suas componentes (X^a_b) em x^a e $(\overline{X}^a_b)$ em $\overline{x}^a$ obedecerem à seguinte relação:

$$\overline{X}^a_b = \frac{\partial \overline{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial x^d}{\partial \overline{x}^b}X^c_d\,. \tag{1.50}$$

Considere-se agora o campo tensorial **X** com n^m $(m = p + q)$ campos escalares da forma $(X^{a_1a_2\ldots a_p}_{b_1b_2\ldots b_q})$, sendo estas as componentes de X no sistema de coordenadas definido em V.

O campo tensorial **T** é um tensor misto de ordem $m = p+q$, contravariante de ordem p e covariante de ordem q, se as suas componentes $(X^{a_1a_2\ldots a_p}_{b_1b_2\ldots b_q})$ em x^a e $(\overline{X}^{a_1a_2\ldots a_p}_{b_1b_2\ldots b_q})$ em $\overline{x}^a$, respeitarem a seguinte relação de transformação:

$$\overline{X}^{a_1a_2\ldots a_p}_{b_1b_2\ldots b_q} = \frac{\partial \overline{x}^{a_1}}{\partial x^{c_1}}\frac{\partial \overline{x}^{a_2}}{\partial x^{c_2}}\cdots\frac{\partial \overline{x}^{a_p}}{\partial x^{c_p}}\frac{\partial x^{d_1}}{\partial \overline{x}^{b_1}}\frac{\partial x^{d_2}}{\partial \overline{x}^{b_2}}\cdots\frac{\partial x^{d_q}}{\partial \overline{x}^{b_q}}X^{c_1c_2\ldots c_p}_{d_1d_2\ldots d_q}\,. \tag{1.51}$$

Se um tensor misto tem ordem contravariante p e covariante q, então diz-se que é do tipo (p, q).

1.3.14 Operações com Tensores

Considerem-se os seguintes tensores

$$\mathbf{T} = (\mathbf{T}^{i_1i_2\ldots i_p}_{j_1j_2\ldots j_q}) \qquad e \qquad \mathbf{S} = (\mathbf{S}^{k_1k_2\ldots k_r}_{l_1l_2\ldots l_s}) \tag{1.52}$$

Soma e Combinação Linear

Seja $p = r$ e $q = s$ na equação (1.52). Como a lei de transformação em (1.51) é linear em relação às componentes dos tensores, torna-se claro que

$$\mathbf{T} + \mathbf{S} \equiv \left(\mathbf{T}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} + \mathbf{S}^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{l_1 l_2 \ldots l_s} \right) \tag{1.53}$$

vai ser um tensor do mesmo tipo e ordem dos tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$. De uma forma mais geral, se $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, ..., \mathbf{T}_\mu$ forem tensores do mesmo tipo e ordem e se $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\mu$ forem escalares invariantes, então

$$\lambda_1 \mathbf{T}_1 + \lambda_2 \mathbf{T}_2 + \cdots + \lambda_\mu \mathbf{T}_\mu \tag{1.54}$$

é um tensor do mesmo tipo e ordem.

Produto Externo

O *produto externo* dos tensores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{S}$, em (1.52) é um outro tensor da forma

$$[\mathbf{TS}] \equiv \left(T^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \cdot S^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{l_1 l_2 \ldots l_s} \right) \tag{1.55}$$

que é de ordem $m = p + q + r + s$, contravariante de ordem $p + r$ e covariante de ordem $q + s$. De notar que $[\mathbf{TS}] = [\mathbf{ST}]$.

Exemplo 1.1 *Dados dois tensores* $\boldsymbol{S} = (S^i_j)$ *e* $\boldsymbol{T} = (T_k)$, *o produto externo* $[\boldsymbol{ST}] = (S^i_j T_k) \equiv (Y^i_{jk})$ *é um tensor uma vez que*

$$\overline{Y}^i_{jk} \equiv \overline{S}^i_j \overline{T}_k = \left(S^r_s \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^j} \right) \left(T_u \frac{\partial x^u}{\partial \overline{x}^k} \right) = Y^r_{su} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^j} \frac{\partial x^u}{\partial \overline{x}^k} \cdot \tag{1.56}$$

Produto Interno

Para calcular o *produto interno* de dois tensores, há que equacionar os índices contravariantes de um tensor em relação aos índices covariantes do outro. No produto interno,os comportamentos contravariantes e covariantes anulam-se, fazendo com que a ordem total dos dois tensores baixe.

Seja $i_\alpha = u = l_\beta$ na equação (1.52). Então o produto interno que corresponde a estes dois índices vai ser

$$\mathbf{TS} \equiv \left(T^{i_1 \ldots u \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} S^{k_1 k_2 \ldots k_r}_{l_1 \ldots u \ldots l_s} \right) \tag{1.57}$$

Vê-se por (1.57) que vão existir $ps+rq$ produtos internos **TS** e **ST**; de uma forma geral todos eles distintos. Cada um será um tensor de ordem

$$m = p + q + r + s - 2$$

Exemplo 1.2 *Sejam os tensores* $\boldsymbol{S} = (S^{ij})$ *e* $\boldsymbol{T} = (T_{klm})$, *que irão formar o produto interno* $\boldsymbol{U} = (U^j_{km}) \equiv (S^{uj}T_{kum})$. *Vamos então ter*

$$\begin{aligned}
\overline{U}^j_{km} &= \left(S^{pr}\frac{\partial \overline{x}^u}{\partial x^p}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}\right)\left(T_{sqt}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^u}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}\right) \\
&= S^{pr}T_{sqt}\left(\frac{\partial \overline{x}^u}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^u}\right)\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m} \\
&= S^{pr}T_{sqt}\delta^q_p\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m} \\
&= S^{pr}T_{spt}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m} \\
&= U^r_{st}\frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \overline{x}^m}\,.
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Verifica-se que $\boldsymbol{U}$ *é um tensor de ordem três, contravariante de ordem um e covariante de ordem dois.*

Contracção

Dado um tensor misto do tipo (p, q), podemos formar um tensor do tipo $(p-1, q-1)$ pelo processo de *contracção* que se resume a igualar índices contravariantes e covariantes. No tensor **T** de (1.52), seja $i_\alpha = u = j_\beta$ e seja a soma em u. O tensor resultante vai ser

$$\mathbf{T'} = \left(T^{i_1 i_2 \ldots u \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots u \ldots j_p}\right) \tag{1.59}$$

que é a contracção de **T**, com os índices de contracção i_α e j_β. **T'** é contravariante de ordem $p-1$ e covariante de ordem $q-1$.

Exemplo 1.3 *Seja o tensor* $\boldsymbol{P} = (P^a_{bcd})$ *que vai sofrer uma contracção em* a *e* b. *Então o tensor* ***P'*** *resultante vai ser da forma*

$$\boldsymbol{P'} = (P^a_{acd}) = P'_{cd}\,.$$

Um tensor do tipo $(1, 3)$ *passou a ser um tensor do tipo* $(0, 2)$.

De notar que um tensor pode sofrer uma contracção através da sua multiplicação com o tensor de Kronecker δ^a_b, ou seja

$$P^a_{acd} = \delta^a_b P^a_{bcd} \tag{1.60}$$

Regra do Quociente

Considere-se um conjunto de quantidades cujo produto interno com um tensor arbitrário produz um outro tensor. Então, esse conjunto de quantidades forma um tensor da ordem e tipo apropriado, ou seja

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X} \tag{1.61}$$

em que $\mathbf{S}$ é um tensor e $\mathbf{X}$ um tensor arbitrário; então, $\mathbf{T}$ tem que ser um tensor.

Proposição 1.1 *Se $S_i = T_{ij}X^j$ em que S_i é um tensor covariante e X^j um vector contravariante arbitrário, então pela regra do quociente T_{ij} tem que ser um tensor covariante de segunda ordem.*

Prova 1.1

$$\begin{aligned} \overline{S}_i &= \overline{T}_{ij}\ \overline{X}^j \\ \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i} S_a &= \overline{T}_{ij}\ \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^b} X^b \\ \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i} T_{ab} X^b &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^b} \overline{T}_{ij} X^b \end{aligned} \tag{1.62}$$

Então obtemos

$$\left[\frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i} T_{ab} - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^b} \overline{T}_{ij}\right] X^b = 0 \tag{1.63}$$

Como X^b é arbitrário, a expressão dentro de parêntesis em (1.63) tem que ser zero:

$$\left[\frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i} T_{ab} - \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^b} \overline{T}_{ij}\right] = 0 \tag{1.64}$$

Tomando o produto interno com $\frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}$*, vamos obter*

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^a}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}T_{ab} &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial x^b}\frac{\partial x^b}{\partial \overline{x}^k}\overline{T}_{ij} \\ &= \frac{\partial \overline{x}^j}{\partial \overline{x}^k}\overline{T}_{ij} \qquad (1.65) \\ &= \delta^j_k \overline{T}_{ij} \\ &= \overline{T}_{ij} \qquad (1.66) \end{aligned}$$

que nos fornece a lei de transformação pretendida.

Equações Tensoriais

Devido à natureza das transformações, lineares e homogéneas, um tensor cujas componentes sejam zero num sistema de coordenadas, são zero, também, em qualquer sistema de coordenadas. É um tensor numericamente invariante. Qualquer equação tensorial pode ser expressa na forma

$$T = 0 \tag{1.67}$$

em que o lado esquerdo da equação é, geralmente, uma combinação linear de produtos internos ou externos de tensores. Como o lado direito é numericamente invariante, o lado esquerdo da equação também o tem que ser. Então, a equação tensorial é independente do sistema de coordenadas que se esteja a considerar.

Simetria e Anti-Simetria

Um tensor covariante de segunda ordem T_{ij} diz-se simétrico se

$$T_{ij} = T_{ji}$$

e tem apenas $\frac{1}{2}n(n+1)$ componentes independentes.

O tensor T_{ij} diz-se anti-simétrico se

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

e, neste caso, tem apenas $\frac{1}{2}n(n-1)$ componentes independentes.

A notação utilizada para definir a parte simétrica de um tensor é

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) . \tag{1.68}$$

A notação utilizada para definir a parte anti-simétrica de um tensor será

$$T_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) . \tag{1.69}$$

Qualquer tensor pode ser sempre escrito como a soma da parte simétrica com a anti--simétrica

$$T_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) . \tag{1.70}$$

1.3.15 Campo de Tensores

Um vector fixo é um vector associado a um ponto, enquanto que um **campo vectorial** numa dada região do espaço associa a cada vector um ponto dessa região.

Definição 1.7 *Um campo vectorial* $\boldsymbol{Y}$ *numa variedade* V*, é uma função de classe* C^∞ *que faz corresponder a* V $T(V)$*, ou seja, para cada ponto* p *de* V*, a imagem* $Y(p) = Y_p$ *é um vector que pertence ao espaço tangente* $T_p(V)$ *em* p*. Dada uma base* (v_i) *de* $T_p(V)$*, podemos escrever* $\boldsymbol{Y}$ *de modo seguinte*

$$Y = Y^i v_i . \tag{1.71}$$

Um tensor é um conjunto de quantidades definidos num ponto p da variedade V que respeita a lei de transformação (1.51). Um **campo tensorial** definido numa dada região da variedade é uma associação de um tensor, do mesmo tipo, a cada ponto dessa região, ou seja

$$p \to T^{i\cdots}_{j\cdots}(p) \tag{1.72}$$

em que $T^{i\cdots}_{j\cdots}(p)$ são as componentes do tensor em p. O campo tensorial diz-se diferenciável ou contínuo se todas as suas componentes, em todos os sistemas de coordenadas, forem funções diferenciáveis ou contínuas das coordenadas. O campo tensorial diz-se suave se as suas componentes forem de ordem C^∞.

1.3.16 Derivada Parcial de um Tensor

Considere-se a expressão

$$\overline{X}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j} X^j$$

que representa a lei de transformação de coordenadas de um tensor de ordem um. Derivando esta expressão em relação a $\overline{x}^k$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{X}^i}{\partial \overline{x}^k} &= \frac{\partial}{\partial \overline{x}^k}\left(\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\, X^j\right) \\
&= \frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\,\frac{\partial}{\partial x^r}\left(\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\, X^j\right) \\
&= \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\,\frac{\partial X^j}{\partial x^r} + \frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^j \partial x^r}\,\frac{\partial x^r}{\partial \overline{x}^k}\, X^j \,. \qquad (1.73)
\end{aligned}
$$

O primeiro termo do resultado representa uma lei de transformação de um tensor do tipo $(1,1)$, contudo, a presença do segundo termo impede que a derivada parcial de um tensor seja um tensor. Por definição, o processo de derivação envolve a comparação de quantidades definidas em dois pontos vizinhos, P e Q, a dividir por um parâmetro, δu, que representa a separação dos dois pontos, na forma

$$
\lim_{\delta u \to 0} \frac{\left[X^i\right]_P - \left[X^i\right]_Q}{\delta u} \,.
$$

Tendo em consideração as leis de transformação

$$
\overline{X}^i{}_P = \left[\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\right]_P X^j{}_P \quad \text{e} \quad \overline{X}^i{}_Q = \left[\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\right]_Q X^j{}_Q,
$$

que representam matrizes de transformação definidas em diferentes pontos, verifica-se que $X^i{}_P - X^i{}_Q$ não é um tensor.

1.3.17 Conexão Afim e Derivada Covariante de um Tensor

Considere-se um campo vectorial contravariante $X^i(x)$ definido no ponto Q, de co-ordenadas $x^i + \delta x^i$, na vizinhança de um ponto P de coordenadas x^i. Através do Teorema de Taylor vamos ter

$$
X^i\left(x^i + \delta x^i\right) = X^i\,(x) + \delta x^j\,\frac{\partial X^i}{\partial x^j} \,\cdot \qquad (1.74)
$$

Se igualarmos o segundo termo de (1.74) a $\delta X^a(i)$, ou seja,

$$
\delta X^i(x) = \delta x^j\,\frac{\partial X^i}{\partial x^j} = X^i\,(x + \delta x) - X^i(x)\,,
$$

verificamos que não se trata de um tensor, já que envolve a diferença de dois tensores definidos em pontos diferentes. O conceito de derivada tensorial vai ser definido introduzindo um vector em Q *paralelo* a X^i no ponto P. Este vector paralelo difere de X^i por um valor $\overline{\delta}X^i(x)$ (ver figura 1.7).

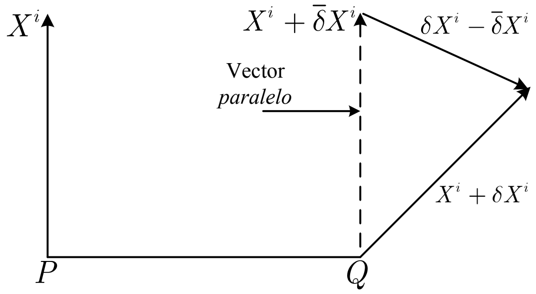


Figura 1.7: Vector paralelo $X^i(x) + \overline{\delta}X^i$ no ponto Q. Adaptado de [5].

$\overline{\delta}X^i(x)$ não é um tensor mas, o vector **diferença**

$$X^i(x) + \delta X^i(x) - \left(X^i(x) + \overline{\delta}X^i(x)\right) = \delta\, X^i(x) - \overline{\delta}X^i(x) \tag{1.75}$$

será construído de forma a ter carácter tensorial. A forma mais simples será assumir que $\overline{\delta}X^i(x)$ é linear em X^i e δx^i o que faz com que existam factores multiplicativos Γ^i_{jk} tal que

$$\delta X^i(x) = \Gamma^i_{jk}\, X^j\, \delta x^k\,. \tag{1.76}$$

Considere-se $\nabla_k X^i$ a derivada covariante de X^i definida pelo limite

$$\nabla_k\, X^i = \lim_{\delta x^k \to 0} \frac{1}{\delta x^k} \left\{X^i\,(x + \delta x) - \left[X^i(x) + \overline{\delta}X^i(x)\right]\right\}\,. \tag{1.77}$$

que é a diferença entre o vector $X^i(Q)$ e o vector em Q paralelo ao vector $X^i(P)$, a dividir pela diferença de coordenadas quando estas, no limite, tendem para zero. Utilizando as relações (1.74) e (1.76) obtemos

$$\nabla_k\, X^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk}\, X^j\,. \tag{1.78}$$

Para que $\nabla_k\, X^i$ um tensor do tipo $(1,1)$, Γ^i_{jk} tem que ter uma transformação da forma [17]

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \overline{x}^k}\,\Gamma^r_{ms} + \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \overline{x}^j\,\partial \overline{x}^k}\,. \tag{1.79}$$

A presença do segundo termo de (1.79) mostra que de Γ^i_{jk} não é um tensor. Qualquer quantidade Γ^i_{jk} com uma lei de transformação expressa por (1.79) chama-se uma **conexão afim** ou, simplesmente, **conexão** ou **afinidade**. Uma variedade munida de uma conexão contínua chama-se **variedade afim**.

Aplicando a regra de Leibniz à derivação covariante vamos obter

$$\nabla_k X_i = \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} X_j \,. \tag{1.80}$$

A derivada de um tensor de tipo (p, q) vai ser de tipo $(p, q+1)$, isto é, tem um grau covariante extra. A expressão geral da derivação covariante para um tensor T tem a forma:

$$\nabla_k T^{i\ldots}_{j\ldots} = \frac{\partial T^{i\ldots}_{j\ldots}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{rk} T^{r\ldots}_{j\ldots} + \cdots - \Gamma^r_{jk} T^{i\ldots}_{r\ldots} - \cdots \,. \tag{1.81}$$

Da lei de transformação conclui-se que a soma de duas conexões não é uma conexão ou um tensor. Contudo, a diferença de duas conexões é um tensor é um tensor do tipo $(1, 2)$ já que o termo não homogéneo anula-se. Por esta razão, a parte anti-simétrica de Γ^i_{jk}

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} \tag{1.82}$$

é um tensor. Se este tensor for nulo a conexão é simétrica, isto é,

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \,. \tag{1.83}$$

1.3.18 A Métrica

Um campo tensorial simétrico de ordem dois, $g_{ij}(x)$, define uma métrica. A uma variedade munida de uma métrica **variedade de Riemann**. A distância infinitesimal, ds, entre dois pontos vizinhos, x^i e $x^i + dx^i$, é definida por:

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^b \,. \tag{1.84}$$

A equação (1.84) é, também, conhecida por **elemento de linha**. A norma de um vector contravariante X^i é definida por

$$X^2 = g_{ij}(x)\, X^i\, X^j \,. \tag{1.85}$$

A métrica é **definida positiva** ou **definida negativa** se, para todos os vectores $X, X^2 > 0$ ou $X^2 < 0$, respectivamente. Caso contrário, a métrica chama-se **indefi-**

nida. O ângulo entre dos vectores X^i e Y^i, com $X^2 \neq 0$ e $Y^2 \neq 0$ é dado por

$$\cos(X,Y) \, = \, \frac{g_{ij}\, X^i\, Y^j}{(|g_{kr}\, X^k\, Y^r|)^{\frac{1}{2}}\, (|g_{ms}\, X^m\, Y^s|)^{\frac{1}{2}}} \, . \tag{1.86}$$

Se

$$g_{ij}(x)\, X^i\, Y^j \, = \, 0 \tag{1.87}$$

os vectores X^i e Y^i são ortogonais. Se a métrica for indefinida, então, existem vectores que são ortogonais em relação a si próprios, que se chamam **vectores nulos**, ou seja

$$g_{ij}(x)\, X^i\, X^j \, = \, 0 \, . \tag{1.88}$$

O determinante da métrica é representado por

$$g \, = \, \det(g_{ij}) \; . \tag{1.89}$$

A métrica é não-singular se $g \neq 0$ e, neste caso, a inversa de g_{ij}, g^{ij}, é dada por

$$g_{ij}\, g^{jk} \, = \, \delta_i^k \, . \tag{1.90}$$

De (1.90) verifica-se que g^{ij} é um tensor contravariante de ordem dois e chama-se **métrica contravariante**.

Através de g_{ij} e g^{ij}, é possível baixar ou subir os índices de tensores utilizando as seguintes relações:

$$T^{\cdots\,\cdots}_{\cdots i \cdots} \, = \, g_{ij}\, T^{\cdots j \cdots}_{\cdots\,\cdots} \tag{1.91}$$

e

$$T^{\cdots i \cdots}_{\cdots\,\cdots} \, = \, g^{ij}\, T^{\cdots\,\cdots}_{\cdots j \cdots} \, . \tag{1.92}$$

1.3.19 Conexão Métrica

Considere-se uma curva C representada pela equação paramétrica $x^i \, = \, x^i(u)$. De dividirmos a equação (1.84) pelo quadrado de du obtemos

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 \, = \, g_{ij}\, \frac{dx^i}{du}\, \frac{dx^j}{du} \, . \tag{1.93}$$

O intervalo s entre dois pontos P_1 e P_2 na curva C é dado por:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} ds = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{du}\, du = \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du} \right)^{\frac{1}{2}} du\,. \tag{1.94}$$

Define-se **geodésica métrica temporal**, entre dois pontos P_1 e P_2, como sendo a curva que une esses dois pontos e cujo intervalo entre eles é um máximo, mínimo ou um ponto sela.

Derivando as equações para as geodésicas, as equações de Euler-Lagrange dão origem às equações diferenciais de segunda ordem

$$g_{ij} \frac{d^2x^j}{du^2} + \{jk, i\} \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{du} = \left(\frac{d^2s}{du^2} \div \frac{ds}{du} \right) g_{ij} \frac{dx^j}{du}\,, \tag{1.95}$$

em que as quantidades definidas por $\{jk, i\}$ são os **símbolos de Christoffel de tipo um** e são definidos pelas derivadas da métrica através de

$$\{jk, i\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (g_{ik}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (g_{jk}) - \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) \right]. \tag{1.96}$$

Multiplicando por g^{ir} e utilizando (1.90), obtemos as equações

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{du} \frac{dx^k}{du} = \left(\frac{d^2s}{du^2} \div \frac{ds}{du} \right) \frac{dx^i}{du}\,, \tag{1.97}$$

em que $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ são os **símbolos de Christoffel de tipo dois** definidos por

$$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = g^{ir} \{jk, r\}\,. \tag{1.98}$$

Considere-se um parâmetro u que está linearmente relacionado ao intervalo s, isto é,

$$u = \alpha s + \beta \tag{1.99}$$

em que α e β são constantes. Então, o lado direito de (1.97) desaparece. No caso especial de $u = s$, as equações para uma **geodésica métrica** passam a ser

$$\frac{d^2x^i}{du^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{1.100}$$

e

$$g_{ij}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds} \,=\, 1\,, \tag{1.101}$$

em que se assume que $ds \neq 0$.

Para métricas indefinidas, existem geodésicas para as quais, a distância entre quaisquer dois pontos é nula. Essas geodésicas chamam-se **geodésicas nulas**. Estas curvas podem ser parametrizadas por um parâmetro u, chamado de **parâmetro afim**, de forma a que as equações destas curvas sejam expressas por

$$\frac{d^2x^i}{du^2} \,+\, \left\{\begin{array}{c} i \\ jk \end{array}\right\} \frac{dx^b}{du}\,\frac{dx^k}{du} \,=\, 0\,, \tag{1.102}$$

em que

$$g_{ij}\,\frac{dx^i}{du}\,\frac{dx^j}{du} \,=\, 0\,. \tag{1.103}$$

A última equaçõa deriva do facto do vector tangente ser nulo. Um qualquer outro parâmetro afim está relacionado com u pela lei de transformação

$$u \to \alpha u \,+\, \beta\,. \tag{1.104}$$

Considerem-se as seguintes equações:

$$\Gamma^i_{jk} \,=\, \left\{\begin{array}{c} i \\ jk \end{array}\right\} \tag{1.105}$$

e

$$\Gamma^i_{jk} \,=\, \frac{1}{2}\,g^{ir}\,\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\,(g_{rk}) \,+\, \frac{\partial}{\partial x^k}\,(g_{rj}) \,-\, \frac{\partial}{\partial x^r}\,(g_{jk})\right] \tag{1.106}$$

Esta conexão construída a partir da métrica e das suas derivadas chama-se **conexão métrica**. As definições anteriores levam à identidade

$$\nabla_k\, g_{ij} \,\equiv 0\,. \tag{1.107}$$

Então, se (1.107) tiver que ser válida para qualquer conexão simétrica, a conexão em que ser necessariamente a conexão métrica.

Teorema 1.1 *Se ∇_i representar a derivada covariante em relação à conexão afim Γ^i_{jk}, então a condição necessária e suficiente para que a derivada covariante da métrica desapareça é que a conexão seja a conexão métrica.*

1.3.20 O Tensor de Curvatura

O **tensor de curvatura** ou **tensor de Riemann** é definido por

$$R^i{}_{jkr} = \frac{\partial}{\partial x^k}\,\Gamma^i_{jk} - \frac{\partial}{\partial x^r}\,\Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jr}\,\Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk}\,\Gamma^i_{mr} \tag{1.108}$$

em que Γ^i_{jk} é a conexão métrica definida por (1.106). Então, $R^i{}_{jkr}$ depende da métrica e das suas primeiras e segundas derivadas. Logo, o tensor de Riemann é anti--simétrico nos dois últimos pares de índices

$$R^i{}_{jkr} = -\,R^i{}_{jrk}\,. \tag{1.109}$$

O facto da conexão ser simétrica leva ao resultado

$$R^i{}_{jkr} + R^i{}_{rjk} + R^i{}_{krj} \equiv 0\,. \tag{1.110}$$

Baixando o índice contravariante, verifica-se que o tensor resultante é simétrico alterando a posição do primeiro e último par de índices, isto é,

$$R_{ijkr} = R_{krij}\,. \tag{1.111}$$

Combinando esta equação com (1.109), verifica-se que o tensor que resultou do baixar de índices, é anti-simétrico no primeiro par de índices:

$$R_{ijkr} = -\,R_{jikr}\,. \tag{1.112}$$

Através das relações anteriores, verifica-se que o tensor da curvatura satisfaz as seguintes relações:

$$R_{ijkr} = -\,R_{ijrk} = -\,R_{jikr} = R_{krij}\,, \tag{1.113}$$

$$R_{ijkr} + R_{irjk} + R_{ikrj} \equiv 0\,. \tag{1.114}$$

Estas simetrias reduzem consideravelmente o número de componentes independentes; para n dimensões, este número é reduzido de n^4 para $\frac{1}{12}n^2\left(n^2-1\right)$. Demonstra-se também que, o tensor de Riemann satisfaz um conjunto de identidades diferenciais a que se chamam **identidades de Bianchi**:

$$\nabla_i\,R_{rmjk} + \nabla_k\,R_{rmij} + \nabla_j\,R_{rmki} \equiv 0\,. \tag{1.115}$$

O **tensor de Ricci** é definido pela contracção

$$R_{ij} = R^k_{ikj} = g^{kr} R_{rikj} , \tag{1.116}$$

que por (1.111) é simétrico. Uma contracção final define o **escalar de curvatura** ou **escalar de Ricci** R:

$$R = g^{ij} R_{ij} . \tag{1.117}$$

Estes tensores podem ser utilizados para definir o **tensor de Einstein**

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R , \tag{1.118}$$

que é simétrico e, por (1.114), o tensor de Einstein satisfaz as identidades de Bianchi

$$\nabla_j G_i{}^j \equiv 0 . \tag{1.119}$$

1.3.21 Métrica Plana

Num ponto P de uma variedade, g_{ij} é uma matriz simétrica de números reais, o que faz com que exista uma transformação na qual a matriz é reduzida a uma diagonal em que os termos são $+1$ ou -1 a que se chama o **traço da métrica**. Assumindo que a métrica é contínua ao longo da variedade e não-singular, então o traço da métrica é **invariante**. Contudo, se existir um sistema de coordenadas no qual a métrica pode ser reduzida a uma forma diagonal com ± 1 em toda a variedade, então a **métrica diz-se plana**. Demonstra-se também que, se $R^i_{jkl} = 0$ é possível encontrar um sistema de coordenadas no qual as componentes da métrica são constantes ao longo do espaço.

Teorema 1.2 *A condição necessária e suficiente para que numa variedade a conexão seja plana é que o tensor de Riemann seja nulo.*

Considere-se um sistema onde a métrica é uma diagonal ± 1. Como a métrica é constante por toda a variedade, as suas derivadas parciais desaparecem e, logo, a conexão métrica Γ^i_{jk} desaparece também como consequência de (1.106). Como consequência, o tensor de Riemann também desaparece.

Se o tensor de Riemann desaparece, então pelo teorema (1.2), existe um sistema de coordenadas em que a conexão também se anula. Como esta conexão é a conexão métrica, por (1.107) vamos ter,

$$\nabla_k g_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) - \Gamma^r_{ik} g_{rj} - \Gamma^r_{jk} g_{ir} = 0 , \tag{1.120}$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, g_{ij} \;=\; \Gamma^r_{ik}\, g_{rj} \;+\; \Gamma^r_{jk}\, g_{ir}\, , \tag{1.121}$$

o que implica que

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\, g_{ij} \;=\; 0.$$

A métrica é, então, constante por toda a variedade e pode ser transformada numa forma diagonal de elementos ± 1.

1.3.22 O Espaço-Tempo de Minkowski

O **espaço-tempo de Minkowski**, ou simplesmente espaço plano, é caracterizado por ser uma variedade de quatro dimensões munida de uma métrica plana de traço 2. Então, por definição e com a métrica é plana, existe um sistema de coordenadas que cobre toda a variedade no qual a métrica é diagonal, com elementos da diagonal da forma ± 1. A este sistema de coordenadas chama-se sistema de **coordenadas de Minkowski** e escreve-se da seguinte forma:

$$\left(x^i\right) \;=\; \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \;=\; (t, x, y, z)\ . \tag{1.122}$$

Aqui adopta-se a convenção de sinal em que o **elemento de linha de Minkowski** toma a forma:

$$ds^2 \;=\; c^2\, dt^2 \;-\; dx^2 \;-\; dy^2 \;-\; dz^2 \tag{1.123}$$

ficando em unidades *relativistas*, considerando $c \;=\; 1$, na forma de

$$ds^2 \;=\; dt^2 \;-\; dx^2 \;-\; dy^2 \;-\; dz^2 \tag{1.124}$$

que é forma que iremos adoptar. Na forma tensorial (1.124) vai ter a forma

$$ds^2 \;=\; \eta_{ij}\, dx^i\, dx^j\ , \tag{1.125}$$

em que η_{ij} é a **métrica de Minkowski**:

$$\eta_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{diag}\,(1, -1, -1, -1)\, . \tag{1.126}$$

Em coordenadas de Minkowski, a métrica η_{ij} é constante e, nesse caso, a conexão Γ^i_{jk} desaparece neste sistema de coordenadas. Logo, o tensor de Riemann é nulo.

1.3.23 O Cone de Luz

No espaço-tempo de Minkowski a norma de um vector é definida por

$$X^2 = g_{ij}\, X^i\, X^j = X_i\, X^i \,. \tag{1.127}$$

Este vector pode ter a seguinte classificação:

- temporal se $X^2 > 0$,
- espacial se $X^2 < 0$,
- nulo se $X^2 = 0$.

Dois vectores X^i e Y^i são ortogonais se o seu produto interno for zero, ou seja,

$$g_{ij}\, X^i\, Y^i = 0 \,, \tag{1.128}$$

do que se deduz que um vector nulo é ortogonal a si próprio.

O conjunto de todos os vectores nulos num ponto P numa variedade de Minkowski forma um cone duplo a que se chama **cone nulo** ou **cone de luz**. Em coordenadas de Minkowski, os vectores nulos X^i no ponto P satisfazem a relação

$$\eta_{ij}\, X^i\, X^j = 0 \,, \tag{1.129}$$

ou seja,

$$\left(X^0\right)^2 - \left(X^1\right)^2 - \left(X^2\right)^2 - \left(X^3\right)^2 = 0 \,, \tag{1.130}$$

que é a equação de um cone duplo. Se definirmos um vector temporal T^i em coordenadas de Minkowski por $T^i = (1, 0, 0, 0)$, então, um vector temporal ou nulo X^i diz-se que:

- aponta o futuro se $\eta_{ij}\, X^i\, T^j > 0$,
- aponta o passado se $\eta_{ij}\, X^i\, T^j < 0$.

Os vectores que apontam para o futuro estão todos dentro de numa zona do cone a que se chama futuro e os que apontam para o futuro estão numa zona a que se chama o passado (ver figura1.8).

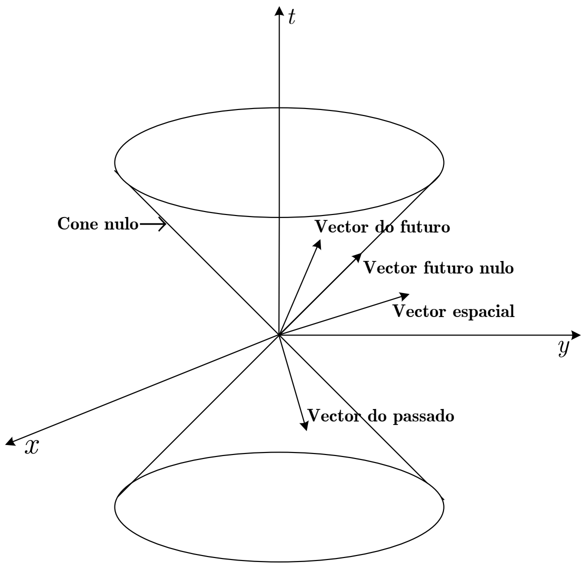


Figura 1.8: Cone nulo sem a terceira dimensão z. Adaptado de [5].

1.4 As Transformações de Lorentz

1.4.1 Derivação *Standard* das Transformações de Lorentz (Boost)

Considerem-se dois referenciais inerciais S e $\overline{S}$. Considere-se ainda que $\overline{S}$ se move uniformemente ao longo do eixo positivo dos xx com velocidade v (recordar figura 1.2). (x, y, z) são coordenadas Cartesianas medidas em S e t é o tempo medido por um relógio em repouso no referencial S. De uma forma semelhante $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ e $\bar{t}$ são as coordenadas espaciais e temporal medidas em $\overline{S}$. Não estamos a assumir que o tempo é absoluto, ou seja, que $t = \bar{t}$. Vamos, neste ponto, trabalhar com unidades não-relativistas, nas quais a velocidade da luz tem o valor c.

A relação entre as coordenadas em $\overline{S}$ e S pode ser escrita de uma forma matricial

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.131}$$

em que L é uma matriz 4×4 a que chamaremos **matriz de Lorentz** que representa uma **transformação de Lorentz** cujas quantidades apenas dependem, neste caso, da velocidade de separação v. Vamos assumir que o espaço é isotrópico, ou seja, igual em todas as direcções, que leva às transformações para y e z sejam

$$\overline{y} = y \qquad \text{e} \qquad \overline{z} = z\,. \tag{1.132}$$

No instante $t = \overline{t} = 0$ as origens dos dois eixos coincidem. Considere-se que um feixe de luz é emitido. De acordo com S o feixe de luz move-se de uma forma radial afastando-se de S com uma velocidade c. O feixe de luz vai constituir uma esfera de raio ct. Se definirmos a quantidade I por

$$I\,(t, x, y, z) \,=\, c^2t^2 \,-\, x^2 \,-\, y^2 \,-\, z^2 \tag{1.133}$$

então, todos os acontecimentos que ocorrem dentro da *esfera* têm que satisfazer a condição $I = 0$. Pelo segundo postulado de Einstein, $\overline{S}$ também tem que ver o feixe a deslocar-se de uma forma esférica com velocidade c. Logo se definirmos $\overline{I}$ por

$$\overline{I}\,(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \,=\, c^2\overline{t}^2 \,-\, \overline{x}^2 \,-\, \overline{y}^2 \,-\, \overline{z}^2 \tag{1.134}$$

concluímos que:

$$I \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{I} \,=\, 0\,. \tag{1.135}$$

Temos então que encontrar uma transformação que respeite (1.135). Pela definição de referenciais de inércia esta transformação tem que ser linear, o que implica que $\overline{I} = k\,I$ e $I = k\,\overline{I}$. Combinando estas duas equações vamos obter $k^2 = 1$. Obtemos assim $k = 1$ já que $k = -1$ é impossível porque no quando $v \to 0$ os dois referenciais coincidem e $I = \overline{I}$.

Substituindo $k = 1$ em $I = k\overline{I}$ vamos obter

$$c^2t^2 \,-\, x^2 \,-\, y^2 \,-\, z^2 \,=\, c^2\overline{t}^2 \,-\, \overline{x}^2 \,-\, \overline{y}^2 \,-\, \overline{z}^2 \tag{1.136}$$

e considerando (1.132) temos

$$c^2t^2 \,-\, x^2 \,=\, c^2\overline{t}^2 \,-\, \overline{x}^2\,. \tag{1.137}$$

Vamos introduzir em (1.137) as coordenadas imaginárias T e $\overline{T}$ definidas por

$$T \;=\; ict \tag{1.138}$$

$$\overline{T} \;=\; ic\overline{t} \tag{1.139}$$

ficando (1.137) com a forma

$$T^2 + x^2 = \overline{T}^2 + \overline{x}^2 . \tag{1.140}$$

Num espaço bidimensional (x, T), $T^2 + x^2$ representa o quadrado da distância de um ponto P à origem que é mantida invariante durante uma rotação no espaço (x, T) (ver figura 1.9).

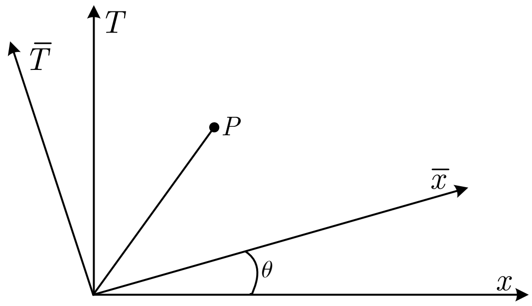


Figura 1.9: Rotação no espaço (x, T) de valor θ.

Se definirmos o ângulo de rotação por θ, a rotação vai ser dada por

$$\overline{x} = x \cos\theta + T \sin\theta \tag{1.141}$$

$$\overline{T} = -x \cos\theta + T \cos\theta \tag{1.142}$$

S vê $\overline{S}$ a mover-se ao longo do seu eixo positivo x com uma velocidade v, logo $x = vt = v\,T/ic$. Substituindo estes valores em (1.141) obtemos

$$\tan\theta = \frac{iv}{c} \cdot \tag{1.143}$$

Podemos obter uma expressão para o $\cos\theta$ usando

$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{(1 + \tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

Se utilizarmos o símbolo β para a ultima expressão, ou seja

$$\beta \equiv \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

a equação (1.141) dá origem a

$$\overline{x} = \beta(x - vt)$$

e (1.142) dá origem a

$$\overline{T} = \beta\left(-x\left(\frac{iv}{c}\right) + ict\right)$$

de onde tiramos que

$$\bar{t} = \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) .$$

Temos, então, a derivação *standard* de uma transformação de Lorentz (*boost*) em unidades não-relativistas:

$$\bar{t} = \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \quad (1.144)$$

$$\overline{x} = \beta\,(x - vt) \quad (1.145)$$

$$\overline{y} = y \quad (1.146)$$

$$\overline{z} = z \quad (1.147)$$

O Factor de Lorentz

Considere-se

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Se $v = 0$, então $\beta = 1$. Se $v \ll c$ podemos considerar $\beta = 1$ e as transformações de Lorentz passam a ser

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t \\ \overline{x} &= x - vt \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \end{aligned}$$

que são as transformações de Galileu.

1.4.2 O Grupo de Lorentz

Seja $\mathbf{M}$ o espaço de Minkowski. Uma transformação de Lorentz é uma função linear $L : M \to M$ tal que, para qualquer $x, y \in \mathbf{M}$, L satisfaz a condição

$$L(x) \cdot L(y) = x \cdot y . \quad (1.148)$$

Se L^i_j forem os coeficientes da matriz L (com $i, j = 0, 1, 2, 3$), vamos ter

$$L(x) \,=\, L^i_j\, x^j\,. \tag{1.149}$$

As transformação de Lorentz são então definidas como um conjunto de transformações do tipo

$$x^i \to \overline{x}^i \,=\, L^i_j\, x^j \tag{1.150}$$

das coordenadas de Minkowski, que deixam a métrica de Minkowski invariante, isto é:

$$L^i_k\, L^j_r\, \eta_{ij} \,=\, \eta_{kr} \tag{1.151}$$

e temos então

$$L(x)\cdot L(y) \,=\, \eta_{ij}\, L^i_k\, x^k\, L^j_r\, y^r \,=\, \left(L^T\,\eta\, L\right)_{kr}\, x^k\, y^r \tag{1.152}$$

em que L^T representa a transposta de L. Então

$$L(x)\cdot L(y) \,=\, x\cdot y \,=\, \left(L^T\,\eta\, L\right)_{kr}\, x^k\, y^r \,=\, \eta_{kr}\, x^k\, y^r$$

qualquer que seja o $x, y \in \mathbf{M}$. Conclui-se que L é uma matriz de Lorentz se

$$L^T\,\eta\, L \,=\, \eta\,. \tag{1.153}$$

Definição 1.8 *Qualquer matriz 4×4 que preserve a forma quadrática $L^T\,\eta\,L \,=\, \eta$ é uma transformação de Lorentz, sendo L uma matriz de Lorentz* [26].

Teorema 1.3 *Se L for uma matriz de Lorentz, então L^T também é uma matriz de Lorentz.*

Pela equação (1.153) temos que $det\, L = \pm 1$. Se $x = y$ em (1.148), então x é um vector temporal se e só se $L(x)$ é um vector temporal; x é um vector espacial se e só se $L(x)$ é um vector espacial e, pela propriedade da não-degenerescência do produto interno, x é um vector nulo se $L(x)$ for um vector nulo.

O grupo das transformações de Lorentz em $\mathbf{M}$ formam um grupo a que se chama **grupo de Lorentz** que é representado por $\mathbf{L}$. O elemento identidade deste grupo é δ^i_j e o elemento inverso é dado pela matriz inversa. A matriz L^i_j é invertível porque se calcularmos o determinante em cada lado de (1.151) vamos obter

$$(det\, L)^2 \,=\, 1 \quad\Rightarrow\quad det\, L \,=\, \pm 1$$

o que faz com que a matriz seja não-singular. Podemos desta forma dividir o conjunto de todas as matrizes de Lorentz em dois conjuntos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_+ &= \{L \in \mathbf{L} : det\, L = 1\} \\ \mathbf{L}_- &= \{L \in \mathbf{L} : det\, L = -1\} \end{aligned}$$

em que $\mathbf{L}_+$ é um subgrupo de $\mathbf{L}$ e $\mathbf{L}_- = \eta\, \mathbf{L}_+$.

Seja $L \in \mathbf{L}$. A matriz L pode ser escrita na forma

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \overline{w}^T \\ \overline{u} & P \end{pmatrix}$$

em que $\overline{u}, \overline{w}^T$ são vectores de $\mathbb{R}^3$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, sendo $P \in (3 \times 3, \mathbb{R})$. Pela condição de (1.153) temos

$$\gamma = 1 + \|\overline{x}\|^2 \tag{1.154}$$

que faz com que $\gamma \leq -1$ ou $\gamma \geq 1$. Desta forma podemos dividir $\mathbf{L}$ em quatro subconjuntos:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\uparrow}{}_+ &= \{L \in \mathbf{L} : det\, L = 1 \text{ e } L^0_0 \geq 1\} \\ \mathbf{L}^{\uparrow}{}_- &= \{L \in \mathbf{L} : det\, L = -1 \text{ e } L^0_0 \geq -1\} \\ \mathbf{L}^{\downarrow}{}_+ &= \{L \in \mathbf{L} : det\, L = 1 \text{ e } L^0_0 \leq -1\} \\ \mathbf{L}^{\downarrow}{}_- &= \{L \in \mathbf{L} : det\, L = -1 \text{ e } L^0_0 \leq 1\} \end{aligned}$$

Se $det\, L^i_j = 1$, então a L^i_j chama-se transformação de Lorentz **própria** ou de **preservação da orientação**. Um exemplo de uma transformação de Lorentz imprópria é a transformação

$$\overline{t} = t, \quad \overline{x} = -x, \quad \overline{y} = y, \quad \overline{z} = z$$

que inverte a direcção de x. Se $L^0_0 \geq 1$, então L^i_j é uma matriz de preservação da **direcção temporal**. Um exemplo de uma transformação que não preserva a direcção temporal é

$$\overline{t} = -t, \quad \overline{x} = x, \quad \overline{y} = y, \quad \overline{z} = z$$

que inverte a *direcção* do tempo.

Definição 1.9 *Seja* $L \in \mathbf{L}$ *e* $x \in \mathbf{M}$. *Se* $L^0_0 \geq 1$, x *é direccionado ao futuro (passado) sse* Lx *for direccionado ao futuro (passado); se* $L^0_0 \leq -1$, x *é direccionado ao futuro (passado) sse* Lx *é direccionado ao passado (futuro)* [26].

O subgrupo $\mathbf{L}^{\uparrow}{}_{+}$, que vamos representar por $\mathbf{L}_o$, é um grupo de transformação de preservação temporal. $\mathbf{L}_o$ contém a matriz identidade, enquanto que os outros três conjuntos não, ou seja, não são subgrupos de $\mathbf{L}$. Verifica-se que $\mathbf{L}_o$ é um subgrupo de $\mathbf{L}$. As relações entre $\mathbf{L}_o$, $\mathbf{L}^{\uparrow}{}_{-}$, $\mathbf{L}^{\downarrow}{}_{+}$, $\mathbf{L}^{\downarrow}{}_{-}$ são as seguintes:

$$\mathbf{L}^{\uparrow}{}_{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{L}_o, \quad \mathbf{L}^{\downarrow}{}_{+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{L}_o$$

$$\mathbf{L}^{\downarrow}{}_{-} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{L}_o$$

$\mathbf{L}_o$ e $\mathbf{L}^{\downarrow}{}_{-}$ preservam a orientação espacial e qualquer transformação em $\mathbf{L}^{\downarrow}{}_{-}$, $\mathbf{L}^{\downarrow}{}_{+}$ inverte direcções espaciais.

1.4.3 Boost

Uma transformação de Lorentz que corresponda a um movimento uniforme de um referencial inercial que conserve um sub-espaço bidimensional, temporal ou espacial, é conhecido por **boost**.

Um exemplo de um boost são as transformações descritas na secção anterior dadas por:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \beta\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \\ \overline{x} &= \beta\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \end{aligned}$$

em que

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Se escrevermos estas transformações na forma

$$
\begin{aligned}
c\bar{t} &= \beta\left(ct - \frac{v}{c}\,x\right) \\
\overline{x} &= \beta\left(-\frac{v}{c}\,ct + x\right) \\
\overline{y} &= y \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}
\tag{1.155}
$$

vamos ter numa forma matricial

$$
\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ -\beta\frac{v}{c} & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.156}
$$

Verifica-se que (1.156) é da forma

$$
\overline{x}^i = \Lambda^i{}_j\, x^j\,. \tag{1.157}
$$

Como $det\,\Lambda^i{}_j = 1$ e $\Lambda^0_0 \geq 1$, o boost é uma transformação de Lorentz **própria**.

Com $v \to 0$, $\beta \to 1$ e, então, a matriz $\Lambda^i{}_j$ passa a ser a matriz identidade. A transformação inversa é representada pela matriz inversa de $\Lambda^i{}_j$:

$$
\left(\Lambda^i{}_j\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \beta & \beta\frac{v}{c} & 0 & 0 \\ \beta\frac{v}{c} & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.158}
$$

De uma forma geral, para o movimento uniforme com velocidade $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ o boost é representado pela seguinte matriz [27]:

$$
\left(L^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} \beta & -\beta\frac{v_x}{c} & -\beta\frac{v_y}{c} & -\beta\frac{v_z}{c} \\ -\beta\frac{v_x}{c} & 1+(\beta-1)\frac{v_x^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_x v_z}{v^2} \\ -\beta\frac{v_y}{c} & (\beta-1)\frac{v_y v_x}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_y^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_y v_z}{v^2} \\ -\beta\frac{v_z}{c} & (\beta-1)\frac{v_z v_x}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_z v_y}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix} \tag{1.159}
$$

1.4.4 Boost na Forma Hiperbólica

Seja

$$\tanh(\theta) = \frac{v}{c} \cdot \tag{1.160}$$

Então

$$\cosh(\theta) = \beta \tag{1.161}$$
$$\sinh(\theta) = \beta \frac{v}{c} \tag{1.162}$$

e destas relações deduzimos que

$$\exp(\theta) = \beta \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \tag{1.163}$$

Usando as relações anteriores podemos reescrever a transformação de Lorentz para um boost de velocidade v na direcção positiva de x como

$$\left(L^i{}_j\right) = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.164}$$

em que ϕ é o parâmetro do boost. As transformações de coordenadas podem ser escritas na forma

$$c\bar{t} = ct \cosh(\phi) - x - \sinh(\phi) \tag{1.165}$$
$$\bar{x} = -ct \sinh(\phi) + x \cosh(\phi) \tag{1.166}$$

obtendo-se

$$\left(c\bar{t} + x\right) = \exp(-\phi)\,(ct + x) \tag{1.167}$$
$$\left(c\bar{t} - x\right) = \exp(-\phi)\,(ct - x)\,. \tag{1.168}$$

Multiplicando estas duas equações chega-se ao resultado

$$c^2\bar{t}^2 - \bar{x}^2 = c^2t^2 - x^2 \tag{1.169}$$

que é consistente com o facto do elemento de linha de Minkowski ter que ser invariante.

Axioma 1.1 *Se uma transformação própria de Lorentz L deixa invariante um sub-*

-espaço S de Minkowski, então deixa invariante o sub-espaço ortogonal $S^{\perp}$.

Definição 1.10 *Uma transformação $L(L \neq I) \in \mathbf{L}_o$ é uma transformação do tipo boost se deixa invariante um sub-espaço espacial bidimensional e invariante o correspondente sub-espaço temporal ortogonal e bidimensional.*

A inversa desta transformação é uma outra transformação de Lorentz de parâmetro $-\phi$:

$$\tanh(-\phi) = -\tanh(\phi) = -\frac{v}{c} \cdot \tag{1.170}$$

O produto de duas transformações de Lorentz de factores ϕ_1 e ϕ_2 é uma transformação de Lorentz com factor $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Isto deriva-se das igualdades hiperbólicas

$$\sinh(\phi_1 + \phi_2) = \cosh\phi_1 \sinh\phi_2 + \sinh\phi_1 \cosh\phi_2 \tag{1.171}$$

$$\cosh(\phi_1 + \phi_2) = \cosh\phi_1 \cosh\phi_2 + \sinh\phi_1 \sinh\phi_2 \tag{1.172}$$

Usando a igualdade hiperbólica

$$\tanh(\phi_1 + \phi_2) = \frac{\tanh\phi_1 + \tanh\phi_2}{1 + \tanh\phi_1 \tanh\phi_2} \tag{1.173}$$

vamos obter

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \cdot \tag{1.174}$$

A equação (1.174) é a **lei relativista da soma das velocidades** colineares. Quando $v_1 v_2 \ll c^2$ vamos ter $v = v_1 + v_2$ como acontece em mecânica não-relativista.

1.4.5 Rotação Espacial

Seja R uma matriz ortogonal 3×3 que represente uma rotação própria no espaço e L^i_j uma matriz de Lorentz. Então

$$\left(L^i_j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{1.175}$$

também é uma transformação própria de Lorentz já que $det\, R = 1$ implica $det\left(L^i_j\right) = 1$. A transformação inversa é dada por

$$\left(L_j{}^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{1.176}$$

Definição 1.11 *Uma transformação* $L(L \neq I) \in \mathbf{L}_o$ *é uma rotação espacial se deixar invariante um sub-espaço temporal bidimensional e o correspondente sub--espaço espacial ortogonal e bidimensional.*

Uma rotação espacial, pode ser representada, pela seguinte matriz:

$$\left(L_j{}^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.177}$$

em que θ é o parâmetro da **rotação**.

1.4.6 Boost e Rotação: Transformação *Screw*

De uma forma geral, um *screw* consiste numa rotação espacial (ou seja, sem alteração do tempo) seguida por um boost (alteração no tempo) de um referencial inercial para outro, isto é

$$L(\text{própia}) = L(\text{boost})\, L(\text{rotação espacial}).$$

O produto de dois boosts colineares com velocidades v_1 e v_2 é um boost de velocidade v sendo esta velocidade obtida por (1.174), que pode ser escrita na forma

$$L(v) = L(v_1)\, L(v_2)\,. \tag{1.178}$$

Definição 1.12 *Uma transformação* $L(L \neq I) \in \mathbf{L}_o$ *é uma transformação do tipo screw se deixar invariante um sub-espaço espacial de duas dimensões e deixar invariante o sub-espaço temporal ortogonal e bidimensional correspondente.*

Um screw pode ser representado pela seguinte matriz

$$L^i_j = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi & 0 & 0 \\ -\sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.179}$$

com $\phi = \phi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\phi(0) = \theta(0) = 0$.

1.4.7 Rotação Nula

Definição 1.13 *Um sub-espaço $V \subset X$ tal que $u \cdot v = 0$, $\forall u, v \in V$, é um sub-espaço nulo.*

Definição 1.14 *Uma transformação $L(L \neq I) \in \mathbf{L}_o$ é uma rotação nula se deixar invariante um sub-espaço nulo bidimensional de $\mathbf{M}$.*

Uma rotação nula pode ser representada pela matriz:

$$\left(L_j{}^i\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 1 & 0 \\ \alpha^2+\gamma^2 & -\alpha & -\gamma & 1 \end{pmatrix} \tag{1.180}$$

em que $\alpha = \alpha(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\alpha(0) = \gamma(0) = 0$.

1.5 A Mecânica Relativista

1.5.1 Contracção do Comprimento

Considere-se a barra fixa no referencial $\overline{S}$ de extremidades $\overline{x}_A$ e $\overline{x}_B$, como está descrito na figura 1.10.

O referencial $\overline{S}$ move-se com velocidade v em relação a S. No referencial S o corpo tem coordenadas x_A e x_B obtidas pelas transformações de Lorentz

$$\overline{x}_A = \beta\,(x_A - vt_A) \qquad \text{e} \qquad \overline{x}_B = \beta\,(x_B - vt_B)\,. \tag{1.181}$$

O comprimento da barra em repouso, isto é, medido por $\overline{S}$ é dado por:

$$l_0 = \overline{x}_A - \overline{x}_B = \Delta\overline{x}\,. \tag{1.182}$$

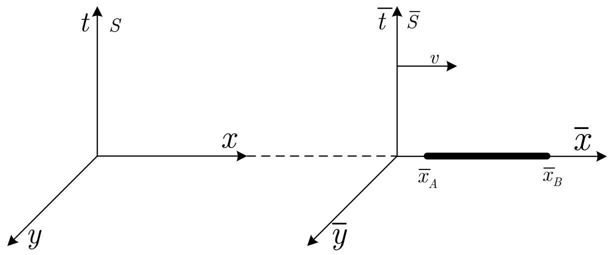


Figura 1.10: Um corpo a mover-se com velocidade v em relação a S.

O comprimento da barra medido por S no instante $t = t_A = t_B$ é:

$$l = x_A - x_B = \Delta x\,. \tag{1.183}$$

Subtraindo as equações de (1.181) vamos obter

$$l = \beta^{-1}\, l_0\,. \tag{1.184}$$

Verifica-se assim, que o comprimento de um corpo na direcção do seu movimento, com velocidade uniforme v, tem uma redução de $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. A este fenómeno chama-se **contracção do comprimento**.

Por outro lado, verifica-se que o corpo tem maior comprimento no referencial onde se encontra em repouso, neste caso em $\overline{S}$. A este comprimento em repouso chama-se **comprimento próprio**.

1.5.2 Dilatação do Tempo

Considere-se um relógio fixo em $\overline{x} = \overline{x}_A$, no referencial $\overline{S}$, registar dois acontecimentos sucessivos separados por um intervalo de tempo T_0 (ver figura 1.11).

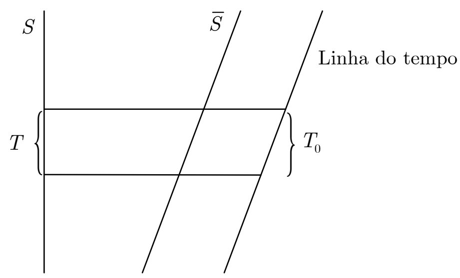


Figura 1.11: Eventos sucessivos registados por um relógio fixo em $\overline{S}$.

Os eventos sucessivos em $\overline{S}$ são $\left(\overline{x}_a, \overline{t}_1\right)$ e $\left(\overline{x}_a, \overline{t}_1 + T_0\right)$. Utilizando as transformações de Lorentz, em S vamos ter

$$t_1 = \beta \left(\overline{t}_1 + \frac{v\,\overline{x}_A}{c^2} \right), \qquad t_2 = \beta \left(\overline{t}_1 + T_0 + \frac{v\,\overline{x}_A}{c^2} \right) \cdot \tag{1.185}$$

Então o intervalo de tempo em S definido por $T = t_2 - t_1$ vai ser obtido por

$$T = \beta\, T_0\,. \tag{1.186}$$

Isto demonstra que relógios em movimento atrasam-se através do factor

$$\left(1 - v^2/c^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

A este fenómeno chama-se **dilatação do tempo**. A taxa mais rápida de tempo corresponde ao relógio em repouso (relógio ideal) e chama-se **taxa própria**.

Tempo Próprio

O tempo medido por um relógio ideal, aquele que não é afectado pela sua aceleração e cuja taxa depende da sua velocidade instantânea, é chamado de **tempo próprio** τ. Este tempo entre t_1 e t_2 é dado por

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt\,. \tag{1.187}$$

1.5.3 4-Vectores

A formulação tensorial da relatividade restrita assenta na invariância de

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

sendo as coordenadas no espaço $\mathbf{M}$ representadas na forma x^α, em que $\alpha = 0, 1, 2, 3$, sendo

$$x^0 = t \qquad x^1 = x \qquad x^2 = y \qquad x^3 = z$$

que pode ser representado na forma de

$$x^\alpha = (t, \mathbf{r}) \tag{1.188}$$

a que se chama vector **4-posição**.

Neste espaço só podemos permitir transformações de coordenadas

$$x^\alpha \longrightarrow \overline{x}^\alpha$$

que preservem a métrica de Minkowski, ou seja

$$\overline{\eta}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

o que faz com que o elemento de linha de Minkowski seja preservado.

Considere-se a seguinte transformação linear e homogénea cujos coeficientes são independentes das coordenadas

$$\overline{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \, x^\beta \qquad e \qquad x^\alpha = \Lambda_\beta{}^\alpha \, \overline{x}^\beta \tag{1.189}$$

em que $(\Lambda_\beta{}^\alpha)$ é a inversa de $\left(\Lambda^\alpha_\beta\right)$

$$\Lambda^\alpha_\mu \, \Lambda_\beta{}^\mu = \Lambda_\mu{}^\alpha \, \Lambda^\mu_\beta = \delta^\alpha_\beta \, . \tag{1.190}$$

Um 4-vector contravariante transforma-se da seguinte forma

$$\overline{X}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta \, X^\beta \tag{1.191}$$

e um 4-vector covariante transforma-se como

$$\overline{X}_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\beta \, X_\alpha \, . \tag{1.192}$$

Verifica-se, então, que as componentes contravariantes e covariantes de um 4-vector não são as mesmas

$$X^\alpha = \left(X^0, \mathbf{X}\right) \quad \longrightarrow \quad X_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \, X^\beta = \left(-X^0, \mathbf{X}\right) \, . \tag{1.193}$$

O produto interno de dois 4-vectores pode ser escrito da forma

$$\eta_{\alpha\beta} \, X^\alpha \, Y^\beta = X^\alpha \, Y_\alpha = X_\alpha \, Y^\alpha = -X^0 \, Y^0 + \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \tag{1.194}$$

que é uma quantidade escalar.

O *quadrado do comprimento* de um 4-vector é

$$\eta_{\alpha\beta} \, X^\alpha \, X^\beta = X^\alpha \, X_\alpha = -X^0 \, X^0 + \mathbf{X} \cdot \mathbf{X} \tag{1.195}$$

que não necessita de ser positivo.

1.5.4 4-Velocidade

Considere-se o movimento de uma partícula de acordo com a curva $x^\mu(\tau)$ no referencial inercial S. O movimento é parametrizado pelo tempo próprio τ. Para uma partícula a sua 4-posição x^μ é temporal, isto é, $x^\mu x_\mu < 0$, ou seja, a linha de universo da partícula está dentro do cone de luz já que não pode ter uma velocidade superior à da luz. No referencial S, a partícula move-se com a 3-velocidade

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot$$

Encontra-se em repouso no referencial que se move com velocidade $\mathbf{v}$ em relação a S. A **4-velocidade** v^μ vai ser definida pela alteração do vector de posição da partícula em relação ao tempo próprio:

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3). \tag{1.196}$$

Como dx^μ é um 4-vector e $d\tau$ é um invariante, v^μ é um 4-vector.

Pelo fenómeno da dilatação do tempo temos que

$$\beta d\tau = dt. \tag{1.197}$$

Como $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$

$$v^\mu = \beta\,(c, \mathbf{v}) \tag{1.198}$$

Verifica-se que $v^\mu v_\mu = -c^2 < 0$, ou seja, a 4-velocidade é um vector temporal e invariante.

Por analogia com a mecânica clássica podemos definir a **4-aceleração** pela relação

$$a^\mu = \frac{dv^\mu}{d\tau} \cdot \tag{1.199}$$

1.5.5 4-Força e 4-Momento

Consideremos de novo a partícula do caso anterior. Através da segunda lei de Newton sabemos que a força é dada pela expressão

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \tag{1.200}$$

em que $\mathbf{p}$ é a quantidade de movimento. Por analogia, podemos definir um 4-vector da forma

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \tag{1.201}$$

em que F^μ a **4-força** e a p^μ o **4-momento**. A definição de 4-momento vem da mecânica clássica e, assim, o 4-momento será

$$p^\mu = m_0 \, v^\mu, \tag{1.202}$$

sendo m_0 a massa inercial da partícula no seu referencial de repouso. A m_0 chama--se **massa de repouso** ou **massa própria** (ou seja, a massa da partícula medida por um observador que se desloca com ela) e é um invariante. Temos então, que (1.201) pode ser escrita na forma

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dv^\mu}{d\tau} \tag{1.203}$$

onde se assume que a massa de repouso, m_0, não varia durante o movimento.

Como $v^\mu = \beta \, (c, \mathbf{v})$, temos que

$$p^\mu = m \, (c, \mathbf{v}) = (m \, c, \mathbf{p}) \tag{1.204}$$

em que $\mathbf{p} = m \, \mathbf{v}$ é o 3-momento newtoniano da partícula e $m = \beta \, m_0$ é a massa inercial da partícula, ou seja,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \beta \, m_0 \tag{1.205}$$

representa a massa em movimento da partícula, que se move com uma velocidade $\mathbf{v}$. O 4-momento será, então definido por

$$p^\mu = \beta \, m_0 \, v^\mu = m \, v^\mu \tag{1.206}$$

ou, em notação vectorial

$$\mathbf{p} = \beta \, m_0 \, \mathbf{v} = m \, \mathbf{v} \tag{1.207}$$

1.5.6 A 4-Força de Minkowski

As equações do movimento de Newton, embora invariantes durante uma transformação de Galileu, não são invariantes durante uma transformação de Lorentz; têm que ser generalizadas de forma a ser obtida uma lei para a força que, satisfaça os requisitos covariantes da relatividade restrita.

Considere-se $\mathbf{F}$ a força de Minkowski e $\mathbf{f}$ a força de Newton. A 4-força é definida pela relação

$$F^{\mu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} \qquad (\mu = 0, 1, 2, 3)$$

o que faz com a generalização que se procura seja uma que, para velocidades muito pequenas quando comparadas com c esta equação seja reduzida à forma clássica

$$f^{i} = \frac{dp^{i}}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3)\,.$$

sendo f a força de Newton.

Como $d\tau$ e dt estão relacionados através da expressão (1.197), pode-se escrever a equação para a força de Newton na forma

$$f^{i} = \frac{dp^{i}}{\beta\, d\tau} \tag{1.208}$$

ou seja

$$\beta\, f^{i} = \frac{dp^{i}}{d\tau}\,. \tag{1.209}$$

A expressão (1.209) mostra que as componentes espaciais do 4-vector da força de Minkowski estão relacionadas com a força de Newton através da relação

$$F^{i} = \beta\, f^{i} \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{1.210}$$

Incluindo a parte temporal do 4-vector da força de Minkowski chegamos à expressão para a 4-força de Minkowski:

$$\mathbf{F} = \beta \left(\frac{1}{c}\, \mathbf{f} \cdot \mathbf{v},\, \mathbf{f} \right). \tag{1.211}$$

1.5.7 Relação Massa-Energia

Na mecânica clássica, o trabalho W realizado por uma força, por unidade de tempo, é definido por

$$W = F \cdot \mathbf{v} \tag{1.212}$$

em que $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula. A energia cinética T da partícula é definida por

$$\frac{dT}{dt} = W = F \cdot \mathbf{v} \tag{1.213}$$

que expressa que a alteração de energia cinética é igual ao trabalho W. Utilizando as relações (1.200), (1.207) e (1.213), podemos escrever a expressão para o trabalho:

$$W = \frac{m_0\,v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\,\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right). \tag{1.214}$$

Substituindo esta equação em (1.213) e integrando, encontramos a expressão para a energia cinética da partícula com velocidade v:

$$T = \frac{m_0\,c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + C \tag{1.215}$$

em que C é uma constante. Para $v = 0$ obtemos $C = -\,m_0\,c^2$, e então

$$\begin{aligned} T &= \frac{m_0\,c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - m_0\,c^2 \\ &= m\,c^2 - m_0\,c^2\,. \end{aligned} \tag{1.216}$$

Para valores de v muito pequenos quando comparados com c, obtemos, numa primeira aproximação, a expressão clássica para a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2}\,m_0\,v^2\,. \tag{1.217}$$

Por (1.216) podemos definir a **energia total** E da partícula pela relação

$$E = m_0\,c^2 + T\,, \tag{1.218}$$

ou seja, a energia total é o somatório da energia de repouso, traduzida por $m_0\,c^2$, com a energia cinética. A energia total será, assim,

$$E = m\,c^2. \tag{1.219}$$

1.5.8 Relação Energia-Momento

Voltemos às equações (1.204) e (1.219). Escrevendo esta ultima na forma

$$\frac{E}{c} = \frac{m_0\,c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\,c\,. \tag{1.220}$$

Como

$$p^\mu = m_0 \, v^\mu = m \, (c, \mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \tag{1.221}$$

podemos considerar o 4-vector p^μ como sendo constituído por três componentes de momento, p^1, p^2, p^3, expressos por

$$p^i = m_0 \, \frac{dx^i}{d\tau} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.222}$$

e um quarto componente p^0 que será a componente energética na forma

$$p^0 = \frac{m_0 \, c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m \, c = \frac{E}{c} \, . \tag{1.223}$$

Forma-se, assim, um 4-vector do momento que combina o conceito de energia e de momento, a que chamaremos **4-vector energia-momento**, de uma forma semelhante à que é feita para o espaço-tempo, ao qual é possível aplicar uma transformação de Lorentz:

$$\overline{\mathbf{p}} = L \, \mathbf{p} \tag{1.224}$$

ou, na forma de componentes

$$\left(\frac{\overline{E}}{c}, \overline{\mathbf{p}} \right) = L \, \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \cdot \tag{1.225}$$

Obtemos desta forma as seguintes transformações de Lorentz, durante um *boost* ao longo do eixo x, para o 4-vector energia-momento:

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \beta \left(E - v \, p^1 \right) \\ \overline{p}^1 &= \beta \left(p^1 - \frac{v}{c^2} \, E \right) \\ \overline{p}^2 &= p^2 \\ \overline{p}^3 &= p^3. \end{aligned} \tag{1.226}$$

Em (1.198) mostrou-se que o quadrado da 4-velocidade é invariante e igual a $-c^2$; de igual forma também se demonstra que o quadrado do 4-momento é invariante, ou seja,

$$p^\mu \, p_\mu = m_0^2 \, v^\mu \, v_\mu = - \, m_0^2 \, c^2. \tag{1.227}$$

Como

$$p^\mu \, p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) \cdot \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = - \frac{E^2}{c^2} + p^2 \tag{1.228}$$

em que $p^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2$, obtemos a relação entre a massa, momento e energia:

$$E^2 \,=\, p^2\, c^2 \,+\, m_0^2\, c^4. \tag{1.229}$$

Esta equação é análoga à equação da mecânica clássica $E \,=\, p^2/2m$, exceptuando que no caso de (1.229) E incluir a energia de repouso.

1.5.9 Tensor Energia-Momento

Considere-se o referencial inercial S e considerem-se $\rho', \rho'', ...$ as densidades de massa inercial num determinado ponto do referencial originada pelas várias partículas de um fluxo. Se $\mathbf{v}', \mathbf{v}'', ...$ (que se consideram ser 4-vectores, ou seja 4-velocidades) são as velocidades respectivas das partículas deste fluxo, a densidade total do momento linear $\mathbf{g}$ vai ser dada por

$$\mathbf{g} \,=\, \rho'\,\mathbf{v}' \,+\, \rho''\,\mathbf{v}'' \,+ ... \,=\, \rho\,\mathbf{v} \tag{1.230}$$

em que

$$\rho \,=\, \rho' \,+\, \rho'' \,+ ... \tag{1.231}$$

é a densidade total de massa inercial do fluxo. A equação (1.230) define a velocidade resultante $\mathbf{v}$ do fluxo de massa. Para um tempo dt, o fluxo de massa que atravessa um elemento de área infinitesimal dA de normal unitária $\mathbf{n}$ será

$$\rho'\,\mathbf{v}'\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt \,+\, \rho''\,\mathbf{v}''\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt \,+ ... \,=\, \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dA\,dt \tag{1.232}$$

ou seja, a taxa de variação do fluxo por unidade de área é dada por

$$\rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \,=\, \mathbf{g}\cdot\mathbf{n} \tag{1.233}$$

o que implica que $\mathbf{g}$ também é o vector de densidade de corrente para o fluxo de massa.

Seja dV o volume ocupado por um elemento infinitesimal de sólido ou fluído. Se $\mathbf{v}$ for a velocidade de fluxo do elemento e dV_0 o volume próprio, então

$$dV \,=\, \beta^{-1}\,dV_0 \tag{1.234}$$

já que todos os comprimentos paralelos ao fluxo vão ser sujeitos à contracção de Lorentz.

Se se considerar a densidade de (1.231) como a densidade própria, ρ_0, o tensor de segunda ordem que se pode construir, juntamente com a 4-velocidade do fluxo, será

$$T^{\alpha\beta} = \rho_0 \, v^\alpha \, v^\beta \tag{1.235}$$

que é o **tensor energia-momento** do fluxo de matéria.

Consideremos o espaço de Minkowski M_4. Utilizando a relação (1.197), o tempo próprio é definido por:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= \frac{1}{c^2} \, ds^2 \\ &= \frac{1}{c^2} \, \eta_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta \\ &= dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \\ &= \beta^{-2} \, dt^2. \end{aligned} \tag{1.236}$$

Então, o componente zero do tensor $T^{\alpha\beta}$ vai ser

$$T^{00} = \rho_0 \, \frac{dx^0}{d\tau} \, \frac{dx^0}{d\tau} = \rho_0 \, \frac{dt^2}{d\tau^2} = \beta^2 \, \rho_0 \, . \tag{1.237}$$

Como vimos por (1.234), um elemento de volume tri-dimensional em movimento diminui o seu volume por um factor β através de uma transformação de Lorentz. Então, e como se vê por (1.237), para um observador fixo, por oposição a um em movimento, a densidade ρ_0 aumenta através do factor β^2; isto é, se um corpo de densidade própria ρ_0 com velocidade $\mathbf{v}$ passar por um observador fixo, este observador vai medir a densidade

$$\rho = \beta^2 \, \rho_0 \, . \tag{1.238}$$

O componente T^{00} pode ser considerada como a **densidade de energia relativista** da matéria já que a única contribuição para a energia do corpo vem do seu movimento.

Utilizando a expressão $v^\alpha(1, \mathbf{v})$, considerando unidades relativistas, e (1.238), os componentes de $T^{\alpha\beta}$ podem ser escritos na forma [5]:

$$T^{\alpha\beta} = \rho \begin{pmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z \\ v_x & v_x^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y & v_x v_y & v_y^2 & v_y v_z \\ v_z & v_x v_z & v_y v_z & v_z^2 \end{pmatrix} \tag{1.239}$$

Considere-se a seguinte equação que representa a conservação de energia

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0 . \tag{1.240}$$

Fazendo $\alpha = 0$ em (1.239), esta equação toma a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0 \tag{1.241}$$

que é a equação clássica da **continuidade**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho\,\mathbf{v}) = 0 . \tag{1.242}$$

Esta equação expressa a conservação de massa com densidade ρ que se move com velocidade $\mathbf{v}$. Como em relatividade restrita a massa e a energia são equivalentes, pode-se concluir que a conservação de energia pode ser traduzida por (1.240). A esta equação chama-se **lei da conservação de energia-momento**.

Capítulo 2

A Teoria da Elasticidade

Neste capítulo o assunto será a teoria clássica da elasticidade que trata do comportamento elástico de meios contínuos. Serão considerados aqui os meios **linearmente elásticos**, que sob a acção de forças exteriores sofrem uma correspondente deformação linear. Um sólido elástico é um meio deformável que possui a propriedade de recuperar a sua configuração original quando as forças que provocam essa deformação são removidas. Um sólido elástico que sofre apenas uma deformação infinitesimal, para o qual a lei de deformação é linear, chama-se sólido linearmente elástico.

O trabalho aqui desenvolvido tem como base as obras de Fung [28, 29], Sokolnikoff [30, 31], Green & Zerna [32] e Chandrasekharaiah & Debnath [33].

2.1 Deformação de Um Meio Contínuo

Considere-se um meio contínuo que num dado instante de tempo $t = t_0$, ocupa uma determinada região do espaço, B_0. Vamos-nos referir a t_0 como o instante inicial e a B_0 como a região inicial. Com o decorrer do tempo os pontos de B_0 sofrem um deslocamento e em algum instante de tempo passam a ocupar a região B (ver figura 2.1). No decurso deste deslocamento, a região inicial B_0 é, geralmente, deformada e supõem-se que a deformação de B_0 em B é totalmente determinada quando o movimento dos pontos de B_0 é conhecido.

Para descrever o movimento desses pontos, considere-se ainda um sistema de coordenadas X que se desloca com o meio de tal forma que as coordenadas (x^1, x^2, x^3) de uma qualquer ponto inicialmente em B_0 não se alteram com t.As coordenadas do ponto (x^1, x^2, x^3), em relação ao sistema de referência, fixo, Y vão ser dadas pelas

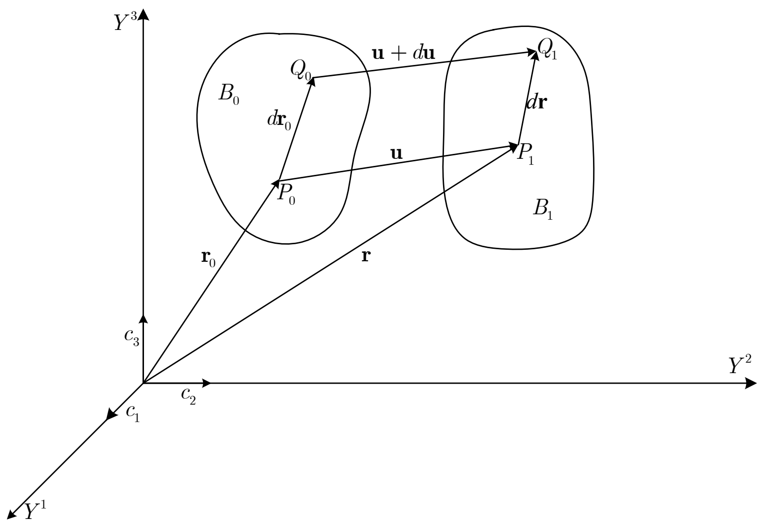


Figura 2.1: Deformação da zona inicial B_0 em B.

relações

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t) \tag{2.1}$$

que dependem exclusivamente da natureza da deformação. Assume-se que as funções $y^i\,(x^i, t)$ são contínuas e que para um dado valor de t possuem inversa

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)\,. \tag{2.2}$$

O sistema de coordenadas fixo Y pode ser considerado, sem perda de generalidade, como sendo cartesiano ortogonal.

Um ponto material P_0 em B_0 em relação a um sistema cartesiano ortogonal é determinado pelo vector de posição (ver figura 2.1)

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{c}_i\, y_0^i \equiv \mathbf{c}_i\, y^i(x^1, x^2, x^3, t_0) \tag{2.3}$$

em que $\mathbf{c}_i$ são os vectores base de Y. Da mesma forma em B, o correspondente ponto P é determinado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}_i\, y^i \equiv \mathbf{c}_i\, y^i(x^1, x^2, x^3, t)\,. \tag{2.4}$$

Considere-se $\mathbf{b}_j$ como os vectores base do sistema de referência móvel X; estes vectores são dados por

$$\mathbf{b}_j = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^j} = \mathbf{c}_i\, \frac{\partial y^i\,(x, t)}{\partial x^j} \tag{2.5}$$

e dependem das coordenadas x^i de P e de t. Quando $P(x^1, x^2, x^3)$ se encontra em B_0 representamos os vectores $\mathbf{b}_j$ por $\mathbf{a}_j$ da forma

$$\mathbf{a}_j = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial x^j} = \mathbf{c}_i \frac{\partial y^i(x, t_0)}{\partial x^j}. \tag{2.6}$$

Seja P_0' um ponto na vizinhança de $P_0(x^1, x^2, x^3)$. O vector $\overrightarrow{P_0 P_0'} = d\mathbf{r}_0$ pode ser representado na forma

$$d\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}_i \, dx^i \tag{2.7}$$

e o quadrado do elemento de arco ds_0 em B_0 é

$$(ds_0)^2 = d\mathbf{r}_0 \cdot d\mathbf{r}_0 = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \, dx^i \, dx^j \tag{2.8}$$

ou

$$(ds_0)^2 = h_{ij} \, dx^i \, dx^j \tag{2.9}$$

em que $h_{ij} = a_i \cdot a_j$ são os coeficientes da métrica em B_0. De uma forma semelhante, o quadrado do elemento de arco ds determinado pelo vector correspondente

$$\overrightarrow{PP'} = d\mathbf{r} = \mathbf{b}_i \, dx^i$$

em B é

$$ds^2 = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j \, dx^i \, dx^j \tag{2.10}$$

ou

$$ds^2 = g_{ij} \, dx^i \, dx^j \tag{2.11}$$

em que $g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j$ são os coeficientes da métrica em B. De uma forma geral os comprimentos e orientações dos vectores $d\mathbf{r}_0$ e $d\mathbf{r}$ serão diferentes, e diremos que o meio que ocupa a região B está deformado sempre que $d\mathbf{r}_0 \neq d\mathbf{r}$. Podemos, então, tomar como medida para a deformação a diferença

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (g_{ij} - h_{ij}) \, dx^i \, dx^j \tag{2.12}$$

e se definirmos

$$g_{ij} - h_{ij} = 2 \, \epsilon_{ij} \tag{2.13}$$

podemos escrever (2.12) na forma

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = 2 \, \epsilon_{ij} \, dx^i \, dx^j \, . \tag{2.14}$$

Como (2.14) é um invariante e $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$, podemos concluir que o conjunto de funções $\epsilon_{ij}(x,t)$ são as componentes de um tensor E_0 representado por um conjunto de transformações admissíveis de coordenadas X, em relação a $\mathbf{a}_i$, na região B_0. O mesmo conjunto de funções $\epsilon_{ij}(x,t)$ também determina um tensor E para um conjunto de transformações determinadas pela base $\mathbf{b}_i$ da região B. Podemos então escrever que os tensores E_0 e E são especificados pelas formas

$$E_0 = \epsilon_{ij}\,\mathbf{a}^i\,\mathbf{a}^j \qquad E = \epsilon_{ij}\,\mathbf{b}^i\,\mathbf{b}^j\,. \tag{2.15}$$

Os tensores E_0 e E são por vezes denominados, respectivamente, por tensores da deformação de Lagrange e de Euler.

2.1.1 Interpretação Geométrica dos Tensores E_0 e E

Considere-se a equação (2.13), como $g_{ij} = \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j$ e $h_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$, podemos escrever (2.13) na forma

$$\begin{aligned} 2\,\epsilon_{ij} &= \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j - \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \\ &= |\mathbf{b}_i| \cdot |\mathbf{b}_j|\,\cos\theta_{ij} - |\mathbf{a}_i| \cdot |\mathbf{a}_j|\,\cos\theta^0_{ij} \end{aligned} \tag{2.16}$$

em que $|\mathbf{b}_i|$ é a norma euclidiana de $\mathbf{b}_i$, θ_{ij} representa o ângulo entre os vectores base $\mathbf{b}_i$ e $\mathbf{b}_j$, e θ^0_{ij} o ângulo entre $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$. Se representarmos por e a variação de comprimento por unidade de comprimento do vector $d\mathbf{r}_0$ (ver figura 2.1), tal que

$$e = \frac{|d\mathbf{r}| - |d\mathbf{r}_0|}{|d\mathbf{r}_0|} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \tag{2.17}$$

vamos ter

$$|d\mathbf{r}| = (1 + e)\,|d\mathbf{r}_0|\,. \tag{2.18}$$

Chama-se a e o alongamento de $d\mathbf{r}_0$ e (2.18) permite-nos relacionar os alongamentos e_i com os vectores de base $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{b}_i$ da seguinte forma:

$$|\mathbf{b}_i| = (1 + e_i)\,|\mathbf{a}_i|\,. \tag{2.19}$$

Contudo, como $|\mathbf{b}_i| = \sqrt{g_{ii}}$ e $|\mathbf{a}_i| = \sqrt{h_{ii}}$ tal que

$$\sqrt{g_{ii}} = (1 + e_i)\,\sqrt{h_{ii}} \qquad \text{(sem soma em } i\text{)} \tag{2.20}$$

podemos reescrever a equação (2.16), através de (2.19) e (2.20), na forma

$$\frac{2\,\epsilon_{ij}}{\sqrt{h_{ii}}\,\sqrt{h_{jj}}} \;=\; (1\,+\,e_i)\,(1\,+\,e_j)\,\cos\theta_{ij}\;-\;\cos\theta^0_{ij}\,. \tag{2.21}$$

Como $\theta^0_{ij} \;=\; \theta_{ij} \;=\; 0$ para $i = j$, a equação (2.21) dá origem a

$$\frac{2\,\epsilon_{ii}}{h_{ii}} \;=\; (1\,+\,e_i)^2 - 1 \tag{2.22}$$

ou, então, a

$$e_i \;=\; \sqrt{1\,+\,\frac{2\,\epsilon_{ii}}{h_{ii}}}\;-\;1\,. \tag{2.23}$$

Quando as coordenadas do estado inicial são rectangulares cartesianas, $h_{ii} = 1$, e vemos por (2.23) que, para $2\,\epsilon_{ii}/h_{ii} \ll 1$, $e_i \doteq \epsilon_{ii}$. Desta forma, as funções $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ estão relacionadas com os alongamentos dos elementos de arco direccionados com os vectores base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

O significado de ϵ_{ij} para $i \neq j$ advém de (2.21) em que se verifica que, quando $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$ são vectores unitários ortogonais, $\theta^0_{ij} = \pi/2$. Se fizermos $\theta_{ij} = \pi/2\,-\,\alpha_{ij}$, em que α_{ij} representa a variação no ângulo recto entre o par de elementos de arco direccionados ao longo de $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$ a equação (2.21) origina

$$2\,\epsilon_{ij} \;=\; (1\,+\,e_i)\,(1\,+\,e_j)\,\sin\alpha_{ij} \tag{2.24}$$

ou, então

$$\sin\alpha_{ij} \;=\; \frac{2\,\epsilon_{ij}}{\sqrt{1\,+\,2\,\epsilon_{ii}}\,\sqrt{1\,+\,2\,\epsilon_{jj}}}\,. \tag{2.25}$$

Se $2\,\epsilon_{ij} \ll 1$ e o ângulo α_{ij} é pequeno, temos $\alpha_{ij} \doteq 2\,\epsilon_{ij}$. Então, as funções ϵ_{ij} para $i \neq j$ fornecem uma medida para a diminuição do ângulo recto inicial entre os elementos de arco paralelos aos vectores $\mathbf{a}_i$ e $\mathbf{a}_j$. As componentes ϵ_{ij} para $i \neq j$ chamam-se **componentes de corte do tensor das deformações** E_0, e as componentes ϵ_{ij} para $i = j$ são as **componentes normais** de E_0.

Interpretação análoga pode ser obtida para as funções ϵ_{ij} quando estas são vistas como componentes do tensor $E \;=\; \epsilon_{ij}\,\mathbf{b}^i\,\mathbf{b}^j$. Se definirmos o alongamento e como a alteração de comprimento por unidade de comprimento final $|d\mathbf{r}|$ do elemento de arco, tal que

$$e \;\;=\;\; \frac{ds\,-\,ds_0}{ds_0}\,,$$

cálculos semelhantes aos realizados para obter (2.23) e (2.25) dão agora origem a

$$e_i = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\,\epsilon_{ii}}{g_{ii}}} \tag{2.26}$$

e

$$\sin\beta_{ij} = \frac{2\,\epsilon_{ij}}{\sqrt{1-2\,\epsilon_{ii}}\,\sqrt{1-2\,\epsilon_{jj}}} \qquad \text{(sem somas)} \tag{2.27}$$

em que $\beta_{ij} = \theta^0_{ij} - \pi/2$.

Conclui-se, como antes, que as componentes ϵ_{ii} em (2.27) estão associadas aos alongamentos dos elementos de arco, inicialmente paralelos aos vectores de base $\mathbf{b}_i$, enquanto que as componentes ϵ_{ij} para $i \neq j$ medem as correspondentes deformações de corte.

2.1.2 Deslocamentos em Meios Contínuos

Definimos vector deslocamento $\mathbf{u}$ de P_0 (ver figura 2.1) como

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0} \tag{2.28}$$

e representamos as componentes de $\mathbf{u}$ em relação à base $\mathbf{a}_i$ por u^i e as componentes em relação à base $\mathbf{b}_i$ por w^i. Então temos

$$\mathbf{u} = u^i\,\mathbf{a}_i \qquad \mathbf{u} = w^i\,\mathbf{b}_i\,. \tag{2.29}$$

De (2.28) temos

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^i} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i} - \frac{\partial\mathbf{r}_0}{\partial x^i} = \mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i \tag{2.30}$$

tal que

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i + \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^i}\,. \tag{2.31}$$

Calculando $g_{ij} = \mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_j$, utilizando (2.31), e subtraindo $h_{ij} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j$ ao resultado, obtemos

$$\begin{aligned} g_{ij} - h_{ij} &= \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{a}_i\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^j} + \mathbf{a}_j\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^i} \\ &= 2\,\epsilon_{ij}\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

As equações (2.32) podem ser vistas como um conjunto de equações diferenciais para as componentes de $\mathbf{u}$ quando as funções ϵ_{ij} são especificadas. Este conjunto de equações assume uma forma simples quando o vector $\mathbf{u}$ é expresso em termos das suas componentes covariantes u_j ou w_j:

$$\mathbf{u} = u_j\,\mathbf{a}^j \qquad \mathbf{u} = w_j\,\mathbf{b}^j \tag{2.33}$$

sendo $\mathbf{a}^j$ e $\mathbf{b}^j$ as bases reciprocas dos vectores base.

Derivando (2.33) em relação a x^i vamos obter

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = u_{j,i}\,\mathbf{a}^j \qquad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = w_{j,i}\,\mathbf{b}^j \tag{2.34}$$

em que

$$u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x^i} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}_h u_k \tag{2.35}$$

é a derivada covariante de u_j em relação à métrica h_{ij} do estado inicial e

$$w_{j,i} = \frac{\partial w_j}{\partial x^i} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}_g w_k \tag{2.36}$$

é a derivada covariante de w_j em relação à métrica g_{ij} do estado final. Os índices h e g nos símbolos de Christoffel indicam que estes símbolos em (2.35) são construídos a partir do tensor h_{ij}, enquanto que em (2.36) é a partir do tensor g_{ij}. Se considerarmos o tensor g_{ij} podemos construir o correspondente símbolo de Christoffel da forma

$$[ji,k]_g \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

definindo assim o conjunto de funções

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ji \end{matrix} \right\}_g = g^{k\alpha}\,[ji,\alpha]$$

De uma forma equivalente se chega ao símbolo de Christoffel construído a partir de h_{ij}.

Se inserirmos a primeira das fórmulas de (2.34) em (2.32), obtemos

$$2\,\epsilon_{ij} = u^k_{,i}\,u_{k,j} + u_{i,j} + u_{j,i} \tag{2.37}$$

ou seja

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} + u^k_{,i}\,u_{k,j}\right). \tag{2.38}$$

Por outro lado, quando u é representado na forma $\mathbf{u} = w_j\mathbf{b}^j$, e lembrando (2.31), podemos escrever

$$h_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \left(\mathbf{b}_i - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} \right) \cdot \left(\mathbf{b}_j - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^j} \right) \cdot \tag{2.39}$$

A substituição da segunda fórmula de (2.34) na expressão acima dá origem a

$$2\,\epsilon_{ij} = w_{i,j} + w_{j,i} - w^k_{,i}\, w_{k,j} \tag{2.40}$$

que pode ser escrita como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(w_{i,j} + w_{j,i} - w^k_{,i}\, w_{k,j} \right) . \tag{2.41}$$

A fórmula (2.38) permitem-nos calcular as componentes da deformação ϵ_{ij} através das componentes u_i do vector $\mathbf{u}$ em relação à base $\mathbf{a}_i$ do estado inicial. A fórmula (2.41), por outro lado, envolve as componentes de $\mathbf{u}$ relativas à base $\mathbf{b}_i$ do estado final. Temos também que, quando as funções ϵ_{ij} são conhecidas, as equações (2.38) e (2.41) são equações diferenciais que permitem calcular as componentes do vector deslocamento $\mathbf{u}$.

Quando o sistema de referencia X é ortogonal cartesiano, colocamos $y^i = x^i$ e obtemos de (2.38) e (2.41)

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_0^j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_0^i} + \frac{\partial u_k}{\partial y_0^i} \frac{\partial u_k}{\partial y_0^j} \right) \tag{2.42}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y^j} + \frac{\partial w_j}{\partial y^i} - \frac{\partial w_k}{\partial y^i} \frac{\partial w_k}{\partial y^j} \right) . \tag{2.43}$$

2.1.3 Deslocamentos Infinitesimais

Em certos problemas, as derivadas das componentes do vector deslocamento podem ser suficientemente pequenas que justifique desprezar-se o produto dessas derivadas em comparação com os termos de primeira ordem dessas mesmas derivadas. Nestas situações as equações (2.42) e (2.43) tornam-se **lineares** e a teoria das deformações baseada no estudo de equações diferenciais lineares chama-se **teoria linear**. Nesta teoria o vector $\mathbf{u}$ é tão pequeno que se pode considerar a igualdade entre as coordenadas y_0^i e y^i do estado final e inicial. A teoria resultante é a **teoria infinitesimal da**

deformação. Nesta teoria as equações (2.42) e (2.43) combinam-se e dão origem a

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\,(\,u_{i,j} + u_{j,i}\,) \tag{2.44}$$

em que e_{ij} são as componentes do tensor das deformações ϵ_{ij} a que se chama o **tensor das deformações de Cauchy**.

Considere-se $;i = \partial/\partial x_i^0$ como a derivada no instante $t = 0$ (instante inicial) e $,i = \partial/\partial x_i$ a derivada no instante t. Como a variação do vector deslocamento $\mathbf{u}$ medido no instante t_0 é aproximadamente igual à variação sofrida pelo vector deslocamento no instante t, temos que $u_{i,j} = u_{i;j}$, e assim (2.44) pode ser escrito na forma

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\,(\,u_{i,j} + u_{j,i}\,) = \frac{1}{2}\,(\,u_{i;j} + u_{j;i}\,) \tag{2.45}$$

tratando-se portanto de um tensor simétrico que na forma matricial se apresenta como

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

em que $e_{12} = e_{21}$, $e_{13} = e_{31}$ e $e_{32} = e_{23}$ sendo e_{11}, e_{22}, e_{33} as tensões normais.

2.1.4 Forma Quadrática da Deformação. Deformações Principais

A formula (2.12) para as componentes ϵ_{ij} do tensor das deformações $E = \epsilon_{ij}\mathbf{b}^i\mathbf{b}^j$ pode ser escrita na forma

$$\frac{(ds)^2 - (ds_o)^2}{2\,(ds)^2} = \epsilon_{ij}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^j}{ds} \tag{2.47}$$

em que $dx^i/ds = \lambda^i$ é o vector unitário que determina a direcção do vector $d\mathbf{r}$ no estado inicial. Pretendemos agora determinar as direcções λ^i para as quais (2.47) toma os valores mais altos. Considere-se, então,

$$Q(\lambda) = \epsilon_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j \tag{2.48}$$

e maximizemos a forma quadrática $Q(\lambda)$ sujeita à restrição

$$\phi(\lambda) = g_{ij}\,\lambda^i\,\lambda^j - 1 = 0 \tag{2.49}$$

que requer que λ^i seja unitário.

Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange em (2.48) obtemos o sistema de equações

$$\frac{\partial Q}{\partial \lambda^i} - \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \lambda^i} = 0 \tag{2.50}$$

ou

$$(\, \epsilon_{ij} - \epsilon \, g_{ij}(x) \,) \, \lambda^i = 0 \tag{2.51}$$

em que ϵ é o multiplicador de Lagrange.

Este sistema tem uma solução não-trivial para λ^i sse

$$|\epsilon_{ij}(x) - \epsilon \, g_{ij}(x) \,| = 0 \tag{2.52}$$

em cada ponto P da região B. De forma a reduzir o sistema (2.51) à forma

$$|A - \lambda \, I| = 0$$

multiplicamos (2.51) por g^{ik} (soma em i), e obtemos

$$\left(\epsilon^k_j - \epsilon \, \delta^k_j \right) \lambda^j = 0 \tag{2.53}$$

em que

$$\epsilon^k_j = g^{ik} \, \epsilon_{ij} \, . \tag{2.54}$$

O sistema (2.53) tem três soluções não-triviais, $\lambda^i_{(1)}, \lambda^i_{(2)}, \lambda^i_{(3)}$ $(i = 1, 2, 3)$, que correspondem às raízes ϵ_i da equação cúbica

$$\left| \epsilon^i_j - \epsilon \, \delta^i_j \right| \equiv -\epsilon^3 + \vartheta_1 \, \epsilon^2 - \vartheta_2 \, \epsilon + \vartheta_3 = 0 \, . \tag{2.55}$$

Os coeficientes ϑ_i são os invariantes

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \\ \vartheta_2 &= \epsilon_2 \, \epsilon_3 + \epsilon_3 \, \epsilon_1 + \epsilon_1 \, \epsilon_2 \\ \vartheta_3 &= \epsilon_1 \, \epsilon_2 \, \epsilon_3 \end{aligned}$$

As raízes ϵ_i são reais e as direcções $\lambda^i_{(1)}, \lambda^i_{(2)}, \lambda^i_{(3)}$ a elas associadas são ortogonais.

A forma quadrática (2.48) pode ser reduzida à forma canónica

$$Q(y) = \epsilon_1 \, (y^1)^2 + \epsilon_2 \, (y^2)^2 + \epsilon_3 \, (y^3)^2 \tag{2.56}$$

desde que as **direcções principais** $\lambda^i_{(1)}, \lambda^i_{(2)}, \lambda^i_{(3)}$ sejam escolhidas para vectores base de um sistema cartesiano ortogonal Y em B.

Podemos interpretar estes resultados geometricamente através da introdução de uma *forma quadrática para a deformação* da forma

$$\epsilon_{ij}(x)\,\lambda^i\,\lambda^j \;=\; \text{constante} \tag{2.57}$$

que, em cada ponto $P(x)$, representa uma superfície quadrática com λ^i a servir de co--ordenadas. As direcções principais $\lambda^i_{(j)}$ coincidem com os eixos da forma quadrática (2.57), e de (2.56) concluímos que o tensor das deformações ϵ_{ij}, em relação ao referencial Y, toma a forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

Pelo significado geométrico das componentes $\epsilon_{ij},\ i \neq j$ (ver equação 2.43), deduz-se que que *as direcções principais são as direcções ortogonais no estado inicial que se mantêm ortogonais após deformação.*

As deformações $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ são as **deformações principais**.

2.2 O Tensor das Tensões

Na análise do estado de tensão num corpo deformado utilizamos as variáveis x^i do estado final. Pretende-se demonstrar que o estado de tensão num ponto $P(x)$ de um corpo, em equilíbrio sobre a acção de determinadas forças, é caracterizado por um tensor simétrico, o tensor das tensões.

Considere-se que o corpo B está ligado ao sistema de referência X, e considere--se um elemento de área superficial $d\sigma$ num ponto P' do corpo. Considere-se também um elemento de volume dB formado pelas coordenadas superficiais num ponto P e pelo elemento superficial $d\sigma$ (ver figura 2.2).

Se $\mathbf{n}$ for a normal unitária a $d\sigma$ os elementos de área $d\sigma_i$ são dados pelas fórmulas

$$d\sigma_i \;=\; n_i\, d\sigma \tag{2.59}$$

em que n_i são as componentes covariantes de $\mathbf{n}$.

Representa-se o **vector das tensões** (força por unidade de área) que actua em $d\sigma$ por $\overset{n}{\mathbf{T}}$ onde o símbolo n representa a dependência do vector das tensões da orientação do elemento $d\sigma$. Os vectores da tensão que actuam na superfície dos elementos $d\sigma_i$

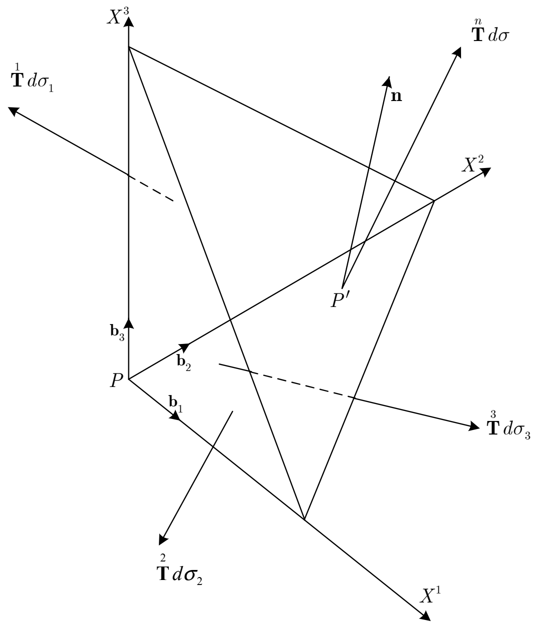


Figura 2.2: Elemento de volume dB.

representam-se por $\overset{i}{\mathbf{T}}$ e consideramos como direcções positivas as direcções das normais exteriores ao elemento de volume. Podemos então escrever

$$\overset{i}{\mathbf{T}} = -\tau^{ij}\,\mathbf{b}_j \qquad (2.60)$$

onde $\mathbf{b}_j$ são os vectores base e τ^{ij} as componentes contravariantes de $\overset{i}{\mathbf{T}}$.

Se agora considerarmos $\mathbf{F} = F^i\mathbf{b}_i$ como a força por unidade de volume que actua na massa contida em dB então, a primeira condição de equilíbrio vai exigir que

$$\mathbf{F}\,dB + \overset{n}{\mathbf{T}}\;d\sigma + \overset{i}{\mathbf{T}}\;d\sigma_i \;=\; 0\,. \qquad (2.61)$$

Pelas definições (2.59) e (2.60) podemos observar que $dB = l\,d\sigma$, em que l é um factor que depende das dimensões lineares do elemento de volume; neste caso a condição de equilíbrio (2.61) toma a forma

$$F^i\,\mathbf{b}_i\,l\,d\sigma \;+\; T^j\,\mathbf{b}_j\,d\sigma \;-\; \tau^{ij}\,n_i\,d\sigma\,\mathbf{b}_j \;=\; 0 \qquad (2.62)$$

em que $T^j\,\mathbf{b}_j \equiv \overset{n}{\mathbf{T}}$.

Se o ponto P' for deslocado para P de forma a que a direcção $\mathbf{n}$ seja mantida,

$l \to 0$, desaparecendo o primeiro termo da equação (2.62). Isto leva-nos ao resultado em que as componentes T^j da tensão $\overset{n}{\mathbf{T}}$, que actuam na superfície do elemento de volume com a orientação $\mathbf{n}$ sejam dadas por

$$T^j \,=\, \tau^{ij}\,\mathbf{n}_i\,. \tag{2.63}$$

Como T^j é um vector e n_i um vector covariante arbitrário, concluímos que τ^{ij} são as componentes contravariantes de um tensor de segunda ordem a que se chama o **tensor das tensões** que é um tensor simétrico. A equação (2.63) pode também ser escrita na forma

$$T_j \,=\, \tau_{ij}\,\mathbf{n}^i\,. \tag{2.64}$$

A componente N do vector $\overset{n}{\mathbf{T}}$ na direcção da normal $\mathbf{n}$ é $\overset{n}{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = T_j n^j$, assim e usando (2.64) obtemos

$$N \,=\, \tau_{ij}\,n^i\,n^j\,. \tag{2.65}$$

Considere-se a equação característica

$$\left|\tau^i_j \,-\, \tau\,\delta^i_j\right| \,=\, -\,\tau^3 \,+\, \phi_1\,\tau^2 \,-\, \phi_2\,\tau \,+\, \phi_3 \,=\, 0 \tag{2.66}$$

em que

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \\ \phi_2 &= \tau_2\,\tau_3 + \tau_3\,\tau_1 + \tau_1\,\tau_2 \\ \phi_3 &= \tau_1\,\tau_2\,\tau_3, \end{aligned}$$

ϕ_i são as raízes da forma cúbica (2.66). As direcções ortogonais n^i que correspondem às **tensões principais** τ_i são determinadas pelo conjunto de equações lineares

$$\left(\tau^k_j \,-\, \tau\,\delta^k_j\right)\,n^i \,=\, 0 \tag{2.67}$$

e chamam-se **direcções principais de tensão**. Se os eixos do sistema cartesiano ortogonal Y coincidirem com as direcções principais em P, a superfície quadrática

$$\tau_{ij}\,n^i\,n^j \,=\, \text{constante} \tag{2.68}$$

assume a forma

$$\tau_1(y^1)^2 \,+\, \tau_2(y^2)^2 \,+\, \tau_3(y^3)^2 \,=\, \text{constante}\,. \tag{2.69}$$

A superfície quadrática (2.68) foi introduzida por Cauchy e chama-se **forma quadrática da tensão**.

De (2.69) verifica-se que as componentes τ_{ij}, para $i \neq j$, desaparecem quando se escolhe um referencial adequado em P. As componentes $\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}$ são as **componentes normais da tensão** e as restantes as de **corte**.

2.3 A Lei de Hooke

Como foi visto nas secções anteriores, quando actuado por forças um corpo elástico cede e deforma-se. Se a força for suficientemente pequena, a deformação que é produzida, que corresponde à alteração de posição de vários pontos no corpo, é proporcional à força; neste caso diz-se que o comportamento é elástico.

Considere-se um corpo rectangular de comprimento l, largura w e de altura h representado na figura 2.3. Se uma força $\mathbf{F}$ actuar nas duas extremidades do corpo,

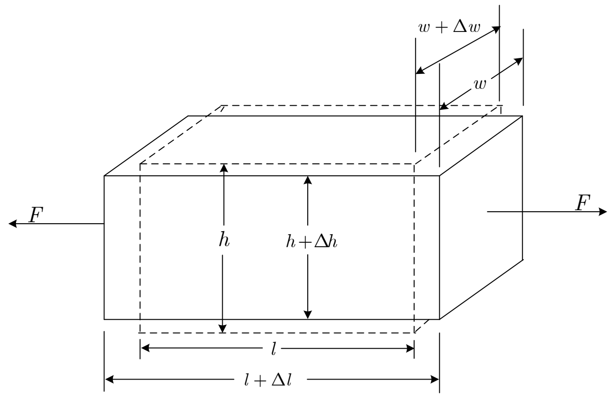


Figura 2.3: Alongamento de um barra sobre a acção de uma força uniforme.

então o comprimento l vai aumentar em Δl. Vamos sempre supor que a alteração no comprimento é sempre em uma pequena fracção do comprimento original. Verifica--se experimentalmente, para a maioria dos materiais e para extensões relativamente pequenas, que **a força é proporcional à extensão**

$$\mathbf{F} \propto \Delta l. \tag{2.70}$$

Esta relação é conhecida por **Lei de Hooke**.

O incremento Δl vai depender do valor inicial l. De forma a obter um valor mais característico do material e de forma a diminuir a influência da geometria do corpo, opta-se pela utilização do razão $\Delta l/l$ da extensão em relação ao comprimento original. Este valor é proporcional à força mas independente de l:

$$\mathbf{F} \propto \frac{\Delta l}{l} \cdot \tag{2.71}$$

Como a força também vai depender da área A do corpo e para obter uma lei na qual o coeficiente de proporcionalidade é independente das dimensões do corpo, a lei de Hooke toma a forma

$$\mathbf{F} = Y\,A\,\frac{\Delta l}{l} \tag{2.72}$$

em que Y é uma constante que depende apenas da natureza do material e que se chama **módulo de Young**. Esta propriedade do material é obtida através da relação

$$Y = \frac{\text{tensão}}{\text{deformação}} \cdot$$

A força por unidade de área chama-se **tensão** e o alongamento por unidade de comprimento chama-se **deformação**. A equação (2.72) pode ser reescrita na forma

$$\frac{\mathbf{F}}{A} = Y\,\frac{\Delta l}{l} \cdot \tag{2.73}$$

Por outro lado, esta equação pode tomar a forma

$$\mathbf{T} = Y\,e \tag{2.74}$$

em que $\mathbf{T} = F/A$ é a tensão nominal.

Juntamente ao aumento de comprimento, há uma correspondente contracção em largura Δw. Esta contracção em largura é proporcional a w e também a $\Delta l/l$, sendo igual tanto para w como para h e pode ser escrita na forma

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\,\sigma\,\frac{\Delta l}{l} \tag{2.75}$$

em que a constante σ é o **coeficiente de Poisson**. As duas constante Y e σ especificam por completo as propriedades elásticas de um material homogéneo e isotrópico.

2.3.1 A Lei Generalizada de Hooke

Como foi visto nas secções anteriores, o estado de tensão de um corpo pode ser determinado pelo tensor das tensões τ_{ij} e o estado de deformação pelo tensor das deformações e_{ij}. Vimos também que, a deformação sofrida por um sólido é uma função da tensão a que este está sujeito e das propriedades físicas do sólido.

Considere-se a equação tensorial

$$\tau_{ij} = c_{ijkl}\, e^{kl} \tag{2.76}$$

que representa um sistema de nove equações lineares em que τ_{ij} são as componentes do tensor das tensões e e^{kl} as do tensor das deformações. c_{ijkl} representa 81 componentes escalares que dependem das propriedades físicas do sólido e são independentes das componentes e_{ij} da deformação. Considera-se que o sistema (2.76) é válido para todos os pontos do contínuo e em qualquer instante do tempo e que a solução é da forma

$$e_{ij} = f\left(\tau_{kl}\right) .$$

Isto significa que $\tau_{ij} = 0$ sempre que $e_{ij} = 0$ sendo o inverso também válido, ou seja, τ_{ij} e e_{ij} são funções lineares e homogéneas uma da outra. Fisicamente podemos concluir que um material para o qual (2.76) é válida, deforma-se na presença de tensão e recupera a sua configuração após a remoção da tensão. Como e_{ij} são as componentes do tensor das deformações de Cauchy, esta deformação é infinitesimal. Um sólido elástico para o qual (2.76) é válida chama-se um **sólido linearmente elástico**. A lei (2.76) é uma generalização de lei de Hooke a que se chama **lei generalizada de Hooke**.

Como τ_{ij} e e_{ij} são componentes de tensores de segunda ordem, pela regra do quociente, c_{ijkl} são componentes de um tensor de quarta ordem. Este tensor caracteriza as propriedades mecânicas do material e chama-se **tensor da elasticidade** e as 81 componentes deste tensor são os **módulos de elasticidade**. Devido à simetria de τ_{ij} e e_{ij} apenas 36 destas componentes são independentes tendo as dimensões da tensão (força/comprimento^2) já que e_{ij} é adimensional. Se c_{ijkl} forem independentes de x_i e t, diz-se que o material é **elasticamente homogéneo**. Isto significa que, para um sólido homogéneo os módulos de elasticidade são constantes, o que faz com que as propriedades mecânicas sejam invariantes no tempo e de ponto para ponto no sólido.

O sistema (2.76) representa a lei generalizada de Hooke no sistema x_i. Se considerarmos o sistema $\overline{x}_i$, esta lei passa a ser dada por

$$\overline{\tau}_{ij} = \overline{c}_{ijkl}\, \overline{e}^{kl} \tag{2.77}$$

em que

$$\overline{\tau}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\, \tau_{kl} \tag{2.78}$$

e

$$\overline{e}_{ij} \,=\, \frac{\partial x^k}{\partial \overline{x}^i}\,\frac{\partial x^l}{\partial \overline{x}^j}\,e_{kl}\,. \tag{2.79}$$

As relações (2.78) e (2.79) fazem com que as componentes do tensor das tensões e das deformações no sistema $\overline{x}_i$ sejam, em geral, diferentes das componentes dos mesmos no sistema x_i; o mesmo acontece com c_{ijkl} já que

$$\overline{c}_{ijkl} \,=\, \frac{\partial x^p}{\partial \overline{x}^i}\,\frac{\partial x^q}{\partial \overline{x}^j}\,\frac{\partial x^m}{\partial \overline{x}^k}\,\frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^l}\,c_{pqmn}\,. \tag{2.80}$$

Contudo, se $\overline{c}_{ijkl} \,=\, c_{ijkl}$, dizemos que o material elástico é **isotrópico**, ou seja, o tensor da elasticidade é isotrópico, o que significa que as propriedades mecânicas do material são independentes da orientação dos eixos coordenados. Por tensor isotrópico entende-se um tensor cujas componentes não são alteradas durante uma transformação de coordenadas. Como δ_{ij} são as componentes de um tensor isotrópico, verifica-se que tensores de quarta ordem de componentes $\delta_{ij}\delta_{km}$, $\delta_{ik}\delta_{jm}$ e $\delta_{im}\delta_{jk}$ também são isotrópicos. Desta forma um tensor isotrópico de quarta ordem (de componentes a_{ijkl}) pode ser escrito na forma

$$a_{ijkl} \,=\, \alpha\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} \,+\, \beta\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \,+\, \gamma\,\delta_{il}\,\delta_{jk} \tag{2.81}$$

em que α, β, γ são escalares reais. Então, para um sólido elástico isotrópico, c_{ijkl} é da forma

$$c_{ijkl} \,=\, \alpha\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} \,+\, \beta\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \,+\, \gamma\,\delta_{il}\,\delta_{jk}\,. \tag{2.82}$$

Substituindo (2.82) em (2.76) vamos obter

$$\tau_{ij} \,=\, (\,\alpha\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} \,+\, \beta\,\delta_{ik}\,\delta_{jl} \,+\, \gamma\,\delta_{il}\,\delta_{jk})\;e^{kl}\,. \tag{2.83}$$

Tendo em atenção que $e_{ij} = e_{ji}$ obtemos

$$\begin{aligned} \tau_{ij} \;&=\; \alpha\,\delta_{ij}\,e_{kk} \,+\, \beta\,e_{ij} \,+\, \gamma\,e_{ij} \\ &=\; \alpha\,\delta_{ij}\,e_{kk} \,+\, (\beta \,+\, \gamma)\;e_{ij}\,. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Considerando $\alpha = \lambda$ e $\beta + \gamma = 2\mu$ temos

$$\tau_{ij} \,=\, \lambda\,\delta_{ij}\,e_{kk} \,+\, 2\,\mu\,e_{ij}\,. \tag{2.85}$$

A relação (2.85) representa a lei generalizada de Hooke para um sólido elástico, linear e isotrópico que envolve apenas módulos de elasticidade independentes da orientação dos eixos coordenados, λ e μ. Se o sólido for também homogéneo, então λ e μ são constantes e chamam-se **módulos de Lamé**.

De (2.85) deduz-se que

$$\tau_{kk} = (3\,\lambda + 2\,\mu)\, e_{kk} \tag{2.86}$$

o que implica[1]

$$e_{kk} = \frac{1}{3\,\lambda + 2\,\mu}\,\tau_{kk}\,. \tag{2.87}$$

Resolvendo, então, a equação (2.85) em ordem a e_{ij} vamos obter

$$e_{ij} = \frac{1}{2\,\mu}\left[\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\,\lambda + 2\,\mu}\,\delta_{ij}\,\tau_{kk}\right] \tag{2.88}$$

desde que $\mu \neq 0$ e $3\lambda + 2\mu \neq 0$ esta equação é equivalente a (2.85).

Considere-se $\mathbf{T}$ como o tensor das tensões, $\mathbf{E}$ o tensor das deformações, $tr\,\mathbf{E}$ o traço da matriz das deformações e $tr\,\mathbf{T}$ o traço da matriz das tensões ambos definidos da seguinte forma:

$$tr\,\mathbf{E} = e_{11} + e_{22} + e_{33} \tag{2.89}$$

$$tr\,\mathbf{T} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} \tag{2.90}$$

Em linguagem matricial compacta as relações (2.85) e (2.88) podem ser escritas, respectivamente, da seguinte forma

$$\mathbf{T} = \lambda\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} + 2\,\mu\,\mathbf{E} \tag{2.91}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\mu}\left[\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\,\lambda + 2\,\mu}\,(tr\,\mathbf{T})\,\mathbf{I}\right] \tag{2.92}$$

ou então na forma

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

[1] Notar que $\delta_{kk} = \delta_k^k = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3$.

para (2.91), e

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{12} \\ e_{23} \\ e_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & 1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & -\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & 1-\frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} \tag{2.94}$$

para (2.92).

A lei generalizada de Hooke é válida apenas para sólidos elásticos. Para a maioria dos sólidos estas equações são válidas até as tensões atingirem um determinado valor limite chamado de limite de elasticidade do material.

2.3.2 Significado Físico dos Módulos Elásticos

Considere-se uma viga que ao longo do eixo x_1 se encontra sujeita a uma tensão longitudinal e como tal o tensor das tensões tem apenas uma componente não nula, τ_{11} (figura 2.4).

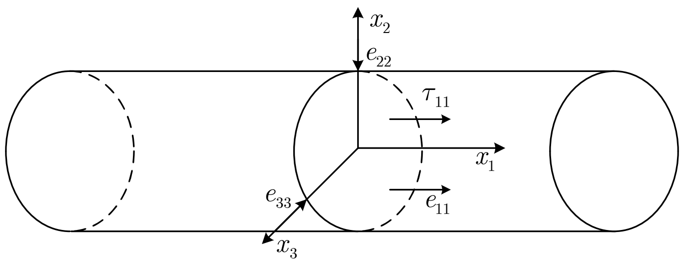


Figura 2.4: Viga sujeita a uma tensão longitudinal ao longo de x_1. Adaptado de [33]

Nestas condições, as relações (2.88) dão origem às seguintes expressões para as componentes da deformação:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\lambda + \mu}{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\,\tau_{11} \\ e_{22} &= e_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu\,(3\lambda + 2\mu)}\,\tau_{11} \\ e_{12} &= e_{23} = e_{31} = 0 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Se fizermos

$$Y = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{2.96}$$

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{2.97}$$

as relações (2.95) dão origem a

$$\frac{\tau_{11}}{e_{11}} = Y \tag{2.98}$$

$$\frac{e_{22}}{e_{11}} = \frac{e_{33}}{e_{11}} = -\sigma \tag{2.99}$$

em que a expressão (2.98) é a versão original da lei de Hooke. A experiência mostra que os materiais elásticos quando sofrem uma tensão longitudinal apresentam deformação (extensão) longitudinal e contracção nas direcções transversais. Se tomarmos $\tau_{11} > 0$ então $e_{11} > 0, e_{22} < 0, e_{33} < 0$, resulta, de (2.98) e (2.99), que $Y > 0$ e $\sigma > 0$.

A constante Y representa a razão entre a tensão longitudinal e a correspondente deformação longitudinal.

Da equação (2.99) tiramos que

$$\sigma = \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right| = \left|\frac{e_{33}}{e_{11}}\right| . \tag{2.100}$$

A constante σ representa o módulo da razão entre a contracção na direcção transversal e a correspondente extensão na direcção longitudinal.

Neste caso, os módulos elásticos podem ser escritos em função do módulo e Young e do coeficiente de Poisson:

$$\lambda = \frac{Y\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \tag{2.101}$$

$$\mu = \frac{Y}{2(1 + \sigma)} \tag{2.102}$$

Uma vez que $Y > 0$ e $\sigma > 0$, tem-se que $\mu > 0$.

Considere-se um ponto material sujeito a uma pressão p como ilustrado na figura 2.5. Neste caso o tensor das tensões tem componentes dadas por $\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}$.

Temos, então, que $\tau_{kk} = -3p$ e a equação (2.86) dá origem a

$$e_{kk} = -\frac{3p}{3\lambda + 2\mu} . \tag{2.103}$$

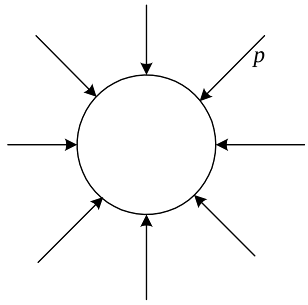


Figura 2.5: Material sujeito a uma pressão p.

Se definirmos

$$k = \lambda + \frac{2}{3}\mu \tag{2.104}$$

e substituirmos esta ultima expressão em (2.103) obtemos

$$k = -\frac{p}{e_{kk}} \cdot \tag{2.105}$$

A experiência mostra que a pressão tende a reduzir o volume do material, isto é, se $p > 0$ então $e_{kk} < 0$, daí resulta que $k > 0$. A relação (2.105) mostra que k representa o valor absoluto da razão entre a pressão e a dilatação. A esta constante dá-se o nome de **módulo de rigidez**.

Se substituirmos em (2.104) λ e μ, obtidos por (2.101) e (2.102) respectivamente, obtemos

$$k = \frac{Y}{3(1 - 2\sigma)} \cdot \tag{2.106}$$

Uma vez que $k > 0$, por (2.106) vemos que $\sigma \leq 1/2$. A relação (2.101) dá origem a $\lambda > 0$. Conclui-se, então, que as constantes de Lamé são ambas positiva.

Da forma matricial (2.93) da lei generalizada de Hooke obtemos

$$2\mu = \frac{\tau_{12}}{e_{12}} = \frac{\tau_{13}}{e_{13}} = \frac{\tau_{23}}{e_{23}} \cdot \tag{2.107}$$

A constante 2μ representa a razão entre a componente tangencial da tensão e a correspondente componente tangencial da deformação e, portanto, está relacionada com a rigidez do material. Por esta razão, à constante μ chama-se **módulo de rigidez**. A outra constante de Lamé, λ, não tem significado físico.

Utilizando as relações (2.104) e (2.106) obtemos de (2.86)

$$e_{kk} = \frac{1}{3k}\,\tau_{kk} = \frac{1-2\sigma}{Y}\,\tau_{kk} \tag{2.108}$$

o que implica que $e_{kk} = 0$ sse $\sigma = 1/2$ e desde que Y e τ_{kk} sejam finitos. Para $\sigma \to 1/2$ as relações (2.101), (2.102) e (2.106) originam $\lambda \to \infty,\ k \to \infty,\ \mu = \frac{1}{3}Y$ e neste limite temos os sólidos elásticos compressíveis.

Pode-se ainda exprimir as componentes τ_{ij} e e_{ij} em termos de Y e σ. Substituindo nas equações (2.85) e (2.88) as expressões (2.101) e (2.102), para λ e μ, obtém-se

$$\tau_{ij} = \frac{Y}{1+\sigma}\left[e_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,\delta_{ij}\,e_{kk}\right] \tag{2.109}$$

$$e_{ij} = \frac{1+\sigma}{Y}\,\tau_{ij} - \frac{\sigma}{Y}\,\delta_{ij}\,\tau_{kk} \tag{2.110}$$

ou em notação compacta

$$\mathbf{T} = \frac{Y}{1+\sigma}\left[\mathbf{E} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I}\right] \tag{2.111}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1+\sigma}{Y}\,\mathbf{T} - \frac{\sigma}{Y}\,(tr\,\mathbf{T})\,\mathbf{I} \tag{2.112}$$

2.4 Leis de Conservação

As leis de conservação válidas para um qualquer meio contínuo são também válidas para sólidos linearmente elásticos e isotrópicos. Consideremos as seguintes equações:

1. Equação da conservação de massa

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, div\,\mathbf{v} = 0\,. \tag{2.113}$$

   Sendo $\rho = \rho(x,t)$ a densidade de massa de um ponto x num instante t, e $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ a velocidade num ponto x num instante t. D/Dt representa a variação de uma função no tempo quando observada por um observador ligado à partícula, e, movendo-se com a partícula[2].

[2]Considere-se uma função ϕ:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + v_i\,\phi_{,i} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\phi$$

2. Equação da conservação de momento linear

$$div\,\mathbf{T} + \rho\,\mathbf{b} = \rho\,\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \tag{2.114}$$

em que $\mathbf{b}$ é a força que actua em todos os pontos do sólido por unidade de massa.

3. Equação da conservação da energia

$$\rho\,\frac{D\varepsilon}{Dt} = \mathbf{T}\cdot\nabla\mathbf{v} - div\,\mathbf{q} + \rho\,h, \tag{2.115}$$

ε é a energia interna por unidade de massa, q é o vector de fluxo de calor e h é a fonte de calor interno.

Se considerarmos apenas pequenas deformações, vamos ter

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{i;j} + u_{j;i}\right).$$

Por outro lado, a lei material para sólidos linearmente elásticos homogéneos e isotrópicos é dada por

$$\mathbf{T} = \lambda\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} + 2\,\mu\,\mathbf{E}\,.$$

Como trabalhamos com deformações Infinitesimais, em que as deformações ocorrem devido a deslocamentos lineares e uniformes a baixa velocidade, pelo que $\nabla\mathbf{v} = 0$, considera-se que o operador $D/Dt \approx \partial/\partial t$, tal que

$$\mathbf{v} \approx \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \tag{2.116}$$

$$div\,\mathbf{v} \approx \frac{\partial}{\partial t}\,(div\,\mathbf{u}) \tag{2.117}$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \approx \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2.118}$$

Substituindo estas aproximações na equação (2.113) vamos obter

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\,(div\,\mathbf{u}) = 0 \tag{2.119}$$

cuja solução geral é

$$\rho = \rho_0\,\exp\left(-\,div\,\mathbf{u}\right). \tag{2.120}$$

Se substituirmos (2.120) na equação (2.114), esta pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{\rho_0}\,(div\,\mathbf{T})\,\exp\,(div\,\mathbf{u})\,+\,\mathbf{b}\,=\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t} \tag{2.121}$$

Efectuando uma expansão em série de Mclaurin para $\exp(div\,\mathbf{u})$ e considerando desprezáveis o produto de componentes da tensão e o produto do deslocamento $\mathbf{u}$, obtém-se de (2.121)

$$div\,\mathbf{T}\,+\,\mathbf{f}=\,\rho_0\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2.122}$$

em que $\mathbf{f}=\rho_0\mathbf{b}$ é a força que actua sobre o corpo por unidade de volume não deformado.

Como a teoria clássica da elasticidade é isotérmica, temos $div\,\mathbf{q}=0$ e $h=0$. Então, para pequenas deformações podemos escrever (2.115) na forma

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\;=\;\frac{1}{\rho_0}\,\mathbf{T}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{2.123}$$

Substituindo $\mathbf{T}$ por (2.91) na equação (2.123) obtemos

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\;=\;\frac{1}{2}\;\left[\lambda\,(tr\,\mathbf{E})^2\,+\,2\,\mu\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right]\;=\;\frac{\partial W}{\partial t} \tag{2.124}$$

o que faz com que a equação da energia seja dada por

$$\rho_0\,\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\;=\;\frac{\partial W}{\partial t} \tag{2.125}$$

com

$$W\;=\;\frac{1}{2}\,\left(\,\lambda\,(tr\,\mathbf{E})^2\,+\,2\,\mu\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)\;. \tag{2.126}$$

W é o potencial elástico, ou seja, a energia interna de um sólido elástico por unidade de volume não deformado. Isto significa que a função W representa a energia de deformação por unidade de volume não deformado a que se chama **energia de deformação** ou **potencial elástico**. Se $\varepsilon_0=0$, ou seja $\varepsilon=0$ para $t=0$, a solução geral da equação (2.125) é dada por

$$\rho_0\,\varepsilon\;=\;W\,. \tag{2.127}$$

A equação de conservação de massa e a equação de conservação de energia podem ser resolvidas e a equação de conservação do momento pode ser linearizada . Assim, a equação linearizada do momento,(2.122), é a única equação de campo a ter em conta na teoria clássica da elasticidade. O sistema

$$A = \begin{cases} \mathbf{E} \,=\, \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} \,+\, \nabla\mathbf{u}^{\top}\right) \\ \mathbf{T} \,=\, \lambda\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} \,+\, 2\,\mu\,\mathbf{E} \\ div\,\mathbf{T} \,+\, \mathbf{f} \,=\rho_0\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \end{cases}$$

constitui o conjunto das equações que governam a teoria linear da elasticidade de sólidos isotrópicos e homogéneos. Este sistema contem quinze equações (6+6+3) com quinze incógnitas: três componentes u_i, seis componentes e_{ij} e seis componentes τ_{ij}. A segunda equação do sistema é a equação material de um sólido elástico, linear e homogéneo e é a única equação constitutiva necessária e suficiente da teoria em questão. Ao sistema A chama-se descrição Euleriana da elasticidade.

O vector deslocamento u é obtido por integração da primeira equação do sistema. Para tal temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1 *Para um dado tensor* $\mathbf{E}$*, se a equação*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} \,+\, \nabla\mathbf{u}^{\top}\right)$$

tiver solução $\mathbf{u}$*, então* $\mathbf{E}$ *deverá satisfazer a condição de integrabilidade*

$$\nabla^2\,\mathbf{E} \,+\, \nabla\nabla\,(tr\,\mathbf{E}) \,-\, \nabla\,div\,\mathbf{E} \,-\, (\nabla\,div\,\mathbf{E})^{\top} \,=\, 0\,. \tag{2.128}$$

O sistema A está escrito nas coordenadas x_i, logo as soluções $(6\tau_{ij} + 6e_{ij} + 3u_i)$ deste sistema são funções destas coordenadas e do tempo. Se quisermos representar o sistema A nas coordenadas iniciais x_i^0, teremos que considerar a equação:

$$\mathbf{E} \,=\, \frac{1}{2}\left(\nabla^0\,\mathbf{u} \,+\, \nabla^0\,\mathbf{u}^{\top}\right)\,. \tag{2.129}$$

Uma vez que para deformações Infinitesimais $\nabla\mathbf{u} = \nabla^0\mathbf{u}$, e como nestas deformações lineares se tem $\mathbf{T} \approx \mathbf{T}^0$, a terceira equação do sistema A passa a ter a seguinte forma

$$div^0\,\mathbf{T} \,+\, \mathbf{f} \,=\, \rho_0\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2.130}$$

com $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x^0, t)$; $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x^0, t)$; $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x^0, t)$. Assim, o sistema A nas coordenadas iniciais x_i^0 passa a ser

$$A^0 = \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla^0 \mathbf{u} + \nabla^0 \mathbf{u}^\top\right) \\ \mathbf{T} = \lambda\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} + 2\,\mu\,\mathbf{E} \\ div^0\,\mathbf{T} + \mathbf{f} = \rho_0\,\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \end{cases}$$

2.5 Problemas com Condições Fronteira

A maior parte dos problemas em elasticidade consistem em determinar a distribuição de tensões e deformações e, também, os deslocamentos em todos os pontos do corpo em qualquer instante de tempo t, quando certas condições fronteira e certas condições iniciais são especificadas. Este problema consiste em resolver o sistema A^0 para as funções $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$; $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$ e $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, t)$ considerando determinadas condições fronteira e iniciais e considerando que a força $\mathbf{f}$ é conhecida.

Para um sólido de volume V e fronteira S, as condições fronteira, em geral, são de três tipos diferentes:

1. O vector deslocamento é especificado em todos os pontos de S e para qualquer instante de tempo $t \geq 0$, isto é,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{em } S \text{ para } t \geq 0 \tag{2.131}$$

em que $\mathbf{u}^*$ é uma função conhecida.

2. O vector tensão é especificado em todos os pontos de S e para qualquer instante de tempo $t \geq 0$, isto é,

$$\mathbf{T}\,\mathbf{n} = \mathbf{s}^* \quad \text{em } S \text{ para } t \geq 0 \tag{2.132}$$

em que $\mathbf{s}^*$ é uma função conhecida.

3. O vector deslocamento é especificado para todos os pontos de $S_u \subset S$ e para qualquer instante de tempo $t \geq 0$, e o vector tensão é especificado em todos os pontos de $S_\tau = S - S_u$ e para qualquer instante de tempo $t \geq$, isto é,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{em } S_u \tag{2.133}$$

$$\mathbf{T}\,\mathbf{n} = \mathbf{s}^* \quad \text{em } S_u \tag{2.134}$$

para $t \geq 0$.

Assume-se que no instante $t = 0$, o corpo está num estado não deformado e, assim, temos para condições iniciais

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{em } V \text{ para } t = 0 \tag{2.135}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}^* \quad \text{em } V \text{ para } t = 0 \tag{2.136}$$

em que $\mathbf{v}^*$ é uma função conhecida. Este ultimo facto implica que a velocidade é conhecida em todos os pontos do corpo no instante $t = 0$.

O problema de resolver o sistema A^0 considerando as condições iniciais (2.135) e (2.136) e uma das condições fronteira apresentadas é conhecido como *Problema com Condições Fronteira da Teoria da Elasticidade*. O conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$ determinado, se existir, constitui a *solução do problema*. Os três problemas fundamentais com condições fronteira (P.C.F.) podem-se enunciar da seguinte forma:

- Quando a condição fronteira é da forma (1) o problema diz-se P.C.F. de deslocamento.
- Quando a condição fronteira é da forma (2) o problema diz-se P.C.F. de tensão.
- Quando a condição fronteira é da forma (3) o problema diz-se P.C.F. misto.

É de reparar que o caso (3) inclui os outros dois casos, já que, quando

$$\begin{aligned} S &= S_u \quad \text{e} \quad S_\tau = \emptyset \quad \text{então temos o caso (1)} \\ S &= S_\tau \quad \text{e} \quad S_u = \emptyset \quad \text{então temos o caso (2)} \\ S_\tau &\neq S \neq S_u \quad \text{então temos o caso (3).} \end{aligned}$$

sendo $\emptyset$ o conjunto vazio.

Para problemas onde a força de inércia não é considerada, isto é,

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0$$

a equação de campo passa a ser

$$div\, \mathbf{T} + \mathbf{f} = 0 \tag{2.137}$$

e como

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{independente de } t \tag{2.138}$$

e

$$\mathbf{u}(x,t) = u_1(x)\, t + u_2(x)\,. \tag{2.139}$$

Se considerarmos o corpo em repouso, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$$

então $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x)$. Neste caso as condições iniciais (2.135) e (2.136) são irrelevantes.

O problema que consiste em resolver o sistema A^0 considerando as condições fronteira (1), (2) e (3) chama-se P.C.F em **elastostática**. O problema que consiste em resolver o sistema A^0 considerando as condições fronteira (1), (2) e (3) com as condições iniciais (2.135) e (2.136) chama-se P.C.F. em **elastodinâmica**.

2.5.1 Unicidade de Solução - Caso da Elastostática

Este tipo de P.C.F., tem como conjunto solução $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$, em que $\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}$ satisfazem as equações

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^\top\right) \tag{2.140}$$

$$\mathbf{T} = \lambda\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} + 2\,\mu\,\mathbf{E} \tag{2.141}$$

$$div\,\mathbf{T} + \mathbf{f} = 0 \tag{2.142}$$

em V para $t \geq 0$ em que a força $\mathbf{f}$ é uma função conhecida. As condições fronteira deste tipo de problema são

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{em } S_u \quad \text{e} \quad \mathbf{T}\,\mathbf{n} = \mathbf{s}^* \quad \text{em } S_\tau \tag{2.143}$$

para $t \geq 0$.

Teorema da unicidade de solução do problema de elastostática

Teorema 2.2 *A solução de um problema de elastostática* $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$ *que satisfaz as equações (2.140), (2.141) e (2.142) considerando as condições fronteira (2.143) é única* *durante um deslocamento de um corpo rígido.*

Demonstração

Considere-se que $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{T}^{(1)}\}$ e $\{\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{T}^{(2)}\}$ são duas soluções distintas de um problema de elastostática, isto é, satisfazem as equações (2.140) – (2.142) e as condições fronteira (2.143). Vamos ter, então,

$$\left.\begin{aligned} div\, \mathbf{T}^{(1)} + \mathbf{f} &= 0 \\ div\, \mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{f} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{em}\, V \tag{2.144}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}^{(1)} &= \lambda \left(tr\, \mathbf{E}^{(1)}\right) \mathbf{I} + 2\,\mu\, \mathbf{E}^{(1)} \\ \mathbf{T}^{(2)} &= \lambda \left(tr\, \mathbf{E}^{(2)}\right) \mathbf{I} + 2\,\mu\, \mathbf{E}^{(2)} \end{aligned}\right\} \quad \text{em}\, V \tag{2.145}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} &= \tfrac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^{(1)} + \nabla \mathbf{u}^{(1)\top}\right) \\ \mathbf{E}^{(2)} &= \tfrac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u}^{(2)} + \nabla \mathbf{u}^{(2)\top}\right) \end{aligned}\right\} \quad \text{em}\, V \tag{2.146}$$

e

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^*, & \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^* & \text{em}\, S_u \\ \mathbf{T}^{(1)}\mathbf{n} = \mathbf{S}^*, & \mathbf{T}^{(2)}\mathbf{n} = \mathbf{S}^* & \text{em}\, S_\tau \end{array}\right\}. \tag{2.147}$$

Se definir-mos

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}, \quad \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)} \tag{2.148}$$

podemos escrever (2.144), (2.145) e (2.146) como

$$div\, \bar{\mathbf{T}} = 0 \tag{2.149}$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \lambda \left(tr\, \bar{\mathbf{E}}\right) \mathbf{I} + 2\,\mu\, \bar{\mathbf{E}} \tag{2.150}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left(\nabla \bar{\mathbf{u}} + \nabla \bar{\mathbf{u}}^\top\right) \tag{2.151}$$

em V, e

$$\bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \text{em}\, S_u\,, \quad \bar{\mathbf{T}}\mathbf{n} = 0 \quad \text{em}\, S_\tau\,. \tag{2.152}$$

Considere-se o integral

$$I = \int_V \bar{\mathbf{T}} \cdot \bar{\mathbf{E}}\; dV\,. \tag{2.153}$$

Substituindo em (2.153) (2.150) obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int_V \left(\lambda \left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\mathbf{I}} + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}}\right)\cdot\bar{\mathbf{E}}\;dV \\ &= \int_V \left(\lambda \left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)^2 + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}}\right)\;dV \\ &= 2\int_v W\;dV \end{aligned} \tag{2.154}$$

Como

$$\bar{\mathbf{T}}\cdot\bar{\mathbf{E}} = \bar{\tau}_{ij}\,\bar{e}_{ij} = \bar{\tau}_{ij}\,\bar{u}_{i,j} \tag{2.155}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} I &= \int_V \bar{\tau}_{ij}\,\bar{u}_{i,j}\,dV = \int_V \left(\left(\bar{\tau}_{ij}\,\bar{u}_j\right)_{,j} - \bar{\tau}_{ij,j}\,\bar{u}_i\right)\,dV \\ &= \int_S \bar{\tau}_{ij}\,\bar{u}_i\,n_j\,dS - \int_V \bar{\tau}_{ij,j}\,\bar{u}_i\,dV \end{aligned} \tag{2.156}$$

pelo teorema da divergência. Como, e por via da condição fronteira (2.152),

$$\int_S \bar{\tau}_{ij}\,\bar{u}_i\,n_j\,dS = 0 \tag{2.157}$$

e

$$\int_V \bar{\tau}_{ij,j}\,\bar{u}_i\,dV = 0 \tag{2.158}$$

por (2.149). Então $I = 0$ e, nesse caso, vamos ter

$$\int_V \left(\lambda\,(tr\,\mathbf{E})^2 + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}}\right)\,dV = 0\,. \tag{2.159}$$

Como $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)^2 \geq 0$ e $\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}} = \bar{e}_{ij}\bar{e}_{ij} \geq 0$, temos

$$tr\,\bar{\mathbf{E}} = 0\,, \quad \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{em}\,V\,. \tag{2.160}$$

A equação (2.150) dá origem, assim, a

$$\bar{\mathbf{T}} = 0 \quad \text{em}\,V\,. \tag{2.161}$$

Uma vez que $\bar{\mathbf{E}} = 0$, temos $\bar{\mathbf{u}} = 0$. Logo, $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}^{(2)}$ e $\mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{T}^{(2)}$. Prova-se, assim, o teorema 2.2.

2.5.2 Unicidade de Solução - Caso da Elastodinâmica

Este tipo de P.C.F., tem como solução o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}\}$ em que $\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{T}$ satisfazem as equações

$$\begin{aligned} div\,\mathbf{T} + \mathbf{f} &= \rho\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} && (2.162)\\ \mathbf{T} &= \lambda\,(tr\,\mathbf{E})\,\mathbf{I} + 2\,\mu\,\mathbf{E} && (2.163)\\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}\left(\nabla\,\mathbf{u} + \nabla\,\mathbf{u}^{\top}\right) && (2.164)\end{aligned}$$

em V. As condições iniciais são

$$\mathbf{u} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}^* \quad \text{para} \;\; t = 0 \qquad (2.165)$$

em V, e as condições fronteira são

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \quad \text{em} \;\; S_u && (2.166)\\ \mathbf{T}\,\mathbf{n} &= \mathbf{s}^* \quad \text{em} \;\; S_\tau && (2.167)\end{aligned}$$

para $t \geq 0$.

Teorema da unicidade de solução do problema de elastodinâmica

Teorema 2.3 *Um problema de elastodinâmica regido pelas equações (2.162), (2.163) e (2.164), pelas condições iniciais (2.165) e condições fronteira (2.166) e (2.167) não pode ter mais de uma solução.*

Demonstração

Considere-se que $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{T}^{(1)}\}$ e $\{\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{T}^{(2)}\}$ são duas soluções distintas de um problema de elastodinâmica, ou seja, que satisfazem as equações (2.162), (2.163), (2.164), as condições iniciais (2.165) e as condições fronteira (2.166) e (2.167). Se definirmos

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}, \quad \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}, \quad \bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{T}^{(2)}\,, \qquad (2.168)$$

então $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{E}}$, $\bar{\mathbf{T}}$ satisfazem as seguintes equações e condições fronteira:

$$
\begin{aligned}
div\,\bar{\mathbf{T}} &= \rho\,\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} \quad \text{em}\,V && (2.169)\\
\bar{\mathbf{T}} &= \lambda\,\left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)\bar{\mathbf{I}} + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}} \quad \text{em}\,V && (2.170)\\
\bar{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}\left(\nabla\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{u}}^{\top}\right) \quad \text{em}\,V && (2.171)\\
\bar{\mathbf{u}} &= 0 \quad \text{em}\,S_u\,, \quad \bar{\mathbf{T}} = 0 \quad \text{em}\,S_\tau && (2.172)
\end{aligned}
$$

As relações (2.169)–(2.171) são válidas para $t \geq 0$ e (2.172) para $t = 0$. De (2.165), obtemos ainda as seguintes condições iniciais:

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathbf{u}} &= 0 && (2.173)\\
\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} &= 0 && (2.174)
\end{aligned}
$$

em V para $t = 0$.

Considere-se o integral de volume

$$
N = \int_V \left(\bar{\mathbf{T}}\cdot\bar{\mathbf{E}} + \rho\,\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) dV \qquad (2.175)
$$

Substituindo (2.170) em (2.175) obtemos

$$
N = \int_V \left(\lambda\left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)^2 + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) dV \qquad (2.176)
$$

$$
\begin{aligned}
N &= \int_V \left(\lambda\left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)^2 + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}} + \rho\,\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right) dV\\
&= \int_V \left(\lambda\,(tr\,\bar{e}_{kk})^2 + 2\,\mu\,\bar{e}_{ij}\cdot\bar{e}_{ij} + \rho\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right) dV\\
&= 2\int_V W\,dV + \int_V E_c\,dV && (2.177)
\end{aligned}
$$

em que E_c é a energia cinética. Então,

$$
\frac{DN}{Dt} = 2\int_V \left(\lambda\,\bar{e}_{kk}\,\frac{\partial \bar{e}_{ii}}{\partial t} + 2\,\mu\,\bar{e}_{ij}\,\frac{\partial \bar{e}_{ij}}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\,\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2}\right) dV \qquad (2.178)
$$

Na obtenção desta equação utilizou-se a aproximação $D/Dt \approx \partial/\partial t$ e o facto de V ser considerado como a configuração inicial.

Utilizando (2.170), (2.171) e a simetria de $\bar{\mathbf{T}}$ vamos obter

$$\lambda\,\bar{e}_{kk}\,\frac{\partial \bar{e}_{ii}}{\partial t} + 2\,\mu\,\bar{e}_{ij}\,\frac{\partial \bar{e}_{ij}}{\partial t} = \bar{\tau}_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)_{,j} \tag{2.179}$$

Substituindo esta expressão em (2.178) temos

$$\begin{aligned}\frac{DN}{Dt} &= 2\int_V\left(\bar{\tau}_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)_{,j} + \rho\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2}\right)dV \\ &= 2\int_V\left(\bar{\tau}_{ij}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\right)_{,j} - \bar{\tau}_{ij,\,j}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2}\right)dV \qquad (2.180)\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da divergência e a relação (2.169), a expressão (2.180) dá origem a

$$\frac{DN}{Dt} = 2\int_V \bar{\tau}_{ij}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\,n_j\,dS\,. \tag{2.181}$$

A condição fronteira (2.172) implica que

$$\int_V \bar{\tau}_{ij}\,\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}\,n_j\,dS = 0$$

obtendo-se, assim,

$$N = N_0 \tag{2.182}$$

em que N_0 é independente do tempo t.

Da condição inicial $\bar{u} = 0$ para $t = 0$, obtem-se $\bar{u}_i = 0$ para $t = 0$. Logo, da relação (2.171) temos $\bar{e}_{ij} = 0$ para $t = 0$. Como $\partial\bar{u}/\partial t = 0$ para $t = 0$ o integral (2.175) é zero, $N = 0$, para $t = 0$ e, como $N = N_0$ para $\forall\, t \geq 0$, temos $N = 0$ para $\forall\, t \geq 0$. Logo

$$\int_V\left(\lambda\,\left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)^2 + 2\,\mu\,\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}} + \rho\,\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\cdot\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t}\right)dV = 0 \tag{2.183}$$

para $t \geq 0$. Uma vez que $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\rho > 0$, $\left(tr\,\bar{\mathbf{E}}\right)^2 \geq 0$, $\bar{\mathbf{E}}\cdot\bar{\mathbf{E}} \geq 0$ e $\partial\bar{\mathbf{u}}/\partial t\cdot\partial\bar{\mathbf{u}} \geq 0$, para que o integral de (2.183) seja zero tem-se

$$tr\,\bar{\mathbf{E}} = 0 \tag{2.184}$$

$$\bar{\mathbf{E}} = 0 \tag{2.185}$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0 \tag{2.186}$$

em V para $\forall t \geq 0$. Uma vez que $\bar{\mathbf{u}} = 0$ em V para $t = 0$, de (2.186) resulta que

$$\bar{\mathbf{u}} = 0 \tag{2.187}$$

em V para $t \geq 0$. Uma vez que $\bar{\mathbf{E}} = 0$ em V $\forall t \geq 0$, obtem-se da equação (2.170) que

$$\bar{\mathbf{T}} = 0 \tag{2.188}$$

em V $\forall t \geq 0$.

As relações (2.168), (2.185), (2.187) e (2.188) mostram que as duas soluções apresentadas, $\{\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{E}^{(1)}, \mathbf{T}^{(1)}\}$ e $\{\mathbf{u}^{(2)}, \mathbf{E}^{(2)}, \mathbf{T}^{(2)}\}$, são idênticas. O teorema 2.3 está, assim, prova-do.

2.5.3 Exemplos Práticos

1. **Extensão Axial de uma Barra**

Considere-se uma barra elástica, de secção cilíndrica. Suponha-se que a barra está em equilíbrio sob a acção de uma tensão T que actua nas suas bases. As faces laterais não estão sob a acção de qualquer tensão e as forças internas são desprezáveis (ver figura 2.6).

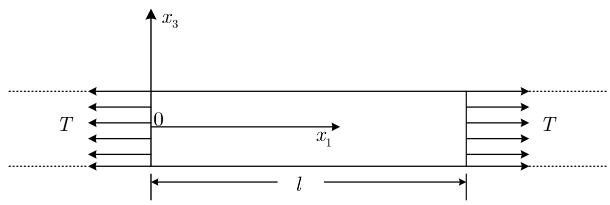


Figura 2.6: Extensão axial de uma barra. Adaptado de [33]

O problema consiste em determinar as tensões, deformações e deslocamentos num ponto arbitrário da barra.

Considerem-se as seguintes condições fronteira:

$$\left.\begin{array}{lll} \tau_{11} = T; & \tau_{12} = \tau_{13} = 0 & \text{para}\, x_1 = 0, l \\ \tau_{ij}\, n_j = 0 & & \text{na superfície lateral} \end{array}\right\} \tag{2.189}$$

Tendo em atenção que $n_1 = 0$ em todos os pontos da superfície lateral, verifica-se que o seguinte sistema de tensões obedece às condições (2.189):

$$\tau_{11} = T\,, \quad \tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{22} = \tau_{23} = \tau_{33} = 0\,. \tag{2.190}$$

Se as expressões (2.190) forem consideradas como o sistema de tensões para qualquer ponto do corpo, então, as condições fronteira são igualmente satisfeitas.

As deformações e_{ij} que estão associadas às tensões de (2.190) podem ser obtidas substituindo as tensões de (2.190) em (2.112) obtendo-se

$$\left.\begin{array}{l} e_{11} = \frac{1}{Y}T; \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\nu}{Y}T \\ e_{12} = e_{23} = e_{33} = 0 \end{array}\right\} \tag{2.191}$$

Por (2.140) encontramos os deslocamentos u_i associados a estas deformações:

$$u_i = \frac{1}{Y}T\,x_1, \quad u_2 = -\frac{\nu}{Y}T\,x_2, \quad u_3 = -\frac{\nu}{Y}T\,x_3\,. \tag{2.192}$$

As expressões (2.190), (2.191) e (2.192) dão as tensões, deformações e deslocamentos que ocorrem para um ponto x arbitrário do corpo. Pelo teorema 2.2, estas expressões constituem a única solução possível para o problema. De notar que esta solução é completamente independente do comprimento do corpo e da geometria da secção transversal do corpo. Como tal, a solução é válida para uma barra de qualquer comprimento e secção transversal.

2. **Ondas de Tensão numa Placa Semi-Infinita**

   Considere-se uma placa elástica, *fina* e semi-infinita que está inicialmente em repouso num estado não deformado. Suponha-se que no instante $t = 0^+$ é aplicada uma pressão $p(t)$, dependente do tempo, e que é mantida no tempo e que actua ao longo da barra (ver figura 2.7).

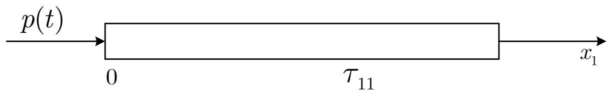


Figura 2.7: Tensão numa barra. Adaptado de [33].

As forças internas são ignoradas. O problema consiste em determinar a tensão e o deslocamento que ocorre em um qualquer ponto da barra para qualquer instante de tempo t subsequente. Para qualquer ponto x_1 da barra ocorre apenas apenas a tensão longitudinal τ_{11} e que esta é uma função de x_1 e t. A condição fronteira que tem que ser satisfeita é

$$\tau_{11} = -p(t) \quad \text{para } x_1 = 0\,, t > 0\,. \tag{2.193}$$

A equação da tensão para o movimento [33]

$$\nabla(div\,\mathbf{T}) + (div\,\mathbf{T})^{\top} - \frac{2\rho(1+\nu)}{Y}\left[\ddot{\mathbf{T}} - \frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{I}\left(tr\,\ddot{\mathbf{T}}\right)\right] + \nabla\mathbf{f} + \nabla\mathbf{f}^{\top} = 0\,, \tag{2.194}$$

em que $\ddot{\mathbf{T}}$ é a segunda derivada de $\mathbf{T}$ e $\mathbf{f}$ são as forças internas, dá origem à seguinte equação para τ_{11}:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial t^2} \tag{2.195}$$

sendo

$$\alpha^2 = \frac{Y}{\rho}\,\cdot \tag{2.196}$$

As forças internas $\mathbf{f}$ foram ignoradas. α representa a velocidade de propagação da equação de onda unidimensional. Daqui se deduz que a tensão τ_{11} propaga-se na forma de uma onda de velocidade $\alpha = \sqrt{Y/\rho}$. Uma onda deste tipo chama-se **onda de tensão**.

Como a barra está inicialmente num estado não deformado, temos a seguinte condição inicial:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t = 0 \text{ e } x_1 \geq 0\,. \tag{2.197}$$

Utilizando a expressão

$$\mathbf{T} = \lambda(div\,\mathbf{T})\,\mathbf{I} + \mu\left(\nabla\,\mathbf{u} + \nabla\,\mathbf{u}^{\top}\right) \tag{2.198}$$

que relaciona a tensão com o deslocamento, obtemos a seguinte condição para τ_{11}:

$$\tau_{11} = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial t} = 0 \quad \text{para } t = 0 \text{ e } x_1 \geq 0\,. \tag{2.199}$$

Então, a equação (2.195) é a equação do problema, (2.199) são as condições iniciais e (2.193) as condições fronteira, ou seja, este conjunto de equações representam a formulação em função da tensão do problema.

Para resolver o problema, vamos mudar as variáveis independentes x_1 e t para

$\xi = t - (x_1/\alpha)$ e $\eta = t + (x_1/\alpha)$. A equação (2.195) passa a ser

$$\frac{\partial^2 \tau_{11}}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0 \,. \tag{2.200}$$

Integrando esta equação obtemos a seguinte solução geral para τ_{11}:

$$\tau_{11} = f(\xi) + g(\eta) \tag{2.201}$$

em que $f(\xi)$ e $g(\eta)$ são funções arbitrárias.

Utilizando (2.201) as condições iniciais (2.199) tomam a forma

$$\left.\begin{array}{l} f(-x_1/\alpha) + g(x_1/\alpha) = 0 \\ f'(-x_1/\alpha) + g'(x_1/\alpha) = 0 \end{array}\right\} \text{para } x_1 \geq 0 \tag{2.202}$$

Esta condições são satisfeitas se

$$\left.\begin{array}{rcll} g(\eta) & = & A & \text{para todos } \eta \\ f(\xi) & = & -A & \text{para } \xi \leq 0 \end{array}\right\} \tag{2.203}$$

em que A é uma constante arbitrária. Então, a solução (2.201) fica

$$\tau_{11} = \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{para} & \xi \leq 0 \\ A + f(\xi) & \text{para} & \xi > 0 \end{array} \right. \tag{2.204}$$

ou

$$\tau_{11} = \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{para} & t \leq x_1/\alpha \\ F(t - x_1/\alpha) & \text{para} & t > x_1/\alpha \end{array} \right. \tag{2.205}$$

onde $F(t - x_1/\alpha) = A + f(t - x_1/\alpha)$ é uma função arbitrária de $(t - x_1/\alpha)$. A condição fronteira (2.193) é satisfeita se $F(t - x_1/\alpha) = -p(t - x_1/\alpha)$. Então, uma solução para τ_{11} que satisfaça (2.195) e as condições (2.199) e (2.193) é

$$\tau_{11}(x_1, t) = \left\{ \begin{array}{rll} 0 & \text{para} & t \leq x_1/\alpha \\ -p(t - x_1/\alpha) & \text{para} & t > x_1/\alpha \end{array} \right. \tag{2.206}$$

Esta solução mostra que, para qualquer ponto $\bar{x}_1$ da barra não existe qualquer tensão antes do instante $t = \bar{x}_1/\alpha$, e, então, uma pressão dependente do tempo, $-p(t - x_1/\alpha)$ passa a existir a partir deste instante. Esta tensão deve-se à onda de tensão que se inicia em $x_1 = 0$, para $t = 0$, e chega a $\bar{x}_1$ no instante $\bar{t} = \bar{x}_1/\alpha$.

O deslocamento longitudinal u_1 associado τ_{11} dada por (2.206), pode ser calculado utilizando a lei de Hooke

$$\frac{\tau_{11}}{e_{11}} = Y \tag{2.207}$$

e a relação entre o deslocamento e deformação $e_{11} = u_{1,1}$:

$$u_1\left(x_1, t\right) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t \leq x_1/\alpha \\ \frac{\alpha}{Y} \int_0^{t - x_1/\alpha} p\left(t_0\right)\, dt_0 & \text{para} \quad t > x_1/\alpha \end{cases} \tag{2.208}$$

Este resultado mostra que o deslocamento u_1 causado pela onda de tensão no ponto $\bar{x}_1$ no instante $t > \bar{x}_1/\alpha$ é directamente proporcional à área sob a curva de pressão acima do intervalo de tempo $(0, t - \bar{x}_1/\alpha)$, sendo a constante de proporcionalidade $\alpha/Y = (Y\, \rho)^{-\frac{1}{2}}$.

De (2.208) obtemos

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\left(x_1, t\right) = \frac{\alpha}{Y}\, p \left(t - \frac{x_1}{\alpha}\right) \tag{2.209}$$

para $t \geq x_1/\alpha$. Esta equação dá a velocidade no ponto x_1 da barra no instante de tempo t $(> x_1/\alpha)$. De (2.206), (2.209) e (2.196) obtemos, para $t > x/\alpha$,

$$\frac{\tau_{11}}{\partial u_1/\partial t} = -\frac{Y}{\alpha} = -\sqrt{Y\, \rho}\,. \tag{2.210}$$

A quantidade $\tau_{11}/\left(\partial u_1/\partial t\right)$ representa a tensão necessária para gerar a velocidade da onda de tensão.

Capítulo 3

A Elasticidade e a Relatividade Restrita

A formulação das leis fundamentais da Mecânica Clássica no capítulo anterior, está baseada no pressuposto de que os fenómenos físicos ocorrem num espaço Euclidiano tri-dimensional a velocidades $v << c$. A variável t é vista como independente não só das variáveis espaciais x_α mas, também, do possível movimento do corpo, ou seja, dos sistemas de referencia espaciais. No capítulo anterior um corpo rígido é definido como um contínuo tri-dimensional num espaço Euclidiano também ele tri-dimensional.

Neste capítulo iremos considerar o contínuo num espaço de Minkowski em que cada ponto desse continuo (corpo rígido) é definido por um conjunto de coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3), em que x_0 é a coordenada temporal do ponto x, sendo a métrica de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta}$, a métrica válida para a medição da deformação do corpo por acção de uma qualquer força exterior sendo, então, o espaço parametrizado pela forma quadrática

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, dx_\alpha\, dx_\beta \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$$

que se pode reduzir a

$$ds^2 = c^2\, dt^2 - (dx_1)^2 - (dx_2)^2 - (dx_3)^2$$

quando as coordenadas espaciais x_α são ortogonais e cartesianas.

Este capítulo centra-se no trabalho de Grøn [34] e Møller [20] para a secção 3.3.

3.1 Definição Covariante de Deformação em M_4

Considere-se um corpo em repouso num referencial S' de coordenadas X (ver figura 3.1).

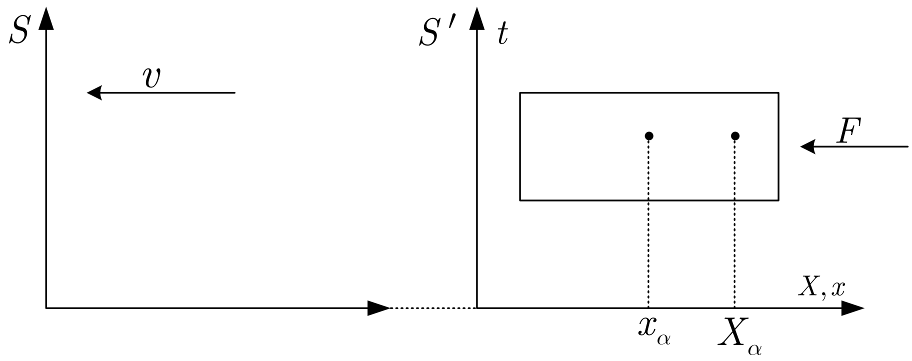


Figura 3.1: Deformação de um corpo medida em dois referenciais inerciais.

Consideremos um ponto definido pelo 4-vector posição X_α. Vamos convencionar que este 4-vector é definido na situação inicial, ou seja, não deformada. Dizemos, então, que este 4--vector representa a situação de equilíbrio do corpo em relação à origem do referencial S'. Após a deformação, este ponto vai ser definido pelo 4-vector posição x_α. No referencial S', onde o corpo está em repouso, podemos definir um 4-vector para a deformação e, assim, a **4-deformação** pode ser definida por [34]:

$$\begin{aligned} \ell'_\alpha &= \left(0, \ell'_1, \ell'_2, \ell'_3\right) \\ &= \left(0,\, x'_1 - X'_1,\, x'_2 - X'_2,\, x'_3 - X'_3\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo a deformação em S' obtida através da diferença de coordenadas entre dois acontecimentos medidos simultaneamente o que faz com que a coordenada temporal de ℓ'_α seja nula.

Considere-se um outro referencial S, que se afasta do referencial S' a uma velocidade constante v no sentido negativo de x (ver figura 3.1). Como o referencial S move-se no eixo x, temos $\ell_2 = \ell'_2$ e $\ell_3 = \ell'_3$. Os dois 4-vectores deformação ℓ_α e ℓ'_α vão estar relacionados pela seguinte transformação de Lorentz:

$$\begin{aligned}
\ell_0 &= \beta\left(\ell'_0 + \gamma\,\ell'_1\right) \\
\ell_1 &= \beta\left(\ell'_1 + \gamma\,\ell'_0\right) \\
\ell_2 &= \ell'_2 \\
\ell_3 &= \ell'_3
\end{aligned} \tag{3.2}$$

em que $\gamma = v/c$ e $\beta = \left(1 - v^2/c^2\right)$. O 4-vector deformação medido em S, resultante da transformação de Lorentz aplicada em (3.1), é dado por:

$$\ell_\alpha = \left(\beta(\gamma\,\ell'_1),\, \beta\,\ell'_1,\, \ell'_2,\, \ell'_3\right). \tag{3.3}$$

Este 4-vector representa a generalização do conceito de comprimento a um espaço de quatro dimensões. O conceito de deformação está associado com as componentes espaciais deste 4-vector.

A deformação medida para um dado corpo em movimento vai depender da forma como o conceito de deformação é definido. No conceito **síncrono**, o comprimento é definido como a diferença espacial entre dois pontos do corpo, medido simultaneamente no referencial de repouso do observador. Assim, o princípio da simultaneidade faz com que um acontecimento, medido por mais do que um observador no mesmo referencial seja simultâneo e, neste caso, a componente temporal será nula. No conceito **assíncrono**, o comprimento de um corpo em movimento é definido como a distância entre dois pontos do corpo, medidos simultaneamente no referencial de repouso S' do corpo. Devido ao relativismo da simultaneidade estes acontecimentos não são simultâneos no referencial de repouso do observador e, neste caso, a componente temporal não é nula.

Neste trabalho vamos considerar o conceito síncrono de deformação. Da definição de deformação síncrona e através das transformações de coordenadas de Lorentz, a distância $x_1 - X_1$ medida em S vai obedecer à lei de contracção de Lorentz. Neste caso se fizermos $l'_1 = x'_1 - X'_1$ no referencial S', este comprimento em S será

$$l_1 = \beta^{-1}\,l'_1. \tag{3.4}$$

Vemos por (3.4) que a distância l_1 é menor que l'_1 através de um factor $1/\beta$, o que implica que a deformação ℓ_1 medida em S será maior do que a correspondente deformação ℓ'_1 medida em S' através de um factor β. Temos então

$$\ell_1 = \beta^{-1}\,\ell'_1,\ \ell_2 = \ell'_2,\ \ell_3 = \ell'_3. \tag{3.5}$$

Pela definição do conceito síncrono, no referencial do observador fixo, resolvendo em ordem a $\ell'_1,\, \ell'_2,\, \ell'_3$ e substituindo em (3.3) obtemos

$$\ell_\alpha = \left(\beta^2\, \gamma\, \ell_1,\, \beta^2\, \ell_1,\, \ell_2,\, \ell_3\right). \tag{3.6}$$

Isto implica que para um observador fixo, por oposição a um em movimento, e no conceito síncrono, a deformação medida é afectada por factor β^2.

Os comprimentos espaciais $\ell_1,\, \ell_2,\, \ell_3$ **não são** as diferenças de coordenadas entre os acontecimentos que definem os comprimentos $\ell'_1,\, \ell'_2,\, \ell'_3$ [34]. Os primeiros são simultâneos em S enquanto que os últimos o são em S' como está patente pelo valor zero para a coordenada temporal. Devido à relatividade da simultaneidade os últimos não são simultâneos em S, facto que é expresso pelo valor não nulo da coordenada temporal de ℓ_α.

De acordo com a definição assíncrona da deformação, a deformação é definida pelo vector espacial de componentes $\ell_1,\, \ell_2,\, \ell_3$ [34].

3.1.1 Forma Matricial da 4-Deformação

Através da equação (3.3) podemos escrever que

$$\ell_\alpha = \mathbf{L_1}\, \ell'_\alpha \tag{3.7}$$

em que $\mathbf{L_1}$ é uma matriz de Lorentz, que neste caso representa um *boost*, da forma

$$\mathbf{L_1} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\,\gamma & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Na forma matricial (3.3) fica

$$\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -\beta\,\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\,\gamma & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell'_0 \\ \ell'_1 \\ \ell'_2 \\ \ell'_3 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Para um referencial S que se afaste de S' numa qualquer direcção, (3.7) teria a forma

$$\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \mathbf{L_2} \begin{pmatrix} \ell'_0 \\ \ell'_1 \\ \ell'_2 \\ \ell'_3 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

em que a matriz $\mathbf{L_2}$ tem a forma

$$\begin{pmatrix} \beta & -\beta\frac{v_1}{c} & -\beta\frac{v_2}{c} & -\beta\frac{v_3}{c} \\ -\beta\frac{v_1}{c} & 1+(\beta-1)\frac{v_1^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_1 v_2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_1 v_3}{v^2} \\ -\beta\frac{v_2}{c} & (\beta-1)\frac{v_2 v_1}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_2^2}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_2 v_3}{v^2} \\ -\beta\frac{v_3}{c} & (\beta-1)\frac{v_3 v_1}{v^2} & (\beta-1)\frac{v_3 v_2}{v^2} & 1+(\beta-1)\frac{v_3^2}{v^2} \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Generalizando, a relação entre ℓ e ell' pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \ell_0 \\ \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \begin{pmatrix} \ell'_0 \\ \ell'_1 \\ \ell'_2 \\ \ell'_3 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

em que $\mathbf{L}$ é uma matriz de Lorentz que representa uma transformação de Lorentz.

3.2 Formulação Covariante da Lei de Hooke

Seja F_α a 4-força de Minkowski que actua num corpo originando a deformação ℓ_α. Vamos considerar o caso mais simples, a uma dimensão, e que esta força é independente do tempo. Chamaremos, então, a F_α a **4-tensão**. Por (1.211) as componentes desta 4-tensão são:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= (\beta\,(v/c)\,f_1,\ \beta\,f_1,\ \beta\,f_2,\ \beta\,f_3) \\ &= \beta\,((v/c)\,f_1,\ f_1,\ f_2,\ f_3) \end{aligned} \tag{3.13}$$

em que $f_1,\ f_2,\ f_3$ são as componentes do 3-vector que dá origem à deformação.

Pela definição da lei de Hooke do capítulo 2, podemos escrever a forma covariante desta lei para o espaço M_4:

$$F_\alpha = \kappa\,\ell_\alpha \tag{3.14}$$

onde κ é um escalar que depende da natureza do material, sendo uma constante elástica.

Substituindo as equações (3.6) e (3.13) na equação (3.14) vamos obter

$$\beta\,((v/c)\,f_1,\, f_1,\, f_2,\, f_3) \,=\, \kappa\,\left(\beta^2\,\gamma\,\ell_1,\, \beta^2\,\ell_1,\, \ell_2,\, \ell_3\right), \tag{3.15}$$

que é a formulação covariante da lei de Hooke proposta por Grøn [34]. As componentes da força podem ser expressas pelas equações

$$f_1 \,=\, \kappa\,\beta\,\ell_1, \quad f_2 \,=\, \kappa\,\beta^{-1}\,\ell_2, \quad f_3 \,=\, \kappa\,\beta^{-1}\,\ell_3\,. \tag{3.16}$$

Fazendo

$$f_1 \,=\, \mathcal{K}_1\,\ell_1, \quad f_2 \,=\, \mathcal{K}_2\,\ell_2, \quad f_3 \,=\, \mathcal{K}_3\,\ell_3 \tag{3.17}$$

podemos, e utilizando as equações (3.16) e (3.17), introduzir uma *constante elástica efectiva*, proposta por Grøn, tal que

$$\mathcal{K}_1 \,=\, \beta\,\kappa, \quad \mathcal{K}_2 \,=\, \mathcal{K}_3 \,=\beta^{-1}\,\kappa. \tag{3.18}$$

De acordo com as definições dadas atrás, tanto a deformação como a tensão, em M_4, são dadas pelos componentes espaciais de 4-vectores. Se um 4-vector é espacial num determinado referencial, também o é em qualquer outro referencial. Não há nenhum sistema em que a parte espacial de um 4-vector desapareça. Na definição adoptada para tensão e deformação faz com que sejam ambas invariantes durante uma transformação de Lorentz.

3.3 Mecânica dos Meios Contínuos Elásticos em Relatividade Restrita

É geralmente aceite que todos os tipos de forças podem ser descritos por uma **4--densidade de força** f_i, que é a divergência de um certo tensor S_{ik}. Para todo o sistema de massa, a lei de conservação de energia-momento pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} \,=\, 0\,, \quad i,k = 0,1,2,3\,. \tag{3.19}$$

em que T_{ik} é o tensor total da energia-momento de um sistema fechado. Considere-se que T_{lk} e T_{kl} $(i = l = 1,2,3)$ representam as componentes espaciais deste tensor. O significado físico dos componentes T_{i0} e T_{0i} é traduzido pelas expressões

$$T_{0l} \,=\, \frac{i}{c}\,S_l, \tag{3.20}$$

em que $\mathbf{S}$ é a densidade de energia do fluxo de massa,

$$T_{l0} = icg_l \qquad T_{00} = -h \tag{3.21}$$

em que $\mathbf{g}$ e h representam, respectivamente, a densidade de momento e a densidade de energia. Estas relações são válidas para qualquer sistema físico fechado e, então, também o são para corpos elásticos se as tensões elásticas e energias forem incluídas.

A equação (3.19) para $i = 1, 2, 3$ pode agora ser escrita na forma

$$\frac{\partial T_{lk}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_l}{\partial t} = 0 \tag{3.22}$$

que representa a lei de conservação de momento na forma diferencial em que T_{lk}, como visto antes, é o tensor das tensões.

De forma semelhante, a equação (3.19) para $i = 0$ representa a equação da continuidade para a energia:

$$div\,\mathbf{S} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0\,. \tag{3.23}$$

O tensor total da energia-momento de um sistema fechado tem que ser simétrico, ou seja $T_{ik} = T_{ki}$, sendo a parte espacial desta equação, T_{lk}, importante para a validação da lei de conservação de momento, e se esta lei tiver que ser válida em qualquer sistema de inércia, a equação também tem que ser válida para as componentes espaço-temporais, isto é

$$T_{l0} = T_{0l} \tag{3.24}$$

ou, por (3.20) e (3.21),

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}\,. \tag{3.25}$$

Definindo a velocidade de propagação $\mathbf{v}^*$ da energia através da expressão

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{S}}{h} \tag{3.26}$$

a equação (3.24) ou (3.25) pode ser escrita na forma

$$\mathbf{g} = \frac{h}{c^2}\,\mathbf{v}^* \tag{3.27}$$

que é formalmente análoga a

$$\rho = \frac{h}{c^2} \tag{3.28}$$

demonstrando que a densidade de energia h corresponde à densidade de massa.

3.3.1 Equações Fundamentais da Mecânica dos Meios Contínuos

Considere-se um corpo elástico de face infinitesimal $d\sigma$ com uma normal definida pelo vector unitário $\mathbf{n}$ num determinado ponto P do espaço (ver figura 3.2).

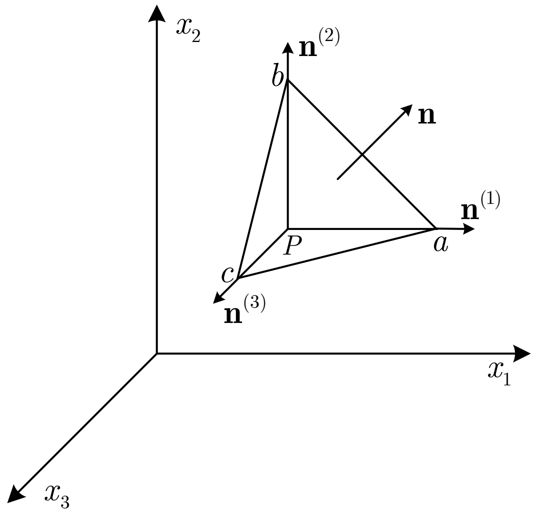


Figura 3.2: Elemento infinitesimal num referencial cartesiano. Adaptado de [20].

A matéria nos dois lados desta face estão sujeitas a uma força que é proporcional a $d\sigma$. A força que actua na direcção da normal será $\mathbf{t}(\mathbf{n})d\sigma$ e, a força na direcção oposta será $-\mathbf{t}(\mathbf{n})d\sigma$. Se $\mathbf{n}^1$, $\mathbf{n}^2$ e $\mathbf{n}^3$ forem vectores unitários nas direcções dos eixos cartesianos, então

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(1)}\right) n_1 + \mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(2)}\right) n_2 + \mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(3)}\right) n_3 \tag{3.29}$$

em que n_1, n_2 e n_3 são as componentes do vector unitário $\mathbf{n}$. A equação (3.29) é obtida considerando-se o elemento infinitesimal de matéria contido na pirâmide $abcP$ da figura 3.2. Se $d\sigma$ for a área do triângulo abc, as áreas dos triângulos Pbc, Pca e Pab vão ser, respectivamente, $n_1 d\sigma$, $n_2 d\sigma$ e $n_3 d\sigma$ e , então, a energia elástica total do elemento será

$$-\mathbf{t}(\mathbf{n})\, d\sigma + \mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(1)}\right) n_1\, d\sigma + \mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(2)}\right) n_2\, d\sigma + \mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(3)}\right) n_3\, d\sigma\,. \tag{3.30}$$

Esta força tem que ser igual à variação de momento do elemento de volume σV por unidade de tempo, ou seja, igual a

$$\frac{d\left(\mathbf{g}\,\delta V\right)}{dt} \tag{3.31}$$

em que δV é o volume da pirâmide e $\mathbf{g}$ é (como foi visto antes) a densidade de momento. No limite δV tende para zero mais depressa do que $d\sigma$; portanto

$$\frac{1}{d\sigma}\frac{d}{dt}(\mathbf{g}\,\delta V) \rightarrow 0 \tag{3.32}$$

o que nos leva de imediato à equação (3.29).

Se os componentes dos vectores $\mathbf{t}\left(\mathbf{n}^{(k)}\right)$ forem representadas por t_{lk}, podemos escrever a equação (3.29) na forma

$$\mathbf{t}_l(\mathbf{n}) = t_{lk} n_k \,. \tag{3.33}$$

Como $\mathbf{t}_l(\mathbf{n})$ e n_k são os componentes de vectores espaciais, as quantidades t_{lk} têm que ter uma lei de transformação tensorial semelhante às componentes de um tensor espacial durante uma rotação dos eixos Cartesianos. t_{lk} é o **tensor da tensão elástica** por vezes definido como o **tensor relativo da tensão**, em contraste com o tensor total de energia-momento denominado por vezes como o **tensor absoluto da tensão**.

A força elástica total $\mathbf{F}$ que actua na matéria dentro de uma superfície σ será igual a

$$-\int_{\sigma} \mathbf{t}(\mathbf{n})\, d\sigma \tag{3.34}$$

As componentes F_i através de (3.33) e pelo teorema de Gauss podem ser escritas na forma

$$F_l = -\int_{\sigma} t_{lk} n_k\, d\sigma = -\int_{\Omega} \frac{\partial t_{lk}}{\partial x_k}\, dV \tag{3.35}$$

onde a integração no lado direito da expressão abrange o interior da superfície fechada σ. Pode-se, então, definir uma **densidade de força elástica** $\mathbf{f}$ tal que

$$F_l = \int_{\Omega} f_l\, dV \tag{3.36}$$

e, comparando (3.35) com (3.36), vemos que a densidade de força elástica e o tensor relativo da tensão estão ligados por

$$f_l = -\frac{\partial t_{lk}}{\partial x_k} \,. \tag{3.37}$$

O movimento de elemento infinitesimal de volume, δV, vai ser determinado pela equação de movimento

$$\frac{d}{dt}(g_l\,\delta V) = f_l\,\delta V = -\frac{\partial t_{lk}}{\partial x_k} \tag{3.38}$$

em que $\mathbf{g}$ é a densidade de movimento e d/dt a derivada temporal. Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,(g_l\,\delta V) &= \frac{dg_l}{dt} + g_l\,\frac{d}{dt}\,\delta V \\ &= \left(\frac{\partial g_l}{\partial t} + \frac{\partial g_l}{\partial x_k}\,v_k\right)\delta V + g_l\,\delta V\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \\ &= \left(\frac{\partial g_l}{\partial t} + \frac{\partial\,(g_l v_k)}{\partial x_k}\right)\delta V\,, \end{aligned} \tag{3.39}$$

em que v_k são as componentes da velocidade $\mathbf{v}$ do elemento no ponto considerado, obtemos por (3.38) e (3.39)

$$\frac{\partial g_l}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\,(g_l\,v_k + t_{lk}) = 0\,. \tag{3.40}$$

Por outro lado, a lei de conservação de momento também é expressa por (3.22); então obtemos a seguinte relação entre os tensores absoluto e relativo da tensão:

$$T_{lk} = t_{lk} + g_l\,v_k\,. \tag{3.41}$$

De forma a encontrar uma expressão explícita para a densidade de momento, vamos utilizar a relação (3.25). O trabalho total realizado pelas forças elásticas na massa, no interior de uma superfície fechada σ, por unidade de tempo, é dado pela expressão

$$W = -\int_\sigma (\mathbf{t}(\mathbf{n})\cdot\mathbf{v})\,d\sigma = -\int_\sigma t_{lk}\,n_k\,v_l\,d\sigma = -\int_\Omega \frac{\partial\,(v_l t_{lk})}{\partial x_k}\,dV \tag{3.42}$$

onde a integração no ultimo integral é estendida ao interior Ω da superfície σ. O trabalho realizado sobre um elemento infinitesimal de matéria de volume δV é dado por:

$$\delta W = -\frac{\partial\,(v_l t_{lk})}{\partial x_k}\,\delta V\,. \tag{3.43}$$

Este tem que ser igual ao aumento por unidade de tempo de energia no interior de δV que é:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,(h\,\delta V) &= \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\,v_k\right)\delta V + h\,\delta V\,\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \\ &= \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\,(h\,v_k)\right]\delta V \end{aligned} \tag{3.44}$$

em que h é a densidade total de energia incluindo a energia elástica. Então, de (3.43) e (3.44), vamos obter

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (h\, v_k + v_l\, t_{lk}) = 0\,. \tag{3.45}$$

A Comparação entre (3.23) e (3.45) mostra que o fluxo total de energia é dado por

$$\mathbf{S} = h\,\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})\,, \tag{3.46}$$

em que $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})$ é um vector espacial de componentes $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})_k = v_l t_{lk}$, o que demonstra que além da corrente de convecção $h\mathbf{v}$ há um transporte extra de energia devido ao trabalho feito pelas forças elásticas. De (3.27) obtemos a densidade total de momento:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \rho\,\mathbf{v} + \frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})}{c^2} \tag{3.47}$$

em que $\rho = h/c^2$ é a densidade total da massa incluindo a massa da energia elástica. Devido ao ultimo termo de (3.47), o vector da densidade de momento não tem, de uma forma geral, a mesma direcção do movimento da matéria; então

$$g_l\, v_k \neq g_k\, v_l\,. \tag{3.48}$$

Como a lei de conservação de momento requer que $T_{lk} = T_{kl}$, de (3.41) obtemos

$$t_{lk} - t_{kl} = g_l\, v_k + g_k\, v_l = \frac{-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})_l v_k + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{t})_k v_l}{c_2} \neq 0 \tag{3.49}$$

ou seja, o tensor relativo da tensão não é simétrico.

Apenas no referencial de repouso da matéria S^0, no ponto considerado, temos $\mathbf{v}^0 = 0$ e, por (3.41), (3.46) e (3.47),

$$t^0_{lk} = T^0_{lk} = T^0_{kl} = t^0_{kl}, \quad S^0_l = \mathbf{g}^0_l = T^0_{l0} = 0, \quad T^0_{00} = -h^0 \tag{3.50}$$

sendo h^0 a densidade de energia de repouso.

Considere-se $\mathbf{u}$ a 4-velocidade da matéria. O tensor de energia-momento satisfaz a equação

$$T_{ik}\, u_k = -h^0\, u_i\,. \tag{3.51}$$

A validade da equação covariante (3.51) é obtida em (3.50) se escrita para o sistema de referencia de repouso, onde $u^0_i = (ct, 0, 0, 0)$. A relação (3.51) é característica de um tensor energia-momento puramente mecânico. Se multiplicarmos (3.51) por u_i obtemos a seguinte expressão para a invariante densidade de energia de repouso:

$$h^0 = \frac{u_i\, T_{ik}\, u_k}{c^2} \,. \tag{3.52}$$

Para $i = l = 1, 2, 3$, a expressão (3.51) dá origem a

$$T_{lk}\, u_k + T_{l0}\, u_0 = -h^0\, u_l \tag{3.53}$$

ou, através de (3.21) e (3.41),

$$(t_{lk} + g_l\, u_k)\, u_k - c^2\, g_l = -h^0\, u_l \,. \tag{3.54}$$

Resolvendo em ordem a g_l obtemos uma nova expressão para a densidade de momento

$$\mathbf{g} = \frac{\rho^0\, \mathbf{u} + \left(1/c^2\right)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{u})}{1 - u^2/c^2} \tag{3.55}$$

sendo $\rho^0 = h^0/c^2$ a densidade de energia de repouso e $(\mathbf{t} \cdot \mathbf{u})$ um vector espacial de componentes $t_{lk}u_k$. A equação (3.51) para $i = 0$ de uma forma semelhante, dá origem a

$$h = h^0 + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) = \frac{h^0 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{u})/c^2}{1 - u^2/c^2} \tag{3.56}$$

com $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) = u_l t_{lk} u_k$. A equação (3.56) também pode ser escrita na forma

$$T_{00} = -h = \rho^0\, u_0\, u_0 - \frac{1}{c^2}\, u_l\, t_{kl}\, u_k \,. \tag{3.57}$$

Se multiplicarmos (3.51) por u_i vamos obter

$$h^0 = \frac{u_i\, T_{ik}\, u_k}{c^2} \tag{3.58}$$

que dá origem a

$$h^0 = h\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^4}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \tag{3.59}$$

Dividindo (3.59) por c^2 vamos obter

$$\rho^0 = \rho\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{1}{c^4}\,(\mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \tag{3.60}$$

que é uma generalização da equação

$$\rho \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \;=\; \rho^0. \tag{3.61}$$

Fluídos Perfeitos

Num fluído perfeito a força $\mathbf{t}(\mathbf{n})$, num elemento de face com normal $\mathbf{n}$, é paralela a $\mathbf{n}$, ou seja

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) \;=\; p\,(\mathbf{n})\,, \tag{3.62}$$

sendo p a pressão normal. De (3.33) obtemos

$$t_{lk} \;=\; p\,\delta_{lk}\,. \tag{3.63}$$

Em particular, no referencial de repouso iremos ter

$$t^0_{lk} \;=\; p^0\,\delta_{lk}\,. \tag{3.64}$$

Como neste caso temos:

$$p\,\delta_{lk} \;=\; p^0\,\delta_{lk} \tag{3.65}$$

obtemos

$$p \;=\; p^0, \tag{3.66}$$

ou seja, a pressão normal é um escalar invariante.

Tendo em atenção as expressões (3.47) e (3.55), considerem-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)\mathbf{v} \;=\; \frac{\left(\rho^0 + p/c^2\right)\mathbf{v}}{1 - v^2/c^2} \\ h &= \frac{h^0 + p\,v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \\ p &= p^0\,. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Se ρ^0, p^0 e $\mathbf{v}$ forem constantes ao longo do corpo elástico, obtemos por integração destas relações, no volume $V = \sqrt{1 - v^2/c^2}\, V^0$ do corpo, as seguintes expressões:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} = \mathbf{g}\, V &= \frac{\left[\left(h^0 + p^0\right)/c^2\right]\; V\, \mathbf{v}}{1 - v^2/c^2} = \frac{\left[\left(h^0 + p^0\right)/c^2\right]\; V^0\, \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
&= \frac{\left[\left(H^0 + p^0\, V^0\right)/c^2\right]\; \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3.68) \\
H = h\, V &= \frac{H^0 + \left[\left(p^0\, V^0\right)/c^2\right]\; v^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

Destas expressões podemos encontrar

$$
\mathbf{G} = \frac{H + p\, V}{c^2}\, \mathbf{v} \qquad (3.70)
$$

e

$$
H + p\, V = \frac{H^0 + p^0\, V^0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,. \qquad (3.71)
$$

Capítulo 4

Aplicações na Relatividade Restrita

4.1 A Lei de Hooke Relativista

Considere-se um corpo elástico em repouso num referencial inercial I'. O eixo longitudinal do corpo faz um ângulo θ com o eixo Ox (ver figura 4.1).

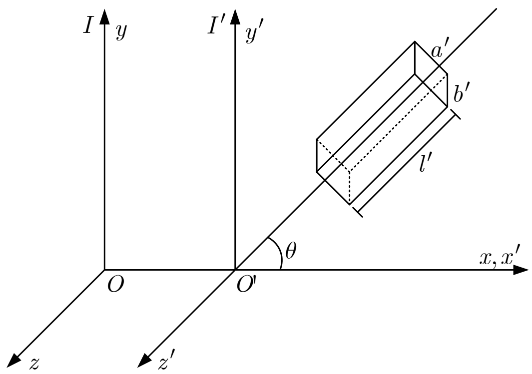


Figura 4.1: Corpo elástico sujeito a uma força que actua ao longo do eixo longitudinal.

Para um observador no referencial I' a lei de Hooke tem a forma

$$F' = Y' A' \left(\frac{\Delta l'}{l'} \right) = \kappa' \Delta l' \tag{4.1}$$

em que F' é a força que actua ao longo do eixo longitudinal, $A' = a'b'$ é a área da secção transversal do corpo e $\kappa' = Y'A'/l'$ a constante elástica. Para um observador que se encontra no referencial I, que se move a uma velocidade constante v em relação a I, a lei de Hooke vai ser da forma

$$F = Y\,A\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = \kappa\,\Delta l \tag{4.2}$$

sendo

$$\kappa = YA/l\,. \tag{4.3}$$

Devido ao primeiro princípio da relatividade restrita, o módulo de Young Y tem que ter o mesmo valor para todos os observadores inerciais, isto é

$$Y = Y'.$$

As componentes do comprimento l' do corpo no referencial I' são

$$l'_x = l'\cos\theta \tag{4.4}$$
$$l'_y = l'\sin\theta \tag{4.5}$$

o que faz com que em I vão ser

$$l_x = \beta^{-1}\,l'\cos\theta \tag{4.6}$$
$$l_y = l_y\,. \tag{4.7}$$

Então, o comprimento l medido por um observador ligado ao referencial I é dado por:

$$l = \sqrt{(l_x)^2 + (l_y)^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta}\;l'\,. \tag{4.8}$$

Para o cálculo de (4.2) as transformações de Lorentz dizem respeito às duas dimensões utilizadas para o cálculo da área transversal:

$$a = \sqrt{1 - \frac{v^2\sin^2\theta}{c^2}}\;a' \tag{4.9}$$
$$b = b'\,. \tag{4.10}$$

A área da secção transversal medida no referencial I vai ser dada por

$$A = \sqrt{1 - \frac{v^2\sin^2\theta}{c^2}}\;a'\,b' = \sqrt{1 - \frac{v^2\sin^2\theta}{c^2}}\;A'\,. \tag{4.11}$$

Com este resultado, a relação (4.2) passa a ser:

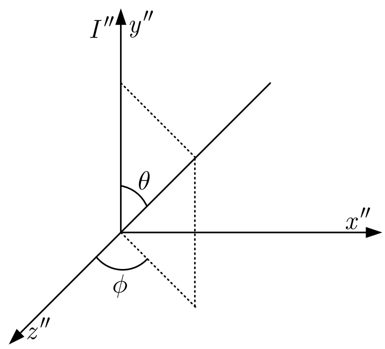
$$F = Y\, A' \sqrt{1 - \frac{v^2 \sin^2\theta}{c^2}}\,. \tag{4.12}$$

Os resultados obtidos levam a que a relação (4.3) tome a forma

$$\kappa = \frac{Y\, A'}{l'} \sqrt{\frac{1-(v^2/c^2)\sin^2\theta}{1-(v^2/c^2)\cos^2\theta}} = \kappa' \sqrt{\frac{1-(v^2/c^2)\sin^2\theta}{1-(v^2/c^2)\cos^2\theta}} \tag{4.13}$$

o que está de acordo com os resultados obtidos por Grøn [34, 35].

Para um referencial I'' com uma velocidade v, de direcção arbitrária, em relação a I temos:



$$\begin{aligned} a'' &= a' \sin\theta \sin\phi & (4.14)\\ b'' &= b' \cos\phi\,. & (4.15) \end{aligned}$$

Neste caso, a relação (4.2) tomaria a forma

$$F'' = Y\, A' \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \sin^2\theta \sin^2\phi \cos^2\phi} \tag{4.16}$$

e a relação entre κ'' e κ' é dada por:

$$\begin{aligned} \kappa'' &= \frac{Y\, A'}{l'} \sqrt{\frac{1-(v^2/c^2)\sin^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi}{1-(v^2/c^2)\sin^2\theta\sin^2\phi}} \\ &= \kappa' \sqrt{\frac{1-(v^2/c^2)\sin^2\theta\sin^2\phi\cos^2\phi}{1-(v^2/c^2)\sin^2\theta\sin^2\phi}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.2 Cinemática e Dinâmica de Corpos Elásticos em Relatividade Restrita

Teorias baseadas na mecânica de Newton há muito que são utilizadas para descrever a cinemática e dinâmica de corpos elásticos em velocidades não relativistas. Na mecânica de Newton, o comprimento de um corpo elástico varia com a tensão mas, é independente da sua velocidade, enquanto que, o momento linear varia com a velocidade sendo independente da tensão. Quando a equivalência inercial da energia, ou seja, a equivalência entre massa e energia é considerada, comprimento e momento passam a depender da velocidade e tensão. Enquanto que a dependência destas quantidades da velocidade podem ser determinadas por simetria durante uma transformação de Lorentz, a simetria por si só não determina a dependência no tempo da tensão e velocidade em diferentes partes do corpo durante a aceleração. Para este caso, uma teoria mais específica para corpos elásticos é necessária.

Aqui, com origem nos trabalhos de Møller [20] e Davidon [36], vai-se tentar descrever a cinemática e a dinâmica de corpos elásticos acelerados a qualquer velocidade inferior à da luz. Apesar da simetria durante uma transformação de Lorentz ser verificada, esta não é necessária para explicar as consequências físicas desta teoria qualquer que seja o sistema inercial. Das cinco equações básicas aqui apresentadas, quatro são consistentes tanto na mecânica de Newton como na relatividade restrita. A quinta é a equivalência inercial da energia, ou seja, para qualquer quantidade de energia E há uma correspondente quantidade de massa E/c^2. Todos os aspectos desta teoria podem ser directamente comparados com os seus equivalentes newtonianos substituindo $1/c^2$ por zero.

As derivadas parciais serão representadas pelo operador $\partial_a = \partial/\partial_a$. Serão apenas considerados corpos elásticos uni-dimensionais. Quantidades representadas por letras gregas minúsculas, são quantidades que a três dimensões dão origem a escalares, letras latinas minúsculas para quantidades que dão origem a 3-vectores e letras latinas maiúsculas para as quantidades que se generalizam em tensores de segunda ordem ou matrizes 3×3.

4.2.1 Equações Básicas

No caso aqui apresentado, há apenas duas quantidades independentes definidas para qualquer ponto do corpo elástico, e para qualquer instante de tempo t: a velocidade, v, e a tensão (força), F.

Considere-se a fig 4.2, que mostra um corpo elástico que se move com velocidade constante $v < c$, sendo sujeito à tensão de compressão uniforme F através de uma força $+F$ à esquerda e $-F$ à direita. O balanço destas forças F e $-F$ transferem momento à taxa F e energia à taxa Fv desde a extremidade esquerda até à extremidade direita do corpo. A teoria aqui apresentada irá determinar a evolução no tempo da tensão e velocidade de todas as partes do corpo e o seu valor para qualquer t, as propriedades elásticas e os valores de qualquer força externa.

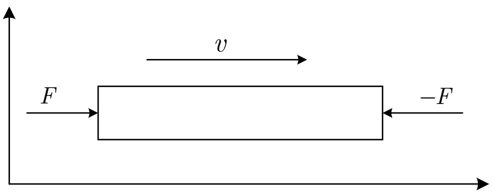


Figura 4.2: Corpo elástico sobre tensão em movimento uniforme.

Além das duas quantidades independentes F e v, há a considerar outras quatro dependentes:

1. A deformação U cujo incremento $U_1 - U_2$ num ponto do material é dado pela expressão que traduz a deformação real de um corpo

$$U \,=\, \ln \frac{l_1}{l_0} \tag{4.18}$$

que dá origem a

$$\frac{l_1}{l_0} \,=\, \exp\,(U_1 - U_2) \tag{4.19}$$

através da qual a distância l a cada ponto vizinho é alterada. A equação (4.19) dá origem à primeira suposição: a variação total no tempo da deformação U num ponto que se move com o material é igual à variação da velocidade v no espaço, ou seja,

$$(\partial_t \,+\, v\,\partial_x)\;U \,=\, \partial_x\, v \tag{4.20}$$

em que ∂_t e ∂_x são a derivada temporal e espacial respectivamente.

2. A densidade de massa inercial ρ, ou simplesmente, a densidade de inércia, que inclui o equivalente energético de todas as formas de energia, elástica e cinética. Esta grandeza é função de F e v, $\rho = \rho(F, v)$. Para $v = 0$, ρ é apenas função de v, e define-se como a densidade de massa μ:

$$\mu \,=\, \rho|_{v=0}\,, \quad \mu = \mu(F).$$

A densidade inercial será por (3.60), o somatório da densidade de massa μ com a equivalência inercial de todas as formas de energia presentes, podendo ser expressa por

$$\rho = \mu + \frac{Fv^2}{c^4} \cdot \tag{4.21}$$

3. g, densidade de momento linear (ou simplesmente a densidade de momento), que é o fluxo de massa inercial que passa por um ponto estacionário. Como vimos em (3.55) este é dado pela expressão

$$g = \rho v + \frac{Fv}{c^2} \tag{4.22}$$

em que $1/c^2$ é o equivalente inercial da energia.

4. T, o fluxo de momento linear que passa por um ponto estacionário. A expressão para esta grandeza advém da definição de tensor de energia-momento de (3.41) e pode ser traduzida por

$$T = g v + F. \tag{4.23}$$

Quando $v = 0$ teremos $T = F$.

As relações (4.22) e (4.23) mostram o fluxo de massa inercial e momento como a soma de uma parte convectiva igual à densidade da quantidade vezes a velocidade do material, e uma parte condutiva igual ao fluxo que passa num ponto que se move com o material. Um corpo sob tensão uniforme F, como no caso da figura 4.2, conduz momento linear de uma extremidade à outra à taxa F, o que dá origem ao segundo termo da equação (4.23). Por outro lado, um corpo em movimento sob tensão também transmite energia à taxa Fv de uma extremidade à outra, sendo que o equivalente inercial, Fv/c^2, deste fluxo de energia, vai dar origem ao segundo termo da equação (4.22).

Considere-se ainda que a variação no tempo de massa inercial e momento linear em qualquer região do corpo iguala o fluxo de massa inercial e fluxo de momento,respectivamente, para essa região e para os casos em que se consideram apenas forças exteriores. Estas suposições dão origem às equações homogéneas de continuidade [36]

$$\partial_t \rho + \partial_x g = 0 \tag{4.24}$$

e

$$\partial_t g + \partial_x T = 0\,. \tag{4.25}$$

As equações (4.24) e (4.25) estão de acordo com o ponto 3, equação (4.22), e o ponto

4, equação (4.23), respectivamente.

4.2.2 Influência da Velocidade e Tensão

As equações (4.22) e (4.23) mostram que

$$g = g\,(F, v, \rho) \tag{4.26}$$

$$T = T\,(F, v, \rho)\ . \tag{4.27}$$

Verifica-se que, a dependência de ρ, assim como de g, T e U da velocidade e da tensão também são determinadas pelas relações (4.19)–(4.25) juntamente com a equação constitutiva que dá a densidade de massa $\mu = \rho|_{v=0}$ como uma função da tensão.

Teorema 4.1 *Para qualquer função diferenciável $\mu = \mu(F)$ com $\mu + F/c^2 \neq 0$, existe apenas um conjunto de funções $\rho = \rho(F, v)$, $g = g(F, v)$, $T = T(F, v)$ e $U = U(F, v)$ que satisfazem as condições fronteira $\mu = \rho|_{v=0}$ e $0 = U|_{F,v=0}$, assim como as equações (4.19)–(4.25) para todas as derivadas $\partial_x F$ e $\partial_x v$. Estas funções são*

$$\rho = \frac{\mu\, +\, F v^2/c^4}{1 - v^2/c^2} \tag{4.28}$$

$$g = \frac{\mu\, v\, +\, F v/c^2}{1 - v^2/c^2} \tag{4.29}$$

$$T = \frac{\mu\, v^2\, +\, F}{1 - v^2/c^2} \tag{4.30}$$

e

$$U = \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \int_0^{\mu} \frac{d\mu}{\mu + F/c^2}\,. \tag{4.31}$$

Demonstração:
Considerem-se as funções

$$\rho = \rho\,(F, v) \tag{4.32}$$

$$g = g\,(F, v) \tag{4.33}$$

$$T = T\,(F, v) \tag{4.34}$$

$$U = U\,(F, v) \tag{4.35}$$

e utilize-se a regra da cadeia para calcular as derivadas ∂_x e ∂_t. Obtemos desta forma as seguintes derivadas de ρ, g, T e v em termos das derivadas ∂_F e ∂_v, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
\partial_t U &= \partial_F U\, \partial_t F + \partial_v U\, \partial_t v \\
\partial_x U &= \partial_F U\, \partial_x F + \partial_v U\, \partial_x v \\
\partial_t \rho &= \partial_F \rho\, \partial_t F + \partial_v \rho\, \partial_t v \\
\partial_x \rho &= \partial_F \rho\, \partial_x F + \partial_v \rho\, \partial_x v \\
\partial_t g &= \partial_F g\, \partial_t F + \partial_v g\, \partial_t v \\
\partial_x g &= \partial_F g\, \partial_x F + \partial_v g\, \partial_x v \\
\partial_t T &= \partial_F T\, \partial_t F + \partial_v T\, \partial_t v \\
\partial_x T &= \partial_F T\, \partial_x F + \partial_v T\, \partial_x v
\end{aligned}
$$

Substituindo estas derivadas nas equações (4.20), (4.24) e (4.25) obtemos

$$\partial_F U\, \partial_t F + \partial_v U\, \partial_t v + v \partial_F U\, \partial_x F + (v \partial_v U - 1)\, \partial_x v = 0 \tag{4.36}$$

para (4.20),

$$\partial_F \rho\, \partial_t F + \partial_v \rho\, \partial_t v + \partial_F g\, \partial_x F + \partial_v g\, \partial_x v = 0 \tag{4.37}$$

para (4.24), e

$$\partial_F g\, \partial_t F + \partial_v g\, \partial_t v + \partial_F T\, \partial_x F + \partial_v T\, \partial_x v = 0 \tag{4.38}$$

para (4.25). Podem-se, assim, obter três equações lineares nos termos $\partial_t F$, $\partial_t v$, $\partial_x F$ e $\partial_x v$:

$$\begin{bmatrix} \partial_F U & \partial_v U & v\partial_F U & v\partial_v U - 1 \\ \partial_F \rho & \partial_v \rho & \partial_F g & \partial_v g \\ \partial_F g & \partial_v g & \partial_F T & \partial_v T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_t F \\ \partial_t v \\ \partial_x F \\ \partial_x v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Para que este sistema tenha solução para todas as derivadas $\partial_t F$, $\partial_t v$, $\partial_x F$ e $\partial_x v$, a matriz 3×4 tem que ter característica 2 ou inferior, ou seja, toda a sub-matriz 3×3 tem que ter determinante nulo, por exemplo:

$$\begin{vmatrix} \partial_F U & \partial_v U & v\partial_F U \\ \partial_F \rho & \partial_v \rho & \partial_v g \\ \partial_F g & \partial_v g & \partial_F T \end{vmatrix} = 0 \tag{4.40}$$

e

$$\begin{vmatrix} \partial_v U & v\partial_F U & v\partial_v U - 1 \\ \partial_v \rho & \partial_F g & \partial_v g \\ \partial_v g & \partial_F T & \partial_v T \end{vmatrix} = 0 \tag{4.41}$$

Obtemos, então, duas equações linearmente independentes para $\partial_F U$ de (4.40) e $\partial_v U$ através de (4.41):

$$\partial_F U \,=\, \frac{\partial_v U \left[(\partial_F g)^2 \,-\, \partial_F T \, \partial_F \rho \right]}{v\,(\partial_F g\, \partial_v \rho \,-\, \partial_F \rho\, \partial_v g) \,+\, \partial_F g\, \partial_v g} \tag{4.42}$$

e

$$\partial_v U \,=\, \frac{v \left[(\partial_v g)^2 \,-\, \partial_v F\, \partial_F U\, \partial_v \rho \right] \,+\, \partial_v g\, \partial_F g}{v\,(\partial_v g\, \partial_F g \,-\, \partial_v \rho\, \partial_F T) \,+\, \partial_v T\, \partial_F g \,+\, \partial_v g\, \partial_F T}\,. \tag{4.43}$$

Substituindo (4.43) em (4.42) obtemos

$$\partial_F U = \frac{(\partial_F g)^2 \,-\, \partial_F T\, \partial_F \rho}{v\,(v\partial_v \rho \partial_F g - \partial_v \rho \partial_F g - v\partial_F \rho \partial_v g + \partial_v T \partial_F \rho) + \partial_v g \partial_F T - \partial_v T \partial_F g} \tag{4.44}$$

e substituindo (4.42) em (4.43) vamos obter

$$\partial_v U \,=\, \frac{v\,(\partial_F g \partial_v \rho - \partial_F \rho \partial_v g) + \partial_F g \partial_v g - \partial_F T \partial_v \rho}{v\,(\partial_F g \partial_v \rho - v\partial_v g \partial_F \rho - \partial_v \rho \partial_F T + \partial_F \rho \partial_v q) - \partial_v T \partial_F g + \partial_v g \partial_F T}\,. \tag{4.45}$$

Para o cálculo das expressões finais de $\partial_F U$ e $\partial_v U$, considere-se a equação (4.22). Se calcularmos as derivadas parciais da função g, em função das derivadas ∂_F e ∂_v, vamos obter:

$$\begin{aligned} \partial_F\, g \;&=\; (\partial_F\, \rho)\; v \,+\, \rho\; (\partial_F\, v) \,+\, \partial_F\, \frac{F v}{c^2} \\ &=\; (\partial_F\, \rho)\; v \,+\, \frac{v}{c^2} \end{aligned} \tag{4.46}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_v\, g \;&=\; (\partial_v\, \rho)\; v \,+\, \rho\; (\partial_v\, v) \,+\, \partial_v\, \frac{F v}{c^2} \\ &=\; v\, \partial_v\, \rho \,+\, \rho \,+\, \frac{F}{c^2}\,. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Substituindo (4.22) em (4.23) vamos obter a seguinte expressão para T:

$$T \,=\, \rho\, v^2 \,+\, \frac{F\, v^2}{c^2} \,+\, F \tag{4.48}$$

Derivando esta expressão de forma análoga a (4.22), obtemos as seguintes expressões para as derivadas ∂_F e ∂_v:

$$\partial_F T = (\partial_F \rho)\, v^2 + \frac{v^2}{c^2} + 1 \tag{4.49}$$

e

$$\partial_v T = (\partial_v \rho)\, v^2 + 2\,\rho\, v + 2\,\frac{F\, v}{c^2}\,. \tag{4.50}$$

Substituindo (4.46), (4.47), (4.49) e (4.50) nas expressões (4.44) e (4.45) ficamos com:

$$\begin{aligned} \partial_F U &= -\frac{(\partial_F \rho)\, v^2\, c^2 + v^2 - (\partial_F \rho)\, c^4}{\rho\, v^2\, c^2 - \rho\, c^4 + F\, v^2 - F\, c^2} \\ &= -\frac{\partial_F \rho}{\rho + F/c^2} + \frac{v^2/c^4}{(\rho + F/c^2)\,(1 - v^2/c^2)} \end{aligned} \tag{4.51}$$

e

$$\begin{aligned} \partial_v U &= -\frac{(\partial_v U)\, v^2\, c^2 + v\,\rho\, c^2 + F\, v - (\partial_v \rho)\, c^4}{\rho\, v^2\, c^2 - \rho\, c^4 + F\, v^2 - F\, c^2} \\ &= -\frac{\partial_v \rho}{\rho + F/c^2} + \frac{v/c^2}{1 - v^2/c^2}\,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Estas equações são integráveis em U como função de F e v sse a derivada ∂_v de (4.51) for igual a ∂_F de (4.52), ou seja, $\partial_F U = \partial_v U$ obtendo-se a expressão

$$-\frac{\partial_F \rho}{\rho + F/c^2} + \frac{v^2/c^4}{(\rho + F/c^2)\,(1 - v^2/c^2)} = -\frac{\partial_v \rho}{\rho + F/c^2} + \frac{v/c^2}{1 - v^2/c^2}\,.$$

Resolvendo em ordem a $\partial_v \rho$ vamos obter

$$\partial_v \rho = \frac{2\, v\, \left(\rho + F/c^2\right)}{c^2 - v^2} \tag{4.53}$$

De (4.53) obtém-se a expressão

$$\frac{\partial_v \rho}{\rho + F/c^2} = \frac{2\, v}{c^2 - v^2} \tag{4.54}$$

que integrada em v com a condição fronteira $\mu = \rho|_{v=0}$ dá origem a (4.28), ou seja,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\partial_v \rho}{\rho + F/c^2}\, dv &= \int \frac{2\, v}{c^2 - v^2}\, dv \\
\ln\left(\rho + \frac{F}{c^2}\right) &= -\ln\left(c^2 - v^2\right) + \phi\,(F) \\
\ln\left(\rho + \frac{F}{c^2}\right) &= \ln\left(c^2 - v^2\right)^{-1} + \phi\,(F) \\
\rho + \frac{F}{c^2} &= \frac{1}{c^2 - v^2} \exp\,(\phi(F))\ .
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Fazendo $\exp\,(\phi(F)) = \psi(F)$, obtemos

$$\rho + \frac{F}{c^2} = \frac{1}{c^2 - v^2}\, \psi(F) \tag{4.56}$$

o que dá para ρ

$$\rho = \frac{\psi(F)}{c^2 - v^2} - \frac{F}{c^2}\,. \tag{4.57}$$

Para $v = 0$ em que se vai ter $\mu = \rho$, (4.57) toma a forma

$$\mu = \frac{\psi(F)}{c^2} - \frac{F}{c^2} \tag{4.58}$$

De (4.58) tira-se o valor da função $\psi(F)$:

$$\psi(F) = \mu\, c^2 + F \tag{4.59}$$

Substituindo (4.59) em (4.57) obtemos a equação (4.28).

Substituindo (4.28) em (4.22) e (4.23), ou seja, nas expressões

$$\begin{aligned}
g &= \rho\, v + \frac{F v}{c^2} \\
T &= g\, v + F = \rho\, v^2\, \frac{F v^2}{c^2} + F\,,
\end{aligned}$$

obtemos (4.29) e (4.30). Substituindo (4.28) em (4.51) e (4.52) vamos obter

$$\partial_F\, U = \frac{\partial_F\, \rho\, c^4 - \partial_F\, \rho\, c^2 - v^2}{c^2\, (\mu\, c^2 + F)}$$

que para $v = 0$ toma a forma

$$\partial_F U = -\frac{\partial_F \mu}{\mu + F/c^2}\,. \tag{4.60}$$

Uma vez que para $v = 0$, $\rho = \mu$ o que faz com que $\partial_v \mu = 0$, já que μ não é função de v. Vamos ter, então

$$\partial_v U = \frac{v/c^2}{1 - v^2/c^2}\,. \tag{4.61}$$

Considerando os resultados (4.60) e (4.61), pode-se escrever a variação total de deformação a partir da expressão:

$$\begin{aligned} dU &= \partial_F U\, dF + \partial_v U\, dv & (4.62)\\ &= -\frac{\partial_F \mu}{\mu + F/c^2} + \frac{v/c^2}{1 - v^2/c^2}\,. & (4.63)\end{aligned}$$

Integrando esta última expressão e considerando a condição fronteira $0 = U|_{F,v}$ $\mu = \mu(F)$, $\partial_F \mu = d\mu$, obtemos (4.31). Prova-se, deste modo, o teorema 4.1.

4.2.3 Interpretação dos Resultados

Combinando a equação (4.60) com a expressão[1]

$$\partial_F U = \frac{\partial_F l}{l} \tag{4.64}$$

obtemos uma equação diferencial de primeira ordem que demonstra a dependência do comprimento l e da densidade de massa μ com a tensão:

$$\frac{\partial_F l}{l} = -\frac{\partial_F \mu}{\mu + F/c^2}\,. \tag{4.65}$$

Considerou-se que o comprimento l do corpo é directamente proporcional à deformação, ou seja, é uma função do estado de tensão. Isto leva a que, a energia elástica do corpo ξ varie com a tensão. Neste caso [36], a variação da energia elástica varia com a tensão através da expressão

$$\partial_F \xi = -F\,\partial_F l\,. \tag{4.66}$$

[1] $\exp(U_1 - U_0) = \frac{l_1}{l_0}$, o que faz com que $U \sim \frac{l_1}{l_0}$; temos, então que $\partial_F U = \partial_F \frac{l_1}{l_0}$

A massa inercial total, $\mu\, l$, do corpo em repouso vai aumentar com a equivalência inercial da energia elástica, de forma que

$$\partial_F\, (\mu\, l) \,=\, \partial_F\, \frac{\xi}{c^2} \,=\, -\, F\, \partial_F\, \frac{l}{c^2} \,\cdot \tag{4.67}$$

Se derivarmos o produto μl e resolvermos em ordem a $\partial_F\, l$ obtemos a expressão (4.64):

$$\begin{aligned} l\, \partial_F\, \mu \,+\, \mu\, \partial_F\, l &\;=\; -\, F\, \partial_F\, \frac{l}{c^2} \\ \mu\, \partial_F\, l \,+\, F\, \partial_F\, \frac{l}{c^2} &\;=\; -\, l\, \partial_F\, \mu \\ \partial_F\, l\, \left(\mu \,+\, \frac{F}{c_2}\right) &\;=\; -\, l\, \partial_F\, \mu \\ \frac{\partial_F\, l}{l} &\;=\; -\, \frac{\partial_F\, \mu}{\mu \,+\, F/c_2}\,\cdot \end{aligned} \tag{4.68}$$

Considere-se novamente a equação de Hooke

$$F \,=\, \kappa\, l$$

em que κ é uma constante elástica que depende apenas das características do material, l o comprimento do corpo que neste caso é uma medida da deformação e F, como já vimos, é a força. Como l é uma medida da deformação, então, $l = l(F)$. Se calcularmos a segunda derivada de $F - \kappa l = 0$ em ordem a F, ou seja,

$$\partial_F^2\, (F - \kappa l) = 0\,,$$

obtemos uma equação diferencial para a lei de Hooke:

$$\partial_F^2\, l \,= 0\,. \tag{4.69}$$

Como

$$\begin{aligned} \partial_F^2\, l &\;=\; \partial_F\, (\partial_F\, l) \,=\, \partial_F\, (l\, \partial_F\, U) \,=\, \partial_F\, l\, \partial_F\, U \,+\, l\, \partial_F^2\, U \\ &\;=\; l\, \left[(\partial_F\, U)^2 \,+\, \partial_F^2\, U \right]\,, \end{aligned}$$

por (4.60) verifica-se que o corpo obedece à lei de Hooke expressa por (4.69) sse

$$\left(\mu \,+\, \frac{F}{c^2}\right)\, \partial_F^2\, \mu \,=\, 2\, \partial_F\, \mu\, \left(\partial_F\, \mu \,+\, \frac{1}{2\, c^2}\right)\,. \tag{4.70}$$

A solução geral [36] desta equação diferencial de segunda ordem é

$$\mu = \frac{\mu_0 + F/2\,\mu_0\,a_0^2\,c^2}{1 - F/\mu_0\,a_0^2}\,, \tag{4.71}$$

em que $\mu_0 = \mu_{|F=0}$ é a densidade de massa de um corpo não deformado em repouso e, $a_0 = (\partial_F \mu)^{-\frac{1}{2}}$ é a velocidade do som num corpo não deformado em repouso. este resultado também pode ser obtido adicionando a equivalência inercial E/c^2 da energia elástica $E = l_0\,F^2/2\,\mu_0\,a_0^2$ á massa não deformada $\mu_0 l_0$ e dividindo pelo comprimento $l = l_0\left(1 - F/\mu_0 a_0^2\right)$ do corpo sob tensão (deformado).

O teorema 4.1 demonstra que as equações (4.20)–(4.23) determinam a influência da velocidade e da tensão nas propriedades dos corpos elásticos. Estas equações originam o factor de contracção de Lorentz, $\left(1 - v^2/c^2\right)^{\frac{1}{2}}$, de um corpo elástico em qualquer referencial de inércia em vez de dar a razão entre os comprimentos observados por diferentes observadores em diferentes referencias inerciais. A variação da massa inercial total $\rho\,l$ e do momento total $g\,l$ são, também, determinados por estas equações com as condições fronteira apropriadas, já que ρ, g e l são também determinados.

4.2.4 Conclusão

A teoria macroscópica aqui apresentada para corpos elásticos assume cinco equações básicas, (4.20)-(4.25), que relacionam a tensão F, velocidade do material v, deformação U, densidade inercial ρ, fluxo inercial e densidade de momento g e o fluxo do momento T. O teorema 4.1 demonstra que a dependência de ρ, g, T e U da tensão e velocidade são unicamente determinadas por estas suposições com um conjunto apropriado de condições fronteira. Destas, os usuais resultados relativistas para a dependência do comprimento e massa inercial da velocidade são determinados.

Esta teoria fornece uma imagem detalhada para densidades localizadas e fluxos de quantidades em corpos elásticos sujeitos a tensão e aceleração, o que, na maioria dos casos, contribui para a compreensão dos processos físicos a uma qualquer velocidade inferior à da luz. Descreve diferentes processos físicos num único e arbitrário referencial inercial através da utilização de um único sistema de coordenadas em alternativa à descrição que envolve diferentes referenciais inerciais e à forma como as diferentes quantidades se transformam entre eles.

Muitos dos resultados são comuns em relatividade restrita. O que é novo aqui é que, os resultados aqui obtidos podem ser obtidos em qualquer referencial inercial através de um conjunto de suposições nas quais a constante fundamental $1/c^2$ entra em apenas um termo da equação (4.22), na qual se associa a densidade de momento $F\,v/c^2$ ao fluxo energético Fv.

Além de fornecer um processo alternativo de calcular resultados conhecidos e um mais detalhado processo de estudar fenómenos relativistas num qualquer referencial de inércia, esta teoria fornece resultados novos: mostra que certas condições, todas as quais determinam a dependência da densidade de massa da tensão, apesar de serem todas equivalentes à lei de Hooke da mecânica de Newton, originam diferentes generalizações dessa lei quando o equivalente inercial da energia, $1/c^2$, é tomado em conta:

$$\partial_F^2 \, l \, = 0$$

ou

$$\left(\mu + \frac{F}{c^2}\right) \partial_F^2 \, \mu \, = \, 2 \, \partial_F \, \mu \left(\partial_F \, \mu + \frac{1}{2 \, c^2}\right) . \tag{4.72}$$

Embora fossem considerados apenas corpos unidimensionais, as equações básicas (4.20)-(4.25) podem ser generalizadas para espaços a três dimensões. Neste ultimo caso é necessário mais uma equação constitutiva para relacionar a tensão de corte à deformação que ela produz nos materiais elásticos, já que, a influência da tensão na densidade de massa não pode unicamente determinar as propriedades do material como acontece para casos uni-dimensionais [36].

Bibliografia

[1] Albert Einstein, **Relativity, The Special and the General Theory**, Three Rivers Press, New York, 1961.

[2] A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski, **The principle of Relativity, A Collection of Original Papers on the Special and General Theory of Relativity**, Dover Publications, Inc., New York, 1953.

[3] Wolfgang Rindler; **Introduction To Special Relativity**, 2^{th} Edition, Claredon Press-Oxford, 1996.

[4] James H. Smith; **Introduction To Special Relativity**, Dover Publications, Inc., New York, 1993.

[5] Ray D'Inverno; **Introducing Einstein's Relativity**, Oxford University Press, 2002.

[6] N.M.J. Woodhouse; **Special Relativity**, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer, 2003.

[7] A. Das; **The Special Theory of Relativity, A Mathematical Exposition**, Universitext, Springer, 1993.

[8] E. G. Peter Rowe; **Geometrical Physics in Minkowski Spacetime**, Springer Monographs in Mathematics, Springer, 2001.

[9] Gregory L. Naber; **The Geometry of Minkowski Spacetime - An Introduction to the Mathematics of the Special Theory of Relativity**, Dover Publications, Inc., New York, 1992.

[10] Peter Gabriel Bergmann; **Introduction to the Theory of Relativity**; Dover Publications, Inc., New York, 1976.

[11] W. Pauli; **Theory of relativity**, Dover Publications, Inc., New York, 1981.

[12] Bernard F. Schutz; **A First Course in General Relativity**, Cambridge University Press, 1985.

[13] Erwin Kreyszig; **Differential Geometry**, Dover Publications, 1991.

[14] Richard L. Faber; **Differential Geometry and Relativity Theory, An Introduction**, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc.

[15] William M. Boothby; **An Introduction To Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry**, Revised Second Edition, Academic Press, 2002.

[16] David C. Kay; **Schaum's Outline of Theory and Problems of Tensor Calculus**, McGraw-Hill, 1988.

[17] J.L.Synge, A. Schild; **Tensor Calculus**, Dover Publications, 1978.

[18] J.L.Synge; **Relativity: The Special Theory**, North-Holland Publishing Company, 1972.

[19] J. Aharoni; **The Special Theory of Relativity**, Oxford University Press, 1959.

[20] C. Møller; **The Theory of Relativity**, The International Series of Monographs on Physics, Oxford University Press, 1962.

[21] D.F. Lawden; **Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology**, Dover Publications, 2002.

[22] Herbert Goldstein, **Classical Mechanics**, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.

[23] Donald T. Greenwood; **Classical Dynamics**, Dover Publications, 1997.

[24] Bernard Schutz; **Geometrical Methods of Mathematical Physics**, Cambridge University Press, 1999.

[25] T. C. Bradbury; **Theoretical Mechanics**, John Wiley & Sons, Inc, 1968.

[26] Piedade Ramos; **The Lorentz Group**, Tese de Mestrado, 1992.

[27] David W.Hogg; *Special Relativity*, School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study, Princeton, 1997.

[28] Y.C. Fung; **A First Course in Continuum Mechanics**, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.

[29] Y.C. Fung; **Foundations of Solid Mechanics**, International Series in Dynamics, Prentice-Hall, 1965.

[30] I.S. Sokolnikoff; **Tensor Analysis, Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua**, John Wiley & Sons, 1964.

[31] I.S. Sokolnikoff; **Mathematical Theory of Elasticity**, Robert E. Krieger Publishing Company, 1983.

[32] A. E. Green, W. Zerna; **Theoretical Elasticity**, Oxford University Press, 1963.

[33] D.S. Chandrasekharaiah, Lokenath Debnath; **Continnum Mechanics**, Academic Press, 1994.

[34] Ø. Grøn; *Covariant Formulation of Hooke's Law*, American Journal of Physics, Vol.49, No.1, pág. 28-30, Janeiro, 1981.

[35] Bernhard Rothenstein; *A Simple Way to the Relativistic Hooke's Law*, American Journal of Physics, Vol.53, No.1, pág. 87-88, Janeiro, 1985.

[36] William C. Davidon; *Kinematics and Dynamics of Elastic Rods*, American Journal of Physics, Vol.43, No.8, pág. 705-713, Agosto, 1975.