



Simulação Numérica do Comportamento Térmico de Compartimentos Sujeitos a Incêndios Localizados

Nuno Guilherme Ribeiro Caiado

Relatório Final de Projeto apresentado à
Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

para obtenção do grau de Mestre em
Engenharia da Construção

Novembro 2012

Simulação Numérica do Comportamento Térmico de Compartimentos Sujeitos a Incêndios Localizados

Nuno Guilherme Ribeiro Caiado

Relatório Final de Projeto apresentado à
Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Bragança

para obtenção do grau de Mestre em

Engenharia da Construção

Orientador:

Carlos Jorge da Rocha Balsa

Co-orientador:

Paulo Alexandre Gonçalves Piloto

Novembro 2012

AGRADECIMENTOS

A realização desta Dissertação de Mestrado só foi possível graças à colaboração e ao contributo, de forma direta ou indireta, de várias pessoas, às quais gostaria de exprimir algumas palavras de agradecimento e profundo reconhecimento, em particular:

Ao Professor Doutor Carlos Jorge da Rocha Balsa – como orientador - e ao Professor Doutor Paulo Alexandre Gonçalves Piloto – como coorientador, pela disponibilidade manifestada para orientar este trabalho, pela preciosa ajuda na orientação científica, pela revisão crítica do texto, pelos comentários e esclarecimentos, opiniões e sugestões, e pela apresentação de algumas metodologias e valiosas indicações.

Por último, mas não menos importante:

À minha família, principalmente aos meus pais, por todo o apoio durante esta etapa, sem eles não seria possível a realização deste trabalho.

Aos meus padrinhos, Rui Sousa e Maria José pelo constante incentivo, e apoio incondicional.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas pelos momentos que passamos juntos ao longo da realização deste trabalho, pela colaboração e apoio demonstrados.

À minha namorada, Márcia Freitas, pelo constante apoio e incentivo durante a realização deste trabalho, a sua presença foi fundamental ao longo da concretização deste projeto.

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de um método computacional que permita modelar a distribuição das temperaturas no interior de uma laje em betão simples sujeita a um incêndio localizado.

Resolveu-se numericamente as equações de transferência de calor através de diferenças finitas e de elementos finitos. Os algoritmos desenvolvidos foram implementados em linguagem OCTAVE. Numa primeira fase validaram-se os vários aspetos da simulação (esquemas de discretização, tipos de condições de fronteira, etc...) em pequenos problemas existentes na literatura.

Numa segunda fase adaptaram-se os algoritmos à modelação do comportamento térmico de uma viga em betão e compararam-se os resultados obtidos com os resultados provenientes da mesma simulação através do *software* comercial ANSYS®. Em ambos os casos consideraram-se propriedades do betão, como o calor específico, massa volúmica e condutividade térmica, dependentes da temperatura tal como especificado nas normas do Eurocódigos.

Os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos e pelo método das diferenças finitas, embora não sejam iguais, estão em consonância. Mostram também a mesma tendência quando se mudam as dimensões da malha. Verifica-se que quanto maior for o número de subintervalos escolhidos na direção vertical maiores são os valores das temperaturas finais.

Para a obtenção dos efeitos térmicos resultantes do incêndio localizado utilizou-se uma taxa de libertação de calor modelada por uma curva de incêndio “segura” de um veículo utilitário. O fluxo de calor incidente na laje de betão foi igualmente calculado através das fórmulas indicadas no Eurocódigo.

Em alternativa à curva de incêndio foi também feita uma simulação das temperaturas resultantes do incêndio através do *software* FLUENT®. Contudo os resultados desta simulação não foram conclusivos e como tal não foram utilizadas para descrever as temperaturas na parte inferior da laje.

Palavras-chave: “Condução de Calor”, “Diferenças Finitas”, “Elementos Finitos”, “Programação”, “Incêndio”, “Eurocódigos”.

ABSTRACT

The present work has as main objective the development of a computational method that allows modeling the distribution of temperatures inside a plain concrete slab subjected to a localized fire.

The equations of heat transfer across a finite difference and finite elements were solved numerically. The developed algorithms were implemented in OCTAVE language. Initially it was validated up the various aspects of the simulation (discretization schemes, types of boundary conditions, etc ...) in small problems in the literature.

In a second stage it was adapted algorithms for modeling of the thermal behavior of a beam of concrete and compared to the results obtained with results from the same simulation using the commercial software ANSYS®. In both cases were considered concrete properties, such as specific heat, density and thermal conductivity, temperature dependent as specified in standards Eurocodes.

The results obtained by the finite element method and the finite difference method, although not identical, are consistent. Also show the same trend when changing the dimensions of the mesh. It is found that greater the numbers of subintervals chosen in the vertical direction are higher the values of final temperature.

To obtain the thermal effects resulting from localized fire, it was used a "safe" heat release rate curve modeled by a fire of a utility vehicle. The heat flux incident on the concrete slab was also calculated using the indicated formulas in Eurocode.

Alternatively to fire curve it was also performed a simulation of the temperatures resulting from the fire using the software FLUENT®. However the results of this simulation were inconclusive and as such have not been used to describe the temperature at the bottom of the slab.

Key-words: "Heat Conduction", "Finite Difference", "Finite Element", "Programming", "Fire", "Eurocode".

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. Enquadramento temático	1
1.2. Objetivos e metodologias do trabalho	1
1.3. Organização da tese	2
2 Incêndios em Estruturas	3
2.1. Introdução.....	3
2.2. Fenómenos de transferência de calor.....	3
2.2.1. Condução.....	3
2.2.2. Convecção	4
2.2.3. Radiação	5
2.3. Curva de incêndio natural.....	6
2.4. Curva de incêndio normalizadas.....	7
2.5. Aproximação de incêndio localizados	9
2.5.1. Método de Heskestad	9
2.5.2. Método de Hasemi	10
2.5.3. Método avançado com FLEUNT	12
3 Resolução da equação de transferência de calor por diferenças finitas	15
3.1. Equação de Laplace	15
3.1.1. Resolução por diferenças finitas	16
i. Aproximação por diferenças finitas.....	17
3.1.2. Condições de fronteira	18
i. Condições de fronteiras constantes.....	18
ii. Condições de fronteiras com isolamento.....	21
iii. Condições de fronteira nas esquinas da placa.....	23
iv. Condições de fronteira sob ação de um fluxo de calor.....	26

3.2.	A equação de condução de calor	27
3.2.1.	Método Explícito.....	28
i.	Estabilidade do método explícito.....	28
3.2.2.	Método Implícito.....	30
3.2.3.	Equações parabólicas em duas dimensões	34
4	Aproximação numérica de equações diferenciais por elementos finitos.....	37
4.1	Introdução.....	37
4.2	Problema a uma dimensão.....	37
4.3	Problema a duas dimensões estacionário.....	44
4.3.1	Resolução da equação de Laplace a duas dimensões.....	46
4.3.2	Regime Transiente.....	49
4.3.3	Resolução explícita	50
4.3.4	Resolução implícita.....	53
5	Modelação numérica do efeito de um incêndio localizado sobre uma laje em betão	55
5.1.	Introdução.....	55
5.2.	Características dos materiais	55
5.2.1.	Massa volúmica.....	55
5.2.2.	Calor específico.....	56
5.2.3.	Condutividade térmica	57
5.3.	Descrição do problema	57
5.3.1.	Fluxo de calor resultante do incêndio	58
5.4.	Simulação por diferenças finitas.....	59
5.5.	Simulação por elementos finitos.....	67
5.6.	Resultados obtidos com o programa ANSYS.....	74
5.7.	Simulação das temperaturas resultantes do incêndio através do FLUENT®.....	80
6	Comparação e análise de resultados	85
6.1.	Comparação dos resultados obtidos pelos três métodos.....	87

7	Considerações finais.....	91
	Referências bibliográficas.....	93

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 - Curva de incêndio natural, (Pinto, 2005).....	7
Figura 2.2 - Curva de Incêndio Normalizadas	8
Figura 2.3 - Método de Heskestad, (EC1-1-2, 2002).....	10
Figura 2.4 - Método de Hasemi, (EC1-1-2, 2002)	10
Figura 2.5 - Condutividade do ar	13
Figura 2.6 - Calor específico do ar.....	13
Figura 2.7 - Massa específica do ar.....	13
Figura 2.8 - Viscosidade dinâmica do ar.....	14
Figura 3.1 - Placa retangular fina de espessura Δz	15
Figura 3.2 - Exemplo de uma malha de pontos discretos utilizada na resolução de EDP's elípticas recorrendo às diferenças finitas.	17
Figura 3.3 - Problema com condições de fronteira de <i>Dirichlet</i>	18
Figura 3.4 - Visualização da matriz esparsa através do comando <code>spy(A)</code>	20
Figura 3.5 - Curvas de nível das temperaturas para condições de fronteiras fixas	21
Figura 3.6 - Placa aquecida com fronteira isolada	22
Figura 3.7 - Curvas de nível das temperaturas para fronteira isolada.....	22
Figura 3.8 - Esquina superior esquerda da placa.....	23
Figura 3.9 - Esquina superior direita da placa.....	24
Figura 3.10 - Esquina inferior esquerda da placa.....	25
Figura 3.11 - Esquina inferior direita da placa.....	26

Figura 3.12 - Barra fina, isolada em todos os pontos, exceto nas extremidades, (Chapra C. S., 2012).....	27
Figura 3.13 - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s (Método Explícito).....	30
Figura 3.14 - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s (Método Implícito).....	32
Figura 3.15 - Método explícito com $\Delta t=3$ (a) Evolução das temperaturas na barra; (b) - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s	33
Figura 3.16 - Método implícito com $\Delta t=3$ (a) Evolução das temperaturas na barra; (b) - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s	33
Figura 3.17- Curvas de nível das temperaturas para condições de fronteira fixas em $t = 10s$	35
Figura 4.1 - Representação do problema a resolver	37
Figura 4.2 - Resultados obtidos com 4 elementos finitos	43
Figura 4.3 - Resultados obtidos para 10 elementos finitos	43
Figura 4.4 - Esquema de numeração para resolução de placa aquecida nos bordos (Chapra & Canale, 2008)	47
Figura 4.5 – Solução do problema da placa aquecida nos bordos.....	48
Figura 4.6 – Solução do problema da placa aquecida nos bordos (1 lado isolado)	48
Figura 4.7 - Repartição das temperaturas no instante inicial	50
Figura 4.8 – Instabilidade da solução final para $\Delta t = 0,2$	51
Figura 4.9 - Distribuição das temperaturas ao fim de uma iteração.....	52
Figura 4.10 - Distribuição das temperaturas ao fim de 100 iterações	52
Figura 4.11 - Distribuição das temperaturas ao fim de 1000 iterações	52
Figura 4.12 - Distribuição das temperaturas através do método implícito.....	53

Figura 5.1- Massa volúmica	56
Figura 5.2 - Calor específico	56
Figura 5.3 - Condutividade térmica.....	57
Figura 5.4 - Esquema do compartimento	58
Figura 5.5 – Secção de uma laje betão	58
Figura 5.6 - Curva de energia relativa a um carro utilitário.....	59
Figura 5.7 - Fluxo de calor.....	59
Figura 5.8 – Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.3$	61
Figura 5.9 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.15$	61
Figura 5.10 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.10$	62
Figura 5.11 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.01$	62
Figura 5.12 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.3$	63
Figura 5.13 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.15$	63
Figura 5.14 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.10$	64
Figura 5.15 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.01$	64
Figura 5.16 - Temperaturas finais na laje obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.01$	65

Figura 5.17 – Temperaturas máximas em função da variação do dy para dx=0.1 e dx=0.5....	66
Figura 5.18 – Evolução da temperatura máxima através de diferenças finitas para diferentes dy.....	67
Figura 5.19 – Malhas obtidas com elementos finitos triangulares.....	68
Figura 5.20 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.5 e dy=0.3	69
Figura 5.21 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.5 e dy=0.15	69
Figura 5.22 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.5 e dy=0.10	70
Figura 5.23 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.5 e dy=0.01	70
Figura 5.24 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.1 e dy=0.15	71
Figura 5.25 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.1 e dy=0.10	72
Figura 5.26 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com dx=0.1 e dy=0.01	72
Figura 5.27 - Temperaturas máximas em função da variação do dy para dx=0.1 e dx=0.5	73
Figura 5.28 - Evolução da temperatura máxima através de diferenças finitas para diferentes dy	73
Figura 5.29 – Simulação através do (ANSYS®) com dx=0.5 e dy=0.3	75
Figura 5.30 - Simulação através do (ANSYS®) com dx=0.5 e dy=0.15.....	75
Figura 5.31 - Simulação através do (ANSYS®) com dx=0.5 e dy=0.10.....	76
Figura 5.32 - Simulação através do (ANSYS®) com dx=0.5 e dy=0.01	76

Figura 5.33 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.30$	77
Figura 5.34 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.15$	77
Figura 5.35 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.10$	78
Figura 5.36 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.01$	78
Figura 5.37 - Temperaturas máximas em função da variação do dy para $dx=0.1$ e $dx=0.5$	79
Figura 5.38 - Evolução da temperatura máxima através do (ANSYS®) para diferentes dy ...	80
Figura 5.39 - Evolução das temperaturas	81
Figura 5.40 - Evolução das temperaturas	81
Figura 5.41 - Evolução das temperaturas	82
Figura 5.42 - Temperaturas obtidas no FLUENT®	82
Figura 6.1 - Comparação $T(\text{máx})$ para a malha de $dx=0.5$ e diferentes malhas de dy	86
Figura 6.2 - Comparação $T(\text{máx})$ para a malha de $dx=0.1$ e diferentes malhas de dy	86
Figura 6.3 - Temperaturas no eixo da chama	87
Figura 6.4 - Comparação de resultados obtidos com os 3 métodos para $dx=0,1$ $dy=0,1$	88
Figura 6.5 - Evolução das temperaturas máximas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$	89
Figura 6.6 - Evolução das temperaturas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$, para $r= 0\text{m}$ e para os instantes $t=400$, $t=800$ e $t=1200\text{s}$	89
Figura 6.7 - Evolução das temperaturas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$, para $r= 2\text{m}$ e para os instantes $t=400$, $t=800$ e $t=1200\text{s}$	90
Figura 6.8 - Evolução das temperaturas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$, para $r= 4\text{ m}$ e para os instantes $t=400$, $t=800$ e $t=1200\text{ s}$	90

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 3.1 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)	21
Tabela 3.2 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)	22
Tabela 3.3 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)	33
Tabela 3.4 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)	35
Tabela 3.5 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)	35
Tabela 3.6 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)	36
Tabela 5.1 - Temperaturas máximas para diferentes malhas com diferenças finitas	67
Tabela 5.2 - Temperaturas máximas para diferentes malhas com elementos finitos	74
Tabela 5.3 - Temperaturas máximas em (ANSYS®)	80
Tabela 6.1 – Temperatura máxima para as diferentes malhas utilizadas	85

1. INTRODUÇÃO

1.1 Enquadramento temático

O fogo continua a ser uma necessidade da vida humana, seja nas indústrias ou moradias, mas que quando foge ao controle do homem dá origem aos incêndios, responsáveis por prejuízos materiais e pela perda de vidas (Caldas, 2008). A possibilidade de calcular as temperaturas e os estados dos materiais após um incêndio torna-se importante devido ao fato de poder evitar tais prejuízos. Para o cálculo destas temperaturas é usual recorrer-se às equações presentes no (EC1-1-2, 2002) mas também é possível recorrer-se a programas automáticos de cálculo de análise térmica. Esta forma de cálculo permite calcular as temperaturas em qualquer ponto do elemento em estudo bem como em qualquer tempo. Este cálculo é feito através de programas comerciais que recorrem à aproximação por elementos finitos. Em alternativa, existe também a possibilidade de escrever o código para o cálculo das temperaturas. Como esta via é mais trabalhosa e demorada é normalmente reservada a trabalhos de investigação no âmbito da computação científica.

1.2 Objetivos e metodologias do trabalho

O principal objetivo deste trabalho é o cálculo das temperaturas numa laje em betão simples sob a influência da combustão de um automóvel. A modelação foi feita através da programação em ambiente Octave, um *software Open Source* (GNU Octave, 2011), e do (ANSYS®), um software comercial muito utilizado no estudo do comportamento térmico de estruturas. Em relação ao Octave o trabalho desenvolveu-se em duas frentes, uma aproximação numérica de equações diferenciais através de diferenças finitas e outra onde a aproximação numérica foi feita através de elementos finitos.

Com o intuito de validar os códigos escritos realizaram-se vários problemas propostos no livro (Chapra & Canale, 2008), tanto para o caso da aproximação por diferenças finitas como para a aproximação por elementos finitos. Esta fase serviu para verificar se os vários aspetos numéricos e computacionais tais como a implementação dos esquemas de discretização espacial e temporal, os tipos de condições de fronteiras e a gestão dos recursos de memória, estavam corretamente implementados.

Após a fase de validação, os códigos foram adaptados à resolução da equação de condução do calor numa laje em betão com condições de fronteira resultantes do incêndio de um automóvel. Os resultados obtidos com diferenças finitas e com elementos finitos foram comparados com os resultados provenientes do (ANSYS®).

A modelação do incêndio foi feita numa primeira abordagem com recurso a curvas de fluxo de calor resultantes de dados experimentais (Haremza, et al., 2011). Numa segunda abordagem procurou-se simular numericamente o incêndio através do *software* comercial (FLUENT®). Este *software* permite a simular problemas de mecânica dos fluidos, laminares e turbulentos, tanto em estado estacionário como em estado transiente. Para o caso em estudo pretendeu-se obter a distribuição das temperaturas junto à laje.

1.3 Organização da tese

A presente tese está organizada em 7 capítulos. No segundo capítulo tratasse o tema dos incêndios em estruturas. Expõe-se os diferentes fenómenos de transferência de calor envolvidos num incêndio e os diferentes tipos de “curva de incêndio” existentes na literatura. Ainda neste capítulo implementam-se três processos diferentes para simular incêndios localizados, nomeadamente o método de Heskestad, o método de Hasemi e a simulação numérica através do (FLUENT®).

No capítulo 3 realizou-se uma aproximação numérica das equações de condução do calor através de diferenças finitas. Numa primeira parte considerou-se as equações elípticas e numa segunda parte as equações parabólicas. Elaboraram-se também vários exercícios de modo a validar a escrita do código.

No capítulo 4 foi elaborado uma aproximação numérica das mesmas equações diferenciais mas desta vez por elementos finitos. Aplicou-se esta aproximação para uma e duas dimensões e realizou-se os mesmos exercícios para validação do código realizados no capítulo 3.

No quinto capítulo elaborou-se uma modelação numérica do efeito de um incêndio localizado sobre uma laje em betão. Começou-se por fazer a caracterização dos materiais e depois procedeu-se à resolução numérica do problema. No capítulo 6 procedeu-se à apresentação dos resultados obtidos através de diferenças finitas, elementos finitos, (ANSYS®) e (FLUENT®). No sétimo capítulo apresenta-se as conclusões e algumas possibilidades de trabalho futuro que deem continuidade ao trabalho aqui apresentado.

2. INCÊNDIOS EM ESTRUTURAS

2.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados os fenômenos de transferência de calor, as curvas de incêndio naturais e normalizadas, e três métodos aproximados de cálculo aos incêndios localizados (método de Heskestad, método de Hasemi e método avançado por volumes finitos FLEUNT®).

2.2 Fenômenos de transferência de calor

A diferença de temperaturas entre duas regiões, gera uma propagação de energia denominada de transmissão de calor. Esta transmissão de calor tanto se pode dar em meios sólidos, líquidos ou gasosos.

Uma forma de avaliar a energia transmitida pelo fluxo de calor de um elemento é o recurso à medição das temperaturas. Para existir transmissão de calor entre duas regiões, estas tem de encontrar-se a temperaturas diferentes. Essa transmissão de calor ocorre sempre da região com a temperatura mais elevada para a região de temperatura inferior. Desta forma é fundamental o estudo da distribuição das temperaturas na análise da transmissão de calor. Neste capítulo serão apresentados três modos de transmissão de calor: condução, convecção e radiação.

2.2.1 Condução

A condução é o processo pelo qual o calor é transmitido de uma região com elevada temperatura para outra região com a temperatura mais baixa dentro de um meio (sólido, líquido ou gasoso) ou, entre meios diferentes em contacto físico direto (Zienkiewicz, 1977).

A energia cinética das moléculas, que constituem um determinado elemento é responsável pela temperatura do mesmo. A energia interna é provocada pela posição relativa e pela energia intrínseca das moléculas. Desta forma um maior movimento das moléculas provoca um aumento de temperatura e da energia interna do elemento. As mudanças de temperatura dão-se devido à energia cinética média ser maior ou menor numa determinada zona do elemento. Essa energia é transmitida para a zona que possui uma menor energia cinética, ou seja, uma menor temperatura.

Caso não seja adicionada uma fonte ou uma remoção de calor, a temperatura tende a igualar-se em todo o elemento. Por outro lado, caso de registem fontes ou remoções de calor, o fluxo de calor desenvolve-se da região com temperatura mais elevada para a região de temperatura mais reduzida. Este tipo de transferência de calor é aquela que predomina nos elementos sólidos, sendo que também é importante nos fluidos onde é normalmente aparece combinada com a convecção e com a radiação.

A lei fundamental que rege a transmissão de calor por condução foi proposta por J.B. Fourier em 1822. Segundo esta lei a quantidade de calor que passa através de uma área A , normal à direção do fluxo calorífico, na unidade de tempo é proporcional ao produto da área pelo gradiente térmico, (Vila Real, 1988).

$$Q = -k \times A \times \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.1)$$

ou

$$q = \frac{Q}{A} = -k \times \frac{\partial T}{\partial n} \quad (2.2)$$

Onde Q é a quantidade de calor que atravessa a área A segundo a sua normal exterior \vec{n} e q representa o fluxo de calor na direção de \vec{n} . A constante de proporcionalidade k é a condutibilidade térmica do material, a qual depende da composição química do material, do seu estado físico e textura e da sua temperatura, (Vila Real, 1988).

2.2.2 Convecção

Esta forma de transferência de calor verifica-se principalmente entre uma superfície sólida e um líquido ou gás, Este transporte de energia surge devido à condução de calor, capacidade de armazenamento de energia e pelo movimento de mistura.

O processo de transferência de calor por convecção surge quando o calor flui a partir de uma superfície sólida e aquece as partículas de um fluido adjacente. Desta forma a energia transferida faz com que as partículas nessa zona do fluido se movimentem para zonas interiores do fluido que possuam menor energia, transferindo parte dessa energia para outras partículas.

Este tipo de transferência de calor é classificado como “convecção natural”. O fenômeno de transferência de calor por “convecção forçada” obriga a existência de uma força externa ao sistema para forçar o movimento das partículas.

Quando a diferença de densidade devido a diferentes gradientes de temperatura é a única razão para existir movimento do fluxo, o processo é chamado “convecção natural”. Se existir um mecanismo que force o movimento do fluxo, por exemplo uma ventoinha, o processo de transferência de calor tem o nome de “convecção forçada”.

Nas aplicações de engenharia, para simplificar os cálculos da transmissão de calor entre uma superfície de área A , à temperatura T e o fluido que o rodeia à temperatura T_∞ é definido um coeficiente de transmissão de calor por convecção h_c , por, (Vila Real, 1988).

$$Q_c = h_c \times A \times (T - T_\infty) \quad (2.3)$$

ou

$$q_c = h_c \times (T - T_\infty) \quad (2.4)$$

O coeficiente de convecção depende de vários fatores, nomeadamente da forma e dimensões da superfície sólida do regime da convecção (Nusselt), do tipo de fluido, da diferença de temperaturas existentes, etc, (Vila Real, 1988).

2.2.3 Radiação

A transferência por radiação é o processo onde o calor flui entre dois corpos separados no espaço, sendo que um destes corpos possui uma temperatura elevada do que o outro. Esta transmissão de calor é feita através de ondas eletromagnéticas que podem transportar energia através do espaço.

O fluxo máximo que pode ser emitido de uma superfície por radiação é dado pela lei de Stefan-Boltzmann, (Vila Real, 1988).

$$q = \sigma \cdot T^4 \quad (2.5)$$

Onde T é a temperatura absoluta ($^{\circ}\text{C}$ ou K) da superfície e σ é a constante de Stefan-Boltzmann que tem o valor de $5.6697 \times 10^{-8} \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}^4$, (Vila Real, 1988).

A Equação (2.5) é válida para corpos com uma emissividade igual a um, ou seja, irradiadores perfeitos.

Para os corpos reais, onde a emissividade (ε) da superfície é menor do que um, é necessário acrescentar esse parâmetro à Equação (2.5) da seguinte forma:

$$q = \sigma \cdot \varepsilon \cdot T^4 \quad (2.6)$$

A equação que contabiliza a quantidade de calor trocada entre uma superfície de dimensões reduzidas S_1 , e uma envolvente constituída por um gás que não interfere na transferência por radiação é dada por:

$$Q_r = \Phi \cdot \varepsilon \cdot A \cdot \sigma \cdot (T^4 - T_s^4) \quad (2.7)$$

Onde Φ é o fator de vista.

A Equação (2.7) pode ainda ser escrita da seguinte forma:

$$q_r = h_r \cdot (T - T_s) \quad (2.8)$$

Onde h_r é o coeficiente de transmissão de calor por radiação e é definido pela Equação (2.9):

$$h_r = \Phi \cdot \varepsilon \cdot \sigma \cdot (T + T_s) \cdot (T^2 + T_s^2) \quad (2.9)$$

Caso exista simultaneamente transmissão de calor por convecção, o fluxo total de calor é dado por:

$$q_{cr} = h_c \cdot (T - T_\infty) + h_r \cdot (T - T_s) \quad (2.10)$$

2.3 Curva de incêndio natural

Para que possa ocorrer um incêndio torna-se necessária a existência simultânea de três fatores: uma fonte de calor, o combustível e o comburente (o oxigênio). O início do incêndio dá-se quando a mistura combustível/oxigênio está suficientemente quente para que ocorra a combustão, (Vila Real, 2003).

É possível observar na Figura 2.1 a curva de incêndio natural que esta passa por quatro fases diferentes. A ignição, a propagação, desenvolvimento e a fase de extinção.

A fase inicial ou fase de ignição, durante a qual as temperaturas permanecem baixas, não tendo nenhuma influência no comportamento estrutural dos edifícios. Esta fase, como se verá, não se inclui nas curvas temperatura-tempo regulamentares, embora se saiba que do ponto de vista da salvaguarda das vidas humanas é geralmente a fase mais crítica, pois é durante a sua ocorrência que se produzem os gases tóxicos, (Vila Real, 2003).

Na fase seguinte à ignição, o fogo começa por se desenvolver em função do combustível existente no local, libertando calor, que provoca o aumento da temperatura no espaço interior, (Coelho, 1998). Este aumento de temperatura é conhecido como “flashover” e ocorre quando as temperaturas se situam entre os 450 °C e 600 °C.

A fase de desenvolvimento pleno ou combustão contínua, é a fase onde a temperatura atinge o seu maior valor e se mantém constante. É também nesta fase que se verifica um aumento significativo das concentrações de dióxido e monóxido de carbono devido à queima da maior parte do material combustível.

A fase de extinção ou fase de arrefecimento é a situação onde ocorre a queima do restante material combustível o que leva a uma diminuição de calor libertado.

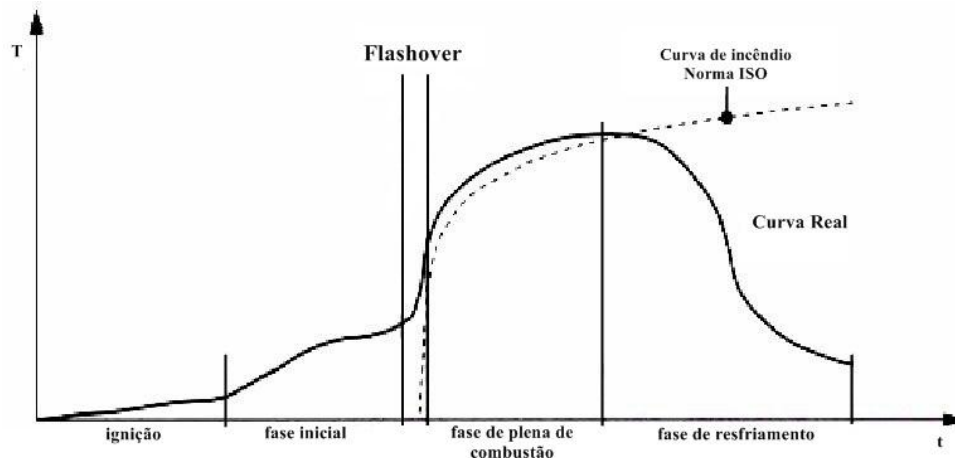


Figura 2.1 - Curva de incêndio natural, (Pinto, 2005)

2.4 Curva de incêndio normalizadas

Segundo o (EC1-1-2, 2002) existem três equações para o cálculo da temperatura de um incêndio. Estas equações resultam em três curvas de incêndio normalizadas que não dependem do tipo de edifícios nem da dimensão destes. São fórmulas de resolução simples e estão definidas para três tipos de incêndio: curva de incêndio padrão, ISO834, curva de incêndio para elementos exteriores e curva de incêndio de hidrocarbonetos.

- ✓ Curva de incêndio padrão, ISO 834:

$$\theta_g = 20 + 345 \log_{10}(8t + 1) \quad (2.11)$$

Onde θ_g é a temperatura dos gases no compartimento de incêndio [°C] e t é o tempo decorrido de incêndio [min].

- ✓ Curva de incêndio para elementos exteriores:

$$\theta_g = 660 \left(1 - 0,687e^{-0,32t} - 0,313e^{-3,8t} \right) + 20 \quad (2.12)$$

Onde θ_g é a temperatura dos gases na proximidade do elemento [°C] e t é o tempo decorrido de incêndio [min].

- ✓ Curva de incêndio de hidrocarbonetos

$$\theta_g = 1080 \left(1 - 0,325e^{-0,167t} - 0,675e^{-2,5t} \right) + 20 \quad (2.13)$$

Onde θ_g é a temperatura dos gases no compartimento de incêndio [°C] e t é o tempo decorrido de incêndio [min].

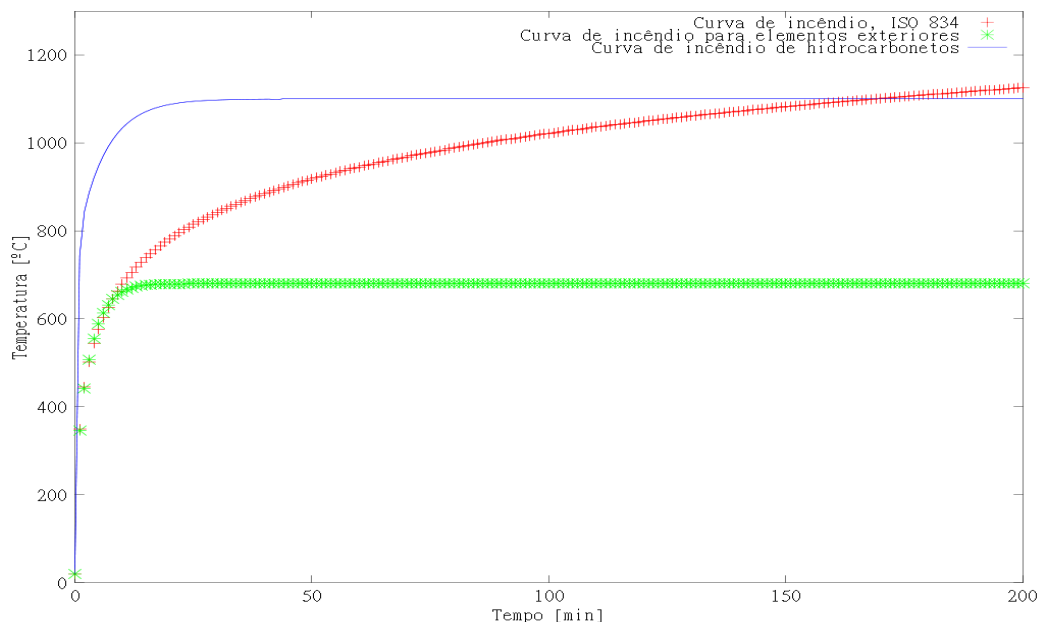


Figura 2.2 - Curva de Incêndio Normalizadas

2.5 Aproximação de incêndio localizados

Segundo o (EC1-1-2, 2002) existem dois métodos para calcular um incêndio localizado. O método onde a chama não atinge o teto e o método onde o atinge. No caso onde a chama não atinge o teto só é possível calcular as temperaturas do incêndio no eixo da chama. Para o outro caso as equações permitem o cálculo do fluxo de calor mas agora em toda a extensão da peça através do parâmetro r .

O parâmetro responsável pela divisão entre os dois métodos chama-se L_f , e representa o comprimento da chama e é obtido pela Equação (2.14):

$$L_f = 1,02 \cdot D + 0,0148 \cdot Q^{2/5} \quad (2.14)$$

2.5.1 Método de Heskestad

Caso $L_f < H$, ver Figura 2.3, a chama não atinge o teto, e a temperatura $\theta_{(z)}$ na pluma ao longo do eixo vertical de simetria da chama é calculada através do método de Heskestad. É necessário referir que este método só é válido para temperaturas inferiores a 900 °C. A temperatura é obtida por:

$$\theta_{(z)} = 20 + 0,25 Q_c^{2/3} (z - z_0)^{-5/3} \leq 900 \quad (2.15)$$

onde:

D – diâmetro do incêndio [m];

Q – taxa de libertação de calor [W] do incêndio;

Q_c – parcela da taxa de libertação de calor de convecção [W], com $Q_c = 0,8Q$ na ausência de mais informação;

z – altura [m] ao longo do eixo da chama;

H – distância [m] entre a origem do incêndio e o teto.

O parâmetro z_0 que representa a origem virtual do eixo é obtido por:

$$z_0 = -1,02D + 0,00524Q^{2/5} \quad (2.16)$$

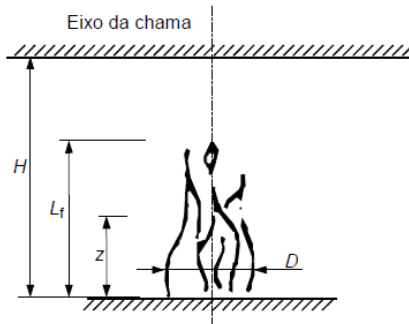


Figura 2.3 - Método de Heskestad, (EC1-1-2, 2002)

2.5.2 Método de Hasemi

Caso $L_f > H$, ver Figura 2.4, a chama atinge o teto, logo só é possível calcular o fluxo de calor recebido pela unidade de área da superfície exposta ao fogo e é obtido por:

$$\begin{aligned} \dot{h} &= 100000 && \text{se } y \leq 0,30 \\ \dot{h} &= 136300 - 121000 \cdot y && \text{se } 0,30 < y < 1,0 \\ \dot{h} &= 15000 \cdot y^{-3,7} && \text{se } y \geq 1,0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Onde:

y – parâmetro obtido por:

$$y = \frac{r + H + z'}{L_h + H + z'} \quad (2.18)$$

r – distância horizontal [m] entre o eixo vertical do incêndio e o ponto no teto em que é calculado o fluxo térmico, ver Figura 2.4.

H – distância [m] entre a origem do incêndio e o teto, ver Figura 2.4

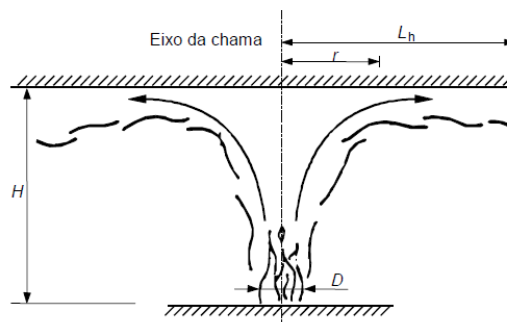


Figura 2.4 - Método de Hasemi, (EC1-1-2, 2002)

O parâmetro L_h que representa o comprimento horizontal da chama é obtido por:

$$L_h = \left(2,9 \cdot H \cdot (Q_H')^{0,33} \right) - H \quad [\text{m}] \quad (2.19)$$

A taxa de libertação de calor, (Q_H') adimensional, é obtida por:

$$Q_H' = Q / \left(1,11 \cdot 10^6 \cdot H^{2,5} \right) \quad (2.20)$$

z' é a posição vertical da fonte de calor virtual [m], obtida por:

$$z' = 2,4 \cdot D \cdot \left(Q_D^{*2/5} - Q_D^{*2/3} \right) \quad \text{para } Q_D^* \leq 1,0 \quad (2.21)$$

$$z' = 2,4 \cdot D \cdot \left(1,0 - Q_D^{*2/5} \right) \quad \text{para } Q_D^* \geq 1,0$$

Em que:

$$Q_D^* = Q / \left(1,11 \cdot 10^6 \cdot D^{2,5} \right) \quad (2.22)$$

O fluxo de calor efetivo \dot{h}_{net} recebido pela unidade de área da superfície exposta ao fogo ao nível do teto é obtido por:

$$\dot{h}_{net} = \dot{h} - \alpha_c \cdot (\theta_m - 20) - \Phi \cdot \varepsilon_m \cdot \varepsilon_f \cdot \sigma \cdot \left[(\theta_m + 273)^4 - (293)^4 \right] \quad (2.23)$$

onde:

α_c - coeficiente de transferência de calor por convecção [$\text{W}/\text{m}^2\text{K}$];

θ_m - temperatura da superfície do elemento [$^{\circ}\text{C}$];

Φ - fator de vista;

ε_m - emissividade da superfície do elemento;

ε_f - emissividade do fogo;

σ - constante de Stephan Boltzmann ($= 5,67 \cdot 10^{-8} \left[\text{W} / \text{m}^2 \text{K}^4 \right]$);

As equações indicadas desde (2.14) a (2.23) são válidas se as seguintes condições forem satisfeitas:

- ✓ O diâmetro do incêndio for $D \leq 10m$;
- ✓ A taxa de libertação de calor do incêndio for $Q \leq 50MW$.

2.5.3 Método avançado com FLEUNT®

A resolução do caso em estudo foi também elaborada por este método avançado devido ao tipo de aproximação utilizada por este. O fato deste programa utilizar o método de aproximação por volumes finitos fez com que houvesse uma outra validação de resultados além dos obtidos pelo (ANSYS®).

No programa foi selecionada a opção para a solução das equações de Navier Stokes Equação (2.24), utilizando o método baseado no cálculo da pressão em regime transiente. Este método permite o cálculo acoplado da pressão e da velocidade das partículas fluidas. O algoritmo utiliza uma relação entre estas variáveis para garantir a equação de conservação da massa Equação (2.25).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.25)$$

Nestas expressões, ρ representa o valor da massa específica, \vec{v} representa o vetor velocidade, a pressão estática é definida através de p , enquanto $\vec{\tau}$ representa o tensor das tensões.

O modelo de simulação utiliza a solução em simultâneo da equação da energia, Equação (2.26), em conjunto com o modelo de radiação P1 Equação (2.27) para as trocas efetuadas com este meio, e o modelo de viscosidade K-e Equação (2.28) e (2.29) para escoamentos turbulentos, (FLUENT®).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\vec{v}(\rho E + p)) = \nabla \cdot \left(k_{eff} \nabla T - \sum_i h_i \vec{J}_i + (\vec{\tau}_{eff} \cdot \vec{v}) \right) + S_h \quad (2.26)$$

$$q_r = -\frac{1}{3(a + \sigma_s) - C\sigma_s} \nabla G \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m k) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_k} \nabla k \right) + G_{k,m} - \rho_m \varepsilon \quad (2.28)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \varepsilon) + \nabla \cdot (\rho_m \vec{v}_m \varepsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} G_{k,m} - C_{2\varepsilon} \rho_m \varepsilon) \quad (2.29)$$

Este modelo de resolução não linear, utiliza as propriedades do fluido do compartimento (ar) dependentes da temperatura, de acordo com as figuras seguintes.

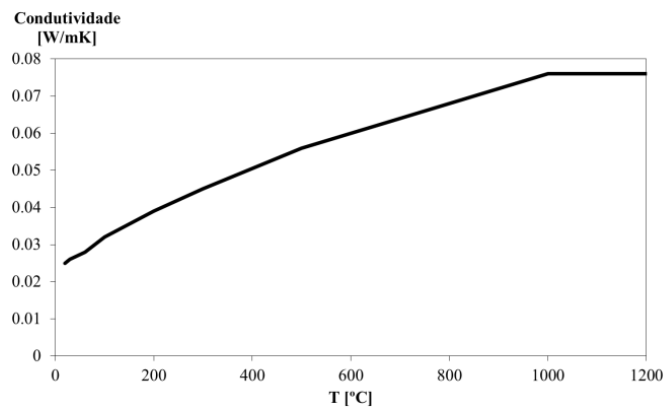


Figura 2.5 - Condutividade do ar

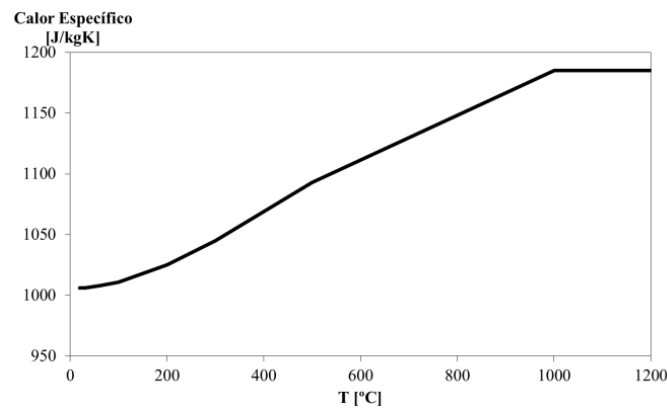


Figura 2.6 - Calor específico do ar

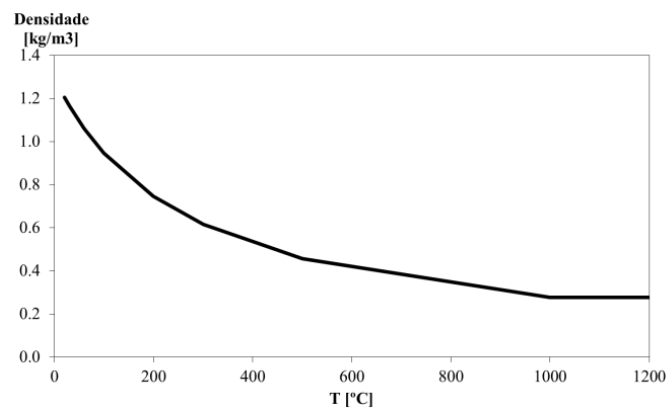


Figura 2.7 - Massa específica do ar

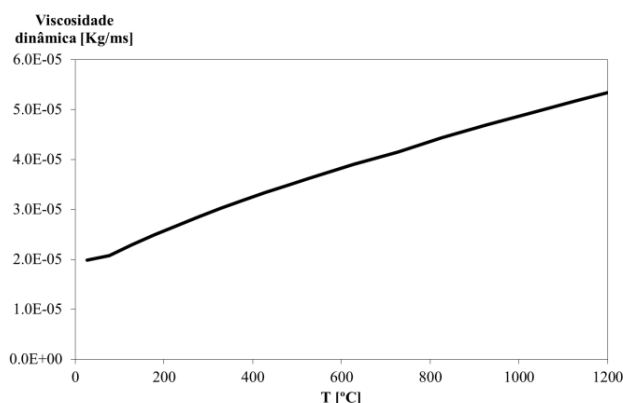


Figura 2.8 - Viscosidade dinâmica do ar

Este modelo de resolução não linear também utiliza a propriedade dos materiais utilizados na envolvente do compartimento, em particular o material da laje superior e inferior do compartimento.

Os resíduos numéricos que se pretendem minimizar dependem da tolerância definida para cada quantidade. Neste caso foi definido um erro absoluto de 0.01 para a equação da continuidade, 0.001 para cada componente da velocidade, 0.00001 para a equação da energia (temperatura), 0.005 para a equação da turbulência (épsilon) e 0.00001 para a equação do modelo de radiação P-1.

As condições iniciais foram definidas com as componentes da velocidade nulas, o valor da energia cinética para o modelo de turbulência com valor unitário e o valor da taxa de dissipação também unitário. A temperatura inicial foi definida para 300 [K].

A solução foi efetuada com um incremento de tempo de 30 [s], para um tempo total de simulação de 1500 [s].

3. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR DIFERENÇAS FINITAS

3.1 Equação de Laplace

A equação de Laplace pode ser usada para modelar diversos problemas envolvendo o potencial de uma variável desconhecida. Faz-se a sua dedução de acordo com as linhas gerais apresentadas em, (Chapra & Canale, 2008).

Considerado um elemento na face de uma placa retangular fina de espessura Δz Figura 3.1. Como o fluxo de calor que entra no elemento durante um período de tempo unitário é igual ao fluxo que sai é necessário que a placa esteja totalmente isolada exceto nas fronteiras onde a temperatura poderá ser fixada.

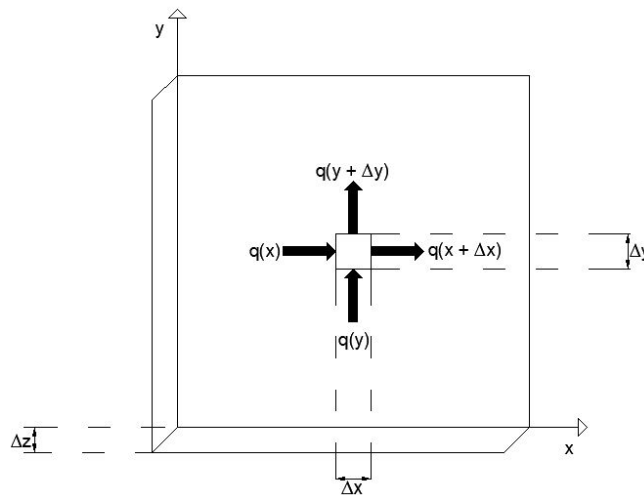


Figura 3.1 - Placa retangular fina de espessura Δz (Chapra & Canale, 2008)

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y)\Delta x\Delta z\Delta t = q(x + \Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t + q(y + \Delta y)\Delta x\Delta z\Delta t \quad (3.1)$$

onde $q(x)$ e $q(y)$ são os fluxos de calor nas direções x e y , respetivamente. De modo a simplificar dividiu-se ambos os membros por Δz e Δt , obtendo:

$$q(x)\Delta y + q(y)\Delta x = q(x + \Delta x)\Delta y + q(y + \Delta y)\Delta x \quad (3.2)$$

Agrupando os termos,

$$[q(x) - q(x + \Delta x)]\Delta y + [q(y) - q(y + \Delta y)]\Delta x = 0 \quad (3.3)$$

Multiplicando o primeiro termo por $\Delta x/\Delta x$ e o segundo por $\Delta y/\Delta y$, obtém-se

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} \Delta x \Delta y + \frac{q(y) - q(y + \Delta y)}{\Delta y} \Delta y \Delta x = 0 \quad (3.4)$$

Dividindo ambos os termos por $\Delta x \Delta y$ e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta y \rightarrow 0$ resulta em:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

Como as condições para a temperatura da fronteira são dadas, deve-se reformular a equação em termos da temperatura. A ligação entre o fluxo de calor e a temperatura é fornecida pela lei da condução de calor de Fourier, que pode ser representada por,

$$q_i = -k \rho C \frac{\partial T}{\partial i} \quad (3.6)$$

onde q_i é o fluxo de calor na direção da dimensão i , k é o coeficiente de difusividade térmica, ρ é a densidade do material, C é a capacidade calorífica do material e T é a temperatura. Substituindo a Equação (3.6) na Equação (3.6) obtemos a equação de Laplace.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \left(-k \rho C \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(-k \rho C \frac{\partial T}{\partial y} \right)}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Esta equação é por vezes representada de forma compacta como $\nabla^2 T = 0$. Caso o problema tenha em conta uma fonte ou um dissipador de calor, a Equação (3.7) é representada da seguinte forma (equação de Poisson).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (3.8)$$

3.1.1 Resolução por diferenças finitas

A resolução de uma equação às derivadas parciais (EDP) num domínio regular pode ser feita numericamente através do método das diferenças finitas. Para obter as temperaturas numa

placa aquecida recorrendo às diferenças finitas decompõe-se o domínio numa malha de pontos discretos Figura 3.2 e aplica-se a cada um desses pontos a equação algébrica resultante da substituição das derivadas por fórmulas de diferenças finitas. As fórmulas mais comuns são a diferença em avanço, a diferença em recue e a diferença centrada.

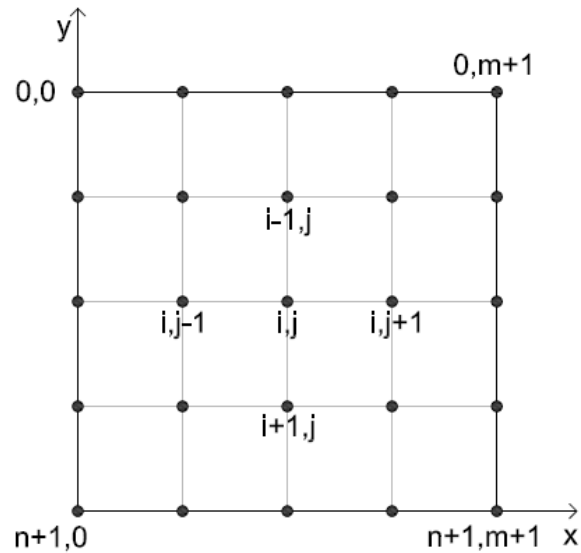


Figura 3.2 - Exemplo de uma malha de pontos discretos utilizada na resolução de EDP's elípticas recorrendo às diferenças finitas.

i. Aproximação por diferenças finitas

Substituindo as derivadas parciais por diferenças finitas centradas no ponto de coordenadas i, j obtém-se:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{(i,j)} + T_{(i,j-1)}}{\Delta x^2} \quad (3.9)$$

e

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)} + T_{(i-1,j)}}{\Delta y^2} \quad (3.10)$$

Substituindo na Equação (3.7),

$$\frac{T_{(i,j+1)} - 2T_{(i,j)} + T_{(i,j-1)}}{\Delta x^2} + \frac{T_{(i+1,j)} - 2T_{(i,j)} + T_{(i-1,j)}}{\Delta y^2} = 0 \quad (3.11)$$

Numa malha quadrada, igual à Figura 3.2, $\Delta x = \Delta y$, pelo que a equação anterior simplifica-se em,

$$T_{(i,j+1)} + T_{(i,j-1)} + T_{(i+1,j)} + T_{(i-1,j)} - 4T_{(i,j)} = 0 \quad (3.12)$$

A Equação (3.12) aplica-se a todos os pontos interiores da grelha ($i = 1 \dots n, j = 1 \dots m$). Os restantes pontos ($i = 0, i = n + 1, j = 0$ e $j = m + 1$) deverão integrar as condições de fronteira.

3.1.2 Condições de fronteira

i. Condições de fronteiras constantes

O caso mais simples de resolução de uma placa aquecida é quando a temperatura nas fronteiras é conhecida e constante. Esta situação é designada por condições de fronteira de *Dirichlet*.

Exemplifica-se a aplicação destas condições num problema retirado de (Chapra & Canale, 2008) que consiste numa placa aquecida de dimensões unitárias com temperaturas fixas nos bordos. O domínio é discretizado segundo uma malha ortogonal com $\Delta x = \Delta y = 0,25$, resultando em 3 pontos interiores ($n=3$) tal como indicado na figura seguinte:

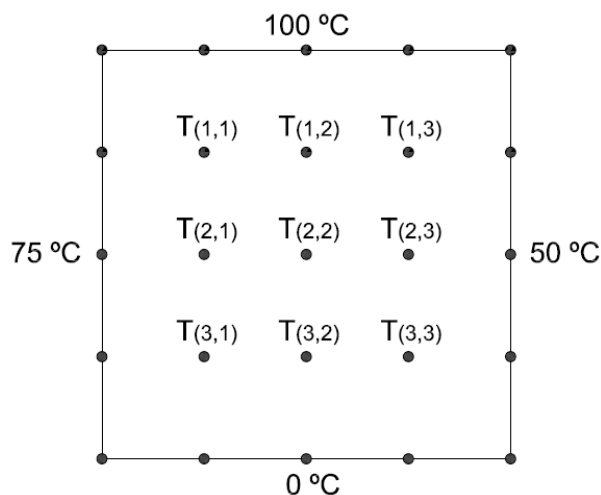


Figura 3.3 - Problema com condições de fronteira de *Dirichlet*

A Equação (3.12) aplicada aos pontos vizinhos dos pontos fronteira deverá incluir o valor da temperatura nesses pontos. Assim nas equações relativas aos pontos de coordenadas $(i, 1)$,

para $i = 1 \dots n$, os valores de $T_{(i,0)} = 75$. Nas equações relativas aos pontos de coordenadas (i, n), para $i = 1 \dots n$, os valores de $T_{(i,m+1)} = 50$. Nas equações relativas aos pontos de coordenadas (1, j), para $j = 1 \dots m$, os valores de $T_{(0,j)} = 100$. Nas equações relativas aos pontos de coordenadas (n, j), para $j = 1 \dots m$, os valores de $T_{(n+1,j)} = 0$.

Por exemplo, a Equação (3.12) relativa ao ponto (1,1) é,

$$T_{(1,2)} + T_{(1,0)} + T_{(2,1)} + T_{(0,1)} - 4T_{(1,1)} = 0$$

Mas como $T_{(1,0)} = 75^\circ C$ e $T_{(0,1)} = 100^\circ C$ a equação final é,

$$T_{(1,2)} + 75 + T_{(2,1)} + 100 - 4T_{(1,1)} = 0$$

$$-4T_{(1,1)} + T_{(1,2)} + T_{(2,1)} = -175$$

Desta maneira, obtemos para os nove pontos interiores nove equações, i.e., um sistema com 9 equações e 9 incógnitas com a seguinte estrutura:

$$\begin{cases} 4 \cdot T_{(1,1)} - T_{(1,2)} - T_{(2,1)} = 175 \\ 4 \cdot T_{(1,2)} - T_{(1,1)} - T_{(2,2)} - T_{(1,3)} = 100 \\ 4 \cdot T_{(1,3)} - T_{(1,2)} - T_{(2,3)} = 150 \\ 4 \cdot T_{(2,2)} - T_{(1,1)} - T_{(2,3)} - T_{(3,1)} = 75 \\ 4 \cdot T_{(2,2)} - T_{(2,1)} - T_{(3,2)} - T_{(1,2)} - T_{(2,3)} = 0 \\ 4 \cdot T_{(2,3)} - T_{(2,2)} - T_{(1,3)} - T_{(3,3)} = 50 \\ 4 \cdot T_{(3,1)} - T_{(2,1)} - T_{(3,2)} = 75 \\ 4 \cdot T_{(3,2)} - T_{(3,1)} - T_{(2,2)} - T_{(3,3)} = 0 \\ 4 \cdot T_{(3,3)} - T_{(3,2)} - T_{(2,3)} = 50 \end{cases}$$

A resolução deste problema foi feita com recurso ao *software* (GNU Octave, 2011). O código do programa desenvolvido para o efeito encontra-se no Anexo I com a designação de `codigolDF.m`.

O programa gera-se o sistema $Ax = b$, em que A é a matriz dos coeficientes do sistema, x é o vetor das temperaturas a determinar e b é o vetor dos termos independentes do sistema, i.e., o vetor com as condições de fronteira. Foram utilizadas matrizes esparsas de maneira a diminuir

os recursos de memória necessários. Dada a estrutura pentadiagonal da matriz A , criou-se uma matriz esparsa com 5 diagonais através do comando `spdiags`. Desta forma, apenas os elementos não nulos, situados sobre estas diagonais, são guardados na memória do computador reservada a esta matriz.

Como é possível verificar na Figura 3.4 pelo comando `spy(A)`, a matriz criada contém apenas elementos não nulos sobre 5 diagonais.

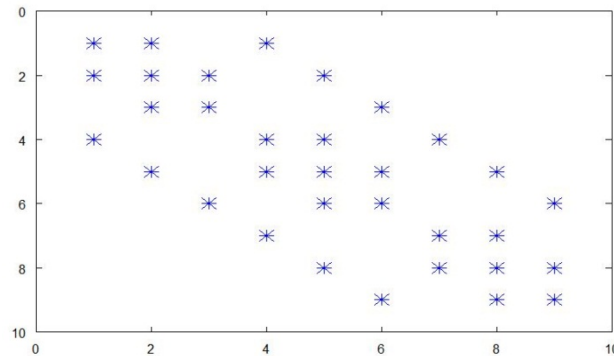


Figura 3.4 - Visualização da matriz esparsa através do comando `spy(A)`

Depois da criação da matriz esparsa, as condições de fronteira são inseridas no vetor b dos termos independentes do sistema. Para isso criou-se uma função que insere as temperaturas prescritas nas fronteiras nas posições correspondentes do vetor b .

A resolução do sistema $Ax = b$ foi efetuada através da instrução $x = A \setminus b$. O comando `\` do (GNU Octave, 2011) resolve o sistema através de um método direto (matriz inversa, factorização LU ou factorização de Cholesky), escolhido de acordo com as características da matriz A .

Depois de se obter as temperaturas pretendidas, estas são transferidas do vetor x , de dimensões 9×1 , para a matriz, com as dimensões do domínio original discretizado (5×5), apresentada na Matriz (3.13) e na Figura 3.5.

$$\begin{bmatrix} 75 & 100 & 100 & 100 & 50 \\ 75 & 78.6 & 76.1 & 69.6 & 50 \\ 75 & 63.2 & 56.3 & 52.5 & 50 \\ 75 & 42.9 & 33.3 & 34.0 & 50 \\ 75 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

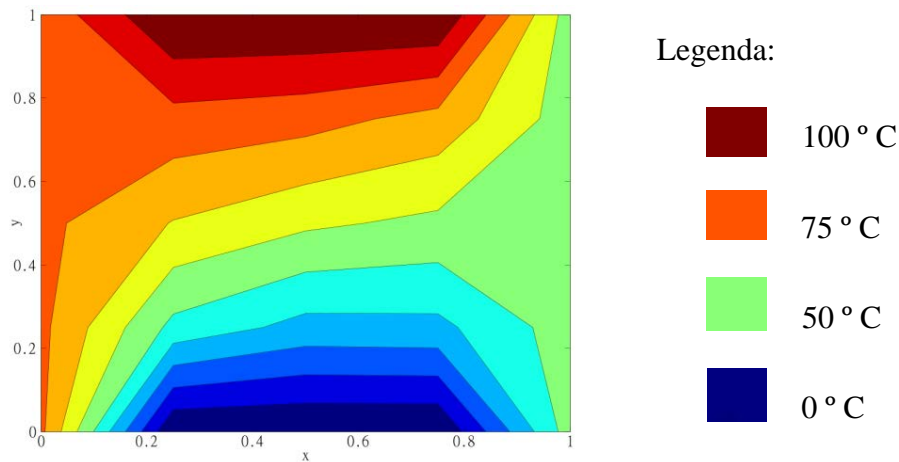


Figura 3.5 - Curvas de nível das temperaturas para condições de fronteiras fixas

A Tabela 3.1 apresenta os resultados obtidos juntamente com os resultados apresentados em, (Chapra & Canale, 2008).

Tabela 3.1 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)

Pontos	Livro	Calculados	Diferença
T(1,1)	43,00	42,86	1,43E-01
T(1,2)	63,21	63,17	4,19E-02
T(1,3)	78,59	78,57	1,57E-02
T(2,1)	33,30	33,26	3,86E-02
T(2,2)	56,11	56,25	-1,38E-01
T(2,3)	76,06	76,12	-5,20E-02
T(3,1)	33,89	33,93	-4,35E-02
T(3,2)	52,34	52,46	-1,15E-01
T(3,3)	69,71	69,64	6,76E-02

Como podemos verificar na Tabela 3.1 os valores alcançados são muito próximos dos apresentados no livro. A diferença será devida ao facto dos valores do livro resultarem de cálculos arredondados à primeira casa decimal.

ii. Condições de fronteiras com isolamento

As condições de fronteiras variáveis são também conhecidas por condições de fronteira de Neumann. No caso particular de não existir um fluxo na fronteira trata-se de uma fronteira isolada, ou seja, a sua derivada é igual a zero. Aproximando a primeira derivada em ordem a x nos pontos fronteira do domínio através da fórmula das diferenças centradas obtemos:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \cong \frac{T_{(i,l)} - T_{(i,-1)}}{2\Delta x} \tag{3.14}$$

Resolvendo esta equação em ordem à temperatura no ponto fictício (i, -1) resulta em,

$$T_{(i,-1)} \cong T_{(i,1)} - 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.15)$$

Como a fronteira é isolada, vem que a sua derivada é igual a zero. Logo,

$$T_{(i,-1)} \cong T_{(i,1)} \quad (3.16)$$

Exemplifica-se o caso do isolamento da fronteira no problema proposto no exercício 29.3 do livro (Chapra & Canale, 2008). Trata-se do mesmo problema abordado no exemplo anterior com a diferença do bordo inferior da placa ser isolado.

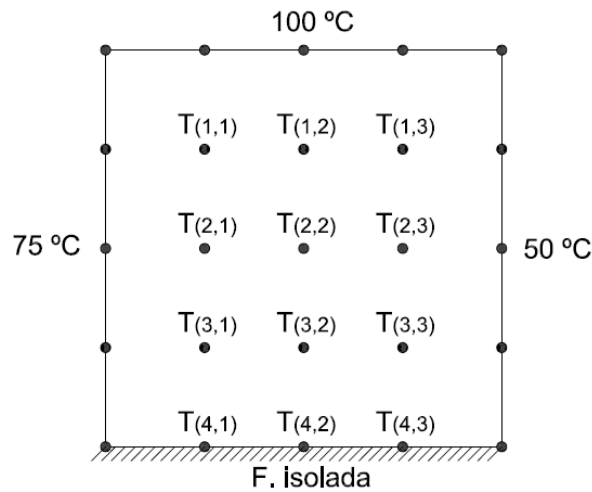


Figura 3.6 - Placa aquecida com fronteira isolada

O código (GNU Octave, 2011) elaborado para a sua resolução deste problema encontra-se no Anexo I com o nome `codigo2DF.m`. Os resultados obtidos estão representados na Figura 3.7.

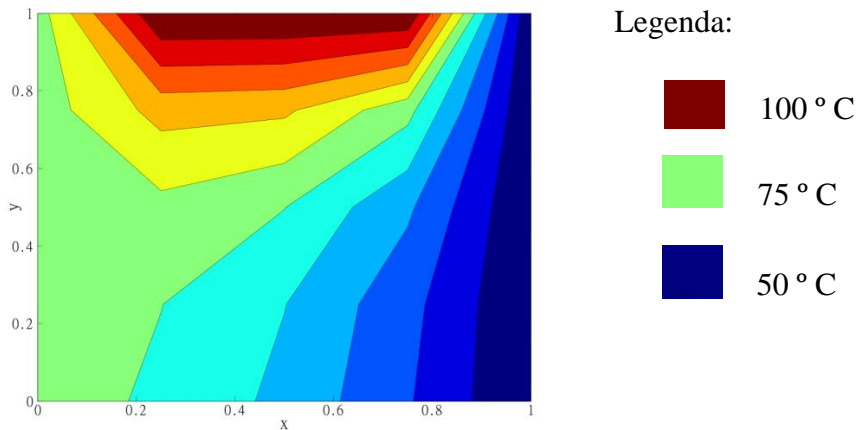


Figura 3.7 - Curvas de nível das temperaturas para fronteira isolada

A Tabela 3.2 apresenta os resultados obtidos juntamente com os resultados apresentados em, (Chapra & Canale, 2008).

Tabela 3.2 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)

Pontos	Livro	Calculados	Diferença
T(1,1)	83,41	83,41	-1,00E-03
T(1,2)	82,63	82,63	1,00E-03
T(1,3)	74,26	74,26	-1,00E-03
T(2,1)	76,01	76,02	-5,00E-03
T(2,2)	72,84	72,84	-2,00E-03
T(2,3)	64,42	64,42	3,00E-03
T(3,1)	72,81	72,81	3,00E-03
T(3,2)	68,31	68,31	3,00E-03
T(3,3)	60,57	60,57	5,00E-03
T(4,1)	71,91	71,91	3,00E-03
T(4,2)	67,01	67,02	-5,00E-03
T(4,3)	59,54	59,54	4,00E-03

Como podemos verificar na Tabela 3.2 os valores alcançados são muito próximos dos apresentados no livro. A diferença será devida ao facto dos valores do livro resultarem de cálculos arredondados à primeira casa decimal.

Para o caso de pontos extremos da placa, é necessário rearranjar as condições de fronteira.

iii. Condições de fronteira nas esquinas da placa

Descreve-se aqui a implementação das condições de fronteira nas esquinas da placa aquecida quando estas estão na intersecção de duas arestas isoladas.

Começa-se pelo caso da esquina superior esquerda. As temperaturas envolvidas na determinação de $T_{(i,j)}$ estão descritas na Figura 3.8.

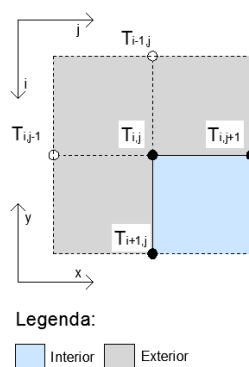


Figura 3.8 - Esquina superior esquerda da placa

Tendo em conta que as derivadas em ordem a x e a y são ambas nulas, a Equação (3.15) resulta em $T_{(-1,j)} \cong T_{(1,j)}$ e $T_{(i,-1)} \cong T_{(i,1)}$. Substituindo estes resultados na Equação (3.12) obtemos:

$$T_{(i,j)} = \frac{T_{(i,j+1)} + T_{(i+1,j)}}{2} \quad (3.17)$$

Como as coordenadas da esquina superior esquerda são $i=0$ e $j=0$ a temperatura neste ponto será,

$$T_{(0,0)} = \frac{T_{(0,1)} + T_{(1,0)}}{2}$$

Posteriormente passou-se para o caso da esquina superior direita. As temperaturas envolvidas na determinação de $T_{(i,j)}$ estão descritas na Figura 3.9.

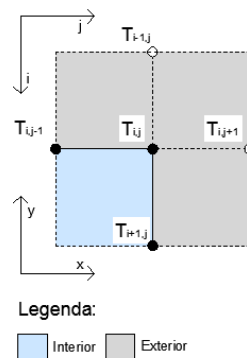


Figura 3.9 - Esquina superior direita da placa

Tendo em conta que as derivadas em ordem a x e a y são ambas nulas, a Equação (3.15) resulta em $T_{(-1,j)} \cong T_{(1,j)}$ e $T_{(i,m+2)} \cong T_{(i,m)}$. Substituindo estes resultados na Equação (3.12) obtemos:

$$T_{(i,j)} = \frac{T_{(i,j-1)} + T_{(i+1,j)}}{2} \quad (3.18)$$

Como as coordenadas da esquina superior direita são $i=0$ e $j=m+1$ a temperatura neste ponto será,

$$T_{(0,m+1)} = \frac{T_{(0,m)} + T_{(1,m+1)}}{2}$$

Posteriormente passou-se para o caso da esquina superior direita. As temperaturas envolvidas na determinação de $T_{(i,j)}$ estão descritas na Figura 3.10.

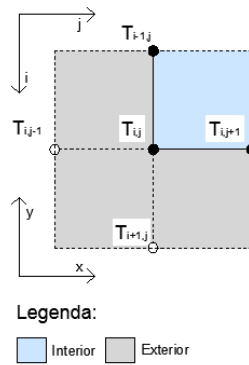


Figura 3.10 - Esquina inferior esquerda da placa

Tendo em conta que as derivadas em ordem a x e a y são ambas nulas, a Equação (3.15) resulta em $T_{(n+2,j)} \cong T_{(n,j)}$ e $T_{(i,-1)} \cong T_{(i,1)}$. Substituindo estes resultados na Equação (3.12) obtemos:

$$T_{(i,j)} = \frac{T_{(i,j+1)} + T_{(i-1,j)}}{2} \quad (3.19)$$

Como as coordenadas da esquina inferior esquerda são $i = n + 1$ e $j = 0$ a temperatura neste ponto será,

$$T_{(n+1,0)} = \frac{T_{(n+1,1)} + T_{(n,0)}}{2}$$

Posteriormente passou-se para o caso da esquina inferior direita. As temperaturas envolvidas na determinação de $T_{(i,j)}$ estão descritas na Figura 3.11.

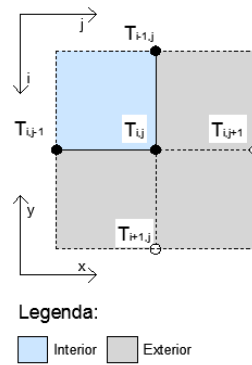


Figura 3.11 - Esquina inferior direita da placa

Tendo em conta que as derivadas em ordem a x e a y são ambas nulas, a Equação (3.15) resulta em $T_{(n+2,j)} \cong T_{(n,j)}$ e $T_{(i,m+2)} \cong T_{(i,m)}$. Substituindo estes resultados na Equação (3.12) obtemos:

$$T_{(i,j)} = \frac{T_{(i,j-1)} + T_{(i-1,j)}}{2} \quad (3.20)$$

Como as coordenadas da esquina inferior esquerda são $i = n+1$ e $j = m+1$ a temperatura neste ponto será,

$$T_{(n+1,m+1)} = \frac{T_{(n+1,m+2)} + T_{(n,m+1)}}{2}$$

iv. Condições de fronteira sob ação de um fluxo de calor

A modelação das condições de fronteira sob a ação de um fluxo é semelhante à modelação das condições de fronteira isoladas anteriormente descritas. A temperatura nos pontos fictícios junto á fronteira continua a ser aproximada pela expressão dada na Equação (3.15). Contudo, a expressão da derivada não nula, deduzida da Equação (2.6), é,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{q(x)}{-k\rho C}$$

Substituindo esta expressão na Equação (3.15) obtemos

$$T_{(i,-1)} \cong T_{(i,1)} - 2\Delta x \frac{q_i}{\alpha} \quad (3.21)$$

Em que $\alpha = -k\rho C$.

3.2 A equação de condução de calor

De forma semelhante à dedução da equação de Laplace, a equação do calor pode ser deduzida através da conservação do calor num elemento infinitesimal numa barra isolada, longa e fina como mostra a Figura 3.12.

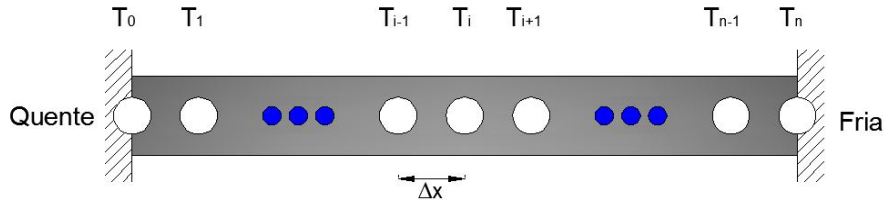


Figura 3.12 - Barra fina, isolada em todos os pontos, exceto nas extremidades, (Chapra C. S., 2012)

Contrariamente ao caso estacionário, o balanço também terá em conta as quantidades de calor armazenadas no elemento num período de tempo Δt . Logo, esse balanço será da seguinte forma: entradas – saídas = armazenado, ou

$$q(x)\Delta y\Delta z\Delta t - q(x + \Delta x)\Delta y\Delta z\Delta t = \Delta x\Delta y\Delta z\rho C\Delta T \quad (3.22)$$

Dividindo pelo volume do elemento ($= \Delta x\Delta y\Delta z$) e Δt , obtemos:

$$\frac{q(x) - q(x + \Delta x)}{\Delta x} = \rho C \frac{\Delta T}{\Delta t} \quad (3.23)$$

Tomando o limite, temos

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.24)$$

Substituindo a lei de condução de calor de Fourier, Equação (3.6) na Equação (3.24) obtemos

$$-\frac{\partial \left(-k\rho C \frac{\partial T}{\partial x} \right)}{\partial x} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

que resulta na equação de condução do calor:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.25)$$

3.2.1 Método Explícito

A equação de condução de calor exige aproximações para a segunda derivada no espaço e para a primeira derivada no tempo. Dessa forma, vamos aproximar a primeira por uma fórmula da diferença finita centrada e a segunda por uma fórmula da diferença em avanço.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{(i+1)}^k - 2T_{(i)}^k + T_{(i-1)}^k}{\Delta x^2} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{(i)}^{k+1} - T_{(i)}^k}{\Delta t} \quad (3.27)$$

Substituindo as duas equações anteriores na Equação (3.25), obtemos,

$$\alpha \frac{T_{(i+1)}^k - 2T_{(i)}^k + T_{(i-1)}^k}{\Delta x^2} = \frac{T_{(i)}^{k+1} - T_{(i)}^k}{\Delta t}$$

que pode ser reescrita como,

$$T_{(i)}^{k+1} = T_{(i)}^k + \lambda (T_{(i+1)}^k - 2T_{(i)}^k + T_{(i-1)}^k) \quad (3.28)$$

Onde $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

i. Estabilidade do método explícito

Um método é considerado estável quando a solução resultante da sua aplicação não se afasta da solução exata à medida que o tempo avança. A estabilidade depende diretamente da escolha do passo de tempo Δt que, por sua vez, é condicionado pela escolha do passo espacial Δx . Demonstra-se em, (Varga, 2000) que o método explícito é estável se,

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta x)^2}{\alpha} \quad (3.29)$$

A implementou-se o método explícito ao problema proposto no exercício 30.1 de (Chapra & Canale, 2008). O código do programa elaborado em (GNU Octave, 2011) para resolução deste problema está no Anexo I com nome `codigo3DF.m`.

O problema consiste numa barra fina (unidimensional) de alumínio com 10cm de comprimento, temperaturas fixas nas extremidades de $T_0 = 100^\circ C$ e $T_{n+1} = 50^\circ C$ (n é o número de subintervalos) e valor inicial nulo para as temperaturas no interior da barra ($T_i = 0$ para $i = 1, \dots, n-1$).

Apesar de se tratar de um problema transiente optou-se por não variar as propriedades do material (alumínio) com a temperatura. Sendo assim as propriedades estáticas utilizadas para o alumínio são as seguintes:

$$C = 0.2174 \left[\frac{k \cdot J}{kg \cdot K} \right]$$

$$\alpha = 0.020875 \left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$$

$$\rho = 2.7 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

Onde

C - Calor específico

α - Condutividade térmica

ρ - Massa específica

O domínio foi discretizado em $n = 5$ subintervalos de amplitude igual a $\Delta x = 2$. Resolveu-se o problema para um intervalo de tempo situado entre 0 e 12s ($0 \leq t \leq 12$). A amplitude dos subintervalos de tempo Δt foi escolhida de maneira a verificar a condição Equação (3.29).

Em termos de implementação, criou-se uma matriz para registar as temperaturas em que cada linha representa um tempo t_k e cada coluna, uma posição x_i . As temperaturas T_i^k , dos pontos interiores, foram calculadas através da fórmula Equação (3.28).

Os resultados finais, ilustrados na Figura 3.13, refletem o aquecimento progressivo da barra à medida que o tempo passa.

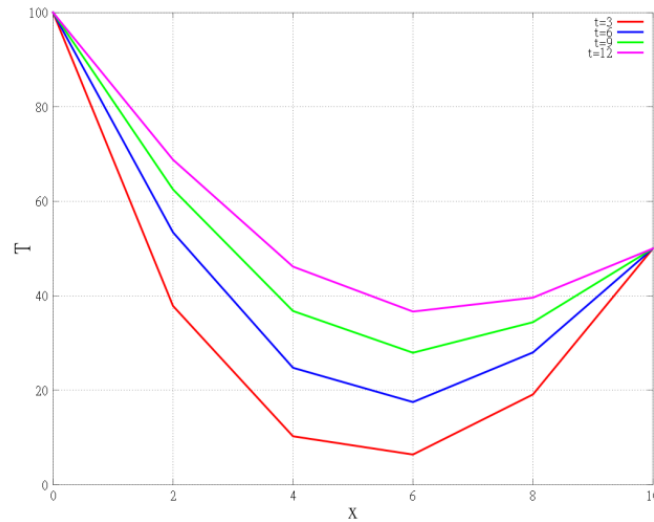


Figura 3.13 - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s (Método Explícito)

3.2.2 Método Implícito

Para contornar as dificuldades relacionadas com a estabilidade nas formulações explícitas recorre-se à utilização de métodos implícitos. Os métodos implícitos são incondicionalmente estáveis. Independentemente da escolha do valor de Δx os métodos explícitos produzem em cada passo de tempo soluções próximas das soluções reais.

O método implícito baseia-se em fazer a discretização do termo espacial da Equação (3.25) no tempo t_{k+1} em vez de t_k como é feito no método explícito. Assim a segunda derivada em ordem a x será aproximada por,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cong \frac{T_{(i+1)}^{k+1} - 2T_{(i)}^{k+1} + T_{(i-1)}^{k+1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.30)$$

Substituindo esta aproximação na equação de condução do calor discretizada obtemos

$$\alpha \frac{T_{(i+1)}^{k+1} - 2T_{(i)}^{k+1} + T_{(i-1)}^{k+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{T_{(i)}^{k+1} - T_{(i)}^k}{\Delta t}$$

Equivalente a,

$$-\lambda T_{(i-1)}^{k+1} + (1 + 2\lambda) T_{(i)}^{k+1} - \lambda T_{(i+1)}^{k+1} = T_{(i)}^k \quad (3.31)$$

Onde $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

Aplicando esta equação a todos os pontos x_i interiores ao domínio ($i = 1, \dots, n-1$), obtemos um sistema de com $(n-1)$ equações e $(n-1)$ incógnitas que é resolvido em cada tempo t_k de maneira a obter as temperaturas T_i^k .

Validamos a implementação deste método no problema proposto com exercício nº 30.2 em (Chapra & Canale, 2008).

O domínio foi discretizado em $n = 5$ subintervalos de amplitude igual a $\Delta x = 2$. Resolveu-se o problema para um intervalo de tempo situado entre 0 e 12s ($0 \leq t \leq 12$). A amplitude dos subintervalos de tempo é $\Delta t = 0.1$ e o código do programa elaborado em (GNU Octave, 2011) para resolução deste problema está no Anexo I com nome `codigo4DF.m`.

Aplicando a Equação (3.31) ao ponto x_i obtemos a Equação (3.32) que incorpora a condição de fronteira do lado esquerdo $T_0^k = 100$.

$$(1 + 2\lambda)T_{(1)}^{k+1} - \lambda T_{(2)}^{k+1} = T_{(1)}^k + \lambda T_{(0)}^{k+1} \quad (3.32)$$

A equação da temperatura no ponto x_{n-1} , vizinho da fronteira do lado direito, incorpora a segunda condição de fronteira $T_{n+1}^k = 50$

$$(1 + 2\lambda)T_{(n-1)}^{k+1} - \lambda T_{(n-2)}^{k+1} = T_{(n-1)}^k + \lambda T_{(n)}^{k+1} \quad (3.33)$$

As Equações (3.32) e (3.33) para $t=0$ e $\lambda=0.020875$ são respetivamente:

$$(1 + 2 \times 0.020875)T_{(1)}^1 - 0.020875 \times T_{(2)}^1 = 0 + 0.020875 \times 100$$

e

$$(1 + 2 \times 0.020875)T_{(1)}^1 - 0.020875 \times T_{(2)}^1 = 0 + 0.020875 \times 50$$

Juntando estas duas equações obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 1.04175 \times T_{(1)}^1 - 0.020875 \times T_{(2)}^1 = 2.0875 \\ -0.020875 \times T_{(1)}^1 + 1.04175 \times T_{(2)}^1 - 0.020875 \times T_{(3)}^1 = 0 \\ -0.020875 \times T_{(2)}^1 + 1.04175 \times T_{(3)}^1 - 0.020875 \times T_{(4)}^1 = 0 \\ -0.020875 \times T_{(3)}^1 + 1.04175 \times T_{(4)}^1 = 1.04375 \end{cases}$$

A resolução deste sistema conduz às temperaturas no tempo $T_{(1)} = 3$ s. No tempo seguinte deverá resolver-se um sistema muito parecido com este em que apenas muda o vetor dos termos independentes b devido à atualização dos valores de $T_{(i)}^k$ (temperaturas na barra no tempo anterior). Na Figura 3.14 apresenta-se a evolução das temperaturas de 0 a 12s com um passo de tempo $\Delta t = 0.1$ s e um passo de $\Delta x = 2$.

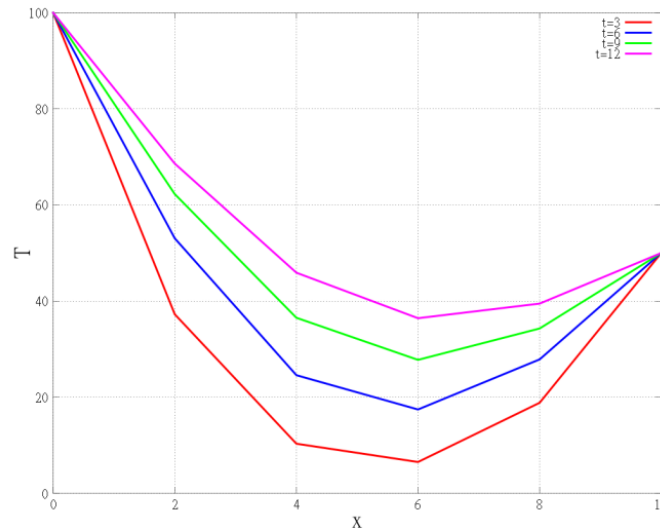


Figura 3.14 - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s (Método Implícito)

Como se pode verificar os gráficos são muito semelhantes aos gráficos obtidos com o método explícito. Contudo a coerência dos resultados obtidos pelos dois métodos depende da estabilidade do método explícito. Para ilustrar esta situação resolvemos o mesmo problema com um passo de tempo Δx que não verifica a condição de estabilidade Equação (3.29).

Considerando os mesmos valores para $\Delta x = 2$ e $\alpha = 0,835$ a condição de estabilidade é,

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \times \frac{(2.0)^2}{0.835} = 2.39521$$

Arbitrando $\Delta t = 3,0$ obtemos os resultados apresentados na Figura 3.15. Enquanto que os resultados obtidos com o método implícito, igualmente com $\Delta t = 3,0$, são apresentados na Figura 3.16.

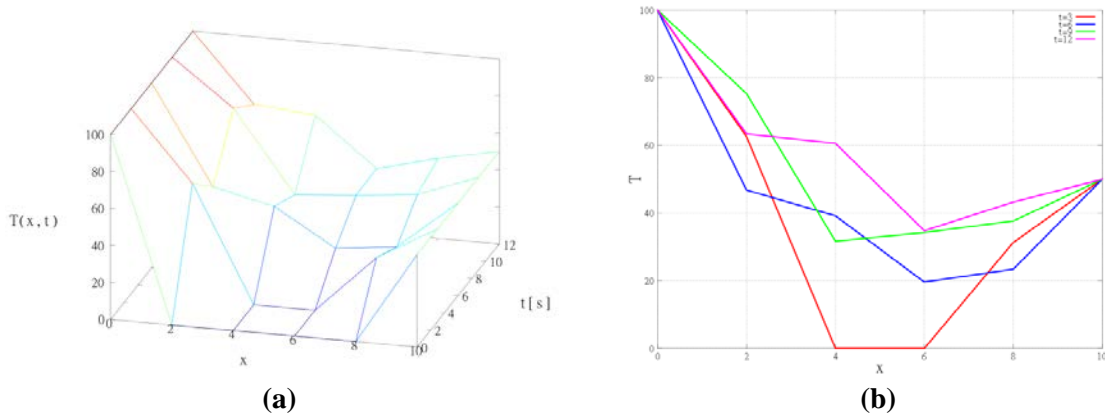


Figura 3.15 - Método explícito com $\Delta t=3$ (a) Evolução das temperaturas na barra; (b) - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s

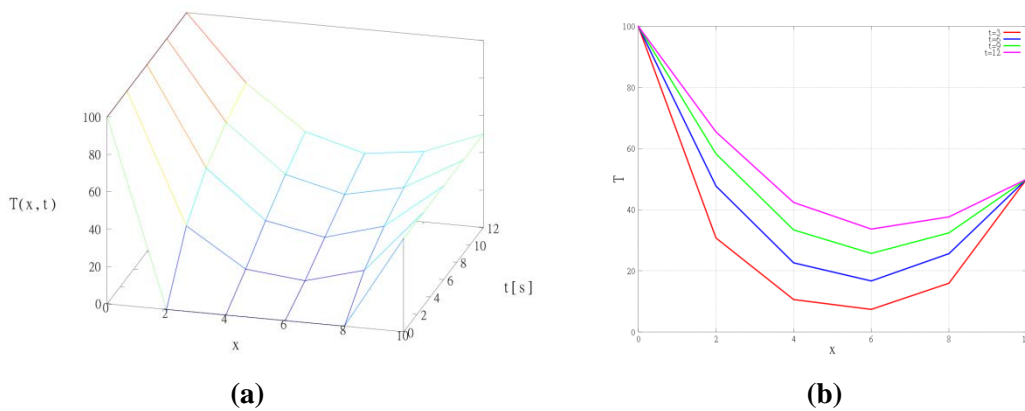


Figura 3.16 - Método implícito com $\Delta t=3$ (a) Evolução das temperaturas na barra; (b) - Temperaturas na barra ao fim de 3, 6, 9 e 12 s

Como podemos verificar na Figura 3.15 a instabilidade do método é notória pois os resultados estão bem afastados dos resultados anteriormente obtidos. Por outro lado na Figura 3.16 verificou-se que a mudança do valor do intervalo de tempo tem pouca influência no resultado final.

A Tabela 3.3 apresenta os resultados obtidos juntamente com os resultados apresentados em, (Chapra & Canale, 2008) para um tempo final de 10s.

Tabela 3.3 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)

Δt	λ	Explícito			Implícito		
		Livro	Calculado	Diferença	Livro	Calculado	Diferença
10	2,0875	208,75	208,70	5,00E-02	53,01	53,001	9,00E-03
5	1,04375	-9,13	-9,0734	-5,66E-02	58,49	58,487	3,00E-03
2	0,4175	67,12	67,115	5,00E-03	62,22	62,219	1,00E-03
1	0,20875	65,91	65,909	1,00E-03	63,49	63,485	5,00E-03
0.5	0,104375	65,33	65,324	6,00E-03	64,12	64,110	1,00E-02
0.2	0,04175	64,97	64,966	4,00E-03	64,49	64,480	1,00E-02

Como podemos verificar na Tabela 3.3 os valores alcançados são muito próximos dos apresentados no livro. A diferença será devida ao facto dos valores do livro resultarem de cálculos arredondados à primeira casa decimal.

3.2.3 Equações parabólicas em duas dimensões

A equação de condução de calor aplicada a um domínio bidimensional tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.34)$$

Esta equação modela a distribuição de temperatura numa placa aquecida nos bordos. A resolução numérica desta equação pode ser feita através da aproximação das derivadas por diferenças finitas. Para isso substituiu-se as Equações (3.9), (3.10) e (3.14) na Equação (3.34).

$$\frac{T_{(i)}^{k+1} - T_{(i)}^k}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{(i,j+1)}^k - 2T_{(i,j)}^k + T_{(i,j-1)}^k}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{(i+1,j)}^k - 2T_{(i,j)}^k + T_{(i-1,j)}^k}{(\Delta y)^2} \right)$$

Para o caso de $\Delta x = \Delta y$ a equação simplifica-se em

$$T_{(i,j)}^{k+1} = \lambda T_{(i+1,j)}^k + \lambda T_{(i-1,j)}^k + (1-4\lambda)T_{(i,j)}^k + \lambda T_{(i,j+1)}^k + \lambda T_{(i,j-1)}^k \quad (3.35)$$

Com $\lambda = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$. No caso de $\Delta x \neq \Delta y$ obtemos o seguinte esquema,

$$T_{(i,j)}^{k+1} = \lambda_x \left(T_{(i,j+1)}^k - 2T_{(i,j)}^k + T_{(i,j-1)}^k \right) + \lambda_y \left(T_{(i+1,j)}^k - 2T_{(i,j)}^k + T_{(i-1,j)}^k \right) + T_{(i,j)}^k \quad (3.36)$$

Com $\lambda_x = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ e $\lambda_y = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta y^2}$.

Os dois esquemas anteriores são explícitos porque a discretização dos dois termos espaciais da Equação (3.34) foi feita no tempo t_k . Como tal as temperaturas no tempo t_{k+1} podem ser calculadas diretamente a partir das temperaturas no tempo anterior (t_k).

Exemplificamos a aplicação do método explícito numa placa aquecida com dimensões unitárias e temperaturas constantes nos bordos Figura 3.3, tal como proposto no exercício 30.5 no livro (Chapra & Canale, 2008). O código correspondente ao programa desenvolvido

em (GNU Octave, 2011) para a resolução deste problema encontra-se no Anexo I com o nome código5DF.m.

Tal como anteriormente apresentam-se os resultados graficamente através de um mapa de cores, obtido com $\Delta x = 10$ e $\Delta y = 5$, cuja variação para o vermelho indica o aumento das temperaturas.

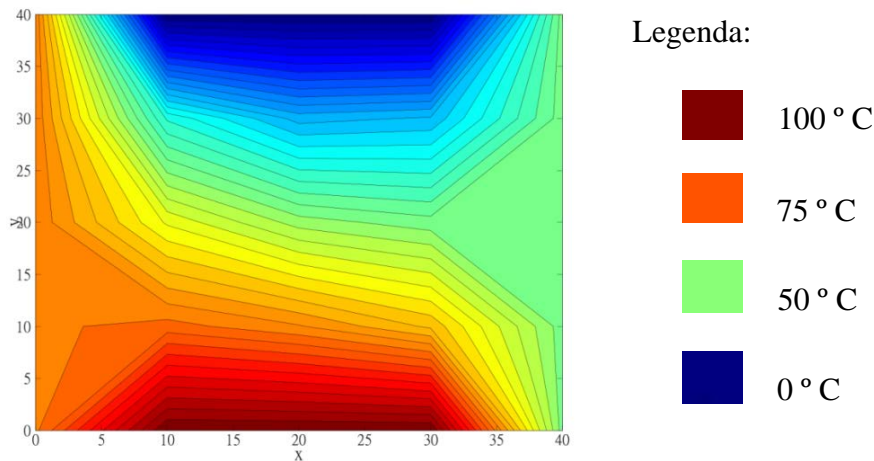


Figura 3.17 - Curvas de nível das temperaturas para condições de fronteira fixas em $t = 10s$

A Tabela 3.4, Tabela 3.5 e Tabela 3.6 apresentam os resultados obtidos juntamente com os resultados apresentados em, (Chapra & Canale, 2008).

Tabela 3.4 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)

Pontos	Livro	Calculados	Diferença
T(1,1)	60,76	61,88	-1,12E+00
T(1,2)	52,57	53,40	-8,26E-01
T(1,3)	53,02	53,67	-6,53E-01
T(2,1)	41,09	41,93	-8,40E-01
T(2,2)	27,20	27,46	-2,56E-01
T(2,3)	31,94	32,24	-2,99E-01
T(3,1)	28,56	29,07	-5,07E-01
T(3,2)	14,57	14,63	-6,01E-02
T(3,3)	20,73	20,86	-1,35E-01

Tabela 3.5 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)

Pontos	Livro	Calculados	Diferença
T(1,1)	72,82	73,18	-3,60E-01
T(1,2)	68,17	68,54	-3,72E-01
T(1,3)	64,12	64,31	-1,95E-01
T(2,1)	55,26	55,73	-4,70E-01
T(2,2)	45,32	45,80	-4,81E-01
T(2,3)	44,86	45,11	-2,46E-01
T(3,1)	37,40	37,72	-3,20E-01
T(3,2)	25,72	26,05	-3,25E-01
T(3,3)	28,69	28,85	-1,65E-01

Tabela 3.6 - Valores calculados comparados com os valores do livro (Chapra & Canale, 2008)

Pontos	Livro	Calculados	Diferença
T(1,1)	76,54	76,69	-1,50E-01
T(1,2)	73,29	73,46	-1,69E-01
T(1,3)	67,68	67,77	-8,68E-02
T(2,1)	60,30	60,52	-2,24E-01
T(2,2)	52,25	52,51	-2,65E-01
T(2,3)	49,67	49,82	-1,48E-01
T(3,1)	40,82	41,00	-1,78E-01
T(3,2)	30,43	30,63	-2,04E-01
T(3,3)	31,96	32,07	-1,15E-01

Como podemos verificar na Tabela 3.4, Tabela 3.5 e Tabela 3.6 os valores alcançados são muito próximos dos apresentados no livro. A diferença será devida ao facto dos valores do livro resultarem de cálculos arredondados à primeira casa decimal.

4. APROXIMAÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS POR ELEMENTOS FINITOS

4.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste num método numérico para resolução de equações às derivadas parciais que modelam fenómenos físicos em meios contínuos. Aplica-se tanto em problemas de valores fronteiras puros, no caso da modelação de problemas estacionários, como em problemas com condições de valores fronteira e valores iniciais, no caso de problemas transientes.

Em comparação com o método das diferenças finitas tem a vantagem de se adaptar mais facilmente a domínios com contornos irregulares. Em contrapartida a sua implementação é um pouco mais complexa devido à necessidade de manipular nós e elementos em simultâneo. Neste capítulo implementa-se o método dos elementos finitos e valida-se os códigos (GNU Octave, 2011) em problemas de transferência de calor a uma e duas dimensões (estacionário e não-estacionário).

4.2 Problema a uma dimensão

Consideramos a equação de transferência de calor ao longo de um domínio unidimensional:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -f(x) \quad (4.1)$$

Este problema de Poisson pode ser utilizado para modelar a distribuição da temperatura $T_{(x)}$ ao longo de uma barra, cuja espessura é insignificante em comparação com o seu comprimento, sujeita a uma fonte de calor representada por $f_{(x)}$ e com condições de fronteira conhecidas tal como no exemplo ilustrado na Figura 4.1.

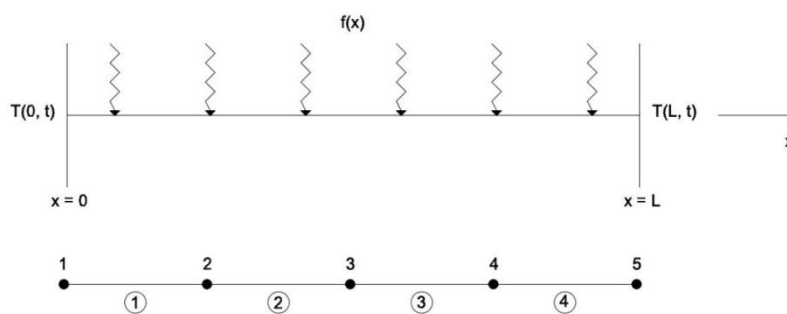


Figura 4.1 - Representação do problema a resolver

Começa-se pela discretização do domínio em $n+1$ subintervalos, designados por elementos do domínio, de igual amplitude $h_j = x_{j+1} - x_j$ para $j=0,1,\dots,n$. A abordagem através de elementos finitos consiste em modelar a temperatura nesses subintervalos através de funções matemáticas, geralmente polinomiais. No caso de se utilizar um polinómio do primeiro grau considera-se que a temperatura evolui linearmente entre os dois nós vizinhos de acordo com a expressão:

$$\tilde{T}(x) = a_0 + a_1x \quad (4.2)$$

Utiliza-se $\tilde{T}(x)$ para representar a temperatura aproximada por elementos finitos. Impondo as condições de fronteira nos dois nós vizinhos $\tilde{T}(x_j) = T_j$ e $\tilde{T}(x_{j+1}) = T_{j+1}$ obtemos um sistema com duas equações e duas incógnitas

$$\begin{aligned} T_j &= a_0 + a_1x_j \\ T_{j+1} &= a_0 + a_1x_{j+1} \end{aligned} \quad (4.3)$$

A resolução deste sistema conduz a

$$a_0 = \frac{T_j x_{j+1} - T_{j+1} x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (4.4)$$

e

$$a_1 = \frac{T_{j+1} - T_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (4.5)$$

Substituindo esta solução na equação (4.2) obtém-se a *função de aproximação* ou de *forma*

$$\tilde{T}(x) = N_1 T_j + N_2 T_{j+1} \quad (4.6)$$

Em que N_1 e N_2 são funções de interpolação lineares dadas por

$$N_1 = \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \quad (4.7)$$

e

$$N_2 = \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \quad (4.8)$$

A Equação (4.6) indica que $\tilde{T}(x)$ é combinação linear dos valores da temperatura em cada um dos nós adjacentes T_j e T_{j+1} . Verifica-se também que $N_1 + N_2 = 1$ para $x_j \leq x \leq x_{j+1}$.

A utilização da função de forma (Equação (4.6)), como aproximação da temperatura, tem a vantagem de ser facilmente derivada e integrada. A sua derivada será dada por:

$$\frac{d\tilde{T}}{dx} = \frac{dN_1}{dx}T_1 + \frac{dN_2}{dx}T_2 = -\frac{1}{x_{j+1}-x_j}T_1 + \frac{1}{x_{j+1}-x_j}T_2 = \frac{-T_1+T_2}{x_{j+1}-x_j} \quad (4.9)$$

e o integral definido será dado por

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \tilde{T}(x)dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} (N_1T_j + N_2T_{j+1})dx = \frac{T_j + T_{j+1}}{2}(x_{j+1} - x_j) \quad (4.10)$$

O problema consiste assim em calcular T_j e T_{j+1} para cada um dos elementos j . Existem várias abordagens possíveis para este efeito. Seguir-se-á aqui o método de Galerkin que consiste em minimizar o resíduo devido à utilização da função de aproximação. Assim se substituirmos a Equação (4.6) na Equação (4.1) deixaremos de ter a igualdade

$$\frac{d^2T}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (4.11)$$

Mas sim um resíduo

$$\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2} + f(x) = R(x) \quad (4.12)$$

A minimização deste resíduo é conseguida impondo que este seja ortogonal ao plano definido pelas funções interpoladoras, i.e., que o produto escalar contínuo entre $R(x)$ e $N_1(x)$ e $N_2(x)$ seja nulo:

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} R(x) \cdot N_i(x)dx = 0, \text{ para } i = 1, 2 \quad (4.13)$$

ou

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \left[\frac{d^2\tilde{T}}{dx^2} + f(x) \right] N_i(x)dx = 0, \text{ para } i = 1, 2 \quad (4.14)$$

Que pode ser escrita como

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} N_i(x) dx = - \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) N_i(x) dx, \quad i = 1, 2 \quad (4.15)$$

Aplicando a integração por partes ao lado esquerdo desta equação obtém-se

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_i(x) \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} dx = -N_i(x) \frac{d\tilde{T}}{dx} \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_i}{dx} dx, \quad i = 1, 2 \quad (4.16)$$

que no caso de $i = 1$ é equivalente a

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_1(x) \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} dx = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_1}{dx} dx \quad (4.17)$$

e no caso de $i = 2$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} N_2(x) \frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} dx = \frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_2}{dx} dx \quad (4.18)$$

Substituindo os segundos membros destas duas Equações (4.15) em obtemos para $i = 1$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_1}{dx} dx = -\frac{d\tilde{T}(x_1)}{dx} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) N_1(x) dx \quad (4.19)$$

e para $i = 2$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_2}{dx} dx = -\frac{d\tilde{T}(x_2)}{dx} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) N_2(x) dx \quad (4.20)$$

A opção de integrar por partes é conhecida como formulação fraca porque permite baixar o grau da equação diferencial de segunda para primeira ordem. Efetivamente as Equações (4.19) e (4.20) não contêm segundas derivadas. Os integrais do lado esquerdo são facilmente calculados devido à simplicidade da função de forma (Equação (4.6)). Utilizando as fórmulas das derivas deduzidas na Equação (4.9) para calcular estes integrais obtemos

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{dN_1}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{T_1 - T_2}{(x_{j+1} - x_j)^2} dx = \frac{1}{x_{j+1} - x_j} (T_1 - T_2) \quad (4.21)$$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{dN_2}{dx} dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{-T_1 + T_2}{(x_{j+1} - x_j)^2} dx = \frac{1}{x_{j+1} - x_j} (-T_1 + T_2) \quad (4.22)$$

Substituindo os integrais nas equações (4.19) e (4.20) obtemos um sistema com duas equações e duas incógnitas (T_j e T_{j+1}):

$$\begin{cases} \frac{1}{h_j}(T_1 - T_2) = -\frac{dT(x_1)}{dx} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)N_1(x)dx \\ \frac{1}{h_j}(-T_1 + T_2) = -\frac{dT(x_2)}{dx} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)N_2(x)dx \end{cases} \quad (4.23)$$

em que $h_j = x_{j+1} - x_j$ é o comprimento do elemento. Este sistema pode ser representado matricialmente por $\mathbf{KT}=\mathbf{F}$:

$$\underbrace{\frac{1}{h_j} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} T_j \\ T_{j+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{dT(x_j)}{dx} \\ \frac{dT(x_{j+1})}{dx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \cdot N_1(x) dx \\ \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \cdot N_2(x) dx \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \quad (4.24)$$

A matriz dos coeficientes \mathbf{K} contém as propriedades do elemento é por isso também designada por matriz de rigidez. O vetor dos termos independentes do sistema \mathbf{F} contém as condições de fronteira, dadas na forma de derivadas (condições de Neumann), assim como a fonte de calor $f_{(x)}$ no interior do elemento.

Este sistema aplica-se a todo o elemento j , com $j=1, 2, \dots, n+1$. Como cada elemento tem duas equações, ao juntar os sistemas relativos a dois elementos adjacentes deve-se adicionar a segunda equação do elemento j com a primeira equação do elemento $j+1$ de maneira a obter no total um sistema com $n+2$ equações e $n+2$ incógnitas ($T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$). Se os valores da temperatura forem conhecidas na fronteira do domínio (T_0 e T_{n+1}) as incógnitas serão $dT(x_0)/dx$ e $dT(x_{n+1})/dx$.

Ilustra-se de seguida a utilização do método dos elementos finitos atrás descrito para determinar as temperaturas numa barra com comprimento igual a 10cm, com temperaturas constantes nas extremidades ($T_0 = 40^\circ C$ e $T_5 = 200^\circ C$) sujeita a uma fonte de calor constante de $f(x) = 10$. Este problema está ilustrado na Figura 4.1 e foi retirado de (Chapra & Canale, 2008).

Dividiu-se a barra em 4 elementos finitos de igual dimensão $h = 2,5$. Os integrais do lado direito do sistema (4.24) são todos iguais a 10 vezes a área de um triângulo retângulo de altura igual à 1 e base 2,5, perfazendo um valor de 12,5. Observe-se que no caso da função $f_{(x)}$, que representa o calor fornecido à barra, ser representada por uma expressão complexa este integral poderá ser calculado numericamente.

O sistema (4.24) para cada um dos elementos será dado por

$$\begin{bmatrix} 0,4 & -0,4 \\ -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_j \\ T_{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{dT(x_j)}{dx} + 12,5 \\ \frac{dT(x_{j+1})}{dx} + 12,5 \end{bmatrix}, \text{ para } j=1, \dots, 4$$

Juntando todos os sistemas num único obtém-se

$$\begin{bmatrix} 0,4 & -0,4 & & & \\ -0,4 & 0,8 & -0,4 & & \\ & -0,4 & 0,8 & -0,4 & \\ & & -0,4 & 0,8 & -0,4 \\ & & & -0,4 & 0,4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{dT(x_0)}{dx} + 12,5 \\ 25 \\ 25 \\ 25 \\ \frac{dT(x_4)}{dx} + 12,5 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Como os valores de T_0 e de T_4 são conhecidos mas não conhecemos $-\frac{dT(x_0)}{dx}$ nem $-\frac{dT(x_4)}{dx}$, o sistema acima poderá ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,4 & & & \\ & 0,8 & -0,4 & & \\ & -0,4 & 0,8 & -0,4 & \\ & & -0,4 & 0,8 & \\ & & & -0,4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{dT(x_0)}{dx} \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \frac{dT(x_4)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,5 \\ 41 \\ 25 \\ 105 \\ -67,5 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Cuja solução é $\frac{dT(x_0)}{dx} = 66$, $T_1 = 173,75$, $T_2 = 245$, $T_3 = 253,75$ e $\frac{dT(x_4)}{dx} = -34$. Esta solução está representada na Figura 4.2 juntamente com a solução analítica.

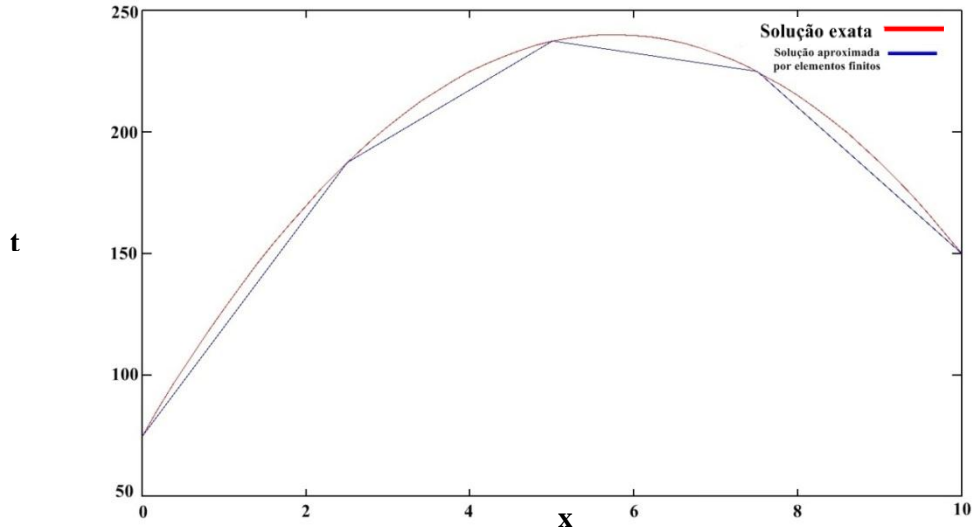


Figura 4.2 - Resultados obtidos com 4 elementos finitos

Os resultados ilustrados na Figura 4.2 mostram que a solução obtida por elementos finitos coincide com a solução analítica em todos os nós.

Resolveu-se também este problema com uma malha mais densa de 10 elementos de maneira a obter uma distribuição mais detalhada das temperaturas no interior da malha. O código (GNU Octave, 2011) correspondente a esta implementação está incluído no Anexo I sob a designação de `codigolEF.m`. Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 4.3. Mais uma vez os resultados obtidos coincidem com a solução analítica em todos os nós.

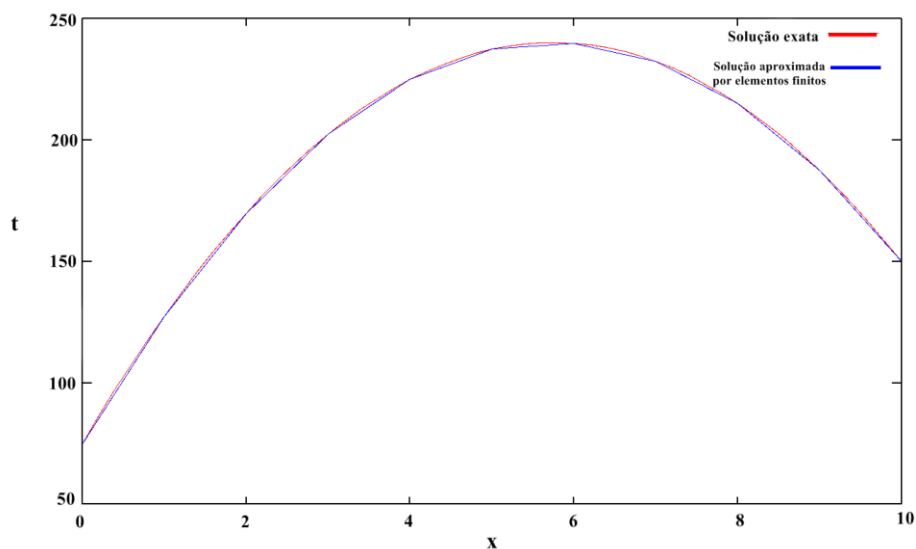


Figura 4.3 - Resultados obtidos para 10 elementos finitos

4.3 Problema a duas dimensões estacionário

Nesta secção descrevem-se os principais passos da implementação do método dos elementos finitos para a resolução da equação de Poisson a duas dimensões

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{d^2T}{dy^2} = -f(x, y) \quad (4.27)$$

Esta equação é utilizada para modelar a distribuição da temperatura $T(x, y)$ num corpo bidimensional de área A sujeito a determinadas condições ao longo da sua fronteira Γ . A equação (4.27) pode igualmente ser representada por

$$\Delta T = -f(x, y) \text{ ou } \nabla^2 T = -f(x, y).$$

Observamos também que esta equação se simplifica na equação de Laplace quando não existem efeitos externos ($f(x, y) = 0$).

A implementação do método dos elementos finitos a duas dimensões segue uma abordagem semelhante à utilizada para uma dimensão. Considera-se que a temperatura evolui linearmente ao longo de cada elemento do domínio e que esse elemento quando vistos em planta é um triângulo de área A_e cujos vértices têm coordenadas (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) . Pelo que a temperatura é aproximada pela combinação linear dos valores da temperatura em cada um dos vértices do triângulo.

$$\tilde{T}(x) = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 \quad (4.28)$$

com

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ N_2 &= \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ N_3 &= \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \end{aligned}$$

As funções interpoladoras N_1 , N_2 e N_3 representam pirâmides de altura igual a 1, verificando-se também que $N_1 + N_2 + N_3 = 1$ em qualquer parte do elemento.

A condição de Galerkin aplicada ao elemento e de área igual a A_e

$$\int_{A_e} [\Delta \tilde{T} + f(x, y)] N_i dA = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.29)$$

é equivalente a

$$\int_{A_e} \left(\frac{d^2 \tilde{T}}{dx^2} + \frac{d^2 \tilde{T}}{dy^2} \right) N_i dA = - \int_{A_e} f(x, y) N_i dA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.30)$$

A aplicação do teorema de Green (Dhatt & Touzot, 1984) ao lado esquerdo desta equação resulta na forma fraca descrita por

$$\int_{A_e} \left(\frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_i}{dx} + \frac{d\tilde{T}}{dy} \frac{N_i}{dy} \right) dA = \int_{\Gamma_e} \frac{d\tilde{T}}{dn} d\Gamma - \int_{A_e} f(x, y) N_i dA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.31)$$

Estas equações são muito semelhante às obtidas para o caso unidimensional em (4.17) e (4.18). Estas equações dão origem a um sistema com 3 equações e 3 incógnitas, representado matricialmente por $\mathbf{KT}=\mathbf{F}$.

Os integrais do lado direito originam o vetor \mathbf{F} dos termos independentes do sistema. Contém o integral linha

$$\int_{\Gamma_e} \frac{d\tilde{T}}{dn} d\Gamma \quad (4.32)$$

em que \vec{n} é o vetor unitário ortogonal à fronteira com sentido para o exterior do elemento. Representa o contributo das condições de fronteira de Neumann ao longo da fronteira do elemento Γ_e , como por exemplo o fluxo de calor através da fronteira. Efetivamente quando o fluxo na fronteira é conhecido q_Γ então $dT/dn = q_\Gamma$. Os elementos finitos que incluem este tipo de condições de fronteira são designados por elementos de Neumann.

O integral de área

$$\int_{A_e} f(x, y) N_i dA \quad (4.33)$$

Representa os efeitos exteriores como por exemplo a existência de uma fonte de calor no interior do domínio.

O integral de volume do lado esquerdo origina a matriz de rigidez \mathbf{K} multiplicada pelo vetor das temperaturas \mathbf{T} :

$$\int_{A_e} \left(\frac{d\tilde{T}}{dx} \frac{N_i}{dx} + \frac{d\tilde{T}}{dy} \frac{N_i}{dy} \right) dA = \int_{A_e} \left[\left(\sum_{j=1}^3 T_j \frac{dN_j}{dx} \right) \frac{dN_i}{dx} + \left(\sum_{j=1}^3 T_j \frac{dN_j}{dy} \right) \frac{dN_i}{dy} \right] dA \quad (4.34)$$

Cada elemento da matriz \mathbf{K} é

$$k_{ij} = \int_{A_e} \left[\frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} + \frac{dN_j}{dy} \frac{dN_i}{dy} \right] dA = \int_{A_e} (\nabla N_j \cdot \nabla N_i) dA \quad \text{para } i=1,2,3 \text{ e } j=1,2,3 \quad (4.35)$$

Em que $\nabla N_i = \begin{bmatrix} \frac{dN_i}{dx} \\ \frac{dN_i}{dy} \end{bmatrix}$, é o gradiente de N_i .

Para um domínio decomposto em n elementos, a junção de todos os sistemas relativos a cada um dos elementos origina um sistema final $Ax = b$ com um número de equações e incógnitas iguais ao número total de nós. A construção da matriz de montagem A e do vetor b exige uma “mecânica” um pouco mais sofisticada do que no caso unidimensional, pois a junção das equações exige saber quais os elementos que estão em contacto. Para o efeito é comum utilizar-se uma matriz de ligação que irá facilitar a sua construção. A matriz de ligação contém um número de linhas igual ao número de elementos e três colunas com os números associados a cada um dos três nós situados nos vértices do elemento.

Após a montagem de matriz A e do vetor b procede-se à inclusão das condições de fronteira. No caso de condições de Dirichlet, o integral (4.32) desaparece, sendo necessário passar para o vetor b os valores das temperaturas na fronteira e anular em A os coeficientes das temperaturas na fronteira. Para o efeito utilizou-se o método da diagonal unitária. Igualase a zero cada linha da matriz A correspondente a um nó situado na fronteira com exceção do termo diagonal que é definido como 1. Finalmente, inclui-se o valor da temperatura na fronteira na linha do vetor b correspondente à diagonal unitária.

4.3.1 Resolução da equação de Laplace a duas dimensões

Implementou-se a metodologia atrás descrita para utilização do método dos elementos finitos a duas dimensões para o cálculo das temperaturas no interior de uma placa em alumínio, aquecida nos bordos proposto por (Chapra & Canale, 2008) e representada na Figura 4.4.

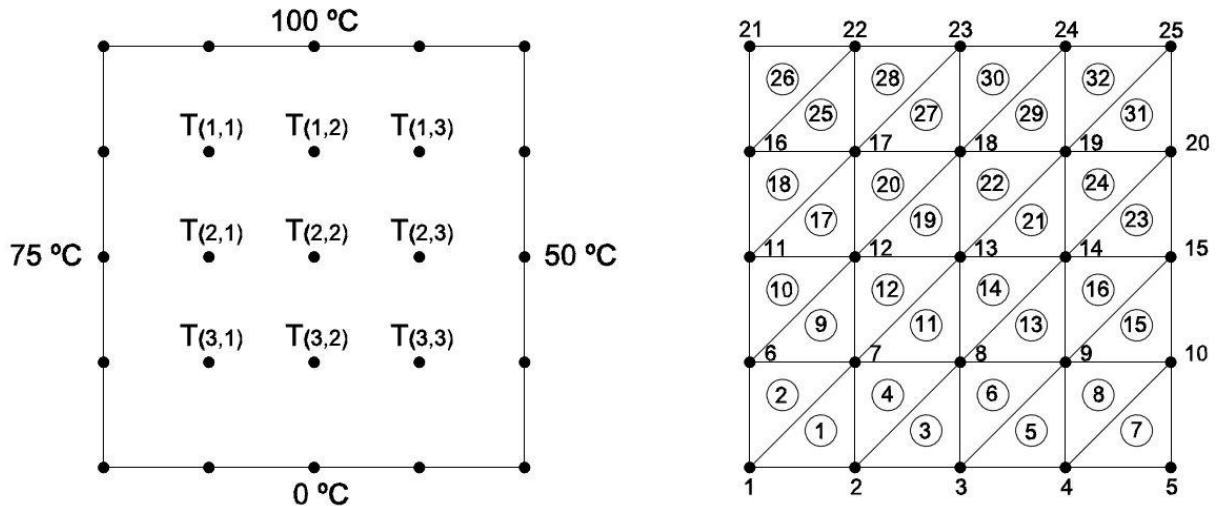


Figura 4.4 - Esquema de numeração para resolução de placa aquecida nos bordos (Chapra & Canale, 2008)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.36)$$

A resolução da equação de Laplace implica que os termos correspondentes ao integral (4.33) se anulem, fazendo com que o vetor \mathbf{b} inclua unicamente as condições de fronteira fixas.

Para construir a matriz de assemblagem \mathbf{A} não é necessário construir explicitamente as matrizes de rigidez \mathbf{K} referentes a cada elemento. Cria-se uma matriz quadrada de dimensão igual ao número de nós e percorre-se os elementos um a um calculando $\int_{A_e} \nabla N_i \cdot \nabla N_j dA$ com i e j a assumir sucessivamente o número de todos os nós em torno do elemento, daí a utilidade da matriz de ligação que facilita este passo. Estes resultados são adicionados aos coeficientes da matriz \mathbf{A} que correspondem aos nós considerados. Por exemplo, para o cálculo do elemento 1, deve-se ter em conta os nós cuja numeração global é 1, 2 e 7 (ver Figura 4.4). Os valores resultantes de $\int_{A_e} \nabla N_{j_1} \cdot \nabla N_{j_2} dA$, $\int_{A_e} \nabla N_{j_1} \cdot \nabla N_{j_7} dA$, $\int_{A_e} \nabla N_{j_1} \cdot \nabla N_{j_1} dA$, $\int_{A_e} \nabla N_{j_2} \cdot \nabla N_{j_1} dA \dots$ são adicionados aos coeficientes $\mathbf{A}(1,2)$, $\mathbf{A}(1,7)$, $\mathbf{A}(1,1)$, $\mathbf{A}(2,1), \dots$ respetivamente. O índice j_i indica o número local j correspondente ao número global i . Os números locais dos nós variam de 1, 2 ou 3, e obtêm-se percorrendo sempre os nós dos triângulos pela mesma ordem.

Após o cálculo da matriz \mathbf{A} , procedeu-se á inclusão das condições de fronteira no vetor \mathbf{b} através do método da diagonal unitária. O código (GNU Octave, 2011) correspondente a esta

implementação está incluído no Anexo I sob a designação de `codigo2EF.m`. A solução obtida está representada na Figura 4.5.

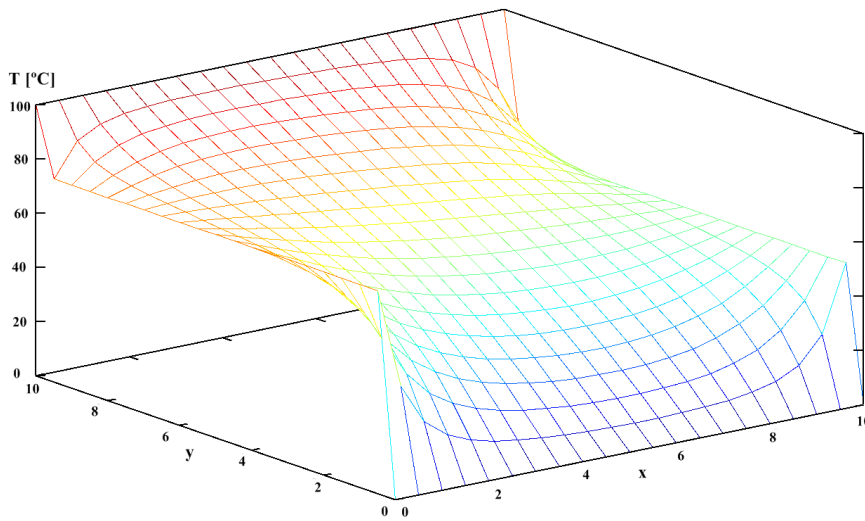


Figura 4.5 – Solução do problema da placa aquecida nos bordos

Testou-se também a inclusão das condições de fronteira de Neumann, modificando as condições de fronteira do problema original. Impôs-se que o lado esquerdo da placa seja termicamente isolado o que implica que $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$. Para este efeito utilizou-se elementos finitos de Neumann. O código (GNU Octave, 2011) correspondente a esta implementação está incluído no Anexo I sob a designação de `codigo3EF.m`. A solução obtida está representada na Figura 4.6.

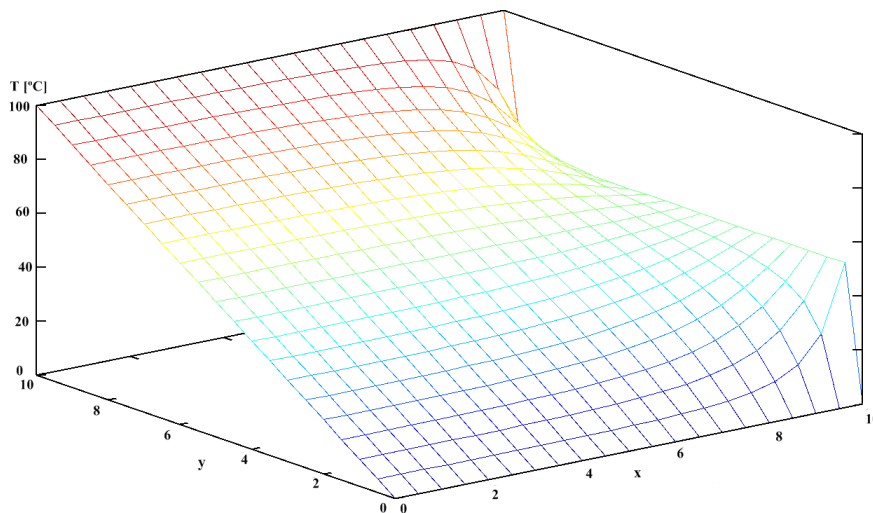


Figura 4.6 – Solução do problema da placa aquecida nos bordos (1 lado isolado)

4.3.2 Regime Transiente

Para o caso não estacionário é necessário resolver agora o problema ao longo do tempo. Consideremos a equação de transferência de calor a duas dimensões em regime transiente:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4.37)$$

Que pode ser representado como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad (4.38)$$

Em que α representa a condutividade térmica. Aplicando a condição de Galerkin a esta equação num elemento e de área igual a A_e resulta em

$$\int_{A_e} \alpha \Delta T \cdot N_i dA = \int_{A_e} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot N_i dA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.39)$$

Em que N_1 , N_2 e N_3 são as funções interpoladoras piramidais anteriormente mencionadas. A formulação fraca desta equação resulta em

$$\alpha \int_{A_e} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma - \alpha \int_{A_e} \nabla T \cdot \nabla N_i dA = \int_{A_e} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot N_i dA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.40)$$

$$\Leftrightarrow \alpha \int_{A_e} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot N_i dA - \alpha \int_{A_e} \nabla T \cdot \nabla N_i dA = \alpha \int_{A_e} \frac{\partial T}{\partial n} d\Gamma, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.41)$$

Esta equação pode ser escrita na forma matricial

$$M\dot{T} + KT = F \quad (4.42)$$

Sendo que M é a matriz de massa, K a matriz de rigidez e F o vetor dos efeitos externo e das condições de fronteira, à semelhança do caso estacionário. O vetor \dot{T} contem as primeiras derivadas em ordem ao tempo da temperatura T .

Depois de fazer a assemblagem das equações relativas a todos os elementos obtemos o sistema global

$$M\dot{T} + AT = b \quad (4.43)$$

Em que A é a matriz de assemblagem e b o vetor que contém apenas as condições de fronteira uma vez que a função $f(x, y)$, dos efeitos externos, é nula em (4.37). A Equação (4.43) pode ser resolvida através de um método explícito ou implícito.

4.3.3 Resolução explícita

O esquema do método explícito consiste em aproximar as derivadas da temperatura através da fórmula das diferenças em avanço

$$M \cdot \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta t} = b - A \cdot T^k \quad (4.44)$$

Em que T^k representa o vetor das temperaturas no tempo t_k . Resolvendo em ordem a T^{k+1} obtém-se

$$T^{k+1} = M^{-1} \cdot \Delta t \cdot b + (I - \Delta t \cdot M^{-1} \cdot A) \cdot T^k \quad (4.45)$$

Desta forma, em primeiro lugar resolve-se o problema como no caso estacionário a fim de determinar as matrizes A , M e b e depois atualizam-se as temperaturas de acordo com a expressão (4.45).

Esta metodologia foi validada no problema da placa aquecida ilustrado na Figura 4.4, alterando as condições de fronteira. Considerou-se uma temperatura constante de 100 [°C] na extremidade superior e uma temperatura de 0 [°C] nos restantes lados. As condições iniciais são de 0 [°C] no interior da placa tal como mostrado na Figura 4.7. O valor da condutividade utilizada foi de $\alpha = 1$. O código Octave, com a implementação desta abordagem está incluído no Anexo I, sob a designação de `codigo4EF.m`.

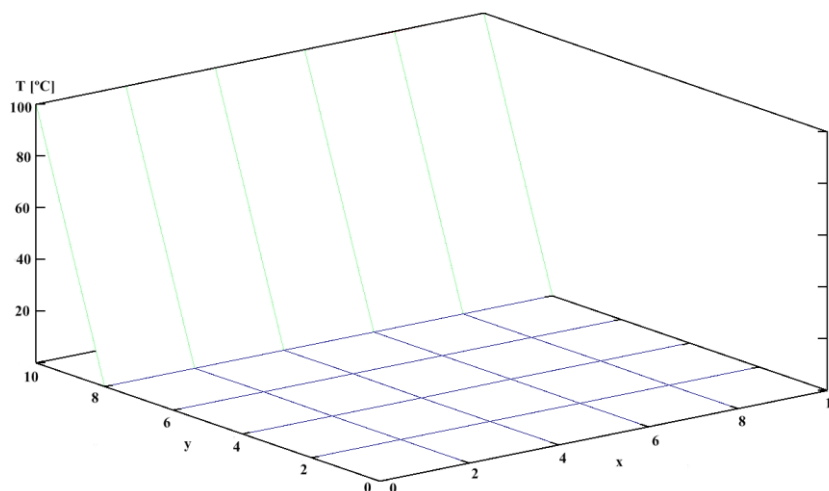


Figura 4.7 - Repartição das temperaturas no instante inicial

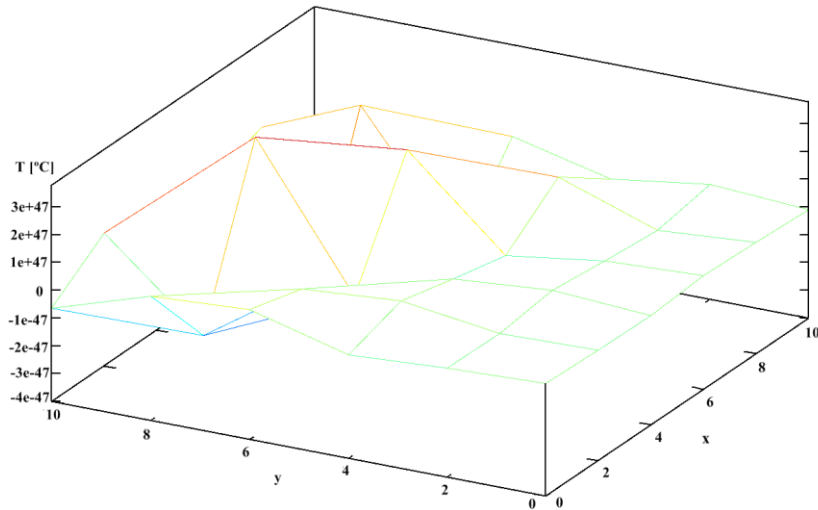


Figura 4.8 – Instabilidade da solução final para $\Delta t = 0,2$

A utilização de um passo de tempo $\Delta t = 0.2$ leva a que o esquema explícito seja instável. Este aspeto está bem patente na solução obtida e ilustrada na Figura 4.8.

Para verificar a estabilidade do esquema, deve-se analisar os valores próprios da matriz $I - \Delta t M^{-1}A$ responsável pelo fator de ampliação do erro. Designando por λ_i os valores próprios da matriz de ampliação, o erro não será ampliado apenas se o maior destes valores próprios, em valor absoluto, for menor do que 1 ($0 \leq |\lambda_i| \leq 1$). Se os valores próprios da matriz $M^{-1}A$ forem designados por l_i então os valores próprios da matriz de ampliação serão dados por $\lambda_i = 1 - \Delta t \cdot l_i$. Para que o esquema seja estável deverá verificar-se que $\Delta t \leq \frac{1}{\max(l_i)}$ (Dhatt & Touzot, 1984).

No presente caso verifica-se que $\frac{1}{\max(l_i)} = 0.0052002$ o que explica a falta de estabilidade pois utilizou-se $\Delta t = 0,2$. Resolvendo o problema com $\Delta t = 0,002$ obtiveram-se os resultados ilustrados nas Figura 4.9 a Figura 4.11, correspondentes à distribuição da temperatura após 1, 100 e 1000 iterações, respetivamente.

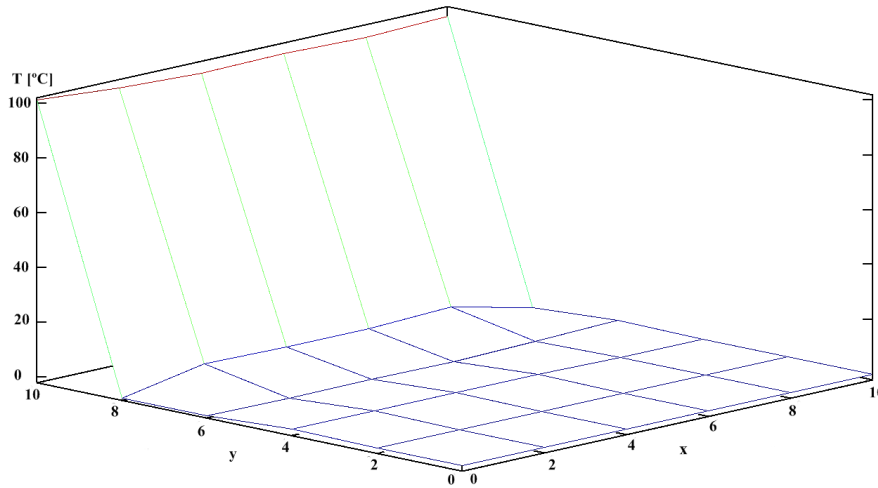


Figura 4.9 - Distribuição das temperaturas ao fim de uma iteração

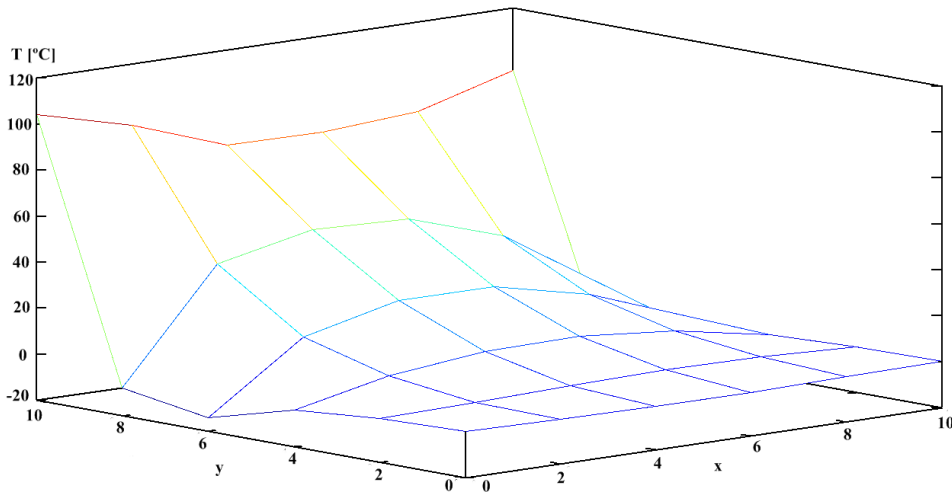


Figura 4.10 - Distribuição das temperaturas ao fim de 100 iterações

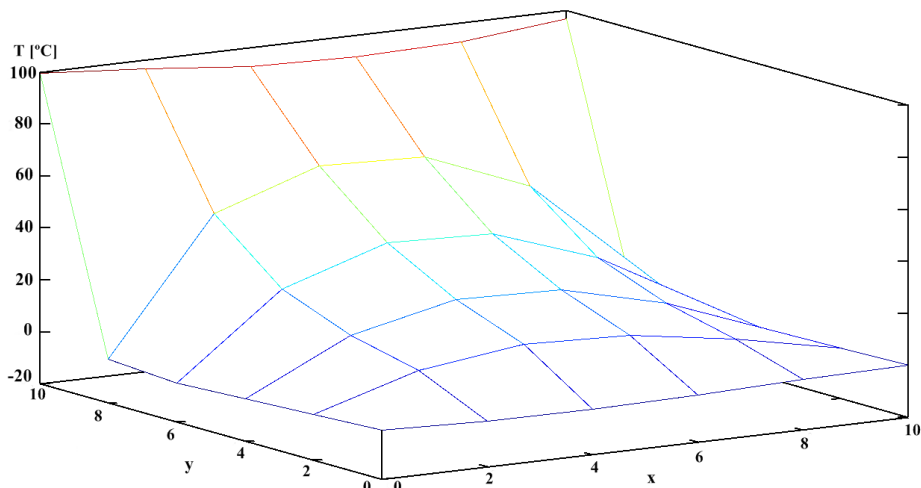


Figura 4.11 - Distribuição das temperaturas ao fim de 1000 iterações

4.3.4 Resolução implícita

O método implícito consiste em discretizar a Equação (4.43) no tempo t_{k+1} em vez de t_k .

Desta forma obtêm-se

$$M \cdot \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta t} = b - A \cdot T^{k+1} \quad (4.46)$$

Resolvendo em ordem a T^{k+1} obtém-se

$$T^{k+1} = (M + \Delta t \cdot A)^{-1} \cdot (\Delta t \cdot b + M \cdot T^k) \quad (4.47)$$

O esquema implícito não tem problemas de estabilidade, podendo ser usado qualquer Δt .

A Figura 4.12 mostra os resultados obtidos com o método implícito. O código (GNU Octave, 2011) com a implementação desta abordagem está incluído no Anexo I sob a designação de `codigo5EF.m`.

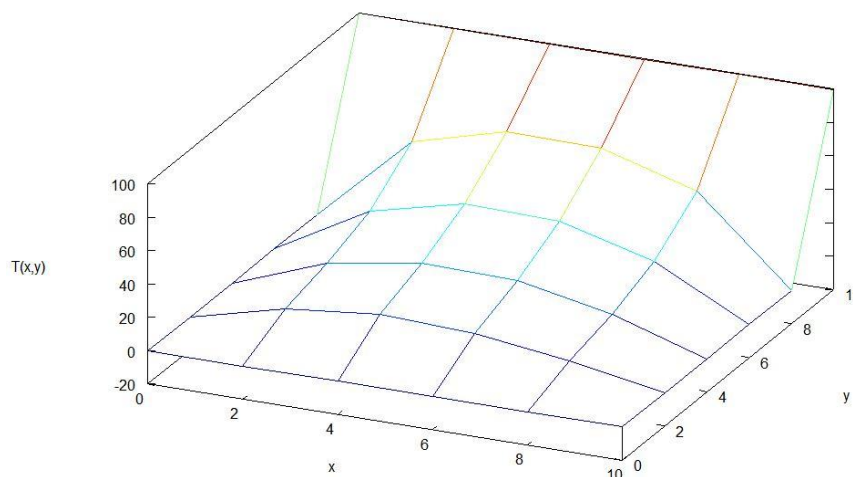


Figura 4.12 - Distribuição das temperaturas através do método implícito

5. MODELAÇÃO NUMÉRICA DO EFEITO DE UM INCÊNDIO LOCALIZADO SOBRE UMA LAJE EM BETÃO

5.1 Introdução

Neste capítulo serão abordados os resultados obtidos através da modelação numérica do efeito de um incêndio localizado sob uma laje em betão. Começa-se por descrever as propriedades do betão mais importantes para a análise transiente do problema. Faz-se também uma comparação entre os resultados obtidos pelas diferentes abordagens numéricas.

5.2 Características dos materiais

Nesta secção são apresentadas as propriedades térmicas do betão com densidade normal. Sendo que estas propriedades são a massa volúmica, o calor específico e a condutividade térmica. Estas características foram utilizadas para o cálculo de uma laje em betão simples.

Ressalva-se que estas propriedades não são estáticas, ou seja, as propriedades variam com a temperatura, sendo necessário atualizá-las à medida que efetuamos o cálculo das temperaturas.

5.2.1 Massa volúmica

A massa volúmica de um material mede o grau de concentração de massa num determinado volume e é o quociente entre a massa e o volume desse mesmo material. Para a definição da massa volúmica utilizou-se as equações existentes no (EC2-1-2, 2004):

$$\rho(\theta) = \rho(20^{\circ}C) \quad \text{para } 20^{\circ}C \leq \theta \leq 115^{\circ}C$$

$$\rho(\theta) = \rho(20^{\circ}C) \cdot (1 - 0,02(\theta - 115)/85) \quad \text{para } 115^{\circ}C < \theta \leq 200^{\circ}C$$

$$\rho(\theta) = \rho(20^{\circ}C) \cdot (0,98 - 0,03(\theta - 200)/200) \quad \text{para } 200^{\circ}C < \theta \leq 400^{\circ}C$$

$$\rho(\theta) = \rho(20^{\circ}C) \cdot (0,95 - 0,07(\theta - 400)/800) \quad \text{para } 400^{\circ}C < \theta \leq 1200^{\circ}C$$

O gráfico da Figura 5.1 mostra a evolução da massa volúmica em função da temperatura.

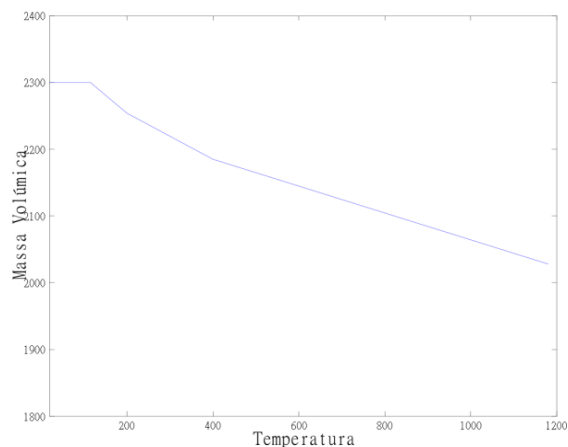


Figura 5.1- Massa volúmica

5.2.2 Calor específico

Esta propriedade determina a variação térmica de uma determinada substância ao receber uma quantidade de calor. O calor específico segundo o (EC2-1-2, 2004) é determinado pelas seguintes equações:

$$c_p(\theta) = 900(J/kg \cdot K) \quad \text{para } 20^\circ C \leq \theta \leq 100^\circ C$$

$$c_p(\theta) = 900 + (\theta - 100)(J/kg \cdot K) \quad \text{para } 100^\circ C < \theta \leq 200^\circ C$$

$$c_p(\theta) = 1000 + (\theta - 200)/2(J/kg \cdot K) \quad \text{para } 200^\circ C < \theta \leq 400^\circ C$$

$$c_p(\theta) = 1100(J/kg \cdot K) \quad \text{para } 400^\circ C < \theta \leq 1200^\circ C$$

O gráfico da Figura 5.2 mostra a evolução do calor específico em função da temperatura.

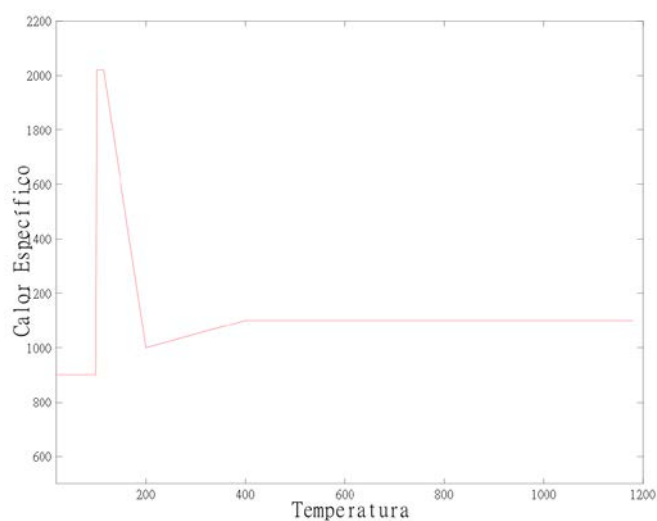


Figura 5.2 - Calor específico

5.2.3 Condutividade térmica

Esta propriedade quantifica a aptidão dos materiais em conduzir o calor. Sendo que um material com uma condutividade elevada determina que esse material é um bom condutor de calor, ou seja, dissipa o calor mais rapidamente que um material com condutividade baixa. A condutividade térmica, segundo o (EC2-1-2, 2004), está compreendida entre dois limites. O Limite superior de condutibilidade térmica, λ_c :

$$\lambda_c = 2 - 0,2451 \cdot (\theta/100) + 0,0107 \cdot (\theta/100)^2 \quad (W / m \cdot K) \quad \text{para } 20^\circ C \leq \theta \leq 1200^\circ C$$

Limite inferior de condutibilidade térmica, λ_c :

$$\lambda_c = 1,36 - 0,136 \cdot (\theta/100) + 0,0057 \cdot (\theta/100)^2 \quad (W / m \cdot K) \quad \text{para } 20^\circ C \leq \theta \leq 1200^\circ C$$

Estes dois limites estão representados graficamente na Figura 5.3.

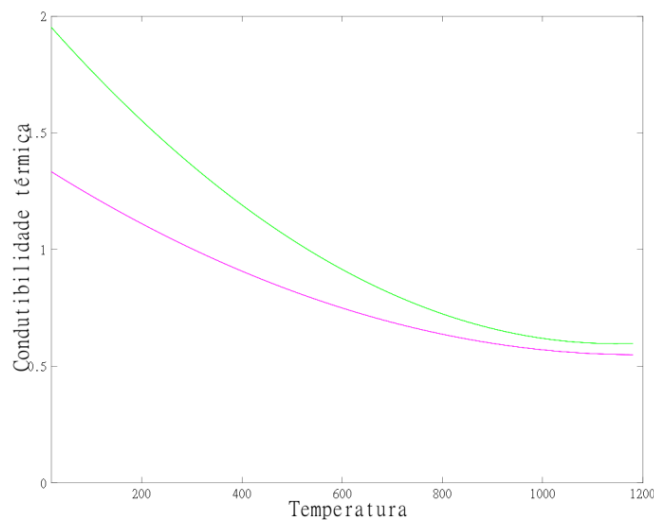


Figura 5.3 - Condutividade térmica

5.3 Descrição do problema

O caso prático estudado resulta da tentativa de simular os efeitos do incêndio de um automóvel dentro de um compartimento (Figura 5.4) sob a laje de betão situada no teto desse compartimento. Considerou-se uma laje de comprimento igual a 10 m e altura igual a 30 cm, tal como indicado na Figura 5.4. Reduziu-se o problema a uma secção vertical da laje imediatamente acima do eixo da chama do incêndio localizado. Desta forma obtemos um domínio retangular onde queremos calcular a distribuição das temperaturas. Em todas as

simulações considerou-se que os bordos da secção retangular estavam isolados. Enquanto que no bordo inferior inseriu-se um distribuição do fluxo de calor resultante do incêndio.

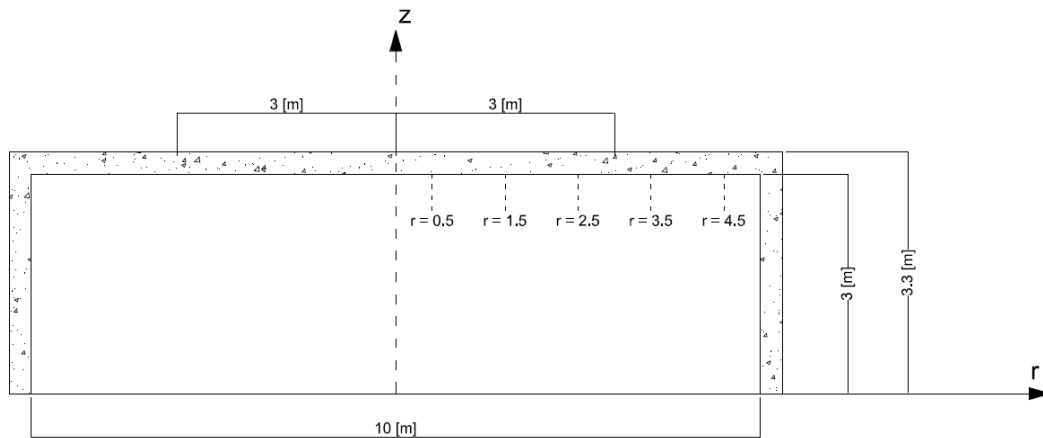


Figura 5.4 - Esquema do compartimento

A resolução numérica do problema foi elaborada em duas fases. Na primeira foi feita uma aproximação com diferenças finitas através do método explícito. Na segunda fase a aproximação numérica foi feita através de elementos finitos triangulares. Em ambos os casos o problema foi resolvido com malhas de diferentes dimensões. Na Figura 5.5 ilustra-se discretização do domínio segundo uma malha regular com $dx=0.5$ e $dy=0.15$.

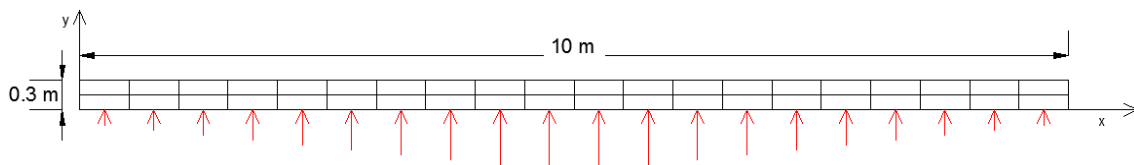


Figura 5.5 – Secção de uma laje betão

5.3.1 Fluxo de calor resultante do incêndio

O fluxo de calor proveniente do incêndio é obtido através das equações do (EC1-1-2, 2002) para incêndios localizados, mencionado no capítulo 2. Para esta situação foi também escrito um código (GNU Octave, 2011) com o nome `heatflux.m` que se encontra no Anexo I e que calcula de forma automática tanto as temperaturas no eixo da chama, como o fluxo de calor quando a chama atinge o teto.

Este programa faz o cálculo para cotas que variam de 1,5m até ao teto, ou seja, 3,0m. Após estes pontos o código calcula o parâmetro ‘r’ que representa a distância ao eixo da chama e varia de 0m até 4,5m em intervalos de 0,5m (ver Figura 5.4).

Optou-se por interpolar o valor do fluxo para outros valores de 'r' solicitado pelo código principal.

O caso em estudo trata de um incêndio num carro utilitário com uma curva de energia igual à Figura 5.6. Utilizando esta curva de energia no código que calcula o fluxo de calor resulta na Figura 5.7.

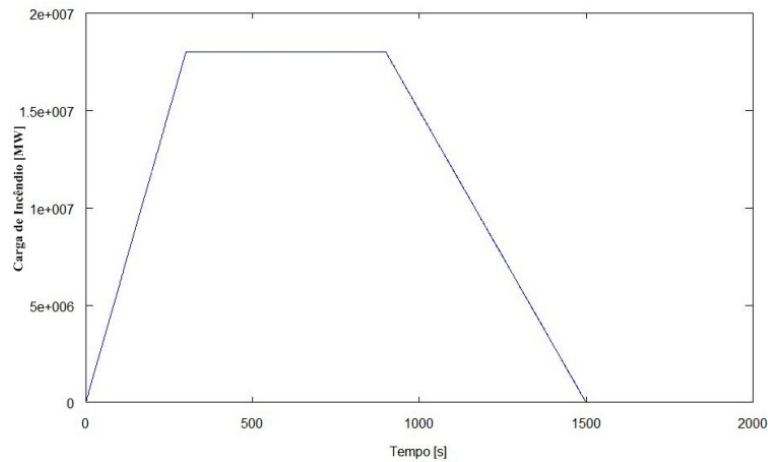


Figura 5.6 - Curva de energia relativa a um carro utilitário

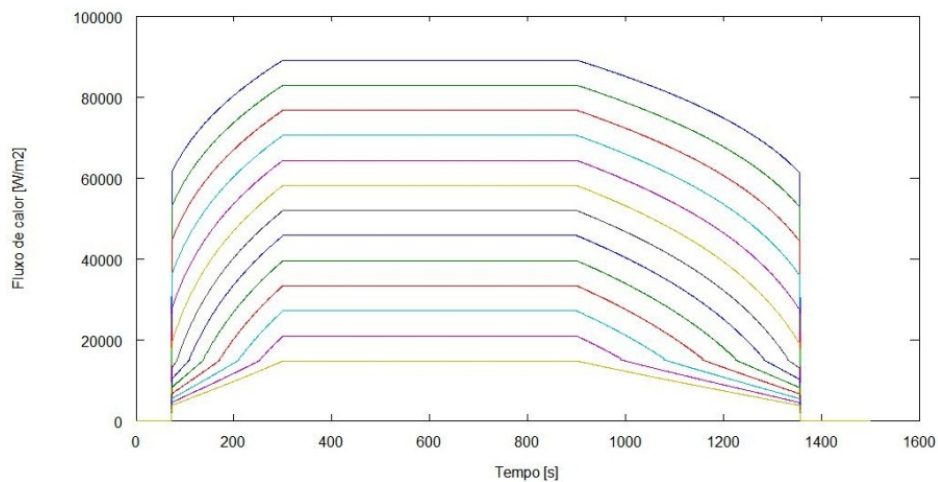


Figura 5.7 - Fluxo de calor

Na Figura 5.7 cada curva representa os fluxos ao longo da laje de 0.5m em 0.5m a partir do eixo da chama. Sendo que estão representadas curvas para os fluxos de calor de 0m a 6m.

5.4 Simulação por diferenças finitas

A inclusão das condições de fronteira descritas na secção 5.3 implica que nos nós da malha junto ao bordo inferior se calcule as temperaturas através da seguinte expressão:

$$T_{(i,j)}^{k+1} = T_{(i,j)}^k \cdot (1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2) + \lambda_1 T_{(i,j+1)}^k + \lambda_1 T_{(i,j-1)}^k + 2\lambda_2 \Delta y \frac{q_i}{\alpha} \quad (5.1)$$

Onde q_i é o fluxo de calor.

Nas simulações efetuadas as propriedades do betão são atualizadas em função da temperatura de acordo com as características mencionadas na secção 5.2. Isto implica que em cada passo de tempo $\Delta t = 1\text{s}$ haja um ciclo interno para determinar a temperatura em função das propriedades. Considera-se que este ciclo interno converge quando a variação relativa das temperaturas é inferior a uma certa tolerância, arbitrada por nós em 10^{-5} . Os programas utilizados para obter as propriedades em função das temperaturas estão no Anexo I sob a designação de `cal esp.m` (calor específico), `mas vol.m` (massa volúmica) e `condu t.m` (condutividade).

Apresentam-se os resultados na forma de curvas de evolução da temperatura ao longo do tempo em onze pontos da superfície inferior da laje separados entre si de 0,5 m. A primeira curva corresponde ao eixo da chama, $r=0\text{m}$, e a última a uma distância de $r=4,5\text{m}$ do eixo da chama. Desta forma consideramos que a distribuição das temperaturas é simétrica em relação ao eixo da chama.

Fez-se a simulação para diferentes malhas. Foram elaborados dois casos de variação de dx e quatro variações de dy . Os valores utilizados para as variações de dx foram $dx=0,5\text{m}$ e $dx=0,10\text{m}$. Já no caso de dy as quatro variações elaboradas, têm os valores de $dy=0,30\text{m}$, $dy=0,15\text{m}$, $dy=0,10\text{m}$ e $dy=0,01\text{m}$. As Figura 5.8 a 5.14 mostram a evolução das temperaturas obtidas para diferentes malhas através do `laj eDF.m` (ver Anexo I). As Figura 5.8 a 5.10 foram obtidas com $dx=0,5$ e as Figura 5.11 a 5.14 foram obtidas com $dx=0,1$.

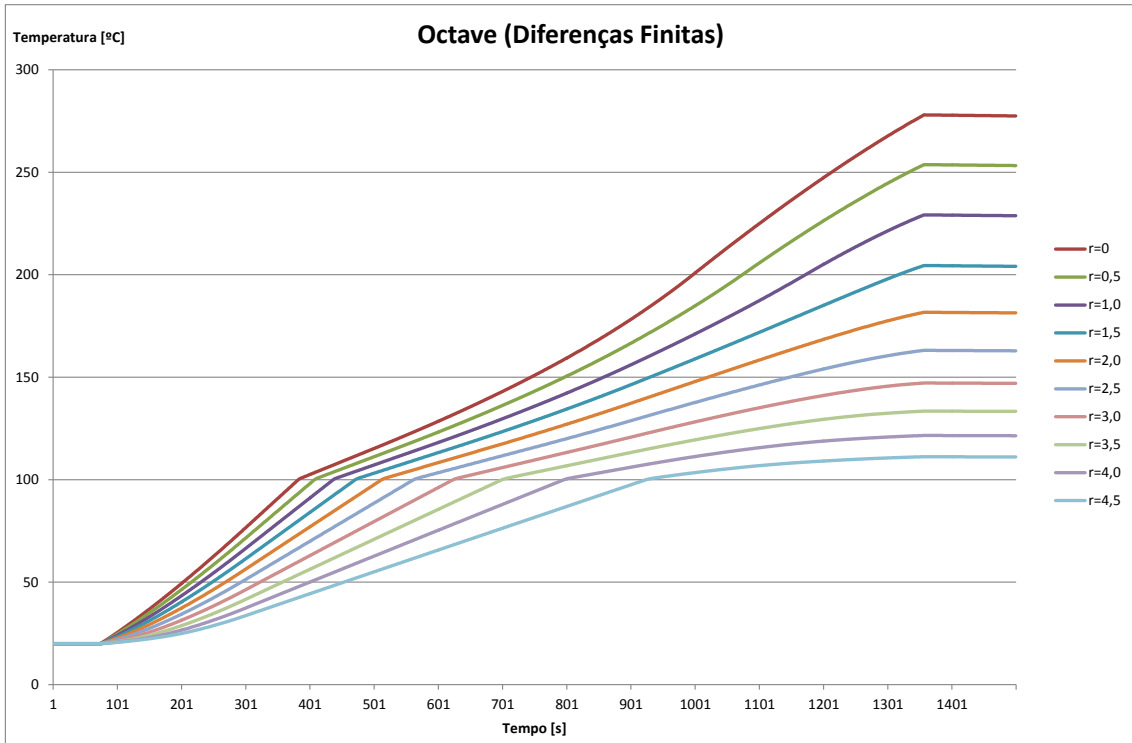


Figura 5.8 – Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.3$

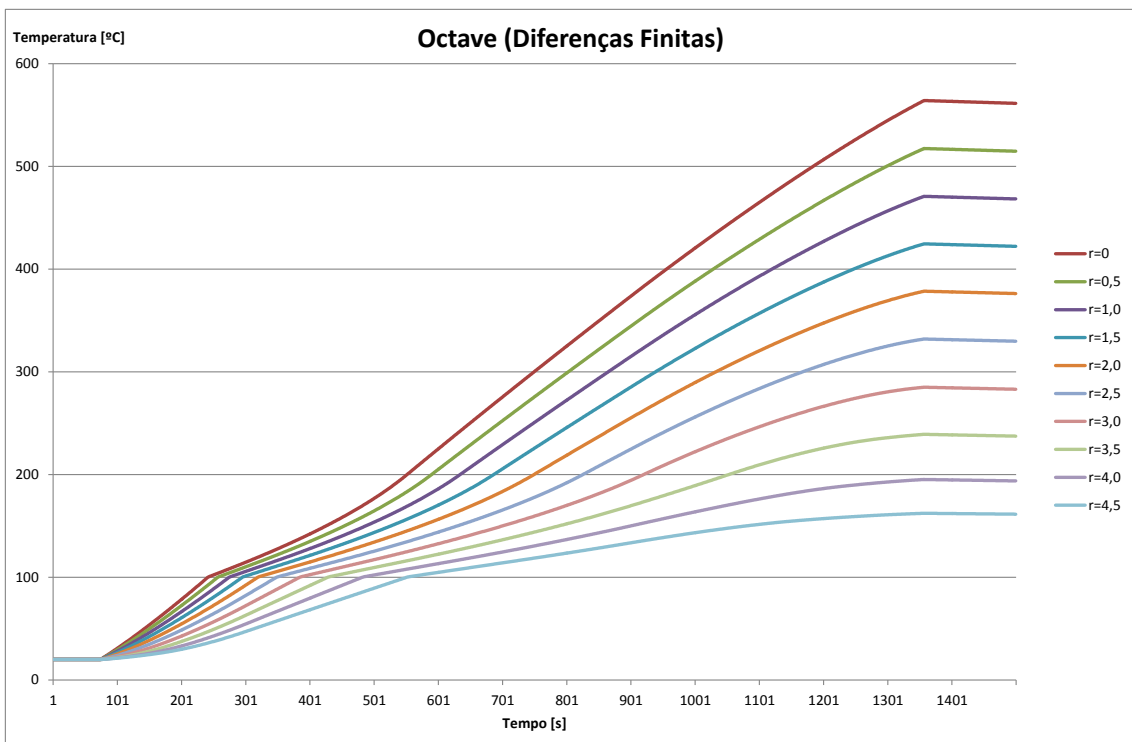


Figura 5.9 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.15$

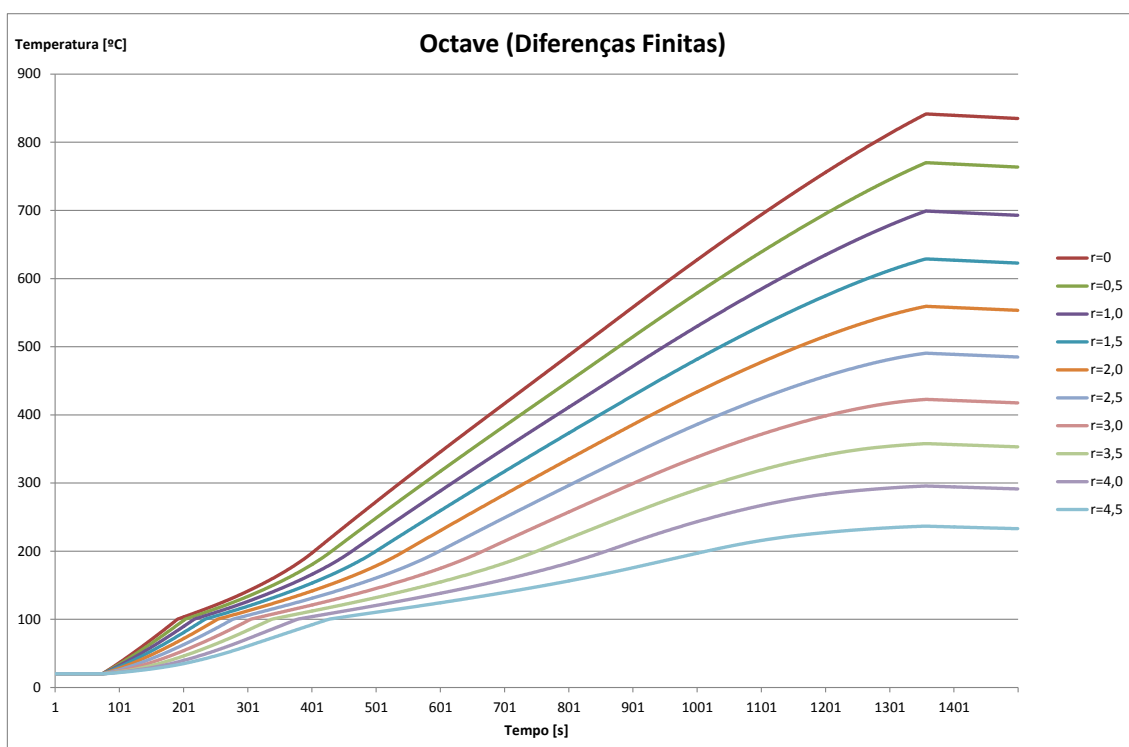


Figura 5.10 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.10$

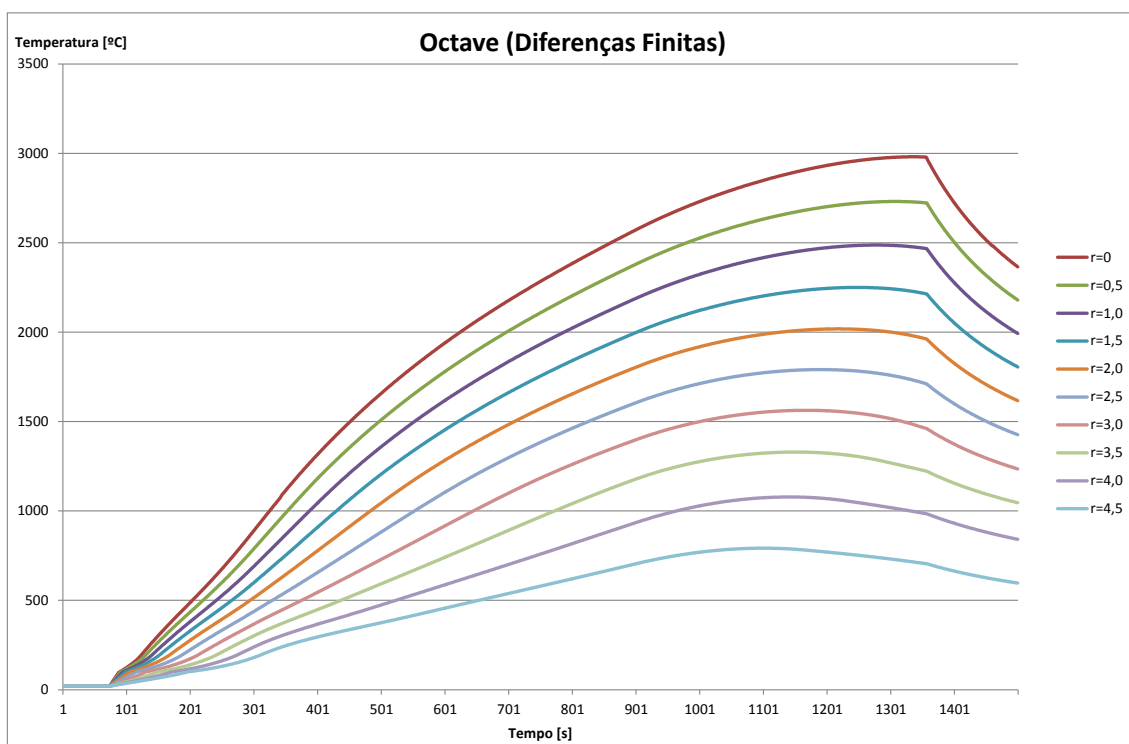


Figura 5.11 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.5$ e $dy=0.01$

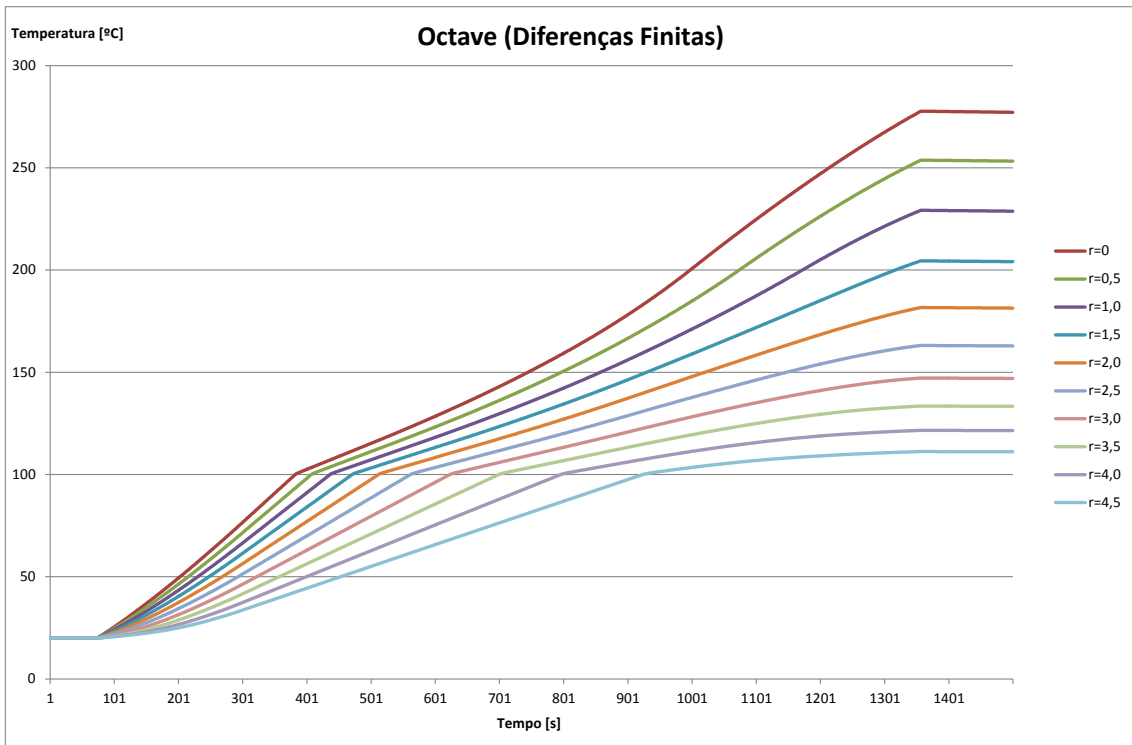


Figura 5.12 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.3$

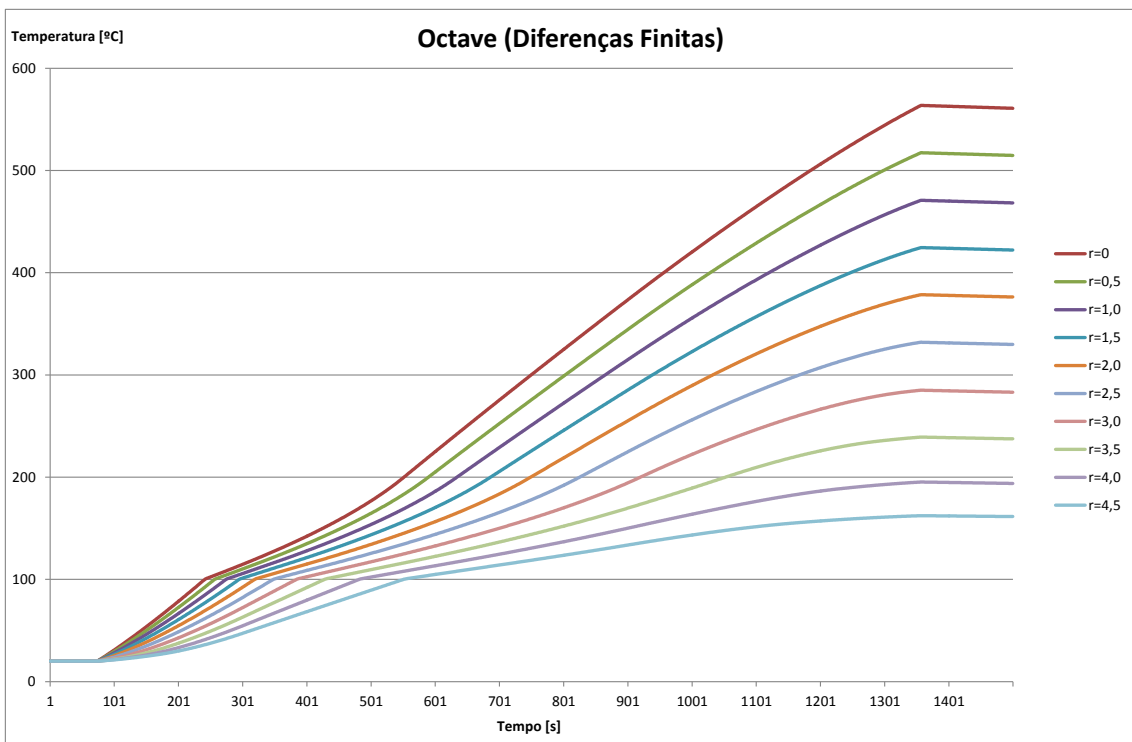


Figura 5.13 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.15$

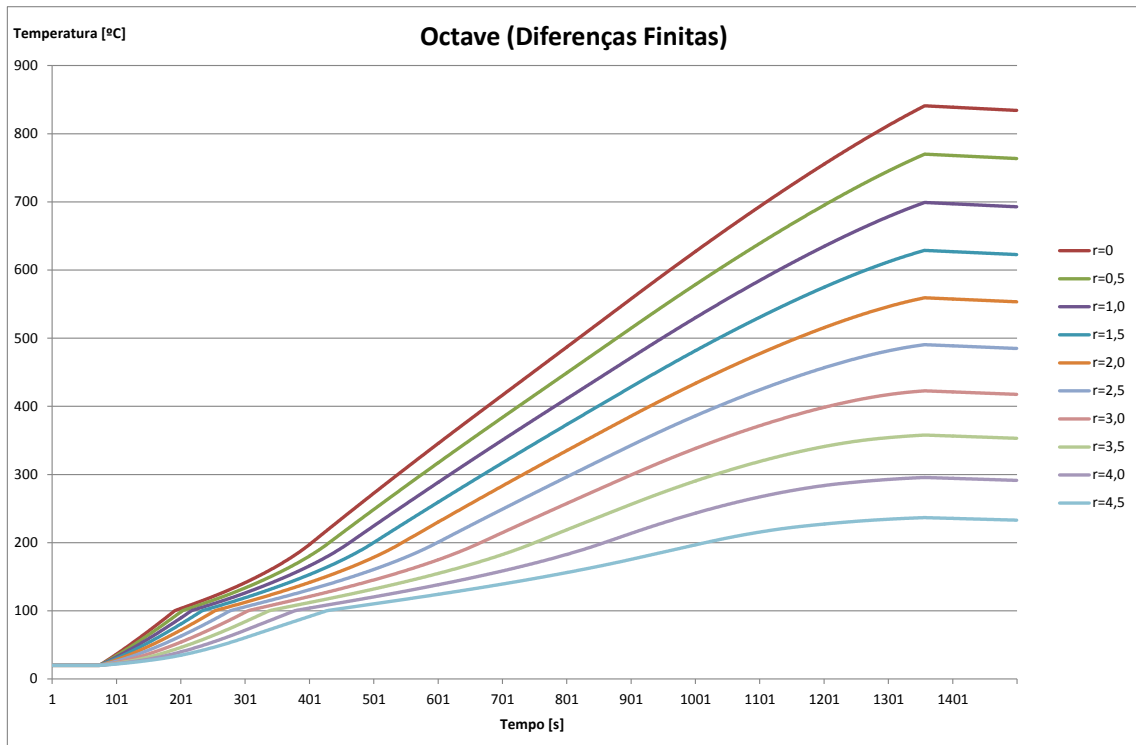


Figura 5.14 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.10$

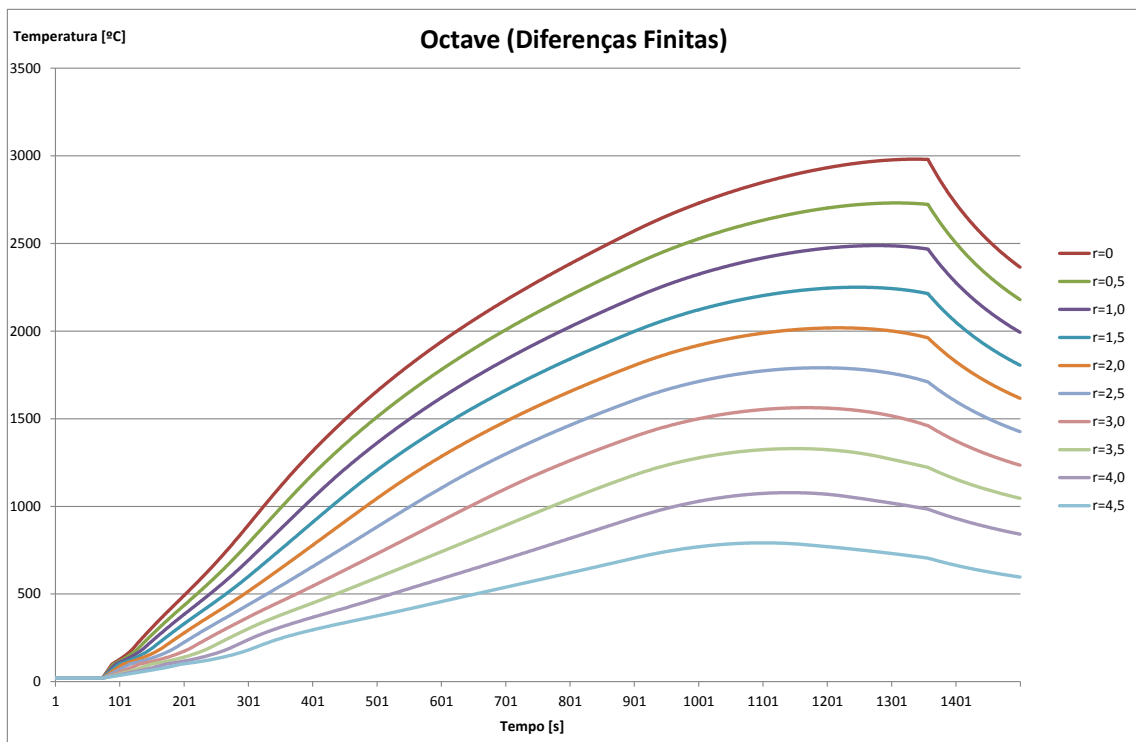


Figura 5.15 - Evolução das temperaturas obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.01$

Nas Figura 5.8 a 5.15 pode-se verificar que existe uma pequena quebra na evolução das temperaturas a partir do momento em que estas atingem os 100°C. Isto deve-se ao comportamento do calor específico no betão que passa de 900 J/(kg.K) para 2020 J/(kg.K) quando a temperatura atinge os 100°C (ver Figura 5.2). Isto quer dizer que para obtermos bons resultados o valor da temperatura deve ser calculado com um intervalo de tempo baixo, ou seja, o valor da temperatura deve ser incrementado com intervalos de tempo baixos para que o pico no calor específico possa ser tido em conta.

Nas Figura 5.8 a 5.15 pode-se verificar também que os valores da temperatura começam a diminuir a partir dos 1350s o que demonstra que houve uma retenção de calor na laje. Efetivamente se tivermos em conta a curva de energia (carga de incêndio) pode-se verificar que a sua diminuição verifica-se por volta dos 900s enquanto que na laje só passados 450s é que as temperaturas começam a diminuir.

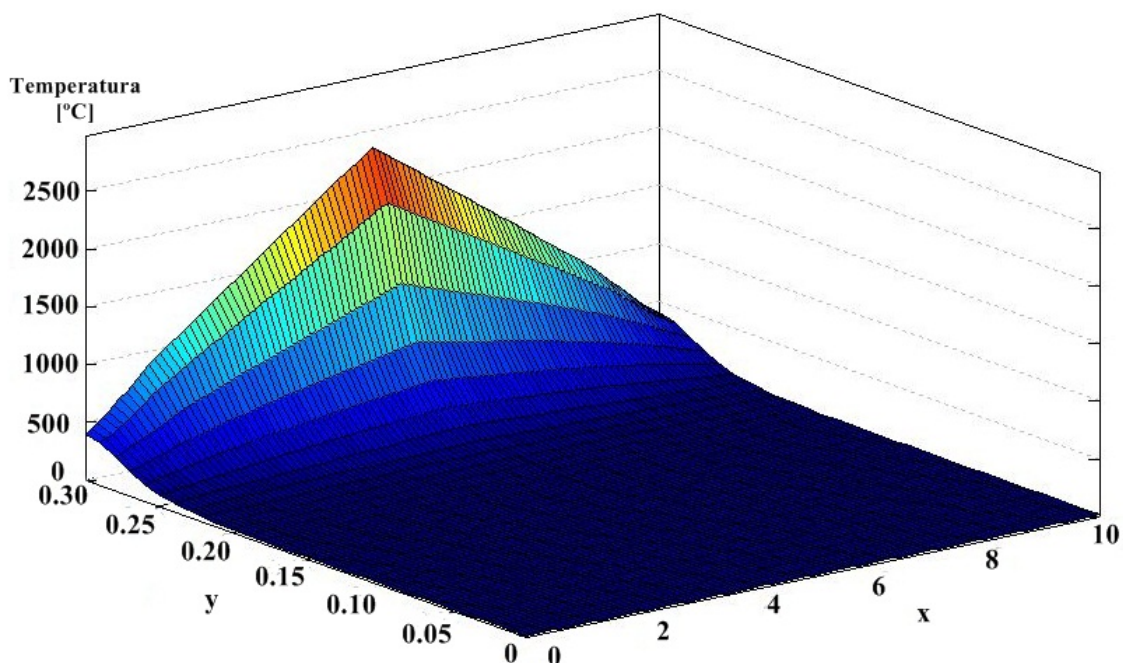


Figura 5.16 - Temperaturas finais na laje obtidas por diferenças finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.01$

As Figura 5.15 e 5.16 são relativas à mesma malha com $dx=0.1$ e $dy=0.01$. A Figura 5.16 mostra as temperaturas finais no interior da laje. Verificando-se um abaixamento progressivo das temperaturas do bordo inferior para o bordo superior da laje. A diferença de temperaturas entre os dois extremos será devido à baixa condutividade térmica do betão.

Em todas os resultados obtidos ilustrados nas Figura 5.8 a 5.15 verifica-se que as temperaturas, como era esperado, acompanham a quantidade de fluxo de calor proveniente do incêndio do veículo, ou seja, no ponto médio da laje (acima do eixo da chama) a temperatura é maior e vai decrescendo à medida que a distância a este ponto aumenta.

Observa-se também através da Figura 5.8 até à Figura 5.15 que a variação da amplitude do subintervalos de discretização horizontal dx não conduz a grandes diferenças nos resultados finais. Já a variação da amplitude do subintervalos de discretização vertical dy tem muita influência nas temperaturas obtidas. O efeito que estes dois parâmetros têm na temperatura máxima está ilustrado na Figura 5.17. À medida que dy diminui de 0,3 para 0,01 a temperatura aumenta significativamente até 3000°C e parece estabilizar nesse patamar para valores inferiores de dy . Esta tendência é confirmada através do valor da temperatura máxima obtida para $dy=0,005$.

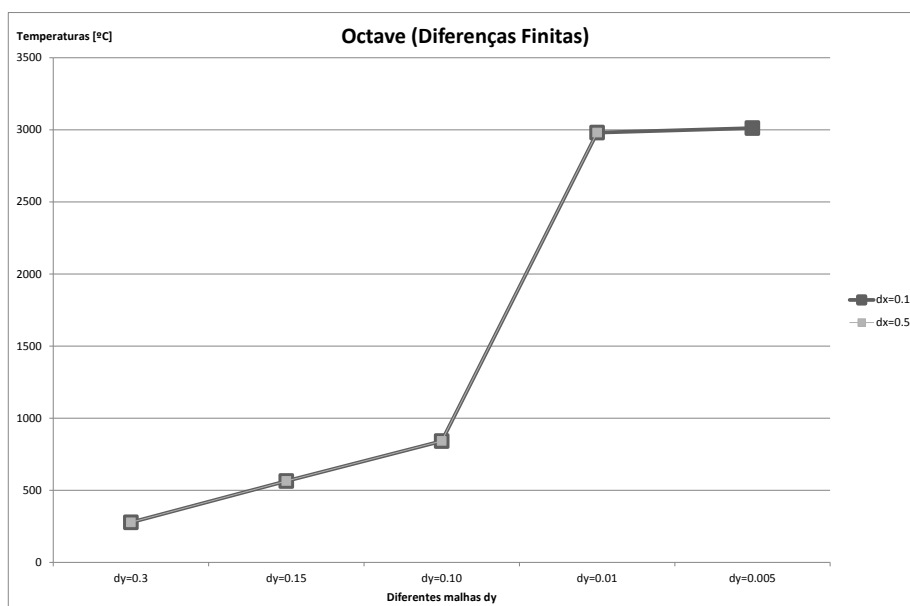


Figura 5.17 – Temperaturas máximas em função da variação do dy para $dx=0.1$ e $dx=0.5$

Fez-se também uma comparação entre as evoluções das temperaturas máximas, em $r=0$, obtidas para diferentes valores de dy . Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 5.18. Verifica-se um aumento significativo dos valores da temperatura quando se passa de um valor de $dy=0,1$ para um valor de $dy=0,01$.

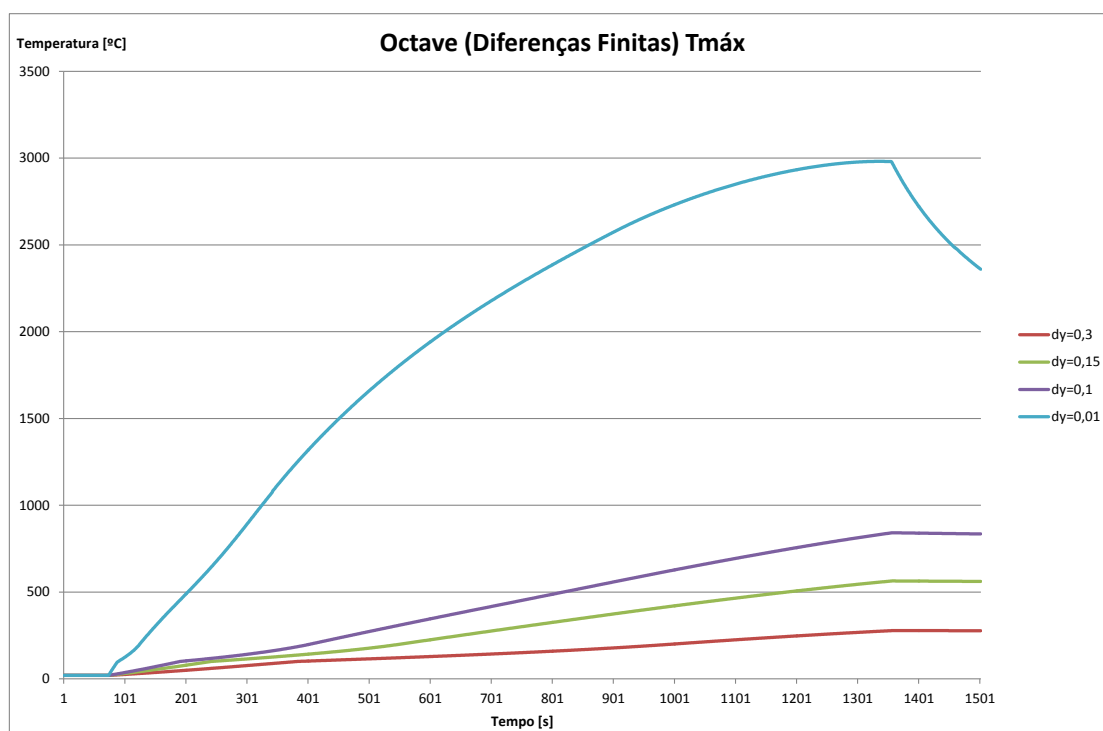


Figura 5.18 – Evolução da temperatura máxima através de diferenças finitas para diferentes dy

A Tabela 5.1 apresenta um resumo das temperaturas máximas obtidas em cada uma das malhas utilizadas para o método das diferenças finitas.

Tabela 5.1 - Temperaturas máximas para diferentes malhas com diferenças finitas

OCTAVE (DF)	Temperaturas máximas [°C] ($r = 0$ m)				
	$dy=0.3$	$dy=0.15$	$dy=0.10$	$dy=0.01$	$dy=0.005$
$dx=0.1$	277,69	563,63	840,95	2981	3012,1
$dx=0.5$	277,96	564,03	841,53	2981	

5.5 Simulação por elementos finitos

Nesta secção apresentam-se os resultados da simulação do comportamento térmico da laje em betão através do método dos elementos finitos triangulares descritos no Capítulo 4. De forma a dar seguimento e a poder comparar aos resultados obtidos através das diferenças finitas, optou-se por definir as mesmas malhas utilizadas anteriormente. Como neste caso utilizou-se elementos triangulares para a definição da malha, estas ficaram definidas como ilustra a Figura 5.19 para os casos de $dx=0,5$ e $dy=0,3$, $dy=0,15$ e $dy=0,1$.

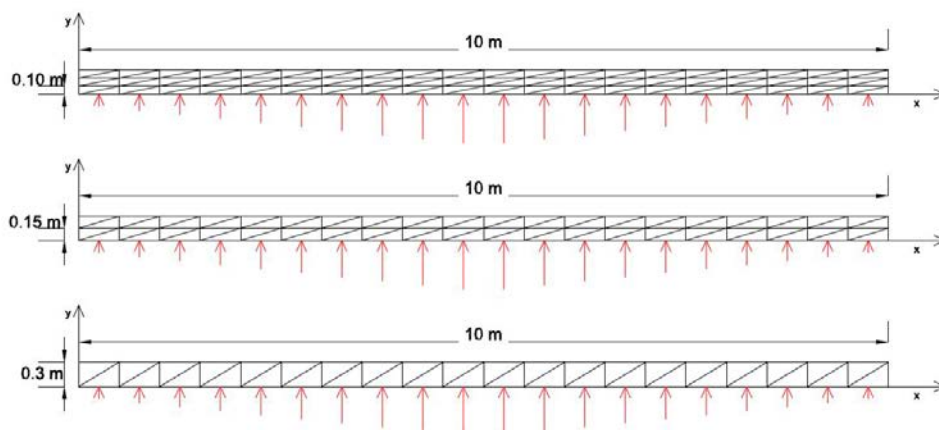


Figura 5.19 – Malhas obtidas com elementos finitos triangulares

Tal como no método das diferenças finitas teve-se em conta a evolução das propriedades do betão em função das temperaturas, utilizando-se o mesmo critério de convergência descrito na secção 5.4, i.e., 10^{-5} . O passo de tempo foi também o mesmo de $\Delta t = 1$ s.

As Figura 5.20 a 5.26 ilustram a evolução das temperaturas na superfície inferior da laje de 0,5 em 0,5m a partir do eixo da chama. Fizeram-se simulações com diferentes malhas correspondentes as valor de dx de 0,5 e 0,1 e de dy de 0,3, 0,15, 0,1 e 0,01. O programa com a implementação do método dos elementos finitos para este problema está no Anexo I com o nome de *lajeEF.m*.

As Figura 5.20 a 5.23 foram obtidas com $dx=0,5$ e as Figura 5.24 a 5.26 foram obtidas com $dx=0,1$.

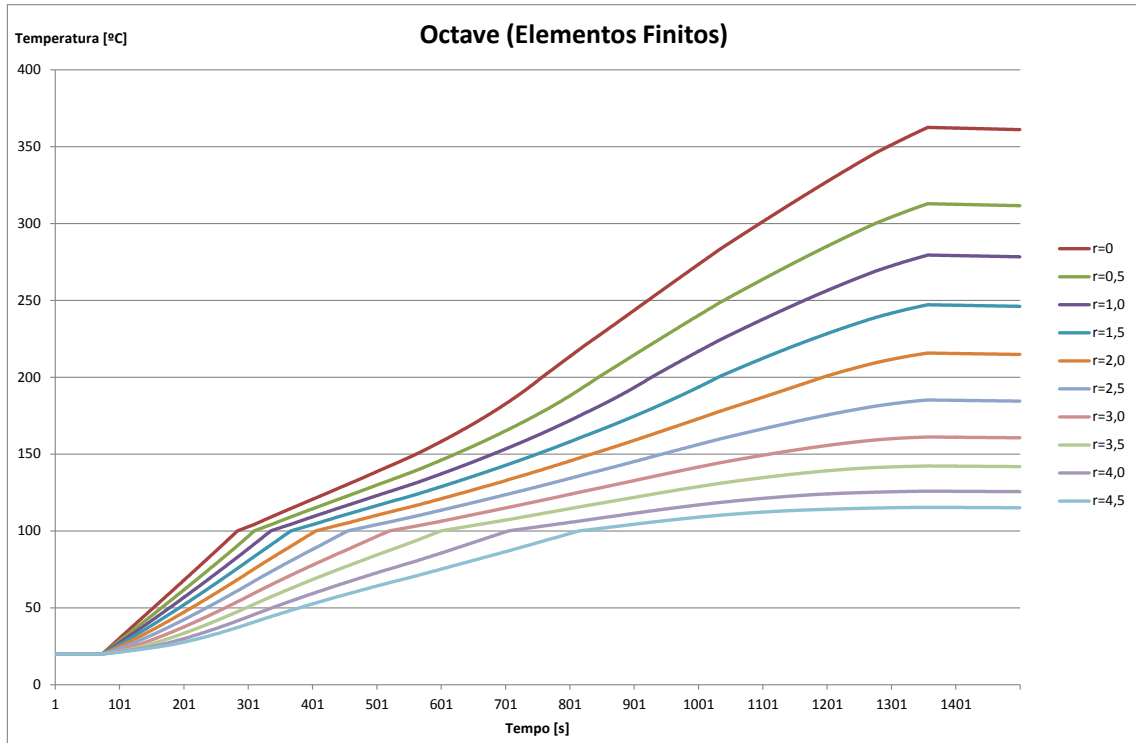


Figura 5.20 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitos com $dx=0.5$ e $dy=0.3$

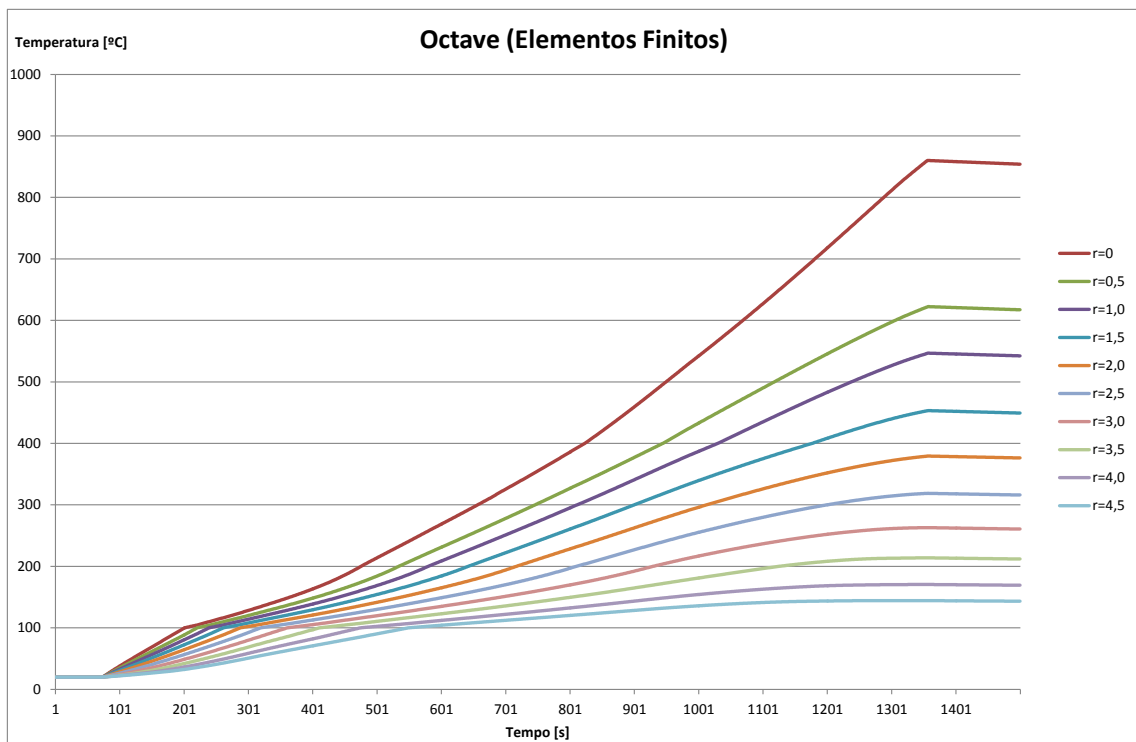


Figura 5.21 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitos com $dx=0.5$ e $dy=0.15$

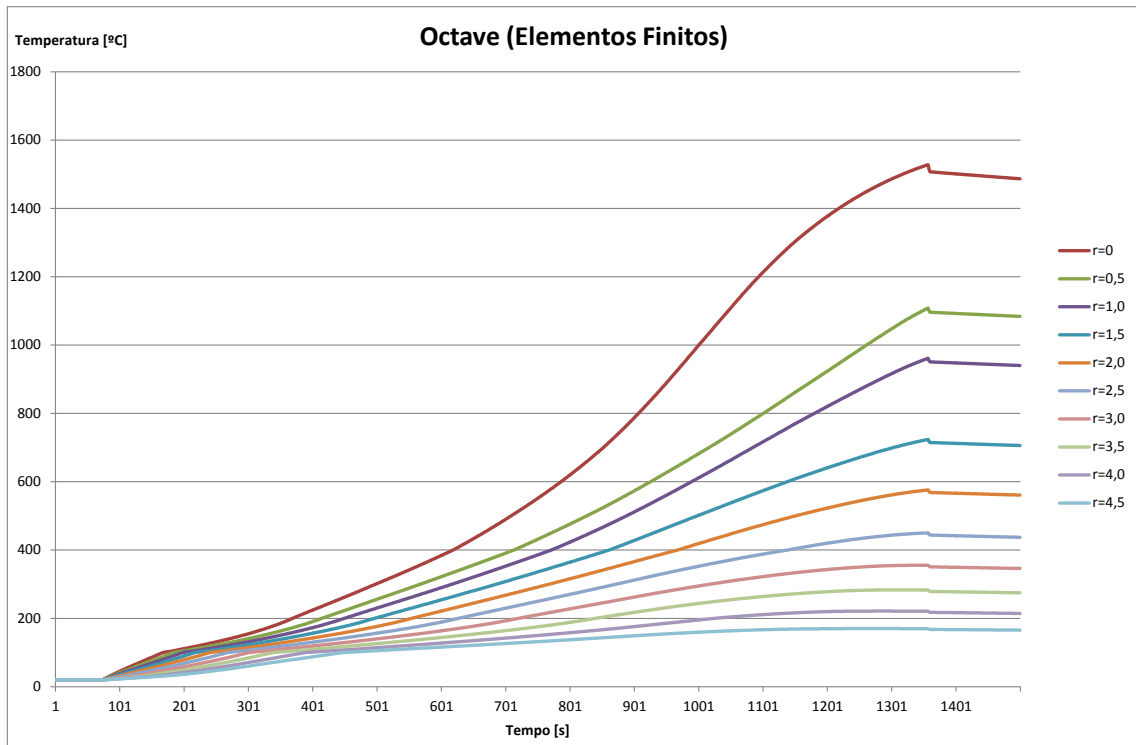


Figura 5.22 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitos com $dx=0.5$ e $dy=0.10$

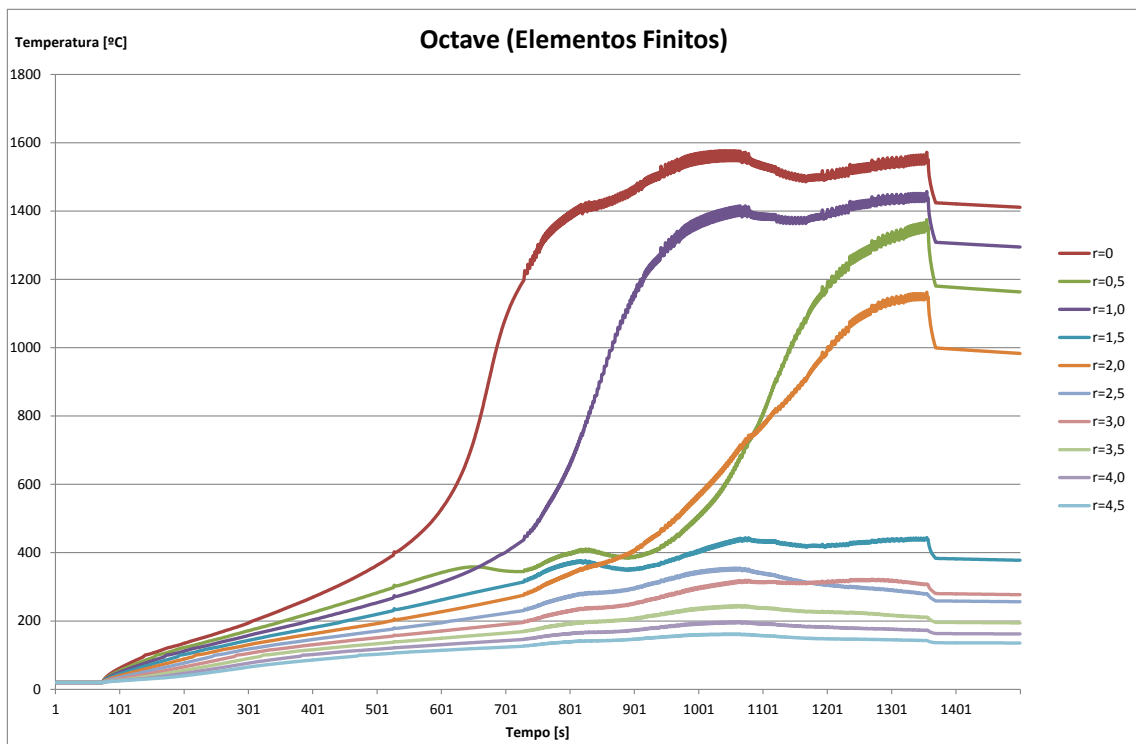


Figura 5.23 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitos com $dx=0.5$ e $dy=0.01$

Com $dx=0,5$, Figura 5.20 até à Figura 5.23, uma tendência geral semelhante ao observado nas diferenças finitas. Com exceção de $dy=0,01$, as temperaturas aumentam com a diminuição dos valores de dy atingindo valores próximos dos verificados na secção 5.4. Contudo, parece haver aqui algum fenómeno de instabilidade do método para o valor de $dy=0,01$.

Como se pode observar na Figura 5.23 as temperaturas deixam de ser decrescentes do meio da laje para o exterior, contrariamente ao que seria de esperar. Esta instabilidade do método dos elementos finitos será devida ao facto de dx ser muito maior que dy (50 vezes maior).

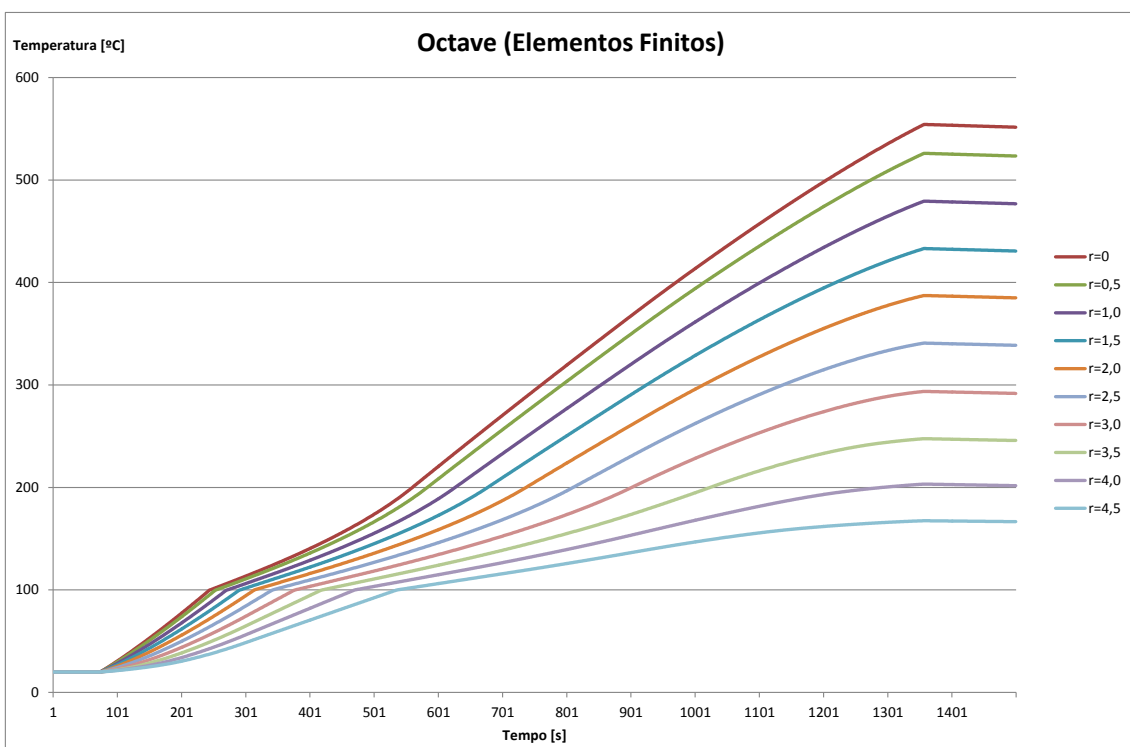


Figura 5.24 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitos com $dx=0.1$ e $dy=0.15$

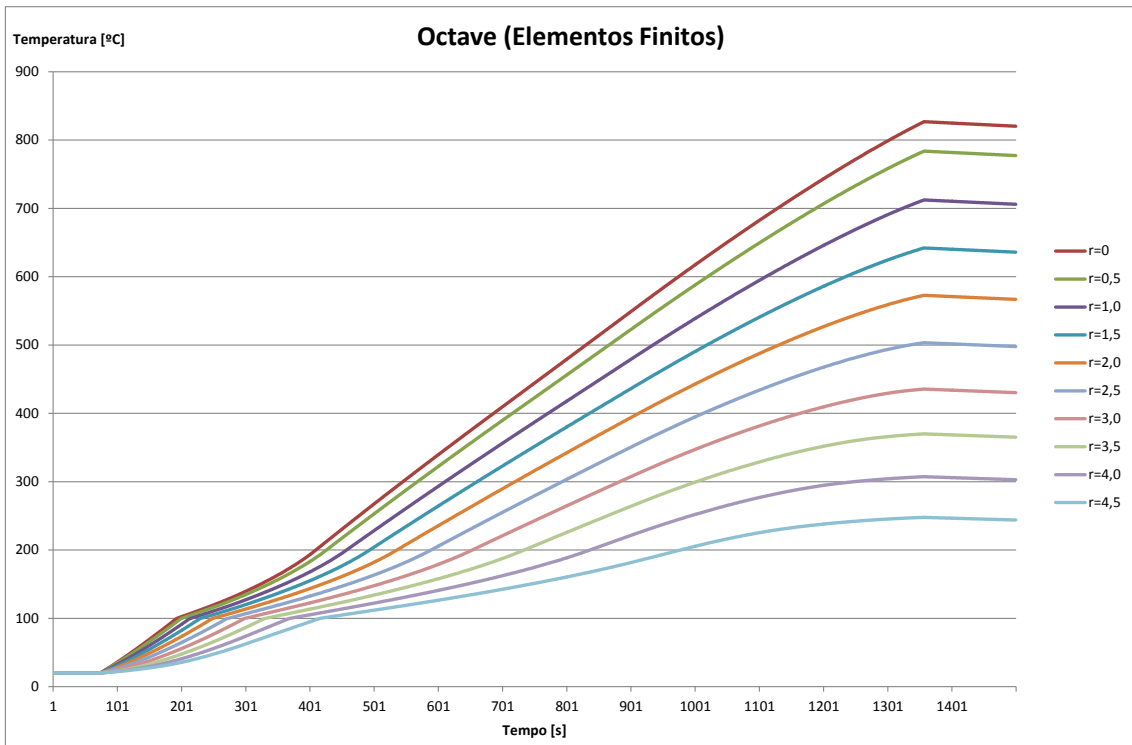


Figura 5.25 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.10$

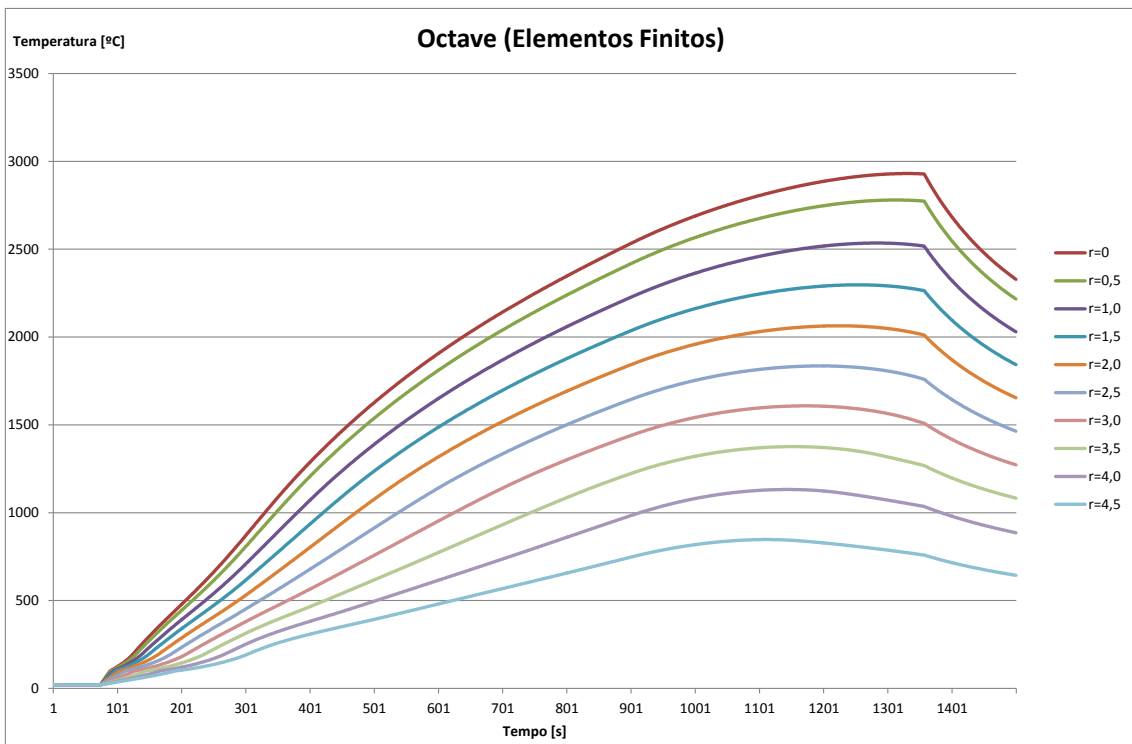


Figura 5.26 - Evolução das temperaturas obtidas por elementos finitas com $dx=0.1$ e $dy=0.01$

Os valores obtidos com $dx=0,1$ (Figura 5.24 a 5.26) são semelhantes aos obtidos com $dx=0,5$ com exceção do caso em que $dy=0,01$ (Figura 5.26). Neste caso os valores obtidos estão mais

de acordo com o previsto, deixando de se verificar o fenómeno de instabilidade verificado para $dx=0.5$. Isto será devido a uma menor distorção dos elementos constituintes da malha.

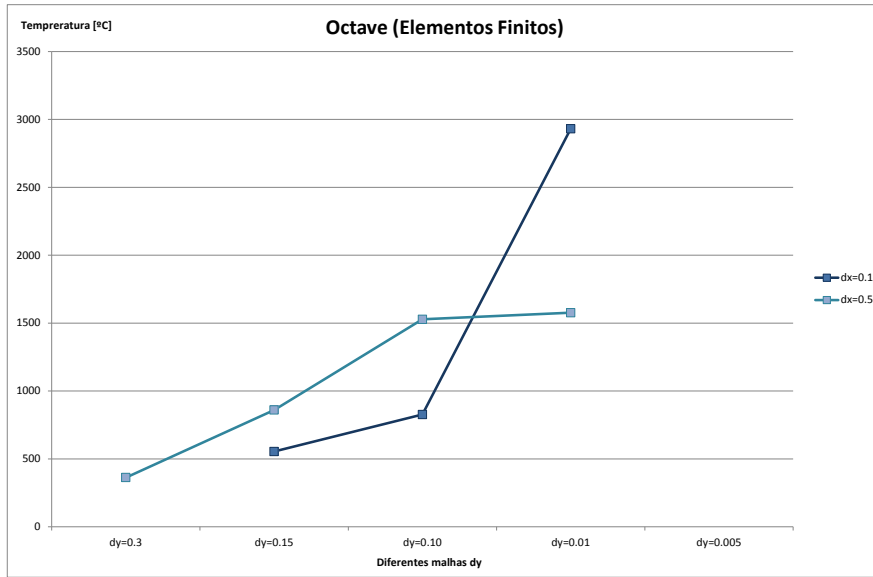


Figura 5.27 - Temperaturas máximas em função da variação do dy para $dx=0.1$ e $dx=0.5$

Fez-se também uma comparação entre as evoluções das temperaturas máximas, em $r=0$, obtidas para diferentes valores de dy . Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 5.28. Verifica-se um aumento significativo dos valores da temperatura quando se passa de um valor de $dy=0,1$ para um valor de $dy=0,01$.

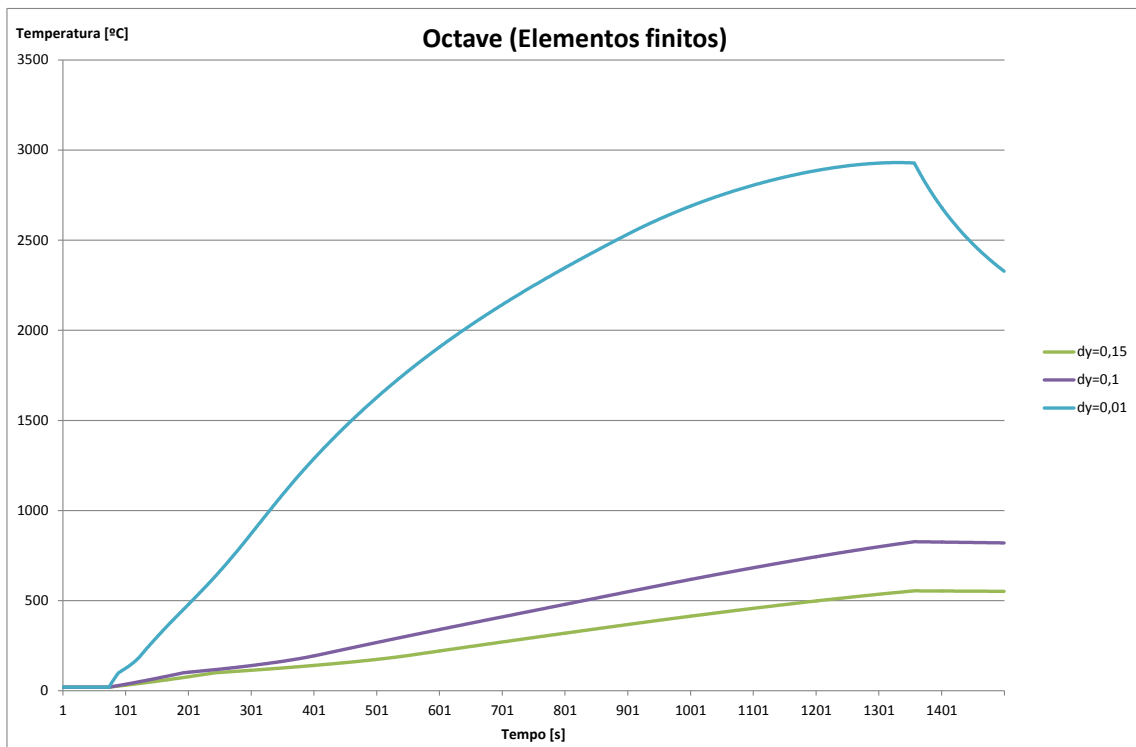


Figura 5.28 - Evolução da temperatura máxima através de diferenças finitas para diferentes dy

A Tabela 5.2 apresenta um resumo das temperaturas máximas obtidas em cada uma das malhas utilizadas para o método das diferenças finitas.

Tabela 5.2 - Temperaturas máximas para diferentes malhas com elementos finitos

OCTAVE (EF)	Temperaturas máximas [°C] (r = 0 m)				
	dy=0.3	dy=0.15	dy=0.10	dy=0.01	dy=0.005
dx=0.1		554,22	826,89	2930,7	
dx=0.5	362,507	860,064	1528,05	1576,6	

5.6 Resultados obtidos com o programa ANSYS

De forma resolver o problema foi necessário inserir as condições deste no (ANSYS®). Para dar seguimento ao resolvido anteriormente foi necessário desenvolver um modelo no (ANSYS®) que pudesse representar o incêndio localizado. Para isto criou-se um modelo geométrico com as dimensões da laje em questão e modelou-se os elementos finitos retangulares de acordo com as mesmas malhas utilizadas para os restantes métodos. Para simular o incêndio optou-se por incidir os fluxos de calor, obtidos através das equações do (EC1-1-2, 2002) e ilustradas na secção 5.3.1.

Fez-se a simulação para mesmas malhas anteriormente utilizadas nas diferenças e nos elementos finitos. Utilizou-se também o mesmo critério de convergência interna para as propriedades do betão em função da temperatura, i.e., 10^{-5} . O passo de tempo foi também o mesmo de $\Delta t = 1$ s.

As Figuras 5.29 a 5.32 resultam a utilização de dx=0,5 e da variação de dy de 0,3 a 0,01, tal como anteriormente.

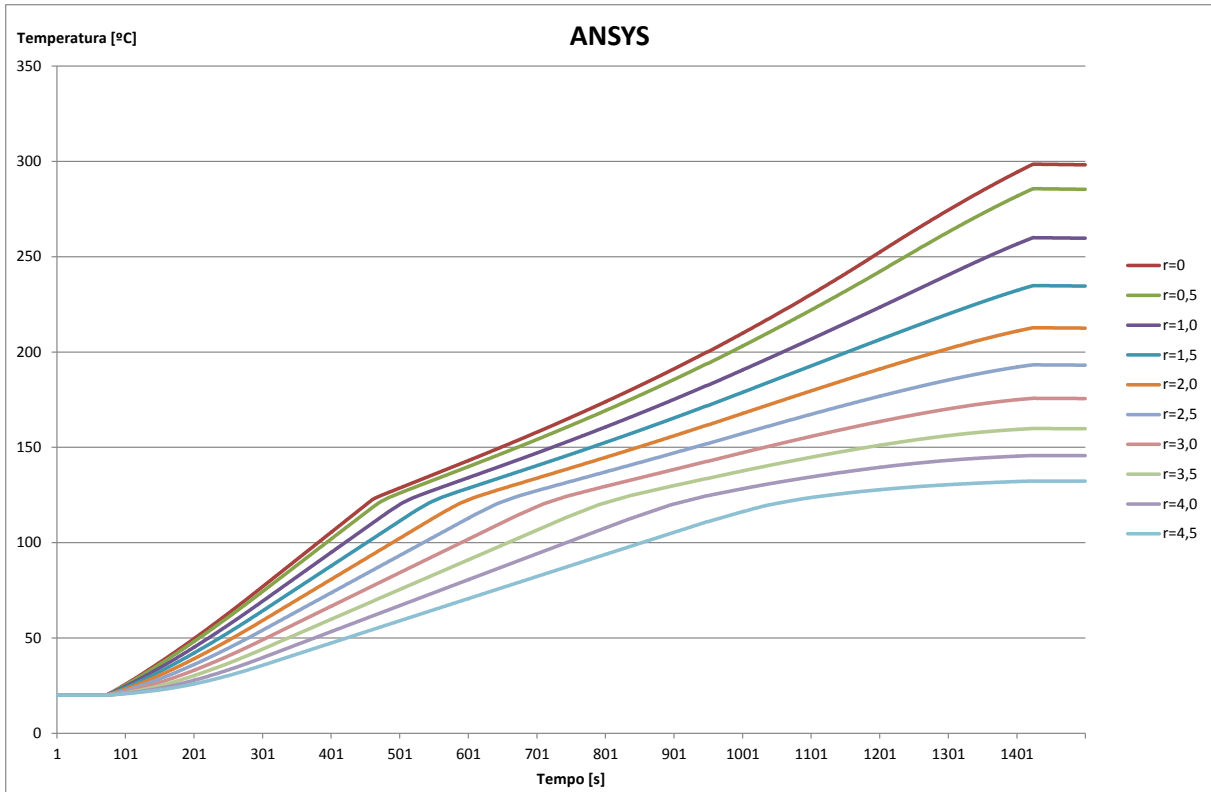


Figura 5.29 – Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.5$ e $dy=0.3$

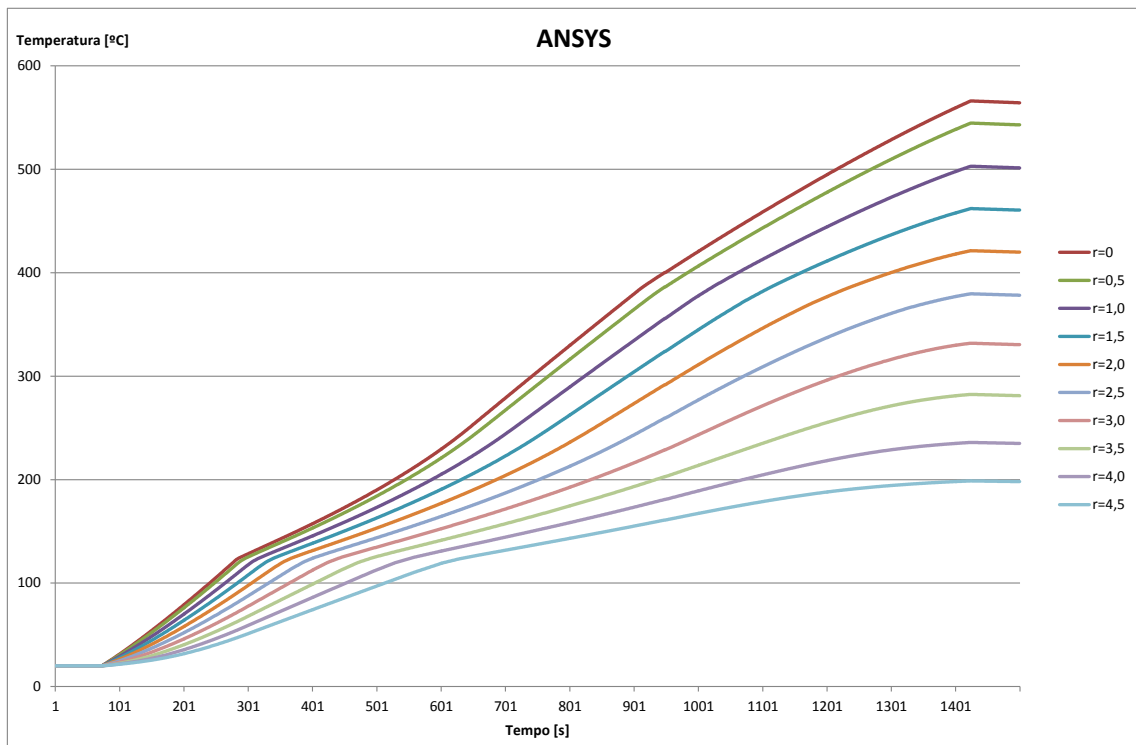


Figura 5.30 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.5$ e $dy=0.15$

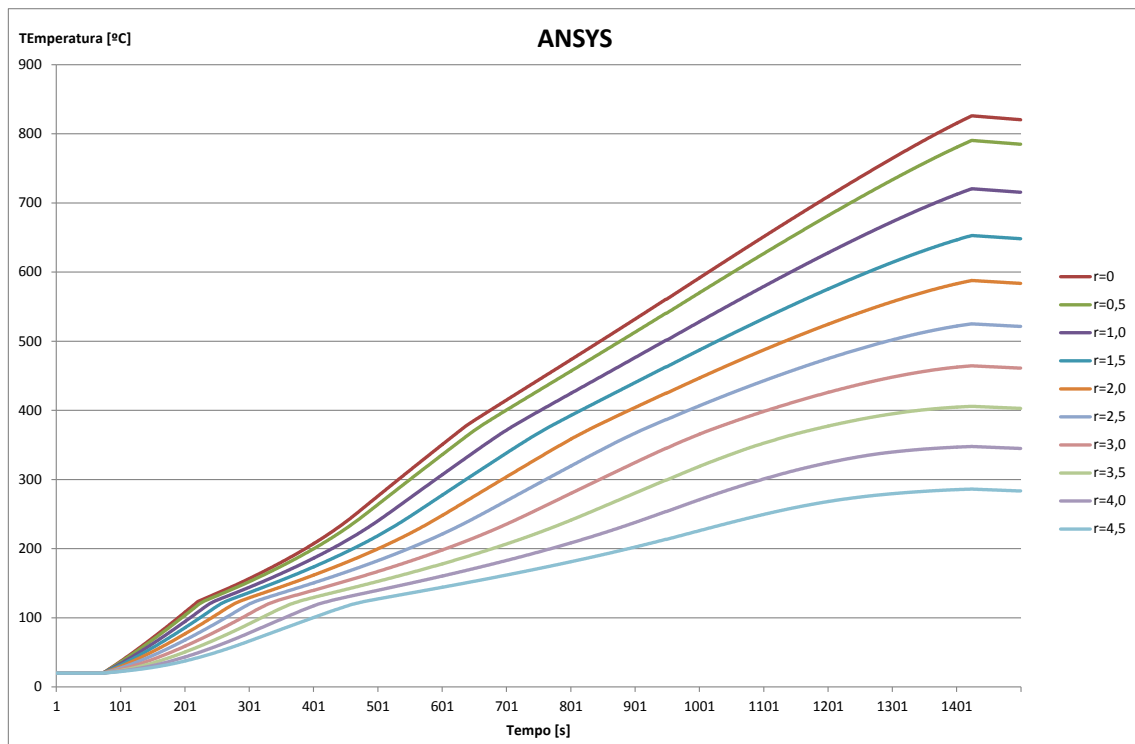


Figura 5.31 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.5$ e $dy=0.10$

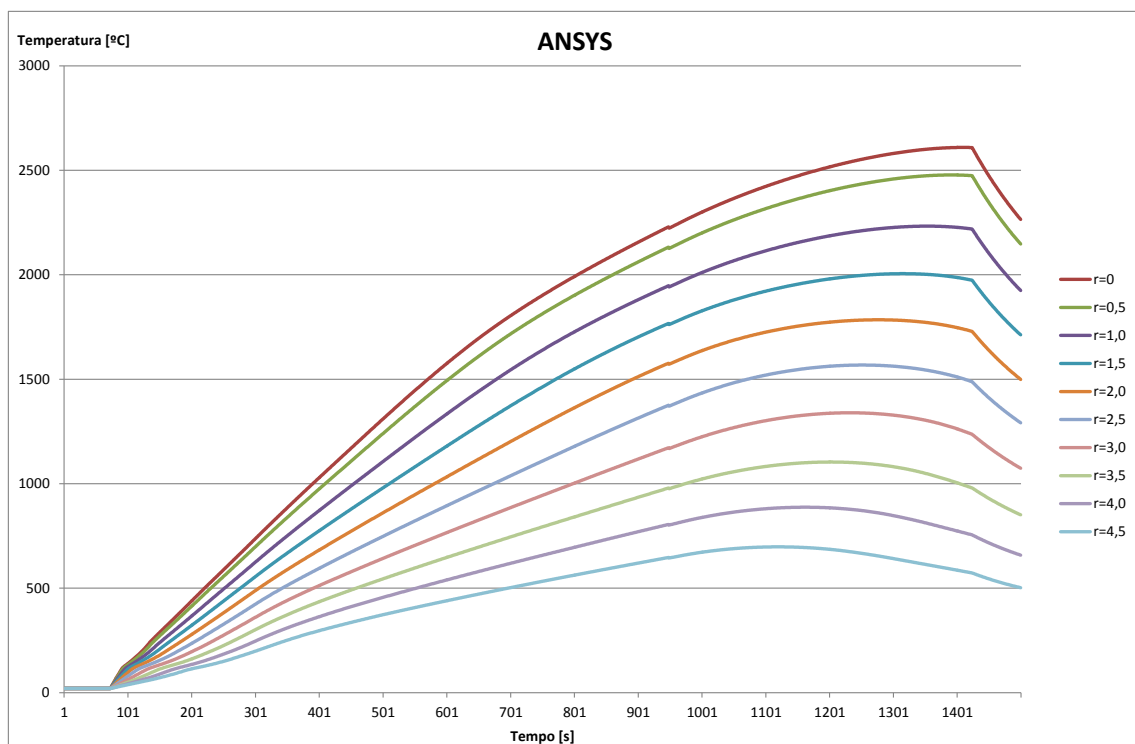


Figura 5.32 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.5$ e $dy=0.01$

Os resultados obtidos com $dx=0,5$ estão em conformidade com os resultados obtidos por diferenças e elementos finitos. Verifica-se a mesma tendência de aumento das temperaturas com a diminuição de dy . Verificam-se contudo temperaturas um pouco mais baixas.

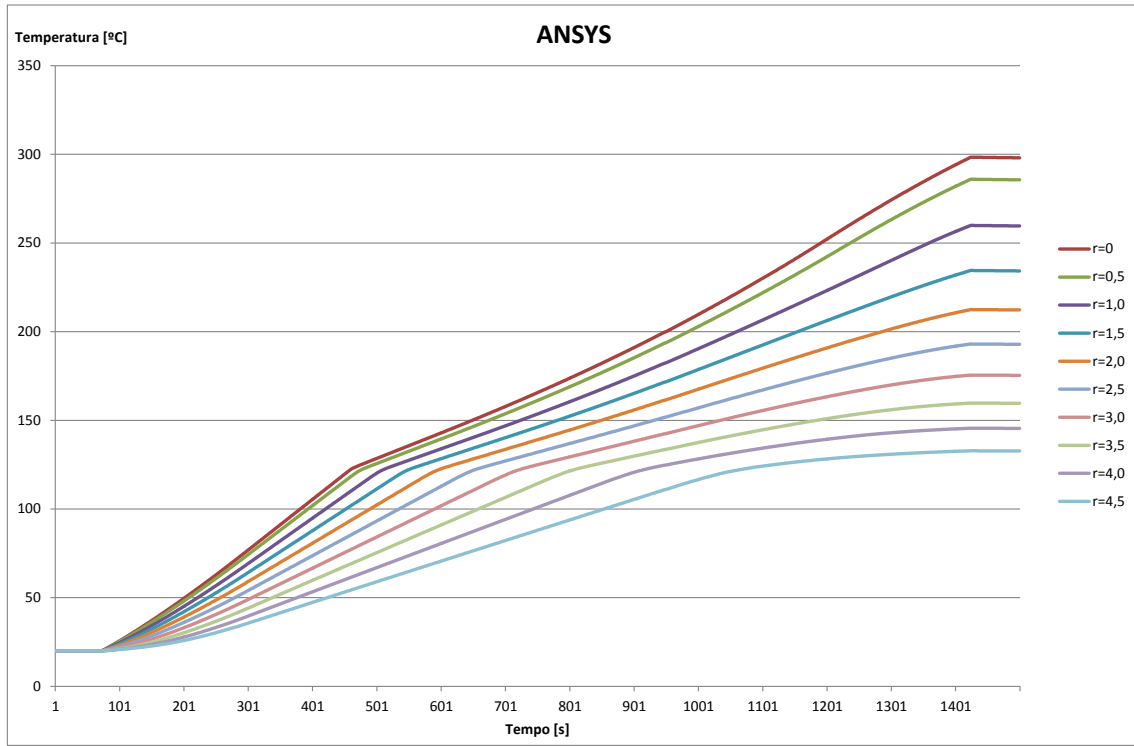


Figura 5.33 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.30$

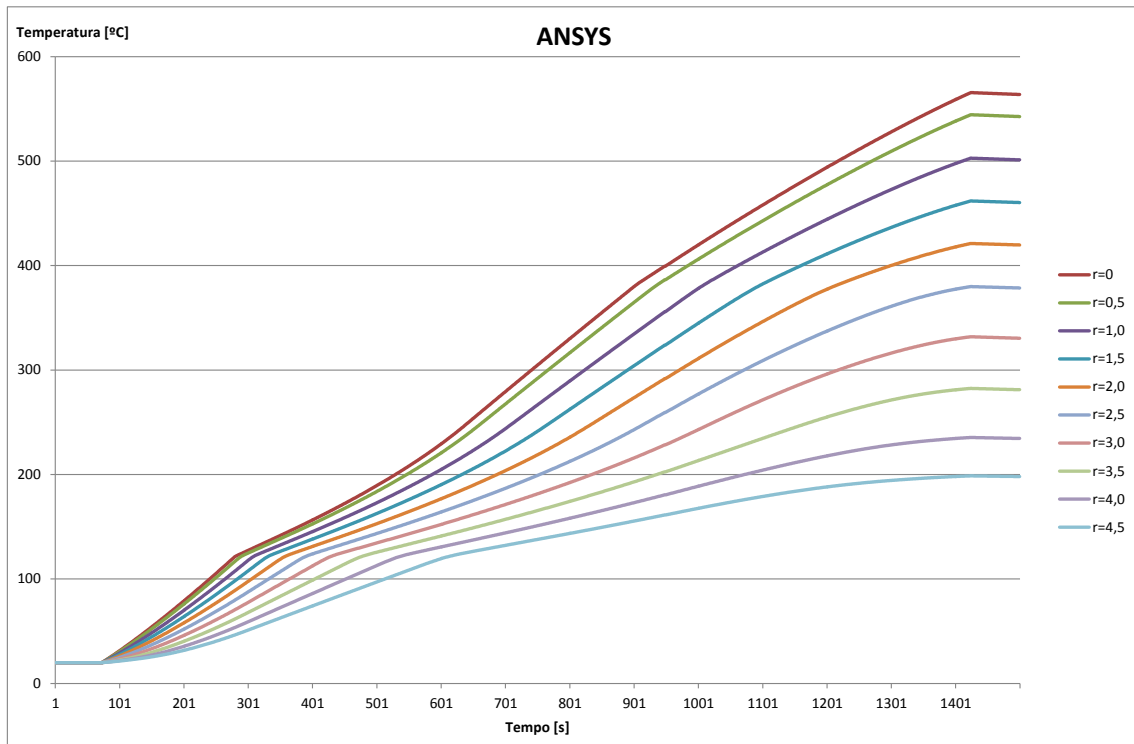


Figura 5.34 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.15$

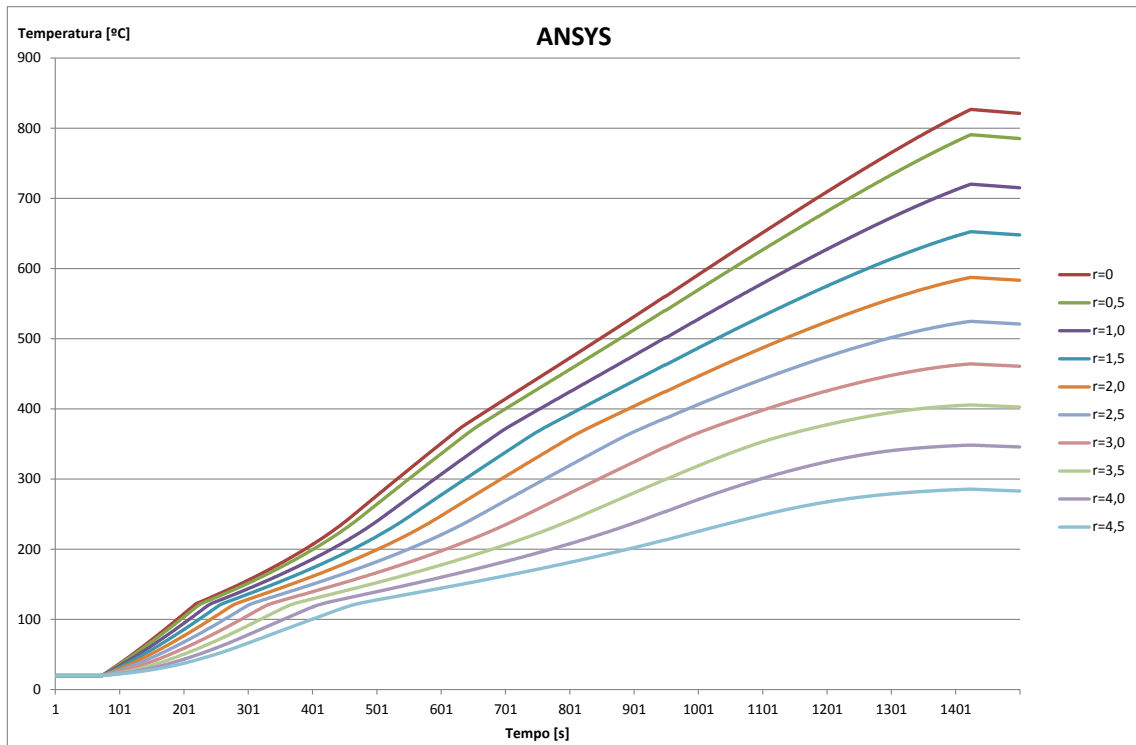


Figura 5.35 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.10$

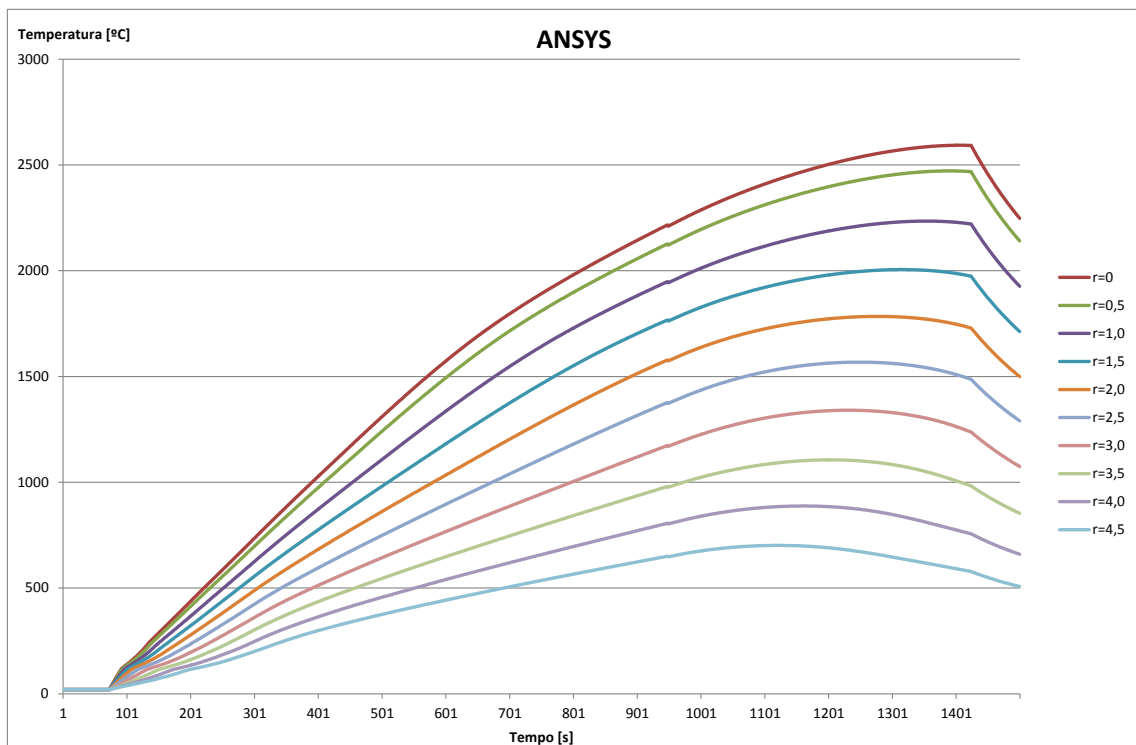


Figura 5.36 - Simulação através do (ANSYS®) com $dx=0.1$ e $dy=0.01$

Com os resultados ilustrados nas Figura 5.33 a 5.36 verifica-se que as temperaturas, como seria de esperar, acompanham a quantidade de fluxo de calor proveniente do incêndio do veículo, ou seja, no ponto médio da laje as temperaturas são superiores e decrescem em direção às extremidades.

Tal como se pode observar na ver Figura 5.37, a variação do dx não afeta as distribuições das temperaturas. A diminuição do dy conduz ao aumento das temperaturas, verificando-se uma estabilização desta para valores inferiores a 0,01, tal como no método das diferenças finitas. Contudo aqui a estabilização das temperaturas máximas dá-se num patamar um pouco mais baixo próximo de 2600 °C.

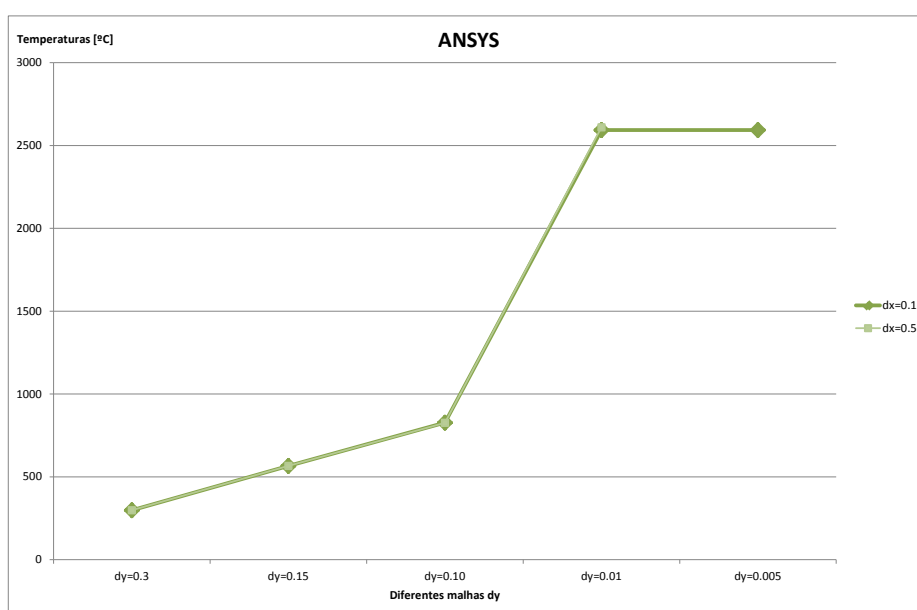


Figura 5.37 - Temperaturas máximas em função da variação do dy para $dx=0.1$ e $dx=0.5$

Após a apresentação dos resultados para os diferentes casos em estudo, foi feita uma comparação de resultados para as temperaturas máximas, ou seja, os resultados para $r=0$. A evolução das temperaturas neste ponto está ilustrada na Figura 5.38. Tal como nas simulações por diferenças finitas (Figura 5.17) e elementos finitos Figura 5.27 verifica-se uma grande discrepância das temperaturas quando se passa de uma malha com $dy=0.1$ para $dy=0.01$.

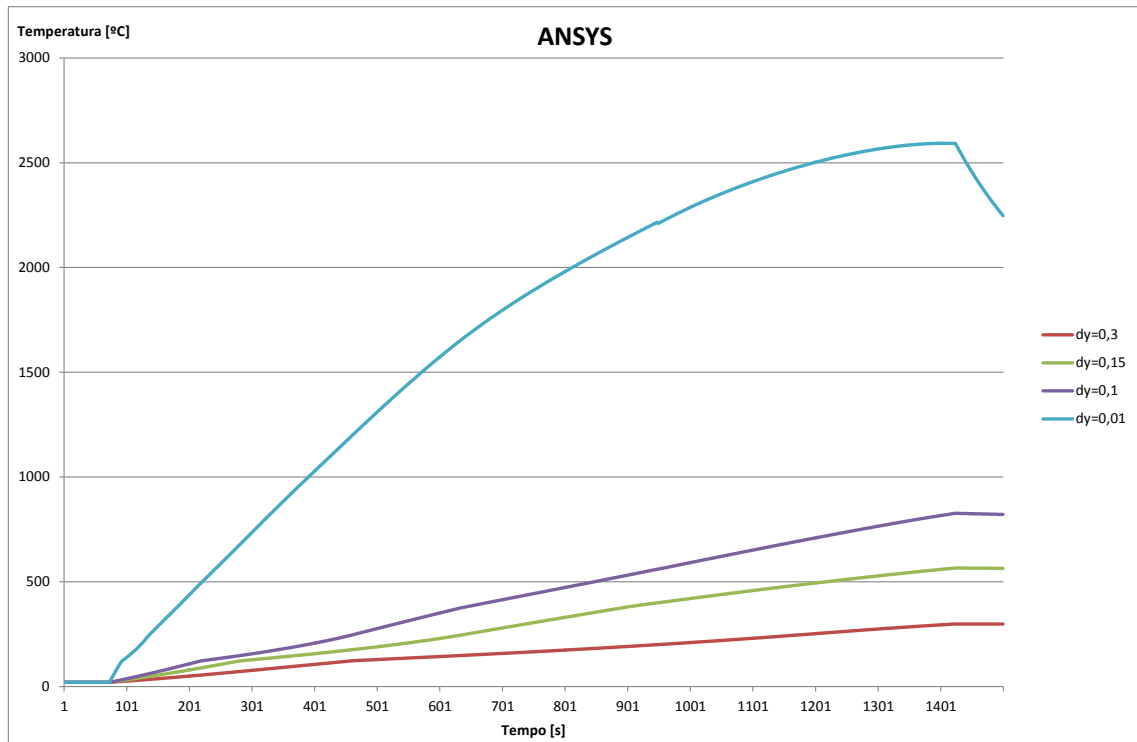


Figura 5.38 - Evolução da temperatura máxima através do (ANSYS®) para diferentes dy

Para além das figuras com os resultados finais, foi realizada uma tabela com a comparação de resultados obtidos com diferentes malhas. A Tabela 5.3 apresenta as temperaturas máximas obtidas através do (ANSYS®).

Tabela 5.3 - Temperaturas máximas em (ANSYS®)

ANSYS	Temperaturas máximas [°C] (r = 0 m)				
	dy=0.3	dy=0.15	dy=0.10	dy=0.01	dy=0.005
dx=0.1	298,373	565,543	826,783	2592,93	2593,77
dx=0.5	298,562	566,069	826,046	2609,32	

5.7 Simulação das temperaturas resultantes do incêndio através do FLUENT®

Procurou-se também estabelecer uma alternativa à curva de incêndio (Figura 5.6) de maneira a obter diretamente as temperaturas resultantes do incêndio junto ao teto do compartimento. Para o efeito utilizou-se o *software* FLUENT® de acordo com a metodologia descrita na secção 2.5.3 do Capítulo 2.

Numa primeira fase analisou-se as temperaturas obtidas pelo FLUENT® e constatou-se que estas não estão de acordo com os resultados obtidos pelos métodos alternativos descritos no (EC1-1-2, 2002), descritos no Capítulo 2. Isto deve-se ao fato de que este *software* utiliza

muitas variáveis enquanto que os restantes métodos são simplificados. Deve-se ainda à metodologia com que este processa o cálculo das temperaturas, dividindo o ambiente de incêndio em duas zonas distintas, devido à movimentação do ar no local de incêndio. Uma zona mais quente junto ao teto, que faz com que a temperatura quase não se altere ao longo da laje. E uma outra zona mais fria, provocada precisamente pela movimentação do ar quente. As Figura 5.39 até à Figura 5.41 mostram a evolução das temperaturas no local do incêndio. Nestas figuras quanto maior é a temperatura mais clara é a cor da zona correspondente.

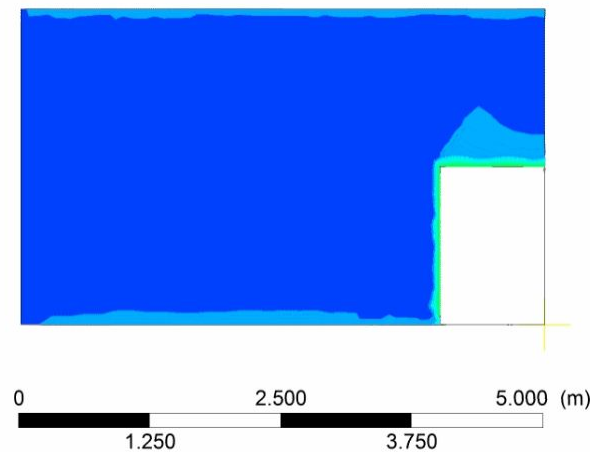


Figura 5.39 - Evolução das temperaturas

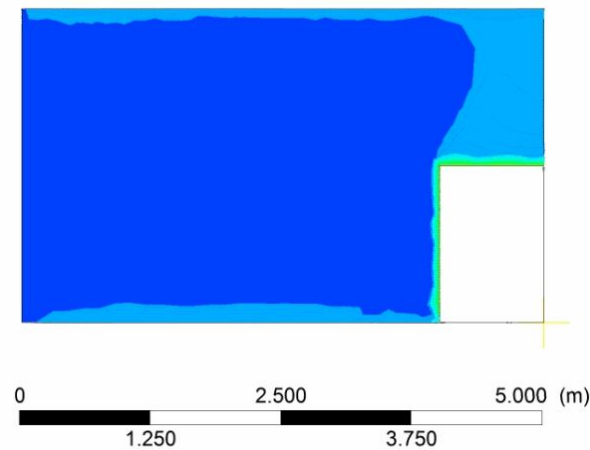


Figura 5.40 - Evolução das temperaturas

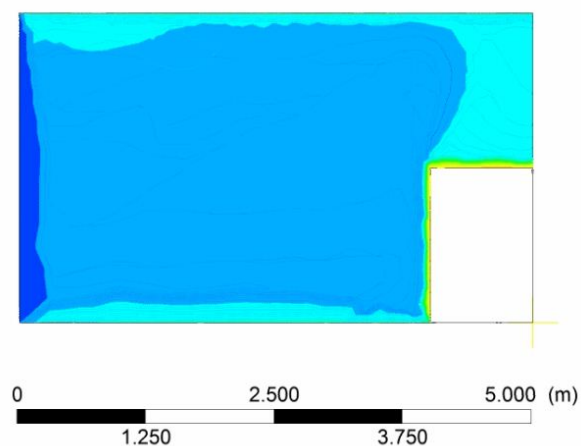


Figura 5.41 - Evolução das temperaturas

Nas Figura 5.39 a 5.41 é possível observar uma homogeneização das temperaturas junto ao teto, provavelmente devida circulação do ar.

Em todo o caso foi elaborado uma figura com as temperaturas que foram obtidas. Na Figura 5.42 o parâmetro z representa a cota a que se encontra a chama com o decorrer do incêndio.

Note-se que as duas curvas com valores inferiores representam as temperaturas à cota $z=2.0\text{m}$ e $z=2.5\text{m}$. Verificou-se que as temperaturas junto ao teto e a diferentes distâncias do eixo da chama ($r=0$ até $4,5$) estabilizam todas em torno dos 250°C .

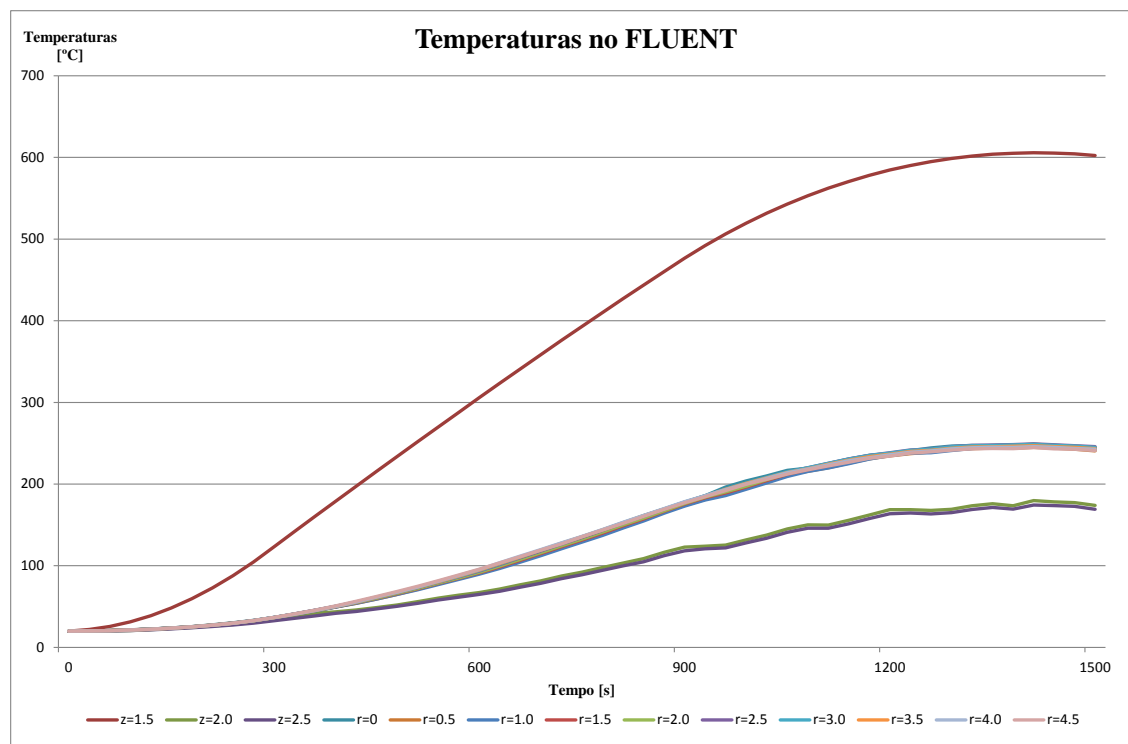


Figura 5.42 - Temperaturas obtidas no FLUENT®

Os resultados obtidos não são conclusivos pois não permitem distinguir as temperaturas para diferentes valores de r . Por outro lado, as temperaturas máximas obtidas são muito mais baixas do que as obtidas na laje através das simulações anteriormente apresentadas.

6. COMPARAÇÃO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo faz-se uma comparação dos valores obtidos pelos diferentes métodos bem como uma análise a esses mesmos resultados. A Tabela 6.1 ilustra as diferentes malhas utilizadas. Desta tabela consta, a amplitude dos subintervalos dx e dy, o Rácio entre dx e dy e a Área do elemento, no caso do método dos elementos finitos. Realizou-se esta tabela para verificar a influência destes parâmetros nos resultados obtidos. A partir dos valores destes parâmetros concluiu-se que rácios com valor igual ou superior a 10 conduzem a temperaturas muito elevadas. Constata-se também que valores de área baixos correspondem a valores altos da temperatura. Contudo nem sempre há aumento da temperatura com a diminuição da área. No caso do (ANSYS®), quando se diminui a área de 0,005 para 0,001 a temperatura diminui de 2609,32°C para 2592,93°C.

Tabela 6.1 – Temperatura máxima para as diferentes malhas utilizadas

ANSYS				
dx	dy	Rácio	Área	Tmáx
0,5	0,3	1,66667	0,15	298,562
0,5	0,15	3,33333	0,075	566,069
0,5	0,1	5	0,05	826,046
0,5	0,01	50	0,005	2609,32
Diferenças Finitas				
dx	dy	Rácio	Área	Tmáx
0,5	0,3	1,66667	0,15	277,96
0,5	0,15	3,33333	0,075	564,03
0,5	0,1	5	0,05	841,53
0,5	0,01	50	0,005	2981
Elementos Finitos (triangulares)				
dx	dy	Rácio	Área	Tmáx
0,5	0,3	1,66667	0,075	362,507
0,5	0,15	3,33333	0,0375	860,064
0,5	0,1	5	0,025	1528,05
0,5	0,01	50	0,0025	1564,25

ANSYS				
dx	dy	Rácio	Área	Tmáx
0,1	0,3	0,33333	0,03	298,373
0,1	0,15	0,66667	0,015	565,543
0,1	0,1	1	0,01	826,783
0,1	0,01	10	0,001	2592,93
Diferenças Finitas				
dx	dy	Rácio	Área	Tmáx
0,1	0,3	0,33333	0,03	277,59
0,1	0,15	0,66667	0,015	563,63
0,1	0,1	1	0,01	840,95
0,1	0,01	10	0,001	2981
Elementos Finitos (triangulares)				
dx	dy	Rácio	Área	Tmáx
0,1	0,3	0,33333	0,015	265,29
0,1	0,15	0,66667	0,0075	562,99
0,1	0,1	1	0,005	840,05
0,1	0,01	10	0,0005	2979,6

Verifica-se que os resultados obtidos são muito semelhantes para todos os métodos utilizados. Os únicos valores que não estão de acordo com os resultados obtidos pelos restantes métodos são para o caso dos elementos finitos triangulares com malhas de dx=0,5, dy=0,1 e dy=0,01. Para estes casos, a distorção do elemento finito triangular é elevada (Rácio > 5) e poderá originar instabilidade numérica. Constatou-se portanto, que as dimensões da malha são muito importantes no caso dos elementos triangulares.

Elaboraram-se dois gráficos referentes à Tabela 6.1, que mostram a variação da temperatura máxima com a variação de dy e mantendo o valor de dx . Na Figura 6.1, em que $dx=0,1$, os valores obtidos por diferenças finitas são muito próximos dos obtidos pelo (ANSYS®). Enquanto que os valores obtidos por elementos triangulares são maiores para dy maiores para valores de dy inferiores a 0,1 estabiliza nos 1500°C.

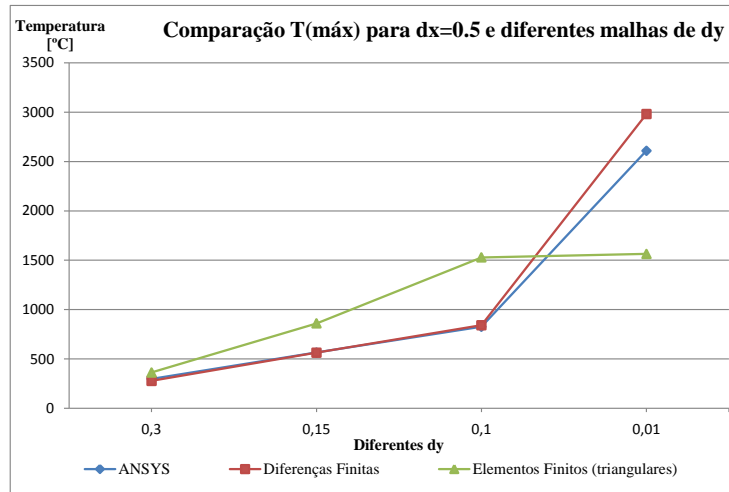


Figura 6.1 - Comparação T(máx) para a malha de $dx=0.5$ e diferentes malhas de dy

A Figura 6.2, que representa as temperaturas máximas $dx=0,1$ observa-se uma grande semelhança dos resultados obtidos pelos três métodos. Tal como para $dx=0,5$ tem-se uma temperatura máxima para $dy=0,01$ da ordem dos 3000 °C.

Considera-se que os dados ilustrados na Figura 6.2 validam as implementações do método das diferenças finitas e do método dos elementos finitos triangulares pois os resultados obtidos por estes dois métodos são muito semelhantes aos resultados obtidos através do (ANSYS®).

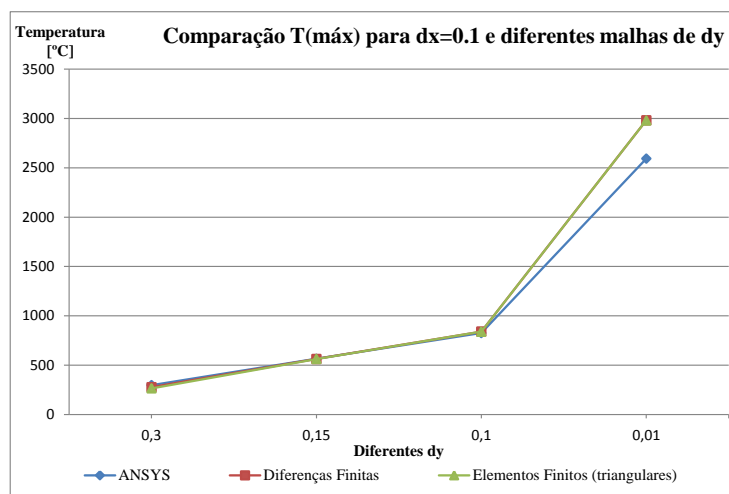


Figura 6.2 - Comparação T(máx) para a malha de $dx=0.1$ e diferentes malhas de dy

Como já foi referido, a maior temperatura obtida junto à laje é cerca de 3000°C. Mas é pouco provável que as temperaturas atinjam valores desta ordem. Efetivamente, o problema em estudo consiste num incêndio localizado de um veículo utilitário. A Figura 6.3 mostra as temperaturas ao longo do eixo da chama de acordo com o (EC1-1-2, 2002), descrito no Capítulo 2. Só é possível observar as temperaturas no início e no fim do incêndio pois quando as chamas atingem a laje o método não indica a temperatura mas sim o fluxo de calor.

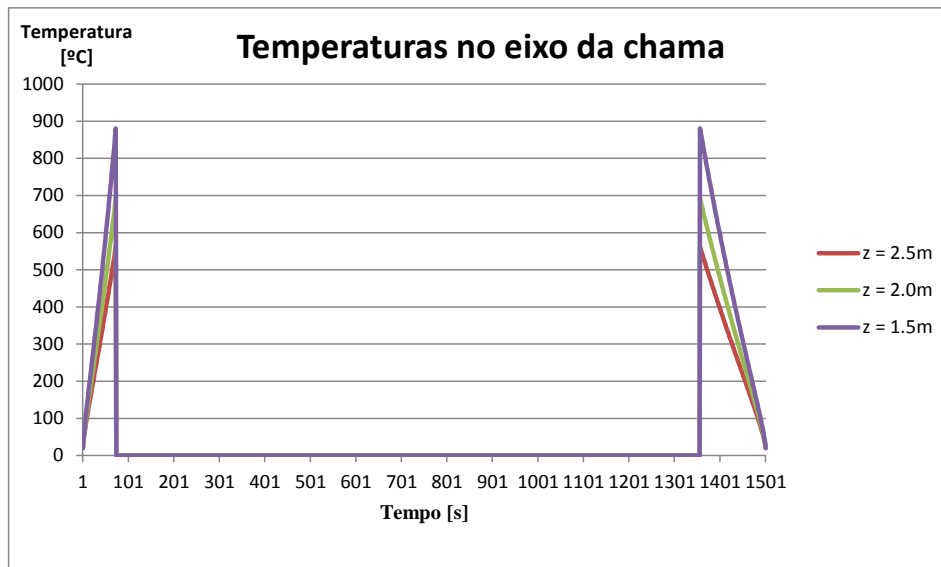


Figura 6.3 - Temperaturas no eixo da chama

As curvas apresentadas na figura indicam as temperaturas no eixo da chama às cotas de 1,5m, 2,0m e 2,5m. Verificou-se que a temperatura máxima à cota $z = 1,5\text{m}$ é igual a 880°C, à cota $z = 2,0\text{m}$ a temperatura desce para 691°C e à cota $z = 2,5\text{m}$ é da ordem de 560°C. Se tivermos estas temperaturas em conta, conclui-se que as temperaturas na superfície inferior da laje deverão possuir valores um pouco acima destes valores mas não da ordem dos 3000°C. Por este motivo considera-se que as curvas que melhor descrevem a evolução das temperaturas à superfície da laje são aquelas que resultam da utilização da malha $dx=0.1$ e $dy=0.1$. Embora não haja forma de comprovar esta preferência, justifica-se também pelo facto de esta malha não estar sujeita ao efeito de distorção anteriormente observado.

6.1 Comparação dos resultados obtidos pelos três métodos

Faz-se agora uma comparação entre os resultados obtidos pelos três métodos com uma malha de $dx=0.1$ e $dy=0.1$. A Figura 6.4 mostra a evolução das temperaturas obtidas pelos diferentes métodos em diferentes pontos da superfície da laje distanciados de 0,5 m.

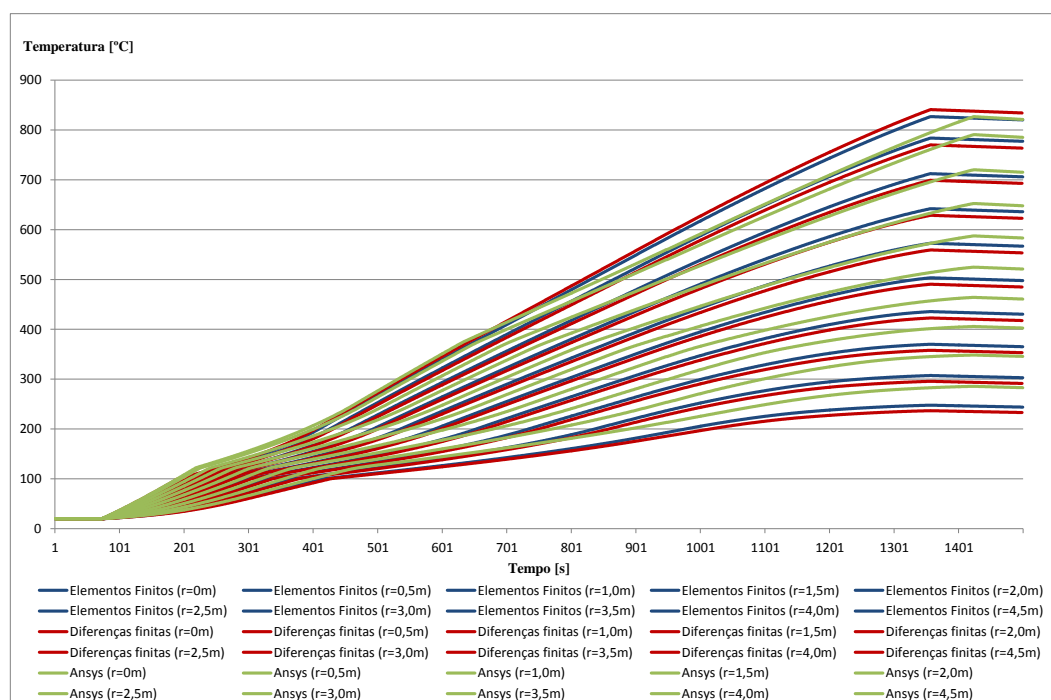


Figura 6.4 - Comparação de resultados obtidos com os 3 métodos para $dx=0,1$ $dy=0,1$

Note-se que o ressalto das temperaturas é semelhante nos três casos, sendo que no (ANSYS®) este dá-se a temperaturas um pouco superiores. Contudo, as temperaturas máximas também não acontecem para o mesmo momento. As temperaturas máximas através do (ANSYS®) acontecem por volta dos 1400s, ou seja, 50s depois das temperaturas atingidas através de diferenças finitas e elementos finitos triangulares.

Nota-se novamente que não sendo os resultados coincidentes, chegou-se a valores bastante semelhantes em qualquer um dos métodos. Outra conclusão a retirar a partir da Figura 6.4 é que a temperatura não diminui de igual forma para todos os métodos à medida que aumenta a distância ao eixo da chama. Parece haver um maior desfasamento entre os valores quando a distância ao eixo da chama é maior ($r=4,5m$).

Para verificar a evolução das temperaturas máximas nos três métodos elaborou-se a Figura 6.5 para a mesma malha ($dx=0.1$ e $dy=0.1$). Verifica-se que em $r=0m$ as temperaturas estão todas muito próximas e que, à medida que r aumenta, elas distanciam-se ligeiramente.

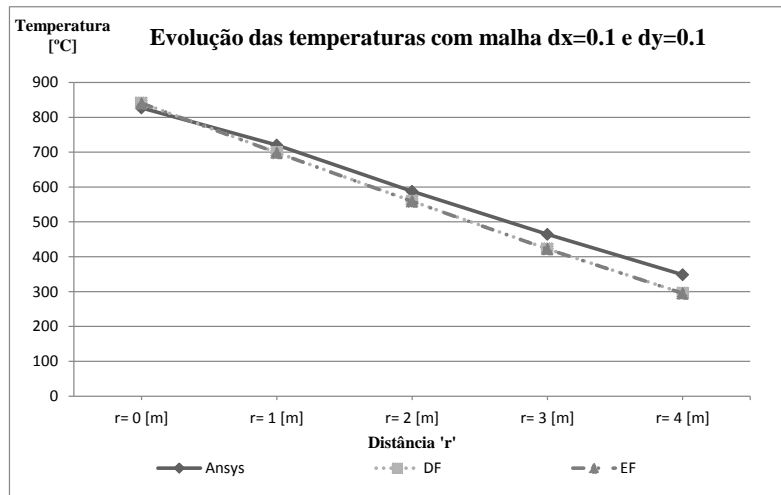


Figura 6.5 - Evolução das temperaturas máximas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$

Optou-se por comparar os resultados de uma outra forma ao escolher três tempos ao longo do incêndio e comparar esses mesmos valores. Para isso utilizou-se a mesma malha e chegou aos resultados ilustrados da Figura 6.6 à Figura 6.8.

Por observação da Figura 6.6 verifica-se que os resultados aproximam-se mais no início da simulação para os três métodos em estudo e que à medida que a simulação decorre as soluções divergem um pouco mais, sendo que os resultados mais próximos são os dos elementos finitos triangulares e das diferenças finitas.

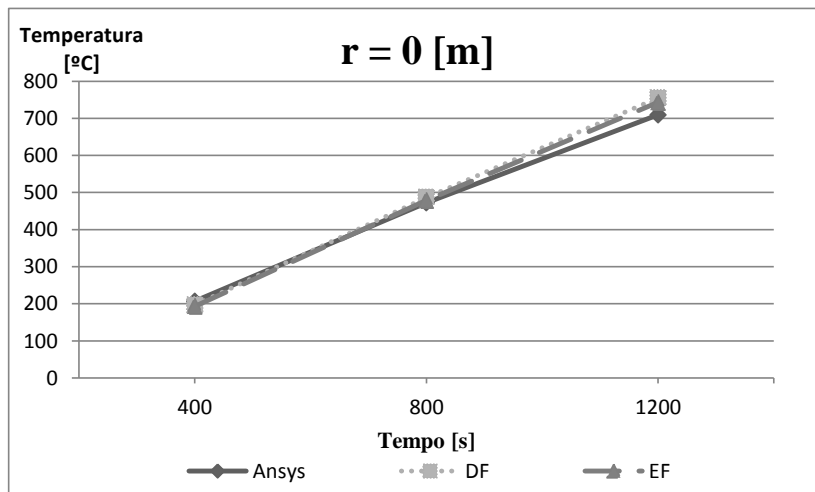


Figura 6.6 - Evolução das temperaturas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$, para $r=0m$ e para os instantes $t=400$, $t=800$ e $t=1200s$

Foram também elaborados gráficos para $r=2m$ (Figura 6.7) e $r=4m$ (Figura 6.8). Verifica-se que ao longo do tempo as diferenças são muito pequenas.

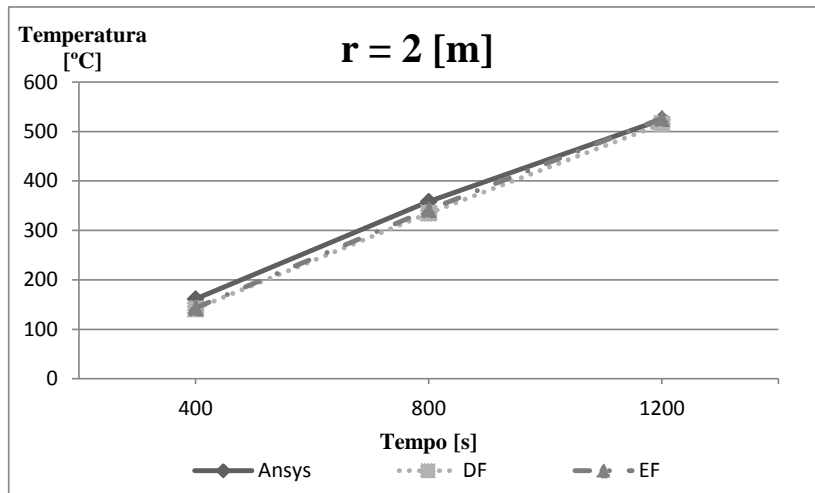


Figura 6.7 - Evolução das temperaturas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$, para $r=2m$ e para os instantes $t=400$, $t=800$ e $t=1200s$

Verifica-se também que quanto mais afastado do ponto médio da laje, ou seja, do ponto que recebe um maior fluxo de calor, maiores são as diferenças entre as temperaturas resultantes dos três métodos. É também possível verificar que as temperaturas obtidos através das diferenças finitas e dos elementos finitos triangulares são sempre inferiores aos resultados do (ANSYS®), para $r=4,0m$.

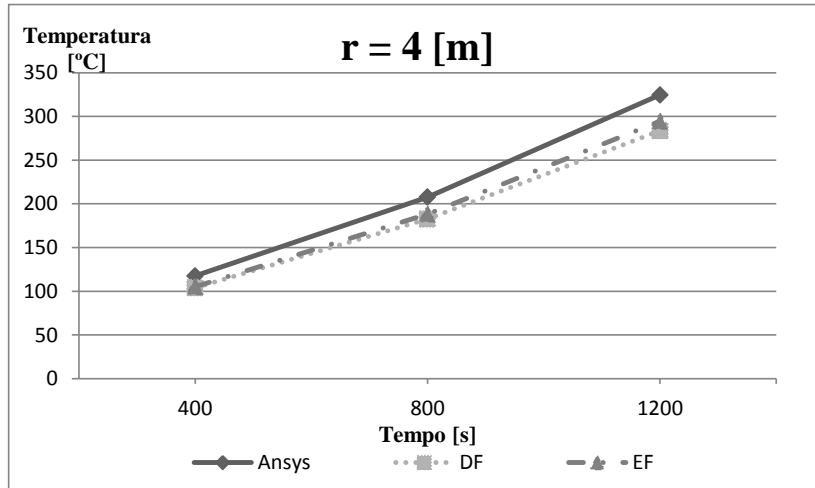


Figura 6.8 - Evolução das temperaturas para $dx=0.1$ e $dy=0.1$, para $r=4m$ e para os instantes $t=400$, $t=800$ e $t=1200s$

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho estudou-se o cálculo numérico das temperaturas numa laje em betão simples sob a influência da combustão de um automóvel. Como referência para a combustão do automóvel, utilizou-se uma curva que não foi obtida experimentalmente mas sim, uma curva segura para o dimensionamento.

Constata-se que os resultados obtidos para a evolução das temperaturas pelas três metodologias são muito próximos. Com isto conclui-se que os programas escritos pela metodologia das diferenças finitas e pelos elementos finitos, estão de acordo com os valores obtidos também pelo programa comercial (ANSYS®). Nota-se que existe um caso de instabilidade para a metodologia dos elementos finitos sendo que esta ocorre quando a distorção do elemento triangular é acentuada. Denota-se a importância de uma correta definição do elemento finito, para que este conduza à obtenção de bons resultados. Relativamente à metodologia das diferenças finitas, não se verificou casos de instabilidade. Isto deve-se ao comprimento das condições de estabilidade retiradas da bibliografia consultada.

Os valores da temperatura máxima obtidos, mostram uma discrepância entre as diferentes malhas utilizadas. À medida que a malha é refinada, estes resultados estabilizam para valores próximos dos 3000°C. Valores desta ordem são muito improváveis para o caso de um incêndio de um automóvel. É de referir que a utilização da curva de incêndio com valores da ordem de 18MW, poderá estar a deturpar os valores finais das temperaturas. Seria importante para um trabalho futuro, verificar os valores das temperaturas máximas para uma curva de incêndio com valores empíricos da ordem dos 8MW de maneira a ter um termo de comparação.

É importante salientar que os programas escritos para as metodologias das diferenças finitas e dos elementos finitos, têm como variável o fluxo de calor obtido através do (EC1-1-2, 2002) o qual já poderá possuir critérios de segurança de dimensionamento e que poderá levar também a maiores valores das temperaturas finais.

Outra causa que poderá estar relacionada com os valores das temperaturas máximas é o fato de poder existir algum fenómeno numérico derivado da dimensão da malha. Em todo caso este fenómeno não depende das implementações efetuadas pois os resultados obtidos através do conceituado *software* (ANSYS®) seguem a mesma tendência.

Relativamente aos tempos de computação dos códigos programados em (GNU Octave, 2011) verificou-se uma maior rapidez por parte do método das diferenças finitas em relação ao método dos elementos finitos. Este aspeto deve-se ao facto de se ter utilizado um código explícito para as diferenças finitas que não exige uma abordagem matricial enquanto que nos elementos finitos é necessário criar um sistema linear com a matriz de assemblagem que reúne as equações relativas a todos os nós. A resolução deste sistema de grandes dimensões em cada passo de tempo exige elevados recursos de memória assim como um grande número de cálculos. Devido a isto, seria relevante num trabalho futuro a elaboração deste mesmo código mas com a utilização de matrizes esparsas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Caldas, R. B. (2008). *Análise Numérica de Estruturas de Aço, Cconcreto e Mistras em Situação de Incêndio*.
- Chapra, C. S. (2012). *Applied Numerical Methods with Matlab*. McGraw-Hill.
- Chapra, S., & Canale, R. (2008). *Métodos Numéricos para Engenharia*. (H. Castro, Trad.) McGraw-Hill Interamericana do Brasil Ltda.
- Coelho, A. L. (1998). *Segurança Contra Incêndios em Edifícios de Habitação*.
- Dhatt, G., & Touzot, G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine S.A. ÉDITEUR.
- Eaton, J. W., Bateman, D., & Hauberg, S. (February de 2011). GNU Octave. *Free Your Numbers*.
- EC1-1-2. (2002). *Eurocódigo 1: Acções em estruturas - Parte 1-2: Acções gerais - Acções em estruturas expostas ao fogo*. Bruxelas: CEN - Comité Europeu de Normalização.
- EC2-1-2. (2004). *Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de betão - Parte 1-2: Regras gerais - Verificação da resistência ao fogo*. Bruxelas: CEN - Comité Europeu de Normalização.
- Haremza, C., Santiago, A. M., & da Silva, L. A. (s.d.). *Metodologia de dimensionamento de parques de estacionamento abertos mistos aço-betão em situação de incêndio*. Coimbra.
- Varga, R. S. (2000). *Matrix Iterative Analysis*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Vila Real, P. J. (1988). *Modelação por Elementos Finitos do Comportamento Térmico e Termo-Elástico de Sólidos Sujeitos a Elevados Gradientes Térmicos*. F.E.U.P.
- Vila Real, P. J. (2003). *Incêndio em Estruturas Metálicas*. Edições Orion.
- Zienkiewicz, O. (1977). *The Finite Element Method*. U.K.: McGraw - Hill Book Company Ltd.

Anexos


```

for k=1:Nx*Ny
b(k)=f*area/3;
end
for k=1:(Nx-1)*(Ny-1)*2
    Atemp =[1 vcor(connect(k,1),1) vcor(connect(k,1),2)
            1 vcor(connect(k,2),1) vcor(connect(k,2),2)
            1 vcor(connect(k,3),1) vcor(connect(k,3),2)];

    b1= [1 0 0]';
    b2= [0 1 0]';
    b3= [0 0 1]';

N1=Atemp\b1;
N2=Atemp\b2;
N3=Atemp\b3;

B=[N1(2) N2(2) N3(2); N1(3) N2(3) N3(3)];

P=B'*B;
P=area*P;
temp=connect(k,:);

A(temp(1),temp(1))= A(temp(1),temp(1))+P(1,1);
A(temp(2),temp(1))= A(temp(2),temp(1))+P(2,1);
A(temp(3),temp(1))= A(temp(3),temp(1))+P(3,1);
A(temp(1),temp(2))= A(temp(1),temp(2))+P(1,2);
A(temp(2),temp(2))= A(temp(2),temp(2))+P(2,2);
A(temp(3),temp(2))= A(temp(3),temp(2))+P(3,2);
A(temp(1),temp(3))= A(temp(1),temp(3))+P(1,3);
A(temp(2),temp(3))= A(temp(2),temp(3))+P(2,3);
A(temp(3),temp(3))= A(temp(3),temp(3))+P(3,3);
b(temp(1))=b(temp(1))+f*area/3;
b(temp(2))=b(temp(2))+f*area/3;
b(temp(3))=b(temp(3))+f*area/3;

end

T=[];

for k=1:Nx*Ny
    if(k<=Nx || k>=Nx*Ny-Nx || mod(k,Nx)==0 || mod(k,Nx)==1)
        A(k,:)=zeros(1,Nx*Ny);
        A(k,k)=1;
    end
end

for k=1:Nx*Ny
    if(k<=Nx)
        b(k)=0;
    elseif(k>=Nx*Ny-Nx+1)
        b(k)=100;
    elseif(mod(k,Nx)==0)
        b(k)=50;
    elseif(mod(k,Nx)==1)
        b(k)=75;
    end
end

end
T=A\b

```



```

b=zeros(Nx*Ny,1);
for k=1:Nx*Ny
b(k)=f*area/3;
end
for k=1:(Nx-1)*(Ny-1)*2
    Atemp =[1 vcor(connect(k,1),1) vcor(connect(k,1),2)
            1 vcor(connect(k,2),1) vcor(connect(k,2),2)
            1 vcor(connect(k,3),1) vcor(connect(k,3),2)];

    b1= [1 0 0]';
    b2= [0 1 0]';
    b3= [0 0 1]';

N1=Atemp\b1;
N2=Atemp\b2;
N3=Atemp\b3;

B=[N1(2) N2(2) N3(2); N1(3) N2(3) N3(3)];

P=B'*B;
P=area*P;
temp=connect(k,:);

A(temp(1),temp(1))= A(temp(1),temp(1))+P(1,1);
A(temp(2),temp(1))= A(temp(2),temp(1))+P(2,1);
A(temp(3),temp(1))= A(temp(3),temp(1))+P(3,1);
A(temp(1),temp(2))= A(temp(1),temp(2))+P(1,2);
A(temp(2),temp(2))= A(temp(2),temp(2))+P(2,2);
A(temp(3),temp(2))= A(temp(3),temp(2))+P(3,2);
A(temp(1),temp(3))= A(temp(1),temp(3))+P(1,3);
A(temp(2),temp(3))= A(temp(2),temp(3))+P(2,3);
A(temp(3),temp(3))= A(temp(3),temp(3))+P(3,3);
b(temp(1))=b(temp(1))+f*aire/3;
b(temp(2))=b(temp(2))+f*aire/3;
b(temp(3))=b(temp(3))+f*aire/3;

end

T=[];

for k=1:Nx*Ny
    if(k<=Nx || k>=Nx*Ny-Nx || mod(k,Nx)==0 || mod(k,Nx)==1)
        A(k,:)=zeros(1,Nx*Ny);
        A(k,k)=1;
    end
end

for k=1:Nx*Ny
    if(k<=Nx)
        b(k)=0;
    elseif(k>=Nx*Ny-Nx+1)
        b(k)=100;
    elseif(mod(k,Nx)==0)
        b(k)=50;
    elseif(mod(k,Nx)==1)
        b(k)=75;
    end
end
end

```



```

    indicec=indicec+2;
else
    indicel++;
    indicec++;
end
end

indice=1
for k=1:(Nx-1);
    edged(indice,:)= [k k+1];
    indice++;
end
for k=Nx:Nx:Nx*Ny-(Nx);
    edged(indice,:)= [k k+Nx];
    indice++;
end
for k=0:Nx-2;
    edged(indice,:)= [Nx*Ny-k Nx*Ny-(k+1)];
    indice++;
end
indice=1;
for k=1:Nx:Ny*Nx-(Nx+1);
    edgen(indice,:)= [Nx*Ny-(k-2+Nx) Nx*Ny-(k-2+2*Nx)];
    indice++;
end

bprime=zeros(size(edgen),1);
for k=1:size(edgen)
    bprime(k)=derT*pasy/2;
end

Mtilde=rho*c*aire/12* [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
M=zeros(Nx*Ny,Nx*Ny);

Temp=[];

A=zeros(Nx*Ny,Nx*Ny);
b=zeros(Nx*Ny,1);

for k=1:Nx*Ny
    b(k)=f*area/3;
end

for k=1:(Nx-1)*(Ny-1)*2
    Atemp = [1 vcor(connect(k,1),1) vcor(connect(k,1),2)
            1 vcor(connect(k,2),1) vcor(connect(k,2),2)
            1 vcor(connect(k,3),1) vcor(connect(k,3),2)];

    b1= [1 0 0]';
    b2= [0 1 0]';
    b3= [0 0 1]';

    N1=Atemp\b1;
    N2=Atemp\b2;
    N3=Atemp\b3;

    B=[N1(2) N2(2) N3(2); N1(3) N2(3) N3(3)];

```

```

P=B'*B;
P=k*area*P;
temp=connect(k,:);

A(temp(1),temp(1))= A(temp(1),temp(1))+P(1,1);
A(temp(2),temp(1))= A(temp(2),temp(1))+P(2,1);
A(temp(3),temp(1))= A(temp(3),temp(1))+P(3,1);
A(temp(1),temp(2))= A(temp(1),temp(2))+P(1,2);
A(temp(2),temp(2))= A(temp(2),temp(2))+P(2,2);
A(temp(3),temp(2))= A(temp(3),temp(2))+P(3,2);
A(temp(1),temp(3))= A(temp(1),temp(3))+P(1,3);
A(temp(2),temp(3))= A(temp(2),temp(3))+P(2,3);
A(temp(3),temp(3))= A(temp(3),temp(3))+P(3,3);
M(temp(1),temp(1))= M(temp(1),temp(1))+Mtilde(1,1);
M(temp(2),temp(1))= M(temp(2),temp(1))+Mtilde(2,1);
M(temp(3),temp(1))= M(temp(3),temp(1))+Mtilde(3,1);
M(temp(1),temp(2))= M(temp(1),temp(2))+Mtilde(1,2);
M(temp(2),temp(2))= M(temp(2),temp(2))+Mtilde(2,2);
M(temp(3),temp(2))= M(temp(3),temp(2))+Mtilde(3,2);
M(temp(1),temp(3))= M(temp(1),temp(3))+Mtilde(1,3);
M(temp(2),temp(3))= M(temp(2),temp(3))+Mtilde(2,3);
M(temp(3),temp(3))= M(temp(3),temp(3))+Mtilde(3,3);
b(temp(1))=b(temp(1))+f*area/3;
b(temp(2))=b(temp(2))+f*area/3;
b(temp(3))=b(temp(3))+f*area/3;

```

end

```

for k=1:2:size(edge)
b(edge(k,1))=bprime(k);
b(edge(k,2))=bprime(k);

```

end

```
T=zeros(Nx*Ny,Nt);
```

```

for k=1:Nx*Ny;
if(k<=Nx || k>=Nx*Ny-Nx+1 || mod(k,Nx)==0);
A(k,:)=zeros(1,Nx*Ny);
A(k,k)=1;

```

end

end

```

for k=1:Nx*Ny;
if(k<=Nx);
b(k)=0;
elseif(k>=Nx*Ny-Nx+1);
b(k)=100;
elseif(mod(k,Nx)==0);
b(k)=0;

```

end

end

```

T(:,1)=zeros(Nx*Ny,1);
for k=Nx*Ny-Nx+1:Nx*Ny;
T(k,1)=100;

```

end

```

for t=2:Nt;
R=dt*(b-A*T(:,t-1));

```



```

    indicec=indicec+2;
else
    indicel++;
    indicec++;
end
end

indice=1
for k=1:(Nx-1)
    edged(indice,:)=[k k+1];
    indice++;
end
for k=Nx:Nx:Nx*Ny-(Nx)
    edged(indice,:)=[k k+Nx];
    indice++;
end
for k=0:Nx-2
    edged(indice,:)=[Nx*Ny-k Nx*Ny-(k+1)];
    indice++;
end
indice=1;
for k=1:Nx:Ny*Nx-(Nx+1)
    edgen(indice,:)=[Nx*Ny-(k-2+Nx) Nx*Ny-(k-2+2*Nx)];
    indice++;
end

bprime=zeros(size(edgen),1);
for k=1:size(edgen)
    bprime(k)=derT*pasy/2;
end

Mtilde=rho*c*area/12* [2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];
M=zeros(Nx*Ny,Nx*Ny);

Temp=[];

A=zeros(Nx*Ny,Nx*Ny);
b=zeros(Nx*Ny,1);

for k=1:Nx*Ny
    b(k)=f*area/3;
end

for k=1:(Nx-1)*(Ny-1)*2
    Atemp =[1 vcor(connect(k,1),1) vcor(connect(k,1),2)
            1 vcor(connect(k,2),1) vcor(connect(k,2),2)
            1 vcor(connect(k,3),1) vcor(connect(k,3),2)];

    b1= [1 0 0]';
    b2= [0 1 0]';
    b3= [0 0 1]';

    N1=Atemp\b1;
    N2=Atemp\b2;
    N3=Atemp\b3;

    B=[N1(2) N2(2) N3(2); N1(3) N2(3) N3(3)];

```

```

P=B'*B;
P=k*area*P;
temp=connect(k,:);

A(temp(1),temp(1))= A(temp(1),temp(1))+P(1,1);
A(temp(2),temp(1))= A(temp(2),temp(1))+P(2,1);
A(temp(3),temp(1))= A(temp(3),temp(1))+P(3,1);
A(temp(1),temp(2))= A(temp(1),temp(2))+P(1,2);
A(temp(2),temp(2))= A(temp(2),temp(2))+P(2,2);
A(temp(3),temp(2))= A(temp(3),temp(2))+P(3,2);
A(temp(1),temp(3))= A(temp(1),temp(3))+P(1,3);
A(temp(2),temp(3))= A(temp(2),temp(3))+P(2,3);
A(temp(3),temp(3))= A(temp(3),temp(3))+P(3,3);
M(temp(1),temp(1))= M(temp(1),temp(1))+Mtilde(1,1);
M(temp(2),temp(1))= M(temp(2),temp(1))+Mtilde(2,1);
M(temp(3),temp(1))= M(temp(3),temp(1))+Mtilde(3,1);
M(temp(1),temp(2))= M(temp(1),temp(2))+Mtilde(1,2);
M(temp(2),temp(2))= M(temp(2),temp(2))+Mtilde(2,2);
M(temp(3),temp(2))= M(temp(3),temp(2))+Mtilde(3,2);
M(temp(1),temp(3))= M(temp(1),temp(3))+Mtilde(1,3);
M(temp(2),temp(3))= M(temp(2),temp(3))+Mtilde(2,3);
M(temp(3),temp(3))= M(temp(3),temp(3))+Mtilde(3,3);
b(temp(1))=b(temp(1))+f*area/3;
b(temp(2))=b(temp(2))+f*area/3;
b(temp(3))=b(temp(3))+f*area/3;

```

end

```
T=zeros(Nx*Ny,Nt);
```

```

for k=1:Nx*Ny
    if(k<=Nx || k>=Nx*Ny-Nx+1 || mod(k,Nx)==0 || mod(k,Nx)==1)
        A(k,:)=zeros(1,Nx*Ny);
        A(k,k)=1;
    end
end

```

```

for k=1:Nx*Ny
    if(k<=Nx)
        b(k)=0;
    elseif(k>=Nx*Ny-Nx+1)
        b(k)=100;
    elseif(mod(k,Nx)==0)
        b(k)=0;
    elseif(mod(k,Nx)==1)
        b(k)=0;
    end
end
end

```

```

T(:,1)=zeros(Nx*Ny,1); %T0
for k=Nx*Ny-Nx+1:Nx*Ny
    T(k,1)=100;
end
for t=2:Nt
    R=dt*(b-A*T(:,t-1));
    deltaT=(M+dt*A)\R;
    T(:,t)=T(:,t-1)+deltaT;
end

```



```
rho=masvol(T(i,j,t)); Cp=calesp(T(i,j,t)); kc=condut(T(i,j,t));
k=kc/(rho*Cp); c=(dt*k/dx^2); d=(dt*k/dy^2);
```

```
if (j==1 & i~=1 & i~=npy+2);
T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+2*c*T(i,j+1,t-1)+d*T(i+1,j,t-1)+d*T(i-1,j,t-1);
elseif (j==npx+2 & i~=1 & i~=npy+2);
T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+2*c*T(i,j-1,t-1)+d*T(i+1,j,t-1)+d*T(i-1,j,t-1);
elseif (i==1);
    if (j==1);
        T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+2*c*T(i,j+1,t-1)+2*d*T(i+1,j,t-1);
    elseif (j==npx+2);
        T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+2*c*T(i,j-1,t-1)+2*d*T(i+1,j,t-1);
    else
        T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+c*T(i,j+1,t-1)+c*T(i,j-1,t-1)+2*d*T(i+1,j,t-1);
    end
elseif i==npy+2;
    if j~=1 & j~=npx+2;
        if j<=jm;
            T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+c*T(i,j+1,t-1)+c*T(i,j-1,t-1)+2*d*T(i-1,j,t-1)+2*
d*dy*(hi(jm-j+1)/(kc));
        else j>=jm;
            T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+c*T(i,j+1,t-1)+c*T(i,j-1,t-1)+2*d*T(i-1,j,t-1)+2*
d*dy*(hi(j-jm+1)/(kc));
        end
    elseif j==1;
        T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+2*c*T(i,j+1,t-1)+2*d*T(i-1,j,t-1)+2*d*dy*(hi(end)/(kc
));
    elseif j==npx+2;
        T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+2*c*T(i,j-1,t-1)+2*d*T(i-1,j,t-1)+2*d*dy*(hi(end)/(kc
));
    end
else
    T(i,j,t)=T(i,j,t-1)*(1-2*c-2*d)+c*T(i,j+1,t-1)+c*T(i,j-1,t-1)+d*T(i+1,j,t-1)+d*T(i-1,j,t-
1);
end
end
end
difT=norm(T(:,:,t)-Told,inf)/norm(T(:,:,t),inf);
Told=T(:,:,t);
its=its+1;
temp(1,t)=T(end,jm,t);
temp(2,t)=T(end,jm+0.5/dx,t);
temp(3,t)=T(end,jm+1.5/dx,t);
temp(4,t)=T(end,jm+2.5/dx,t);
temp(5,t)=T(end,jm+3.5/dx,t);
temp(6,t)=T(end,jm+4.5/dx,t);
endwhile
its
end

figure(1); clf
xx1=x0:dx:xf;
yy=y0:dy:yf;
surf(xx1,yy,T(:,:,end))
set(gca, 'xlim', [x0 xf], 'ylim', [y0 yf], 'zlim', [0 max(temp(1,:))]);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('T(x,y)');
```



```

connect= zeros((Nx-1)*2*(Ny-1),3);
indicel=1;
indicec=Nx+1;
for k=1:2:(Nx-1)*2*(Ny-1)
    connect(k,:)=[indicel indicel+1 indicec+1];
    connect(k+1,:)=[indicel indicec+1 indicec];
    if(mod(k+1,(Nx-1)*2)==0)
        indicel=indicel+2;
        indicec=indicec+2;
    else
        indicel++;
        indicec++;
    end
end

T(:,1)=20*ones(Ny*Nx,1);
Told=T(:,1);
Mtilde=area/12*[2 1 1; 1 2 1; 1 1 2];

for t=2:Nt
A=zeros(Nx*Ny,Nx*Ny);
M=zeros(Nx*Ny,Nx*Ny);
hi=spline(r,hp(:,t-1),xx);
    difT=10;
    its=0;
    maxit=50;
    while (difT>1e-5 & its<maxit)

        for p=1:11
            b(p)=hi(12-p)*pasx/(lamb(Told(p)));
        end
        indice=2;
        for p=12:Nx
            b(p)=hi(indice)*pasx/(lamb(Told(p)));
            indice++;
        end
    end
b(1)=b(1)/2;
b(Nx)=b(Nx)/2;

    for k=1:(Nx-1)*(Ny-1)*2
        Atemp =[1 vcor(connect(k,1),1) vcor(connect(k,1),2)
                1 vcor(connect(k,2),1) vcor(connect(k,2),2)
                1 vcor(connect(k,3),1) vcor(connect(k,3),2)];

        b1= [1 0 0]';
        b2= [0 1 0]';
        b3= [0 0 1]';

        N1=Atemp\b1;
        N2=Atemp\b2;
        N3=Atemp\b3;

        B=[N1(2) N2(2) N3(2); N1(3) N2(3) N3(3)] ;

        P=B'*B;
        P=area*P;
        temp=connect(k,:);

```

```

A(temp(1),temp(1))= A(temp(1),temp(1))+lamb(Told(temp(1)))*P(1,1);
A(temp(2),temp(1))= A(temp(2),temp(1))+(lamb(Told(temp(2)))+lamb(Told(temp(1))))/
2*P(2,1);
A(temp(3),temp(1))= A(temp(3),temp(1))+(lamb(Told(temp(3)))+lamb(Told(temp(1))))/
2*P(3,1);
A(temp(1),temp(2))= A(temp(1),temp(2))+(lamb(Told(temp(1)))+lamb(Told(temp(2))))/
2*P(1,2);
A(temp(2),temp(2))= A(temp(2),temp(2))+(lamb(Told(temp(2)))+lamb(Told(temp(2))))/
2*P(2,2);
A(temp(3),temp(2))= A(temp(3),temp(2))+(lamb(Told(temp(3)))+lamb(Told(temp(2))))/
2*P(3,2);
A(temp(1),temp(3))= A(temp(1),temp(3))+(lamb(Told(temp(1)))+lamb(Told(temp(3))))/
2*P(1,3);
A(temp(2),temp(3))= A(temp(2),temp(3))+(lamb(Told(temp(2)))+lamb(Told(temp(3))))/
2*P(2,3);
A(temp(3),temp(3))= A(temp(3),temp(3))+(lamb(Told(temp(3)))+lamb(Told(temp(3))))/
2*P(3,3);

M(temp(1),temp(1))= M(temp(1),temp(1))+(massev(Told(temp(1)))+massev(Told(temp(1)
))))/2*(chaleur(Told(temp(1)))+chaleur(Told(temp(1))))/2*Mtilde(1,1);
M(temp(2),temp(1))= M(temp(2),temp(1))+(massev(Told(temp(2)))+massev(Told(temp(1)
))))/2*(chaleur(Told(temp(2)))+chaleur(Told(temp(1))))/2*Mtilde(2,1);
M(temp(3),temp(1))= M(temp(3),temp(1))+(massev(Told(temp(3)))+massev(Told(temp(1)
))))/2*(chaleur(Told(temp(3)))+chaleur(Told(temp(1))))/2*Mtilde(3,1);
M(temp(1),temp(2))= M(temp(1),temp(2))+(massev(Told(temp(1)))+massev(Told(temp(2)
))))/2*(chaleur(Told(temp(1)))+chaleur(Told(temp(2))))/2*Mtilde(1,2);
M(temp(2),temp(2))= M(temp(2),temp(2))+(massev(Told(temp(2)))+massev(Told(temp(2)
))))/2*(chaleur(Told(temp(2)))+chaleur(Told(temp(2))))/2*Mtilde(2,2);
M(temp(3),temp(2))= M(temp(3),temp(2))+(massev(Told(temp(3)))+massev(Told(temp(2)
))))/2*(chaleur(Told(temp(3)))+chaleur(Told(temp(2))))/2*Mtilde(3,2);
M(temp(1),temp(3))= M(temp(1),temp(3))+(massev(Told(temp(1)))+massev(Told(temp(3)
))))/2*(chaleur(Told(temp(1)))+chaleur(Told(temp(3))))/2*Mtilde(1,3);
M(temp(2),temp(3))= M(temp(2),temp(3))+(massev(Told(temp(2)))+massev(Told(temp(3)
))))/2*(chaleur(Told(temp(2)))+chaleur(Told(temp(3))))/2*Mtilde(2,3);
M(temp(3),temp(3))= M(temp(3),temp(3))+(massev(Told(temp(3)))+massev(Told(temp(3)
))))/2*(chaleur(Told(temp(3)))+chaleur(Told(temp(3))))/2*Mtilde(3,3);

end

R=M-dt*A*(1-alpha);
deltaT=(M+dt*A*alpha)\R;
T(:,t)=deltaT*Told(:)+(M+dt*A*alpha)\(dt*b);

difT=norm(T(:,t)-Told,inf)/norm(T(:,t),inf);
Told=T(:,t);
its=its+1;
end

its
end

Tempf=zeros(Ny,Nx,Nt);
for k=1:Nt
indice=1;
for l=1:Ny
Tempf(l,:,k)=T(indice:indice+Nx-1,k)';
indice=indice+Nx;
end
end

```

```

end
figure(1);
xx=x0:pasx:xf;
yy=y0:pasx:yf;
mesh(xx,yy,Tempf(:,:,1))
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('T(x,y)');
hold on

figure(2);
xx=x0:pasx:xf;
yy=y0:pasx:yf;
mesh(xx,yy,Tempf(:,:,Nt))
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('T(x,y)');
hold on

figure(3)
plot([1:Nt],T(11,:), 'b')
hold on
plot([1:Nt],T(10,:), 'r')
hold on
plot([1:Nt],T(8,:), 'k')
hold on
plot([1:Nt],T(6,:), 'g')
hold on
plot([1:Nt],T(4,:), 'c')
hold on
plot([1:Nt],T(2,:), 'm')
legend('r=0', 'r=0,5', 'r=1,5', 'r=2,5', 'r=3,5', 'r=4,5')
grid('on');
title('Finite Element dx=0.1 dy= 0.1 dt=1');
xlabel('t(s)');
ylabel('Temperature C');

%%%
% fim de código %

```