

Funções de variação limitada

Maria de Fátima Pacheco

Abril de 2001

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
para obtenção de grau de Mestre em Matemática-Fundamentos e
Aplicações

Orientada por José Ferreira Alves

Departamento de Matemática Pura

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. José Ferreira Alves a sua orientação científica e permanente disponibilidade ao longo da realização deste trabalho.

Introdução

As funções de variação limitada têm-se revelado um importante instrumento de trabalho, não só na Análise, onde aparecem de maneira natural, como em diversas outras áreas da Matemática, nomeadamente a Geometria e os Sistemas Dinâmicos.

A noção clássica de variação limitada para funções reais de variável real usa de maneira importante a ordenação de \mathbb{R} , razão pela qual não é directamente generalizável a dimensões mais altas. Uma noção um pouco menos exigente de variação – a variação essencial – tem uma extensão natural para dimensões superiores, perdendo contudo algumas das boas propriedades geométricas da definição clássica. Algumas das limitações foram ultrapassadas com o trabalho de Giusti [12] que introduziu uma definição de função de variação limitada (equivalente à variação essencial) conservando muitas das boas propriedades da definição clássica em dimensão 1.

Este trabalho tem por objectivo fazer um estudo detalhado das funções de variação limitada dando um relevo muito especial à sua definição em dimensão superior. Serão apontados os principais resultados que permanecem válidos em dimensão mais alta, apresentando-se contra-exemplos ilustrativos para os casos em que tal não acontece. Em particular, veremos que em dimensão maior do que 1 uma função de variação limitada não é necessariamente limitada. Esse facto constitui uma das perdas significativas quando se passa para dimensão superior, mas é atenuado por se poder provar que o espaço das funções de variação limitada é mergulhável em algum L^p . Apresentaremos também algumas das aplicações das funções de variação limitada. Faremos aplicações geométricas, nomeadamente a extensão da noção de perímetro para conjuntos muito mais gerais e o estudo da existência de superfícies minimais. Outra das aplicações que faremos será aos Sistemas Dinâmicos e prende-se com o estudo da existência de medidas invariantes absolutamente contínuas. As medidas invariantes absolutamente contínuas são particularmente relevantes no estudo dos sistemas dinâmicos caóticos. Tais sistemas são, de um ponto de vista determinístico, completamente imprevisíveis. Contudo, exibem muitas vezes medidas que descrevem o comportamento estatístico da maioria das órbitas (quase todo o ponto em relação a essa medida). Em termos práticos, pretende-se que a “maioria da órbitas” para alguma medida invariante tenha algum significado em termos da medida de Lebesgue. Para tal, é suficiente que essas medidas invariantes sejam absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 1 são revistos alguns conceitos fundamentais sobre medida e integração e análise funcional. Os resultados são apresentados sem demonstrações, uma vez que estas podem ser facilmente encontradas nas referências bibliográficas, sendo a sua introdução feita neste trabalho apenas com o intuito de uniformizar notação e esclarecer algum tópico menos claro para o leitor.

No Capítulo 2 introduzimos o conceito de função de variação limitada na recta, conceito intimamente relacionado com o de função monótona, como veremos. Com vista a estender essa teoria a dimensão superior introduzimos o conceito de variação essencial (limitada) e demonstramos algumas das propriedades fundamentais deste tipo de funções.

No Capítulo 3 generalizamos o conceito de variação essencial limitada a dimensão superior. São apresentados resultados que se mantêm com a generalização e mencionados outros que se perdem com o aumento da dimensão. Neste capítulo introduzimos outras definições possíveis de variação limitada e provamos a sua equivalência à definição dada. O conjunto das funções de variação limitada é munido de uma norma sob a qual tem uma estrutura de espaço de Banach, para o qual provamos vários resultados importantes, nomeadamente resultados de compacidade e aproximação por funções deriváveis. Com vista a provar um resultado fundamental nas aplicações aos Sistemas Dinâmicos, introduzimos a noção de traço de uma função de variação limitada.

No Capítulo 4 estudamos as aplicações geométricas das funções de variação limitada. Apresentamos uma definição de perímetro de um conjunto que, para conjuntos com fronteira suficientemente regular, coincide com a noção tradicional e estudamos o caso particular dos conjuntos cuja função característica tem variação limitada, os conjuntos de Caccioppoli. Ainda neste capítulo, dedicamos uma secção à determinação de superfícies minimais, isto é, as superfícies com a menor área de entre todas aquelas que têm uma certa curva como fronteira.

O Capítulo 5 é dedicado às aplicações das funções de variação limitada aos Sistemas Dinâmicos, particularmente ao estudo da existência das medidas invariantes absolutamente contínuas (em relação à medida de Lebesgue m_d). O principal instrumento deste capítulo é o operador de transferência ou operador de Perron–Frobenius, cujos pontos fixos são precisamente densidades de medidas invariantes absolutamente contínuas. Estudamos algumas das propriedades mais importantes desse operador, nomeadamente a continuidade e propriedades de contracção. Ainda neste capítulo estudam-se as transformações expansoras por partes. O objectivo é chegar à generalização para dimensões mais altas do resultado apresentado em 1973 por Lasota-Yorke [16] para o caso unidimensional.

Num apêndice final apresentamos a noção de função regularizante e algumas das suas propriedades, utilizadas em demonstrações ao longo deste trabalho.

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	Medida e integração	1
1.2	Análise funcional	4
2	Funções na recta	7
2.1	Variação limitada	7
2.2	Variação essencial	12
3	Generalização para dimensão superior	17
3.1	Variação essencial	17
3.2	Variação limitada	19
3.3	O espaço VL	29
3.4	Traços	32
4	Aplicações geométricas	37
4.1	Perímetro	37
4.2	Superfícies minimais	41
5	Aplicações em dinâmica	47
5.1	Operador de transferência	47
5.2	Transformações expansoras por partes	51
A	Apêndice	61
A.1	Funções regularizantes	61
	Bibliografia	64

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos diversas definições e resultados necessários à continuação do trabalho. Fazemos uma introdução breve à Teoria da Medida e abordamos alguns conceitos de Análise Funcional. Tratando-se, na sua maioria, de resultados conhecidos do leitor, optámos por omitir as demonstrações. Tais demonstrações, bem como um grande número de exemplos elucidativos, podem ser encontrados em [4], [17] e [25].

1.1 Medida e integração

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto e \mathcal{A} um subconjunto de partes de X . Diz-se que \mathcal{A} é uma σ -álgebra se:

1. $X \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, \dots \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Chama-se *espaço mensurável* a um par (X, \mathcal{A}) em que \mathcal{A} é uma σ -álgebra sobre X e *mensuráveis* aos elementos de \mathcal{A} . Uma *medida* em \mathcal{A} é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. se $\{A_i\}_{i=1, \dots}$ for uma sucessão de elementos disjuntos de \mathcal{A} , então

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Ao terno (X, \mathcal{A}, μ) , em que (X, \mathcal{A}) é um espaço mensurável e μ é uma medida definida em \mathcal{A} chama-se *espaço de medida*. Se $\mu(X) < \infty$, μ é uma *medida finita* e se $\mu(X) = 1$, o espaço de medida diz-se *normalizado* ou *espaço de probabilidade*.

Definição 1.1.2. Sejam X um espaço topológico e \mathcal{D} a família dos abertos de X . À σ -álgebra gerada por \mathcal{D} chama-se σ -álgebra de Borel e aos seus elementos *borelianos* de X .

Vamos definir na σ -álgebra dos borelianos de \mathbb{R}^d uma medida que generaliza a noção intuitiva que temos de comprimento, área, volume,... para conjuntos poligonais.

Teorema 1.1.3. *Existe uma única medida m_d definida na σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^d tal que, se I_1, \dots, I_d são intervalos de \mathbb{R} , então $m_d\left(\prod_{i=1}^d I_i\right) = |I_1| \dots |I_d|$, onde para cada i , $|I_i|$ designa o comprimento de I_i .*

A medida dada pelo teorema anterior denomina-se *medida de Lebesgue*. Ao longo deste trabalho, sempre que não haja risco de ambiguidade, *q.t.p* significará Lebesgue-q.t.p.

Definição 1.1.4. Seja (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável. Uma função $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ diz-se uma função mensurável se, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiver $f^{-1}] - \infty, \alpha[\in \mathcal{A}$ ou, equivalentemente, se $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ para todo o boreliano $A \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.1.5. Uma sucessão $(f_n)_n$ num espaço vectorial normado diz-se uma *sucessão de Cauchy* se, para todo o $\varepsilon > 0$, existir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall j, k \geq n, \|f_j - f_k\| < \varepsilon.$$

Toda a sucessão convergente é uma sucessão de Cauchy e um espaço vectorial normado \mathbb{V} diz-se *completo* se nele toda a sucessão de Cauchy convergir. Um espaço vectorial normado completo diz-se um *espaço de Banach*.

Lema 1.1.6 (Fatou). *Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções integráveis não negativas. Então,*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Teorema 1.1.7 (Convergência Dominada). *Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções mensuráveis tais que $|f_n| \leq g$, onde g integrável, e $f \equiv \lim f_n$ q.t.p.. Então, f é integrável e*

$$\lim \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Teorema 1.1.8 (Vitali). *Seja \mathcal{B} uma coleção de bolas fechadas (não degeneradas) em \mathbb{R}^d , tal que*

$$\sup \{ \text{diam } B : B \in \mathcal{B} \} < \infty.$$

Então, existe uma família numerável \mathcal{G} de bolas disjuntas de \mathcal{B} tal que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subset \bigcup_{B' \in \mathcal{G}} B'.$$

Definição 1.1.9. Sejam (X, \mathcal{A}) um espaço mensurável e μ e ν medidas em (X, \mathcal{A}) . Diz-se que ν é *absolutamente contínua* em relação a μ e escreve-se $\nu \ll \mu$, se

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0, \forall A \in \mathcal{A}.$$

Se (X, \mathcal{A}, μ) for um espaço de medida e f uma função não negativa integrável, $\nu : A \rightarrow \int_A f d\mu$ define uma medida finita em (X, \mathcal{A}) , que é absolutamente contínua em relação a μ . Na realidade, se $A \in \mathcal{A}$ é tal que $\mu(A) = 0$, então $f\chi_A = 0$ e, conseqüentemente, $\nu(A) = 0$. O teorema que se segue mostra que é possível representar ν em função de μ e que esta é a única maneira de construir medidas finitas absolutamente contínuas.

Teorema 1.1.10 (Radon-Nikodym). *Se μ e ν são medidas finitas num espaço mensurável (X, \mathcal{A}) tais que $\nu \ll \mu$, então existe uma função f não negativa finita tal que*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \mathcal{A}.$$

f é única q.t.p. .

A função f dada no teorema anterior chama-se *derivada de Radon-Nikodym* ou *densidade* da medida ν em relação a μ e denota-se por $d\nu/d\mu$.

Sejam $\mathcal{M}(X)$ o espaço das medidas sobre (X, \mathcal{A}) e $\tau : X \rightarrow X$ uma transformação. τ diz-se mensurável se $\tau^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ para todo o $A \in \mathcal{M}$. Uma tal transformação mensurável τ induz uma transformação em $\mathcal{M}(X)$ do seguinte modo:

$$(\tau_*\mu)(A) = \mu(\tau^{-1}(A)).$$

Como τ é mensurável, temos que $\tau_*\mu \in \mathcal{M}(X)$ e τ_* está bem definida.

Definição 1.1.11. μ é uma medida τ -invariante se $\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$ qualquer que seja o conjunto mensurável A .

1.2 Análise funcional

Ao longo deste trabalho, a norma euclídeana de \mathbb{R}^d será denotada por $\|\cdot\|$ ou, quando não houver perigo de ambiguidade, por $|\cdot|$.

Definição 1.2.1. Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Dado $1 \leq p < \infty$, define-se L^p como a classe das funções mensuráveis f tais que

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Define-se $L^\infty(\mu)$ como a classe das funções mensuráveis f tais que

$$\|f\|_\infty = \inf \{K > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > K\}) = 0\} < \infty.$$

O espaço L^p , $1 \leq p \leq \infty$, munido da norma $\|\cdot\|_p$ é um espaço normado completo, ou seja, um espaço de Banach.

Teorema 1.2.2. *Seja F um funcional linear limitado em L^p , $1 \leq p < \infty$. Então, existe uma única função $g \in L^q$ tal que*

$$F(f) = \int_X fg d\mu,$$

sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Ao longo deste trabalho faremos uso de vários tipos de convergência no espaço $L^p(m_d)$:

(i) convergência em norma ou convergência forte:

$$f_n \rightarrow f \text{ se } \|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty;$$

(ii) convergência fraca:

$$f_n \rightarrow f \text{ fracamente se } \forall g \in L^q, \int f_n g dm_d \rightarrow \int fg dm_d$$

sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;

(iii) convergência pontual:

$$f_n \rightarrow f \text{ q.t.p. se } f_n(x) \rightarrow f(x)$$

para “quase todos” os $x \in X$.

Em várias situações ao longo deste trabalho vai ser conveniente que os domínios tenham fronteiras com uma certa regularidade, de modo a que a normal exterior unitária exista e esteja bem definida q.t.p. na fronteira.

Definição 1.2.3. Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^d$ tem *fronteira lipschitziana* se existirem constantes positivas a e b , um número finito l de sistemas de coordenadas cartesianas locais $(x_1^{(j)}, \dots, x_d^{(j)})$, $j = 1, \dots, l$ em \mathbb{R}^d e l funções

$$\mathcal{Q}'_j \ni (x_1^{(j)}, \dots, x_{d-1}^{(j)}) \mapsto c_j(x_1^{(j)}, \dots, x_{d-1}^{(j)}) \in \mathbb{R}$$

em que \mathcal{Q}'_j são os cubos $(d-1)$ -dimensionais em \mathbb{R}^{d-1} definidos por

$$|x_i^{(j)}| < a, \quad i = 1, \dots, d-1,$$

de modo a que se tenham as seguintes propriedades:

- (i) Para todo o $x \in \partial U$ existe pelo menos um sistema de coordenadas local no qual x é representável como $x = (x', c_j(x'))$, em que $x' \in \mathcal{Q}'_j$;
- (ii) O conjunto dos pontos da forma $(x', x_d^{(j)})$, $x' \in \mathcal{Q}'_j$, tais que $c_j(x') < x_d^{(j)} < c_j(x') + b$ ou $c_j(x') - b < x_d^{(j)} < c_j(x')$, $j = 1, \dots, l$, estão todos dentro ou todos fora de U , respectivamente. O significado geométrico é que U está localmente “só de um lado” da sua fronteira;
- (iii) As funções $c_j : \mathcal{Q}'_j \rightarrow \mathbb{R}$ são lipschitzianas.

Deste modo, a fronteira de U pode ser “decomposta” nos gráficos de l funções lipschitzianas c_j , de modo a que o domínio U esteja localmente só de um lado de ∂U . Se U tiver fronteira lipschitziana, diz-se que U é um *domínio lipschitziano* ou *conjunto lipschitziano*. Se as funções c_j forem de classe C^1 , U diz-se um *domínio de classe C^1* e analogamente se definem domínios C^k e C^∞ .

Todo o conjunto lipschitziano $U \subset \mathbb{R}^d$ tem uma normal exterior unitária $\nu(x) = (\nu_1(x), \dots, \nu_d(x))$ q.t.p. na fronteira de U (entendendo-se q.t.p. em relação à medida de Lebesgue $(d-1)$ -dimensional em ∂U).

Teorema 1.2.4 (Kakutani-Yosida). *Sejam B um espaço de Banach e $T : B \rightarrow B$ um operador linear limitado. Suponhamos que existe $c > 0$ tal que $\|T^n\| \leq c$, $c \in \mathbb{N}$ e que, para todo o $A \subseteq B$, a sucessão*

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T^j f$$

tem uma subsucessão f_{n_i} fracamente convergente em B . Então, para toda a função f em \overline{A} , f_n converge em norma para uma função $f_0 \in B$ que é um ponto fixo de T .

Teorema 1.2.5 (Rellich). *Se U for um subconjunto limitado de \mathbb{R}^d com fronteira C^1 , então toda a sucessão de elementos de $H_m(U)$ tem uma subsucessão convergente em $H_j(U)$, para $j < m$, sendo $H_n(U) = \{f \in L^2(U) : D^n f \in L^2(U)\}$.*

Teorema 1.2.6 (Ascoli-Arzelà). *Sejam K um subconjunto compacto de \mathbb{R}^d e \mathcal{H} um conjunto limitado no espaço $C(K)$ das funções reais contínuas definidas em K . Se, para todo o $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que, para todo o elemento u de \mathcal{H} e para todos os $x, y \in K$,*

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon,$$

então o conjunto \mathcal{H} é relativamente compacto em $C(K)$.

Teorema 1.2.7 (Green). *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ um aberto limitado de classe C^1 . Então, $\forall f, g \in C^\infty(\bar{U})$,*

$$\int_U f \frac{\partial g}{\partial x_i} dm_d = - \int_U \frac{\partial f}{\partial x_i} g dm_d + \int_{\partial U} (f|_{\partial U})(g|_{\partial U}) \nu_i dm_{d-1}.$$

Capítulo 2

Funções na recta

2.1 Variação limitada

Nesta secção serão apresentados resultados simples sobre funções de variação limitada em dimensão um, uma classe de funções intimamente relacionada com a classe das funções monótonas (ver o Teorema 2.1.6).

Definição 2.1.1. Sejam f uma função real de variável real e $a < b$ dois números reais. Chama-se *variação* de f no intervalo $[a, b]$ a

$$\text{var}_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

Uma função f diz-se de *variação limitada* se existir alguma constante $C > 0$ tal que $\text{var}_a^b(f) \leq C$ quaisquer que sejam $a < b$, definindo-se a *variação* de f como

$$\text{var}(f) = \sup \{ \text{var}_a^b(f) : a < b \in \mathbb{R} \}$$

Proposição 2.1.2. *Seja f uma função de variação limitada em $[a, b]$. Então, f é limitada em $[a, b]$.*

Prova. Como $\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \text{var}_a^b(f)$ tem-se

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \text{var}_a^b(f), \forall x \in [a, b]$$

o que mostra que f é limitada em $[a, b]$. □

Exemplo 2.1.3. A função

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ sen}(1/x) & \text{se } 0 < x \leq 2\pi \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é limitada em $[0, 2\pi]$ mas não tem variação limitada nesse intervalo. Tomemos a sucessão $x_n = 1/(n + \frac{1}{2})\pi$. Então

$$f(x_n) = \frac{(-1)^n}{(n + \frac{1}{2})\pi},$$

tendo-se

$$\text{var}_0^{2\pi}(f) > \sum_{n=1}^N 2/n\pi \rightarrow \infty.$$

Resulta do exemplo anterior que uma função contínua e/ou limitada num intervalo não tem necessariamente variação limitada nesse intervalo.

São de verificação imediata os dois factos seguintes:

1. Se f for uma função monótona no intervalo $[a, b]$, então f tem variação limitada em $[a, b]$, sendo

$$\text{var}_a^b(f) \leq |f(a) - f(b)|;$$

2. Se f for lipschitziana, ou seja, se f verificar a condição

$$\exists M > 0 : |f(x) - f(y)| < M|x - y|, \forall x, y \in [a, b],$$

então f tem variação limitada no intervalo $[a, b]$, tendo-se

$$\text{var}_a^b(f) \leq M|a - b|.$$

Proposição 2.1.4. *Sejam f e g funções de variação limitada em $[a, b]$. Então, as funções $f + g$, $f - g$ e fg também têm variação limitada em $[a, b]$.*

Prova. É simples verificar que $\text{var}_a^b(f \pm g) \leq \text{var}_a^b(f) + \text{var}_a^b(g)$. Seja $\{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$ e sejam

$$A = \sup_{[a,b]} \{|f(x)|\}$$

e

$$B = \sup_{[a,b]} \{|g(x)|\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} & |(fg)(t_i) - (fg)(t_{i-1})| \\ & \leq |f(t_i)g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_i)| + |f(t_{i-1})g(t_i) - f(t_{i-1})g(t_{i-1})| \\ & \leq B|f(t_i) - f(t_{i-1})| + A|g(t_i) - g(t_{i-1})|. \end{aligned}$$

Esta desigualdade implica

$$\text{var}_a^b(fg) \leq B \text{var}_a^b(f) + A \text{var}_a^b(g),$$

sendo a função fg de variação limitada em $[a, b]$. \square

O quociente de funções de variação limitada pode não ser de variação limitada uma vez que a inversa de uma função de variação limitada não é necessariamente de variação limitada. Por exemplo, se $f(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow x_0$, então a função $1/f$ não é limitada em nenhum intervalo que contenha x_0 e, conseqüentemente, a função $1/f$ não tem variação limitada num tal intervalo. No entanto, excluindo quocientes em que a função do denominador tome valores muito próximos de zero, a proposição anterior pode ser estendida a quocientes de funções de variação limitada.

Proposição 2.1.5. *Seja f uma função de variação limitada no intervalo $[a, b]$, para a qual existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \geq c, \forall x \in [a, b]$. Então, a função $1/f$ tem variação limitada em $[a, b]$ e*

$$\text{var}_a^b(1/f) \leq 1/c^2 \text{var}_a^b(f).$$

Prova. Seja $\{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(t_n)} - \frac{1}{f(t_{n-1})} \right| &= \left| \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{f(t_n)f(t_{n-1})} \right| \\ &\leq \frac{|f(t_n) - f(t_{n-1})|}{c^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{f(t_i)} - \frac{1}{f(t_{i-1})} \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|}{c^2}$$

e, por passagem ao supremo, obtém-se

$$\text{var}_a^b(1/f) \leq 1/c^2 \text{var}_a^b(f).$$

\square

O resultado que se segue dá uma importante caracterização das funções de variação limitada na recta.

Teorema 2.1.6. *Seja f uma função definida no intervalo $[a, b]$. Então, f tem variação limitada sse pode ser escrita como diferença de duas funções crescentes.*

Prova. Começamos por observar que, se f se escrever como a diferença de duas funções crescentes, então f tem variação limitada. Seja f com variação limitada em $[a, b]$. Sejam

$$p(x) = 1/2 [\text{var}_a^x(f) + f(x)]$$

e

$$q(x) = 1/2 [\text{var}_a^x(f) - f(x)].$$

As funções p e q são monótonas crescentes e $f = p - q$. \square

Teorema 2.1.7. *Se $f \in C^1([a, b])$, então f tem variação limitada em $[a, b]$ e*

$$\text{var}_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Prova. Como f tem derivada contínua em $[a, b]$, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para garantir que $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$, sendo $a < x < z < y < b$. Consequentemente, f é lipschitziana e tem variação limitada em $[a, b]$. Seja $\{t_0, \dots, t_n\}$ uma partição de $[a, b]$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(x) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(x)| dx = \int_a^b |f'(x)| dx. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\text{var}_a^b(f) \leq \int_a^b |f'(x)| dx.$$

Para provar a desigualdade recíproca, tome-se $E =]a, b[$ e sejam P o subconjunto de $]a, b[$ em que $f' \geq 0$ e N o subconjunto de $]a, b[$ em que $f' < 0$. Então,

$$\int_a^b |f'(x)| dx = \int_P f'(x) dx - \int_N f'(x) dx.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe $\delta > 0$ tal que, para todo o subconjunto Z de $[a, b]$ com medida inferior a δ , se tem

$$\int_Z |f'(x)| dx < \varepsilon.$$

Sejam $f(P)$ e $f(N)$ conjuntos fechados contendo P e N respectivamente, tais que

$$m(P - f(P)) < \delta \text{ e } m(N - f(N)) < \delta.$$

Então,

$$\int_a^b |f'(x)| dx < \int_{f(P)} f'(x) dx - \int_{f(N)} f'(x) dx + 2\varepsilon.$$

Por um conhecido teorema de separação provado em [20, Secção 2.4], existem conjuntos abertos Δ_P e Δ_N contidos em $]a, b[$ tais que

$$\Delta_P \supset f(P), \Delta_N \supset f(N), \Delta_P \cap \Delta_N = \emptyset.$$

Além disso, existem conjuntos abertos limitados A_P e A_N contendo $f(P)$ e $f(N)$ respectivamente, tais que

$$m(A_P - f(P)) < \delta \text{ e } m(A_N - f(N)) < \delta.$$

Sejam

$$G_P = A_P \cap \Delta_P \text{ e } G_N = A_N \cap \Delta_N.$$

Os abertos G_P e G_N estão contidos em $]a, b[$, são disjuntos e contêm $f(P)$ e $f(N)$ respectivamente. Além disso, $m(G_P - f(P)) < \delta$ e $m(G_N - f(N)) < \delta$. Consequentemente,

$$\int_a^b |f'(x)|dx < \int_{G_P} f'(x)dx - \int_{G_N} f'(x)dx + 4\varepsilon.$$

O conjunto G_P é uma união de intervalos e, tomando um número suficientemente grande desses intervalos, obtém-se um conjunto B_P cuja medida difere da de G_P de uma quantidade inferior a δ . Tem-se então,

$$\int_{G_P} f'(x)dx - \int_{B_P} f'(x)dx < \delta.$$

Seja $B_P = \bigcup_{i=1}^n]\lambda_i, \mu_i[$. Então,

$$\int_{B_P} f'(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{\lambda_i}^{\mu_i} f'(x)dx = \sum_{i=1}^n (f(\mu_i) - f(\lambda_i)).$$

Consequentemente,

$$\int_{G_P} f'(x)dx < \sum_{i=1}^n (f(\mu_i) - f(\lambda_i)) + \varepsilon.$$

Usando um raciocínio análogo pode encontrar-se um número finito m de subintervalos $]\sigma_i, \tau_i[$ de G_N , tais que

$$\int_{G_N} f'(x)dx > \sum_{i=1}^m (f(\tau_i) - f(\sigma_i)) - \varepsilon.$$

Como consequência das desigualdades deduzidas, tem-se

$$\int_a^b |f'(x)|dx < \sum_{i=1}^n (f(\mu_i) - f(\lambda_i)) - \sum_{i=1}^m (f(\tau_i) - f(\sigma_i)) + 6\varepsilon$$

e

$$\int_a^b |f'(x)|dx < \sum_{i=1}^n |f(\mu_i) - f(\lambda_i)| + \sum_{i=1}^m |f(\tau_i) - f(\sigma_i)| + 6\varepsilon.$$

Como os intervalos $]\lambda_i, \mu_i[$ e $]\sigma_i, \tau_i[$ são disjuntos dois a dois,

$$\sum_{i=1}^n |f(\mu_i) - f(\lambda_i)| + \sum_{i=1}^m |f(\tau_i) - f(\sigma_i)| \leq \text{var}_a^b(f).$$

Logo,

$$\int_a^b |f'(x)| dx < \text{var}_a^b(f) + 6\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, está provada a desigualdade. \square

2.2 Variação essencial

Modificando o valor de uma função, mesmo que só num ponto, a sua variação pode ser afectada. A definição de função de variação limitada atrás apresentada, bem conhecida e muito útil quando se estudam funções reais de variável real, torna-se algo desajustada se se pensar que muitas aplicações envolvem sobretudo conceitos que se mantêm inalterados quando se alteram valores da função em estudo em conjuntos de medida nula. Estas limitações da definição “clássica” de variação limitada são ultrapassadas introduzindo uma nova definição de variação em dimensão 1 – variação essencial – que não é afectada por mudanças no valor de f em conjuntos de medida nula e cuja generalização a dimensão superior é equivalente à definição que será introduzida na Secção 3.1.

A noção de variação essencial depende de outro conceito, o de continuidade aproximada. Na definição habitual de continuidade de uma função f num ponto x_0 , tem-se $\forall \delta > 0, d(x_0, X) \geq \delta$, sendo $X = f^{-1}\{y : |y - f(x_0)| > \delta\}$. Para se ter continuidade aproximada esta condição é enfraquecida podendo “alguns” pontos de X estar a uma distância de x_0 inferior a δ ou, mais rigorosamente, a continuidade aproximada não é afectada por mudanças nos valores de f em conjuntos de medida nula.

Definição 2.2.1. Uma função f é *aproximadamente contínua* num ponto x_0 , se qualquer que seja $\delta > 0$, o conjunto $X = f^{-1}\{y : |y - f(x_0)| > \delta\}$ tiver densidade igual a zero em x_0 ou seja, se

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m(X \cap \{x : |x - x_0| < r\})}{m(\{x : |x - x_0| < r\})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m(X \cap B_t(x_0))}{m(B_t(x_0))} = 0$$

Definição 2.2.2. Seja f uma função real integrável em $[a, b]$. A *variação essencial* de f no intervalo $[a, b]$ é

$$\text{varess}_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| : a < t_0 < \dots < t_n < b \right\}$$

sendo cada t_i um ponto de continuidade aproximada de f . Uma função f diz-se de *variação essencial limitada* se existir uma constante $C > 0$ tal que $\text{varess}_a^b(f) \leq C$ quaisquer que sejam $a < b$, definindo-se *variação essencial* de f como

$$\text{varess}(f) = \sup\{\text{varess}_a^b(f) : a < b \in \mathbb{R}\}$$

Resulta imediatamente das definições que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada, então f tem variação essencial limitada. No entanto, a recíproca não é verdadeira:

Exemplo 2.2.3. A função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

tem variação essencial limitada mas não tem variação limitada. O mesmo se passa com a função

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{se } x = 1/n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

que, embora tenha variação infinita no sentido clássico, é a função identicamente nula q.t.p., tendo variação essencial igual a zero.

Se duas funções f e g estiverem na mesma classe de equivalência de L^1 no intervalo $[a, b]$, então $\text{varess}_a^b(f) = \text{varess}_a^b(g)$. No contexto da variação essencial não faz sentido falar em funções limitadas no sentido clássico da existência de uma constante positiva K tal que $|f(x)| \leq K$ para todo o x , por neste novo contexto, os conceitos não terem que ser válidos para “todos os x ”. A variação essencial é uma noção válida q.t.p., pelo que uma função pode tomar valores infinitos em alguns pontos e, mesmo assim, ser limitada num sentido que passaremos a explicar.

Definição 2.2.4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Chama-se *supremo essencial* de f em $[a, b]$ ao número

$$\inf\{\alpha : f(x) \leq \alpha \text{ q.t.p. em } [a, b]\}$$

e denota-se $\text{supess}_a^b(f)$.

Definição 2.2.5. Uma função f diz-se *essencialmente limitada* se

$$\text{supess}_a^b |f| < \infty, \forall a < b \in \mathbb{R}.$$

É trivial observar que função essencialmente limitada não implica função com variação essencial limitada (função limitada já não implicava variação limitada!). Podemos, no entanto, provar um resultado análogo à Proposição 2.1.2 para o caso “essencial”.

Proposição 2.2.6. *Seja f uma função de variação essencial limitada em $[a, b]$. Então, f é essencialmente limitada em $[a, b]$*

Prova. Este resultado é análogo a 2.1.2. As conclusões que aí se tiraram para todos os pontos de um intervalo $[a, b]$ continuam válidas se se excluïrem alguns (que formam um conjunto de medida nula). \square

Proposição 2.2.7. *Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções convergente para a função f em $L^1([a, b])$. Se $\text{var}_a^b(f_n) \leq L, \forall n \in \mathbb{N}$, então*

$$\text{var}_a^b(f) \leq L.$$

Prova. Seja $\{t_0, \dots, t_k\}$ uma partição arbitrária do intervalo $[a, b]$.

$$\sum_{i=1}^k |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq \lim_n \sum_{i=1}^k |f_n(t_i) - f_n(t_{i-1})|.$$

Por passagem ao supremo, obtém-se

$$\text{var}_a^b(f) \leq \lim \text{var}_a^b(f_n) \leq L$$

\square

Proposição 2.2.8. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com variação essencial limitada tal que $m\{x : f(x) \neq 0\} > 0$. Então, o conjunto*

$$\text{spt } f = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$$

tem interior não vazio.

Prova. Sendo f contínua excepto eventualmente num conjunto com medida de Lebesgue nula, pode escolher-se $x_0 \in [a, b]$ tal que $|f(x_0)| = p \neq 0$ e f é contínua em x_0 . Como $p \neq 0$, existe uma vizinhança V de $f(x_0)$ tal que 0 não pertence a V . Sendo f contínua em x_0 , o conjunto $f^{-1}(V)$ é aberto, ou seja, $|f(x)| \neq 0$ para x pertencente a uma certa vizinhança de x_0 . Portanto, o suporte de f contém um conjunto aberto não vazio. \square

No teorema que se segue são apresentadas algumas definições equivalentes de variação essencial limitada.

Teorema 2.2.9. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. São equivalentes:*

1. f tem variação essencial limitada;

$$2. \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f g' dx : g \in C_0^1(\mathbb{R}), |g| \leq 1 \right\} < \infty;$$

3. f pode ser aproximada em L^1 por funções de classe C^∞ com variação limitada;

4. a derivada de f no sentido das distribuições é uma medida finita.

Prova. Este resultado é um caso particular do Teorema 3.2.9, cuja demonstração é feita no Capítulo 2. \square

Capítulo 3

Generalização para dimensão superior

Neste capítulo é introduzida a noção de função de variação limitada em dimensão superior a 1. Começamos por definir variação essencial limitada e dar outras definições de função de variação limitada, provando a sua equivalência à definição usada. São generalizados a dimensão superior alguns resultados interessantes acerca da variação de funções em dimensão 1 e mencionados outros que perdem a validade quando se aumenta a dimensão. Provaremos resultados de aproximação e semicontinuidade inferior para funções de variação limitada. O espaço das funções de variação limitada pode ser munido de uma estrutura de espaço de Banach, o que faremos, provando de seguida algumas propriedades desse espaço, nomeadamente resultados de compacidade e possibilidade de mergulho num espaço L^p , em que p depende apenas da dimensão d .

3.1 Variação essencial

O conceito tradicional de variação em dimensão 1 faz uso da boa ordenação dos números reais, característica que se perde na passagem a dimensão superior, pelo que essa noção tradicional de variação não tem correspondência em dimensão superior. Vamos estender o nosso estudo a dimensão superior ultrapassando essa limitação:

Seja $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Então, para $k = 1, \dots, d$ faça-se

$$\hat{x}_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}.$$

Sendo $t \in \mathbb{R}$ e escrevendo

$$f_k(\hat{x}_k, t) \equiv f(\dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots)$$

denota-se por

$$\text{varess}(f_k)$$

a variação essencial de f_k como função da variável $t \in [a, b]$ para cada \hat{x}_k fixado.

Define-se supremo essencial de uma função definida em \mathbb{R}^d e função essencialmente limitada de modo análogo ao que foi feito para o caso unidimensional em 2.2.4 e 2.2.5, respectivamente.

Definição 3.1.1. Uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tem *variação essencial limitada* se, para cada $k = 1, 2, \dots, d$, a variação essencial de

$$f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_d)$$

como função de t for integrável em ordem a \hat{x}_k em \mathbb{R}^{d-1} .

Esta é a generalização natural a dimensão superior da definição de variação essencial (limitada) dada no capítulo anterior. Como veremos, esta noção de variação é equivalente à definição de variação que apresentaremos na secção seguinte.

Exemplo 3.1.2. Seja f a função definida no quadrado unitário $S =]0, 1[\times]0, 1[\subseteq \mathbb{R}^2$ com valores em \mathbb{R} dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

É óbvio que f não é limitada em S , mas f tem variação essencial limitada. Fixando y , f é uma função decrescente de x , logo

$$\text{var}_x(f) = f(0) - f(1) = -\frac{1}{1 + \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{y}},$$

tendo-se

$$\int_0^1 \text{var}_x(f) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{1 + \sqrt{y}} \right) dy.$$

Primitivando por substituição, obtém-se

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{1 + \sqrt{y}} \right) dy = [2 \log(1 + \sqrt{y})]_0^1 = 2 \log 2 < \infty.$$

Analogamente se prova que $\int_0^1 \text{var}_y(f)$ é finito. Consequentemente, f tem variação essencial limitada.

É facilmente dedutível do exemplo anterior que em dimensão maior que 1, ao contrário do que se passa em dimensão 1, o produto de duas funções de variação essencial limitada não tem necessariamente variação essencial limitada: f tem variação essencial limitada mas

$$f^2(x, y) = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

não tem. Fixando y obtém-se uma função decrescente de x , pelo que

$$\text{var}_x(f^2) = f^2(0) - f^2(1) = \frac{1}{y} - \frac{1}{(1 + \sqrt{y})^2}$$

e

$$\int_0^1 \text{var}_x(f^2) dy = \int_0^1 \frac{1}{y} - \frac{1}{(1 + \sqrt{y})^2} dy = \infty,$$

o que basta para concluir que a função f^2 não tem variação essencial limitada.

Exemplo 3.1.3. Seja $\alpha > 0$ e seja $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^{-\alpha} & \text{se } 0 < \|x\| \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Para cada $1 \leq i \leq d$ e $\hat{x}_k = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d) \neq 0$ a função $f_k(\hat{x}_{k,t})$ é monótona crescente em $] -\infty, 0[$ e monótona decrescente no intervalo $[0, +\infty[$. Consequentemente, quaisquer que sejam $a < -1 < 1 < b$,

$$\text{varess}_a^b(f_k(\hat{x}_{k,t})) = 2f_k(\hat{x}_{k,0}) = 2\|\hat{x}_k\|^{-\alpha}.$$

Se $B = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : \|x\| \leq 1\}$ for a bola unitária fechada de \mathbb{R}^{d-1} , então

$$\int_B 2\|\hat{x}_k\|^{-\alpha} dm_{d-1}(\hat{x}_k) < \infty$$

se e somente se $\alpha < d - 1$.

Em dimensão superior, ao contrário do que se passa em dimensão 1, uma função de variação essencial limitada não tem que ser essencialmente limitada, como ilustram os dois exemplos anteriores.

3.2 Variação limitada

Dado um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^d$, denotamos $C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ o conjunto das funções de classe C^1 definidas em U com valores em \mathbb{R}^d que têm suporte compacto,

$$\|g\|_0 = \sup_{x \in U} |g(x)| \quad \text{e} \quad \text{div } g = \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_i}{\partial x_i}.$$

Definição 3.2.1. Sejam $U \subset \mathbb{R}^d$ um aberto e $f \in L^1(U)$. Define-se *variação* de f em U como

$$\text{var}_U(f) = \sup \left\{ \int_U f \text{div } g \, dm_d : g = (g_1, \dots, g_d) \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d) \quad \text{e} \quad \|g\|_0 \leq 1 \right\}.$$

Diz-se que f tem *variação limitada* em U se $\text{var}_U(f) < \infty$.

O resultado que apresentamos a seguir, constitui a principal motivação para que adotemos esta definição de variação de uma função, generalizado o Teorema 2.1.7 para dimensão mais alta.

$Df = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d})$ denotará o gradiente de f .

Teorema 3.2.2. *Se f é uma função de classe C^1 em \mathbb{R}^d , então f tem variação limitada e*

$$\text{var}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} |Df| dm_d.$$

Prova. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Para toda a função $g \in C_0^1(U; \mathbb{R}^d)$ tem-se (integrando por partes):

$$\int f \text{div}(g) dm_d = \int f \sum_{i=1}^d \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dm_d = \sum_{i=1}^d \int f \frac{\partial g_i}{\partial x_i} dm_d.$$

Como $g \equiv 0$ fora de um compacto e $\|g\|_0 = 1$, deduzimos que

$$- \int \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i \right| dm_d \leq \int \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i} \leq \int |Df| dm_d.$$

Por passagem ao supremo sobre tais funções g , obtém-se a igualdade pretendida. \square

Teorema 3.2.3. *Seja f uma função de variação limitada em $U \subseteq \mathbb{R}^d$. Então, existe uma medida finita μ em U e uma função μ -mensurável $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que*

1. $\|\sigma(x)\| = 1$ μ -q.t.p.;
2. $\int_U f \text{div} g dm_d = - \int_U g \cdot \sigma d\mu, \forall g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$.

Prova. Defina-se um funcional linear

$$L : C_0^1(U, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$L(g) = - \int_U f \text{div} g dm_d, \forall g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d).$$

Como f tem variação limitada, tem-se

$$C(V) \equiv \sup \{L(g) : g \in C_0^1(V, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1\} < \infty,$$

para cada aberto V tal que $\bar{V} \subset U$. Consequentemente,

$$|L(g)| \leq C(V) \text{supess}(g), \forall g \in C_0^1(V, \mathbb{R}^d).$$

Fixemos um compacto $K \subset U$ e escolhamos um aberto V tal que $K \subset V$ e $\bar{V} \subset U$. Para cada $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ com suporte contido em K , escolhamos $g_n \in C_0^1(V, \mathbb{R}^d)$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $g_n \rightarrow g$ uniformemente em V . Defina-se

$$\bar{L}(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(g_n).$$

De acordo com a majoração feita para $L(g)$, este limite existe e é independente da escolha da sucessão g_n convergente para g . Então, L tem uma extensão única

$$\bar{L} : C_0(U, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\sup \{ \bar{L}(g) : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \text{ e } \text{spt}(g) \subset K \} < \infty$$

para todo o subconjunto compacto K de U . Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma única medida finita μ que verifica 1 e 2. \square

De seguida é apresentado um teorema importante sobre funções de variação limitada, recorrentemente utilizado nas demonstrações subseqüentes: a semicontinuidade inferior.

Teorema 3.2.4. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto e $(f_n)_n$ uma sucessão de funções de variação limitada, convergente para f em $L^1(U)$. Então,*

$$\text{var}_U(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(f_n).$$

Prova. Seja $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ tal que $\|g\|_0 \leq 1$. Então,

$$\int f \text{div } g \, dm_d = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{div } g \, dm_d = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \text{div } g \, dm_d \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(f_n)$$

Passando ao supremo sobre as funções g obtém-se a desigualdade pretendida. \square

O exemplo seguinte mostra que não se tem sempre a igualdade no teorema anterior.

Exemplo 3.2.5. Sejam $U =]0, 2\pi[$ e $f_n(x) = 1/n \text{sen}(nx)$ para $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$. Cada f_n está em $L^1(U)$ (pois cada f_n é contínua) e, além disso,

$$\int_U |f_n| dx = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |\text{sen}(nx)| dx \leq \frac{4\pi}{n} \rightarrow 0.$$

Consequentemente, $f_n \rightarrow 0$ em $L^1(U)$.

Por outro lado, como as funções f_n são de classe C^∞ ,

$$\text{var}_U(f_n) = \int_0^{2\pi} |f_n'(x)| dx = \int_0^{2\pi} |\cos(nx)| dx = 4n \left[\frac{\text{sen}(nx)}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2n}} = 4 \text{sen}\left(n \frac{\pi}{2n}\right) = 4.$$

Embora, em geral, não se tenha a igualdade no Teorema 3.2.4, há casos em que ela pode ser provada.

Proposição 3.2.6. *Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções de variação limitada em $U \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que*

$$\lim \|f_n - f\|_1 = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(f_n) = \text{var}_U(f).$$

Então, para todo o $V \subseteq U$, tem-se

$$\text{var}_{\overline{V} \cap U}(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{var}_{\overline{V} \cap U}(f_n).$$

Prova. Seja $W = U \setminus \overline{V}$ (tal W é aberto). Pelo Teorema 3.2.4, tem-se

$$\text{var}_V(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}_V(f_n)$$

e

$$\text{var}_W(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}_W(f_n).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \text{var}_{\overline{V} \cap U}(f) + \text{var}_W(f) &= \text{var}_U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(f_n) \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{var}_{\overline{V} \cap U}(f_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}_W(f_n) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{var}_{\overline{V} \cap U}(f_n) + \text{var}_W(f). \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{var}_{\overline{V} \cap U}(f) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{var}_{\overline{V} \cap U}(f_n).$$

□

Em particular, se $\text{var}_{\partial V \cap U}(f) = 0$, então $\text{var}_V(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_V(f_n)$.

Proposição 3.2.7. *Seja f uma função de variação limitada em U e seja A um subconjunto denso de U tal que*

$$\text{var}_{\partial A}(f) = 0.$$

Então, se f_ε forem as funções regularizantes de f (ver Apêndice A.1), tem-se

$$\text{var}_A(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon| dm_d.$$

Prova. Como $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^1(U)$, então

$$\text{var}_A(f) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon| dm_d$$

ficando por provar apenas a desigualdade recíproca. Suponhamos que $g \in C_0^1(A, \mathbb{R}^d)$ e que $\|g\|_0 \leq 1$. Então, pelas propriedades das funções regularizantes descritas (ver Apêndice A.1),

$$\begin{aligned} \int_U f_\varepsilon \text{div } g dm_d &= \int_U f(\text{div } g)_\varepsilon dm_d \\ &= \int_U f \text{div } g_\varepsilon dm_d. \end{aligned}$$

Como $\|g\|_0 \leq 1$ e $\text{spt } g \subseteq A$ implicam, respectivamente, que $\|g_\varepsilon\|_0 \leq 1$ e $\text{spt } g_\varepsilon \subseteq A_\varepsilon = \{x : d(x, A) \leq \varepsilon\}$, então

$$\int_U f_\varepsilon \text{div } g dm_d \leq \text{var}_{A_\varepsilon}(f).$$

Passando ao supremo sobre as funções g , vemos que

$$\int_A |Df_\varepsilon| dm_d \leq \text{var}_{A_\varepsilon}(f).$$

Conseqüentemente,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon| dm_d \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{var}_{A_\varepsilon}(f) = \text{var}_{\bar{A}}(f)$$

e, pelo Teorema 3.2.4,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_A |Df_\varepsilon| dm_d \leq \text{var}_A(f).$$

□

De seguida é apresentado outro teorema recorrentemente utilizado nas demonstrações subsequentes: a aproximação por funções C^∞ .

Teorema 3.2.8. *Dada uma função f de variação limitada em $U \subset \mathbb{R}^d$, existe uma sucessão $(f_n)_n$ em $C^\infty(U)$, tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_U |f_n - f| dm_d = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(f_n) = \text{var}_U(f).$$

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Existe um número m tal que, se

$$U_k = \left\{ x \in U : d(x, \partial U) > \frac{1}{m+k} \right\}, k = 0, 1, 2, \dots$$

então,

$$\text{var}_{U \setminus U_0}(f) < \varepsilon,$$

pois f tem variação limitada em U .

Consideremos os conjuntos $A_i, i = 1, 2, \dots$ definidos por

$$\begin{cases} A_1 = U_2 \\ A_i = U_{i+1} \setminus \bar{U}_{i-1} \quad \text{se } i \neq 1 \end{cases}$$

e seja χ_i uma partição da unidade para a cobertura $\{A_i\}$, isto é

$$\chi_i \in C_0^\infty(A_i), 0 \leq \chi_i \leq 1, \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i = 1.$$

Seja η uma função regularizante simétrica positiva. Para cada i pode escolher-se $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$\text{spt}[\eta_{\varepsilon_i} * (f\chi_i)] \subset U_{i+2} \setminus \bar{U}_{i-2} \quad (3.1)$$

($U_{-1} = \emptyset$)

$$\int |\eta_{\varepsilon_i} * (f\chi_i) - f\chi_i| dm_d < \varepsilon 2^{-i} \quad (3.2)$$

$$\int |\eta_{\varepsilon_i} * (fD\chi_i) - fD\chi_i| dm_d < \varepsilon 2^{-i} \quad (3.3)$$

Por fim, seja

$$f_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (f\chi_i).$$

De (3.1) conclui-se que cada f_ε é de classe C^∞ (pois o somatório que define f_ε é localmente finito). Além disso, como $f = \sum_{i=1}^{\infty} f\chi_i$, tem-se, por (3.2),

$$\begin{aligned} \int_U |f_\varepsilon - f| dm_d &= \int_U \left| \sum_{i=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_i} * (f\chi_i) - \sum_{i=1}^{\infty} f\chi_i \right| dm_d \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_U |\eta_{\varepsilon_i} * (f\chi_i) - f\chi_i| dm_d < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$, $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^1(U)$.

Pelo Teorema 3.2.4, tem-se

$$\text{var}_U(f) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{var}_U(f_\varepsilon). \quad (3.4)$$

Seja $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ tal que $\|g\|_0 \leq 1$. Tem-se

$$\int f_\varepsilon \text{div} g dm_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int \eta_{\varepsilon_i} * (f \chi_i) \text{div} g dm_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int f \chi_i \text{div}(\eta_{\varepsilon_i} * g) dm_d$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \int f_\varepsilon \text{div} g dm_d &= \int f \text{div}(\chi_1(\eta_{\varepsilon_1} * g)) dm_d + \sum_{i=2}^{\infty} \int f \text{div}(\chi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) dm_d - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, \eta_{\varepsilon_i} * (f D\chi_i) - f D\chi_i \rangle. \end{aligned}$$

Note-se que $\sum_{i=1}^{\infty} D\chi_i = 0$. Como $|\chi_i \eta_{\varepsilon_i} * g| \leq 1$, temos que

$$\int f \text{div}(\chi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) dm_d \leq \text{var}_U(f),$$

donde, tendo em conta que a intersecção de mais de três dos conjuntos A_i é vazia, tem-se

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int f \text{div}(\chi_i \eta_{\varepsilon_i} * g) dm_d \leq 3 \text{var}_{U \setminus U_0}(f) < 3\varepsilon.$$

De (3.3) deduz-se que

$$\int f_\varepsilon \text{div} g dm_d \leq \text{var}_U(f) + 4\varepsilon.$$

Passando ao supremo sobre g em ambos os membros da desigualdade e recordando a definição de variação de uma função, chega-se a

$$\text{var}_U(f_\varepsilon) \leq \text{var}_U(f) + 4\varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ e tendo em conta a desigualdade (3.4) conclui-se que $\text{var}_U(f_\varepsilon) \rightarrow \text{var}_U(f)$ \square

No teorema seguinte apresentam-se formulações equivalentes para a definição de variação limitada introduzida nesta secção.

Teorema 3.2.9. *Seja f uma função em $L_0^1(\mathbb{R}^d)$. São equivalentes:*

1. f tem variação limitada;
2. f tem variação essencial limitada;
3. f pode ser aproximada em L^1 por funções de classe C^∞ com variação uniformemente limitada;
4. a derivada de f no sentido das distribuições é uma medida finita.

Prova. Suponhamos que f tem variação limitada. Seja $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$ um compacto e seja

$$C = \{x = (x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_d) : a \leq t \leq b, \hat{x}_k \in K\}.$$

Se $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$ for uma função regularizante de f , então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C |f_\varepsilon - f| dm_d = 0$$

e

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C |Df_\varepsilon| dm_d < \infty.$$

Para quase todos os $\hat{x}_k \in K$, tem-se

$$(f_k)_\varepsilon \rightarrow f_k \text{ em } L^1$$

sendo $(f_k)_\varepsilon(\hat{x}_k, t) = f_\varepsilon(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_d)$. Consequentemente,

$$\text{varess}_a^b(f_k) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{varess}(f_k)_\varepsilon \text{ para quase todos os } \hat{x}_k \in K.$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \int_K \text{varess}_a^b f_k d\hat{x}_k &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K \text{varess}_a^b (f_k)_\varepsilon d\hat{x}_k \\ &= \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C \left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial t} \right| dm_d \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_C |Df_\varepsilon| dm_d \leq \infty, \end{aligned}$$

logo, f tem variação essencial limitada.

Suponhamos agora que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ verifica

$$\int_K \text{varess}_a^b f_k d\hat{x}_k < \infty,$$

para $K \subset \mathbb{R}^{d-1}$ compacto, $a < b$ e $k = 1, \dots, d$. Sendo $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $|g| \leq 1$ escolham-se $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\text{spt}(g) \subset \{x : a < t < b\}.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja f_ε a família regularizante canônica de f . Escolham-se $\{t_i\}$ tais que $a + \varepsilon < t_1 < \dots < t_m < b - \varepsilon$. Como f é aproximadamente contínua em $t_i - s$ para quase todos os s , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m |f_\varepsilon(t_{i+1}) - f_\varepsilon(t_i)| &= \sum_{i=1}^m \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(s) (f(t_{i+1} - s) - f(t_i - s)) ds \right| \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta_\varepsilon(s) \sum_{i=1}^m |f(t_{i+1} - s) - f(t_i - s)| ds \leq \text{varess}_a^b(f). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |(f_\varepsilon)'| dx = \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |f_\varepsilon(t_{i+1}) - f_\varepsilon(t_i)| \right\} \leq \text{varess}_a^b(f).$$

Logo,

$$\int_a^b f_\varepsilon \frac{\partial g}{\partial t} dx = \int_a^b (f_\varepsilon)' g dx \leq \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} |(f_\varepsilon)'| dx \leq \text{varess}_a^b(f)$$

para ε suficientemente pequeno. Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, conclui-se que

$$\int_a^b f \frac{\partial g}{\partial t} dx \leq \text{varess}_a^b(f).$$

Se

$$K = \{ \hat{x}_k \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots) \in \text{spt}(g), t \in \mathbb{R} \}$$

tem-se

$$\int f \frac{\partial g}{\partial t} dm_d \leq \int_K \text{varess}_a^b f_k d\hat{x}_k < \infty.$$

Como esta majoração vale para $k = 1, \dots, d$, fica provado que f tem variação limitada em \mathbb{R}^d . Suponhamos agora que f tem variação limitada. Então, pelo Teorema 3.2.8, existe uma sucessão $(f_n)_n$ de funções C^∞ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| dm_d = 0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(f_n) = \text{var}(f),$$

ficando provada a existência de uma sucessão de funções C^∞ com variação uniformemente limitada que aproxima f em L^1 .

Para provar a implicação recíproca, basta aplicar o Teorema 3.2.4, provando-se que

$$\text{var}(f) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}(f_n) < \infty$$

e, conseqüentemente, que f tem variação limitada.

A equivalência entre os pontos 2. e 4. do enunciado é, num sentido ($2 \Rightarrow 4$) conseqüência do Teorema 3.2.3. Reciprocamente, suponhamos que existe uma medida finita μ (a derivada distribucional de f) tal que, se $g \in C_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$,

$$\int \operatorname{div} g \, dm_d = \int g \cdot d\mu.$$

Então, $\forall g \in C_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tal que $\|g\|_0 \leq 1$,

$$\int \operatorname{div} g \, dm_d = \int g \cdot d\mu \leq \mu(\mathbb{R}^d) < \infty.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f \operatorname{div}(g) dm_d : g = (g_1, \dots, g_d) \in C_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ e } \|g\|_0 \leq 1 \right\} \\ \leq \mu(\mathbb{R}^d) < \infty. \end{aligned}$$

□

Temos assim que uma função tem variação essencial limitada se e somente se tiver variação limitada no sentido da Definição 3.2.1. No entanto, o valor das duas variações não é forçosamente igual, como ilustra o exemplo que se segue.

Exemplo 3.2.10. Calculemos a variação essencial da característica do quadrado unitário $S = [0, 1] \times [0, 1]$. A função característica de S é

$$\chi_S(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Fixando y , obtém-se a função de x ,

$$\chi_S^*(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

cuja variação (em \mathbb{R}) é igual a 2. Logo,

$$\operatorname{vare}_{\mathbb{R}^2} \chi_S(x, y) = \int_0^1 2 \, dy = 2.$$

Quanto à variação de χ_S , pelo que se prova na Proposição 4.1.2, tem-se

$$\operatorname{var}(\chi_S) = m_1(\partial S) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$$

Outra propriedade das funções de variação limitada que se perde na passagem para dimensão superior é o facto de o suporte

$$\text{spt}(f) = \{x : f(x) \neq 0\}$$

ter interior não vazio, como mostra o exemplo que se segue.

Exemplo 3.2.11. Seja $(x_n)_n$ a sucessão de todos os pontos racionais no quadrado unitário $S = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$ e consideremos

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} B(x_n, \frac{\varepsilon}{2^n}),$$

sendo $B(x, \delta)$ a bola de centro x e raio δ . Temos que

$$m_2(E) = \frac{\pi\varepsilon^2}{2^n} \leq \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2^{2n}} = \frac{4\pi\varepsilon^2}{3}.$$

Podemos escolher ε tão pequeno que $m_2(E) < 1/2$. Seja $F = S - E$ e consideremos $f = \chi_F$, a função característica de F . Como $\text{var}(\chi_F)$ é o perímetro de F (ver Capítulo 4.),

$$\text{var}_{\mathbb{R}^2}(f) = \text{per}(F) \leq 2\pi\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4\pi\varepsilon.$$

Consequentemente, f tem variação limitada mas $\text{spt } f = \{x : \chi_F > 0\}$ tem interior vazio.

3.3 O espaço VL

Ao longo desta secção denotaremos por $VL(U)$ o espaço das funções $f \in L^1(U)$ de variação limitada, sendo U um subconjunto de \mathbb{R}^d . Quando nada for especificado em contrário, $\text{var}(f)$ significa $\text{var}_{\mathbb{R}^d}(f)$.

Resulta facilmente da definição de variação limitada que $VL(U)$ tem uma estrutura de espaço vectorial sobre o corpo \mathbb{R} . Vamos de seguida muní-lo de uma norma sob a qual ele é completo.

Definição 3.3.1. Dada $f \in VL(U)$ definimos

$$\|f\|_{VL} = \|f\|_1 + \text{var}_U(f).$$

Proposição 3.3.2. $(VL(U), \|\cdot\|_{VL})$ é um espaço de Banach.

Prova. Seja f uma função de variação limitada em U .

$$\|f\|_{VL} = 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = \text{var}(f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

É trivial verificar que $\|\alpha f\|_{VL} = |\alpha| \|f\|_{VL}$ para qualquer α real e que $\|f + g\|_{VL} \leq \|f\|_{VL} + \|g\|_{VL}$, provando-se que $\|\cdot\|_{VL}$ é uma norma.

Para provar a completude, tome-se uma sucessão de Cauchy (f_n) pertencente a $VL(U)$. Por definição de $\|\cdot\|_{VL}$, a sucessão (f_n) também é de Cauchy no espaço métrico completo $L^1(U)$. Então, existe em $L^1(U)$ uma função f tal que $f_n \rightarrow f$ na norma de L^1 . Sendo (f_n) uma sucessão de Cauchy em $VL(U)$, a sucessão $\|f_n\|_{VL}$ é limitada. Consequentemente, $\text{var}(f_n)$ é limitada e, pelo Teorema 3.2.4, tem-se que $f \in VL(U)$. Como $f_n \rightarrow f$ em $L^1(U)$, falta apenas provar que $\text{var}(f_n - f) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ para se concluir que $f_n \rightarrow f$ em $VL(U)$.

Seja ε positivo. Então, existe um inteiro L tal que

$$m, n \geq L \Rightarrow \|f_m - f_n\|_{VL} < \varepsilon \Rightarrow \text{var}(f_m - f_n) < \varepsilon$$

Como $f_n \rightarrow f$ em $L^1(U)$, $f_m - f_n \rightarrow f_m - f$ em $L^1(U)$ e, de novo pelo Teorema 3.2.4,

$$\text{var}(f_m - f) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(f_m - f_n) \leq \varepsilon$$

Conclui-se que $f_n \rightarrow f$ em $VL(U)$ e, consequentemente, que $(VL(U), \|\cdot\|_{VL})$ é um espaço de Banach. \square

Sem a parcela $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_{VL}$ não seria uma norma: uma função que não a função identicamente igual a zero pode ter variação zero (por exemplo uma função constante diferente de zero).

Teorema 3.3.3. $(VL(U), \|\cdot\|_1)$ é denso em $(L^1(U), \|\cdot\|_1)$.

Prova. Sendo $C_0^1(U) \subset VL(U)$ e $C_0^1(U)$ um subconjunto denso de $L^1(U)$, $VL(U)$ é de facto um subconjunto denso de $(L^1(U), \|\cdot\|_1)$. \square

O resultado que se segue garante que o espaço $VL(U)$ pode ser mergulhado num espaço L^p , em que p depende apenas da dimensão d .

Teorema 3.3.4 (Desigualdade de Sobolev). *Seja $f \in VL(\mathbb{R}^d)$ uma função com suporte compacto. Então,*

$$\|f\|_p \leq c \text{var}(f),$$

onde $p = \frac{d}{d-1}$ e c depende apenas da dimensão d .

Prova. Para funções em $C^1(\mathbb{R}^d)$, já foi provado que

$$\text{var}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} |Df| dm_d.$$

Pela Desigualdade de Garding, cuja prova pode ser encontrada em [2], tem-se

$$\|f\|_p \leq c \int |Df| dm_d, \quad c > 0$$

logo,

$$\|f\|_p \leq c \text{var}(f)$$

e o resultado fica provado para funções de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Esta desigualdade vai ser usada na generalização a $VL(\mathbb{R}^d)$. Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções em $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ tal que $f_n \rightarrow f$ em $L^1(\mathbb{R}^d)$ e $\text{var}(f_n) \rightarrow \text{var}(f)$. Aplicando a desigualdade

$$\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq c \text{var}(f)$$

a funções C_0^∞ , conclui-se que as funções $(f_n)_n$ são uniformemente limitadas na norma de $L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$. A sucessão $(f_n)_n$ verifica as condições do Teorema de Ascoli-Arzelà 1.2.6, podendo concluir-se a existência de uma subsucessão de $(f_n)_n$ que converge fracamente para uma função $f_0 \in L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$. A sucessão $(f_n)_n$ converge para f na norma de L^1 , logo $f_0 = f$ e $f_n \rightarrow f$ fracamente em $L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)$, pelo que

$$\|f\|_{\frac{d}{d-1}} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{\frac{d}{d-1}} \leq c \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(f_n) = c \text{var}(f).$$

□

A seguir provamos um importante resultado de compacidade em $VL(U)$.

Teorema 3.3.5. *Seja U um subconjunto de \mathbb{R}^d com fronteira C^1 . Se $(f_n)_n$ for uma sucessão de funções com $\|\cdot\|_{VL}$ uniformemente limitada, então $(f_n)_n$ tem uma subsucessão convergente em $L^1(U)$ para uma função de $VL(U)$.*

Prova. Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções em $VL(U)$ tal que $\|f_n\|_{VL} \leq L$. Para cada n , o Teorema 3.2.8 permite escolher $\bar{f}_n \in C^\infty(U)$ tal que

$$\int_U |\bar{f}_n - f_n| dm_d < \frac{1}{n} \quad (3.5)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(\bar{f}_n) = \text{var}_U(f_n). \quad (3.6)$$

De (3.6) deduz-se que

$$\sup \text{var}_U(\bar{f}_n) < \infty.$$

Pelo Teorema de Rellich 1.2.5, a sucessão $(\bar{f}_n)_n$ é relativamente compacta em L^1 , isto é, (\bar{f}_n) tem uma subsucessão (\bar{f}_{n_k}) que converge em L^1 para uma função $f \in L^1(U)$. Pelo Teorema 3.2.4,

$$\text{var}_U(f) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{var}_U(\bar{f}_{n_k}) < \infty.$$

Consequentemente, o limite da subsucessão extraída de $(\bar{f}_n)_n$ está em $VL(U)$. \square

3.4 Traços

Ao considerar $VL(U)$ como um subconjunto de $L^1(U)$, estamos a considerar classes de equivalência de funções e não as funções propriamente ditas. Consequentemente, não faz sentido falar no valor de uma função de variação limitada num conjunto de medida nula, uma vez que os valores da função num tal conjunto podem ser alterados sem que a classe de equivalência da função o seja. No entanto, pode ser importante considerar o valor de uma função de variação limitada na fronteira do seu domínio, mesmo que essa fronteira tenha medida nula. O objectivo desta secção é provar o Teorema 3.4.6 que, como veremos, é importante na aplicação que faremos das funções de variação limitada aos Sistemas Dinâmicos. O instrumento principal para a prova deste resultado é a noção de traço de uma função de variação limitada na fronteira do seu domínio. Começaremos por dar sentido à restrição $f|_{\partial U}$ de uma função f definida em $U \subseteq \mathbb{R}^d$ à fronteira ∂U , dando um exemplo e provando duas propriedades de que faremos uso na prova do Teorema 3.4.6. Os Lemas 3.4.1 e 3.4.5 serão apresentados sem demonstrações, uma vez que para estas seria necessário usar conceitos que se afastam do âmbito deste trabalho, nomeadamente o de medida de Hausdorff.

Usaremos a mesma notação para a função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e para a sua extensão a \bar{U} , desde que essa extensão exista e seja única.

Lema 3.4.1 (Formula da Área). *Seja $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^s$, $d \leq s$ lipschitziana. Então, para todo o aberto $U \subset \mathbb{R}^d$,*

$$\int_U Jf \, dm_d = \int_{\mathbb{R}^s} \mathcal{H}^0(U \cap f^{-1}\{y\}) \mathcal{H}(y).$$

Prova. Ver [9, Capítulo 3] \square

Teorema 3.4.2. *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ um aberto limitado com fronteira C^∞ por partes. Existe uma transformação linear limitada*

$$T : VL(U) \rightarrow L^1(\partial U)$$

tal que

$$\int_U f \operatorname{div} g \, dm_d = - \int_U g \, d\mu + \int_{\partial U} (g \cdot \nu) T f \, dm_{d-1}, \quad (3.7)$$

para toda a função $f \in VL(U)$ e $g \in C_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$.

Nota 3.4.3. Sendo a fronteira ∂U C^∞ por partes, a normal exterior ν existe excepto num conjunto de medida de Lebesgue m_{d-1} nula. A existência da medida μ (para funções em $VL(U)$) é provada no Teorema 3.2.3.

Prova. Sendo $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, escreva-se $x = (x', x_d)$ para $x' = (x_1, \dots, x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ e $x_d \in \mathbb{R}$. Analogamente, usaremos a notação $y = (y', y_d)$. Dados $r, h > 0$, defina-se o cilindro aberto

$$C(x, r, h) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y' - x'| < r \text{ e } |y_d - x_d| < h\}.$$

Como a fronteira ∂U é C^∞ por partes, para cada ponto $x \in \partial U$, existem $r, h > 0$ e uma função lipschitziana $\gamma : \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\max_{|y' - x'| \leq r} |\gamma(y') - x_d| \leq \frac{h}{4}$$

e, após uma rotação e redefinição dos eixos coordenados, se necessário, obtém-se

$$U \cap C(x, r, h) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y' - x'| < r \text{ e } \gamma(y') < y_d < x_d + h\}.$$

Começemos por supôr que $f \in VL(U) \cap C^\infty(U)$. Escolham-se $x \in \partial U$ e r, h, γ nas condições acima descritas e escreva-se $C = C(x, r, h)$.

Se $0 < \varepsilon < h/2$ e $y \in \partial U \cap C$, definamos

$$f_\varepsilon(y) \equiv f(y', \gamma(y') + \varepsilon).$$

Sejam ainda

$$C_{\delta, \varepsilon} \equiv \{y \in C : \gamma(y') + \delta < y_d < \gamma(y') + \varepsilon\},$$

para $0 \leq \delta < \varepsilon < h/2$, $C_\varepsilon \equiv C_{0, \varepsilon}$ e $C^\varepsilon \equiv (C \cap U) \setminus C_\varepsilon$. Então,

$$|f_\delta(y) - f_\varepsilon(y)| \leq \int_\delta^\varepsilon \left| \frac{\partial f}{\partial x_d}(y', \gamma(y') + t) \right| dt \leq \int_\delta^\varepsilon |Df(y', \gamma(y') + t)| dt,$$

e, conseqüentemente, sendo γ lipschitziana, a Fórmula da Área implica que

$$\int_{\partial U \cap C} |f_\delta - f_\varepsilon| \, dm_{d-1} \leq C \int_{C_{\delta, \varepsilon}} |Df| \, dm_d = C \operatorname{var}_{C_{\delta, \varepsilon}}(f).$$

Consequentemente, a sucessão $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ é uma sucessão de Cauchy em $L^1(\partial U \cap C)$ e existe o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon \equiv Tf.$$

Além disso, passando ao limite quando δ tende para zero na desigualdade anterior, obtemos

$$\int_{\partial U \cap C} |Tf - f_\varepsilon| dm_{d-1} \leq C \operatorname{var}_{C_\varepsilon}(f). \quad (3.8)$$

Fixemos $g \in C_0^1(C, \mathbb{R}^d)$. Então,

$$\int_{C_\varepsilon} f \operatorname{div} g dm_d = - \int_{C_\varepsilon} g \cdot Df dm_d + \int_{\partial U \cap C} f_\varepsilon (g_\varepsilon \cdot \nu) dm_{d-1}.$$

Fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se

$$\int_{U \cap C} f \operatorname{div} g dm_d = - \int_{U \cap C} g \cdot \sigma d\mu + \int_{\partial U \cap C} Tf (g \cdot \nu) dm_{d-1}. \quad (3.9)$$

Como ∂U é compacta, pode ser coberta por um número finito de cilindros $C_i = C(x_i, r_i, h_i)$, $i = 1, \dots, j$, para os quais valem fórmulas análogas a (3.8) e (3.9). Usando uma partição da unidade para os $(C_i)_{i=1, \dots, j}$ obtém-se (3.7). Note-se que a fórmula (3.9) mostra que a definição de Tf é a mesma (a menos de conjuntos de medida $m_{d-1}|_{\partial U}$ nula) em qualquer parte de ∂U que “caia” em dois ou mais dos cilindros C_i .

Suponhamos agora que $f \in VL(U)$. Neste caso, mais geral, escolha-se uma sucessão $f_k \in VL(U) \cap C^\infty(U)$, $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_k \rightarrow f \text{ em } L^1(U), \operatorname{var}_U(f_k) \rightarrow \operatorname{var}_U(f) \text{ e } \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ fracamente}$$

sendo $(\varphi_k)_{k=1, \dots}$ e φ medidas tais que

$$\varphi_k(B) \equiv \int_{B \cap U} Df_k dm_d, \forall B \subset \mathbb{R}^d$$

e

$$\varphi(B) \equiv \int_{B \cap U} d\mu,$$

definidas em [9, Capítulo 5].

Vamos provar que $(Tf_k)_k$ é uma sucessão de Cauchy em $L^1(\partial U)$:

Escolha-se um cilindro C nas condições já descritas. Fixem-se $\varepsilon > 0$, $y \in \partial U \cap C$ e defina-se

$$\begin{aligned} f_k^\varepsilon &\equiv \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f_k(y', \gamma(y') + t) dt \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (f_k)_t(y) dt. \end{aligned}$$

Por (3.8), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\partial U \cap C} |Tf_k - f_k^\varepsilon| dm_{d-1} &\leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\partial U \cap C} |Tf_k - (f_k)_t| dm_{d-1} dt \\ &\leq C \operatorname{var}_{C_\varepsilon}(f_k). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\int_{\partial U \cap C} |Tf_k - Tf_l| dm_{d-1} \\ &\leq \int_{\partial U \cap C} |Tf_k - f_k^\varepsilon| dm_{d-1} + \int_{\partial U \cap C} |Tf_l - f_l^\varepsilon| dm_{d-1} + \int_{\partial U \cap C} |f_k^\varepsilon - f_l^\varepsilon| dm_{d-1} \\ &\leq C (\operatorname{var}_{C_\varepsilon}(f_k) + \operatorname{var}_{C_\varepsilon}(f_l)) + C/\varepsilon \int_{C_\varepsilon} |f_k - f_l| dm_d. \end{aligned}$$

Como consequência destas desigualdades, tem-se

$$\limsup_{k,l \rightarrow \infty} \int_{\partial U \cap C} |Tf_k - Tf_l| dm_{d-1} \leq C \operatorname{var}_{\overline{C_\varepsilon} \cap U}(f).$$

Como o segundo membro desta desigualdade tende para zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$, fica provado que $(Tf_k)_k$ é uma sucessão de Cauchy e, como consequência, pode-se definir

$$Tf \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} Tf_k,$$

sendo a definição independente da escolha inicial de $(f_k)_k$. Podemos finalmente concluir que, se (3.7) é válida para cada f_k , então também vale para o seu limite $f \in VL(U)$. \square

Definição 3.4.4. À função Tf , bem definida a menos de conjuntos de medida $m_{d-1}|_{\partial U}$ nula, chama-se *traço* de f em ∂U e deve ser interpretada como os “valores fronteira” de f em ∂U .

Lema 3.4.5. *Sejam U um aberto limitado com fronteira C^∞ por partes e $f \in VL(U)$. Então, para $x \in \partial U$ m_{d-1} - q.t.p. , tem-se*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r)} |f - Tf(x)| dm_d = 0,$$

e, conseqüentemente,

$$Tf(x) = \frac{1}{m_d(B(x,r) \cap U)} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x,r) \cap U} f dm_d.$$

Prova. Ver [9, Secção 5.3]. □

Resulta em particular do lema anterior que se $f \in VL(U) \cap C(\bar{U})$, então

$$Tf = f|_{\partial U} \quad m_{d-1} - q.t.p. \quad (3.10)$$

Teorema 3.4.6. *Se U for um subconjunto fechado de \mathbb{R}^d com fronteira (de dimensão $(d-1)$) C^∞ por partes e $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ for uma função tal que $f|_{\mathbb{R}^d - U} = 0$, $f \in C(U)$ e $f \in C^1(\text{int } U)$, então*

$$\text{var}_{\mathbb{R}^d}(f) = \text{var}_{\text{int } U}(f) + \int_{\partial U} |f| dm_{d-1}.$$

Prova. Seja $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ tal que $\|g\|_0 \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f \operatorname{div} g \, dm_d &= - \int_{\text{int } U} g \, d\mu + \int_{\partial U} (g \cdot \nu) Tf \, dm_{d-1} \\ &\leq \text{var}_{\text{int } U}(f) + \int_{\partial U} |Tf| dm_{d-1}. \end{aligned}$$

Por passagem ao supremo sobre as funções g , obtém-se

$$\text{var}_{\mathbb{R}^d}(f) \leq \text{var}_{\text{int } U}(f) + \int_{\partial U} |Tf| dm_{d-1}.$$

Como, nas condições do teorema, se tem $f \in VL(U) \cap C(U)$, então $Tf = f|_{\partial U} m_{d-1} - q.t.p.$ e, conseqüentemente,

$$\text{var}_{\mathbb{R}^d}(f) \leq \text{var}_{\text{int } U}(f) + \int_{\partial U} |f| dm_{d-1}.$$

Para provar a desigualdade recíproca note-se que

$$- \int_U g \, d\mu = - \int_{\text{int } U} g \, d\mu + \int_{\partial U} (g \cdot \nu) Tf \, dm_{d-1}, \quad \forall g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d) \text{ tal que } \|g\|_0 \leq 1,$$

implica que

$$- \int_{\partial U} g \, d\mu = \int_{\partial U} (g \cdot \nu) Tf \, dm_{d-1}.$$

Conseqüentemente,

$$\text{var}_{\partial U}(f) = \int_{\partial U} |Tf| dm_{d-1}.$$

Tem-se, considerando (3.10),

$$\text{var}_{\text{int } U}(f) + \int_{\partial U} |Tf| dm_{d-1} = \text{var}_{\text{int } U}(f) + \text{var}_{\partial U}(f) \leq \text{var}_{\mathbb{R}^d}(f).$$

Está provado que

$$\text{var}_{\mathbb{R}^d}(f) = \text{var}_{\text{int } U}(f) + \int_{\partial U} |f| dm_{d-1}.$$

□

Capítulo 4

Aplicações geométricas

4.1 Perímetro

A variação da função característica de um conjunto E mede o “tamanho” da fronteira de E , isto é, para conjuntos com fronteira suficientemente regular (bolas, rectângulos,...), a variação da característica é igual ao perímetro do conjunto no sentido tradicional. Esta secção é dedicada ao estudo do perímetro de subconjuntos de \mathbb{R}^d enquanto variação da sua função característica. Serão apresentados alguns exemplos e introduzido o conceito de conjunto de Caccioppoli. Motivados pelo Teorema 4.1.2, apresentamos a seguinte definição:

Definição 4.1.1. Sejam E um boreliano e U um aberto contido em \mathbb{R}^d . Define-se *perímetro* de E em U como

$$\text{per}_U(E) = \text{var}_U(\chi_E)$$

sendo χ_E a função característica de E . Se o conjunto U coincidir com \mathbb{R}^d escreveremos $\text{per}(E)$ em vez de $\text{per}_{\mathbb{R}^d}(E)$.

O resultado que se segue mostra como a noção de variação de uma função num determinado domínio depende da geometria desse domínio.

Teorema 4.1.2. *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um conjunto com fronteira C^2 por partes. Então,*

$$\text{per}(A) = m_{d-1}(\partial A).$$

Prova. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um conjunto com fronteira C^2 por partes e considere-se a sua função característica

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} .$$

Se A for um conjunto limitado, então

$$\int_U \chi_A dm_d = m_d(A \cap U)$$

e

$$\chi_A \in L^1(U).$$

Se $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$, pelo Teorema de Green, tem-se

$$\int \chi_A \operatorname{div} g dm_d = \int_A \operatorname{div} g dm_d = \int_{\partial A} g \cdot \nu dm_{d-1},$$

sendo ν a normal exterior a ∂A , que verifica $\|\nu\| = 1$. Tome-se $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ tal que $\|g\|_0 \leq 1$. Então,

$$\int_{\partial A} g \cdot \nu dm_{d-1} \leq m_{d-1}(\partial A \cap U)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \operatorname{var}_U(\chi_A) &= \sup \left\{ \int_U \chi_A \operatorname{div} g dm_d : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \right\} \\ &\leq m_{d-1}(\partial A \cap U). \end{aligned}$$

Como A é um conjunto com fronteira C^2 por partes, $\nu(x)$ é uma função vectorial de classe C^1 com $\|\nu(x)\| = 1$, logo ν tem uma extensão N a \mathbb{R}^d que verifica

$$N \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \text{ e } \|N(x)\| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Se tomarmos $\eta \in C_0^\infty(U)$ tal que $\|\eta\|_0 \leq 1$, fazendo $g = N\eta$, obtém-se

$$\int_A \operatorname{div} g dm_d = \int_{\partial A} \eta dm_{d-1}$$

e, conseqüentemente,

$$\operatorname{var}_U \chi_A \geq \sup \left\{ \int_{\partial A} \eta dm_{d-1} : \eta \in C_0^\infty(U) \text{ e } \|\eta\| \leq 1 \right\} = m_{d-1}(\partial A \cap U).$$

Está provado que $\operatorname{var}(\chi_A) = m_{d-1}(\partial A)$. □

Note-se que, se o conjunto não for de classe C^2 por partes, este resultado pode não ser verdadeiro. Tomemos o conjunto E do Exemplo 3.2.11. Nesse caso,

$$m_d(E) \leq \sum_{i=0}^{\infty} m_d(B_i) = \alpha(d) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-id} = \frac{\alpha(d)}{1 - 2^{-d}},$$

sendo $\alpha(d)$ a medida da bola unitária em \mathbb{R}^d . Contudo, o conjunto dos racionais é denso em \mathbb{R}^d , logo $\overline{E} = \mathbb{R}^d$ e $m_{d-1}(\partial E) = \infty$.

Por outro lado, se definirmos $E_k = \bigcup_{i=1}^k B_i$, então $E_k \rightarrow E$ (ou $\chi_{E_k} \rightarrow \chi_E$ em L^1) e, como ∂E_k é C^2 por partes, aplicando o Teorema 4.1.2, obtemos

$$\begin{aligned} \text{per}(E_k) &= m_{d-1}(\partial E_k) \leq m_{d-1} \left(\bigcup_{i=1}^k \partial B_i \right) \\ &= d \alpha(d-1) \sum_{i=0}^k 2^{-i(d-1)} \leq \frac{d \alpha(d-1)}{1 - 2^{-(d-1)}}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.4,

$$\text{per}(E) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{per}(E_k) \leq \frac{d \alpha(d-1)}{1 - 2^{-(d-1)}} < \infty.$$

Em particular, as funções características de abertos podem não ter variação limitada.

Definição 4.1.3. Se um boreliano E tiver perímetro localmente finito, ou seja, se $\text{per}(E, U) < \infty$ para todo o aberto U , E diz-se um *conjunto de Caccioppoli*.

Proposição 4.1.4. Se E for um conjunto de Caccioppoli, então

1. $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \text{per}(E, U_1) \leq \text{per}(E, U_2)$
(tem-se igualdade quando \overline{E} é um subconjunto compacto de U_1);
2. $\text{per}(E_1 \cup E_2, U) \leq \text{per}(E_1, U) + \text{per}(E_2, U)$
(tem-se a igualdade quando a distância entre E_1 e E_2 é positiva);
3. Se $m(E) = 0$, então $\text{per}(E) = 0$. Em particular, se $m(E_1 \Delta E_2) = m((E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)) = 0$, então $\text{per}(E_1) = \text{per}(E_2)$.

Prova.

1. Se $U_1 \subset U_2$, então $\text{per}(E, U_1) = \text{var}_{U_1}(\chi_E) \leq \text{var}_{U_2}(\chi_E) = \text{per}(E, U_2)$.

Note-se que $C_0^1(U_1) \subseteq C_0^1(U_2)$, logo se $g \in C_0^1(U_1)$, então $g \in C_0^1(U_2)$.

Se \overline{E} for um subconjunto compacto de $U_1 \subseteq U_2$, tem-se a igualdade porque apesar de $C_0^1(U_1)$ ter “mais funções” que $C_0^1(U_2)$, o seu suporte é o mesmo não se tendo, na prática, mais funções em $C_0^1(U_1)$ do que em $C_0^1(U_2)$.

2.

$$\begin{aligned}
& \text{per}(E_1 \cup E_2, U) = \text{var}_U(\chi_{E_1 \cup E_2}) \\
& \leq \sup \left\{ \int_{E_1 \cup E_2} \text{div } g \, dm_d : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \right\} \\
& \leq \sup \left\{ \int_{E_1} \text{div } g \, dm_d : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \right\} \\
& \quad + \sup \left\{ \int_{E_2} \text{div } g \, dm_d : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \right\} \\
& \quad - \sup \left\{ \int_{E_1 \cap E_2} \text{div } g \, dm_d : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \right\} \\
& \leq \text{per}(E_1, U) + \text{per}(E_2, U).
\end{aligned}$$

Se $d(E_1, E_2) > 0$, então $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $\chi_{E_1 \cup E_2} = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$ e vale a igualdade.

3. Se $m(E) = 0$, então

$$\text{per}(E) = \text{var}(\chi_E) = \sup \left\{ \int_E \text{div } g \, dm_d : g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d), \|g\|_0 \leq 1 \right\} = 0.$$

Se $m(E_1 \Delta E_2) = 0$, então $\text{per}(E_1 \Delta E_2) = 0$. Consequentemente, $\text{per}((E_1 \setminus E_2) \cup (E_2 \setminus E_1)) = 0$, o que implica que $\text{per}(E_1 \setminus E_2) = \text{per}(E_2 \setminus E_1) = 0$. Como

$$E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \setminus E_2)$$

e

$$E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 \setminus E_1),$$

pode-se concluir que

$$\text{per}(E_1) = \text{per}(E_2).$$

□

Proposição 4.1.5. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^d$ é um conjunto de Caccioppoli limitado, então:*

$$[m(E)]^p \leq c \, \text{per}(E)$$

onde $p = \frac{d-1}{d}$.

Prova. A proposição é consequência da Desigualdade de Sobolev com $f = \chi_E$, sendo a função característica χ_E de variação limitada em \mathbb{R}^d e com suporte compacto. □

4.2 Superfícies minimais

Esta secção é dedicada à questão da existência de superfícies minimais, isto é, à tentativa de determinar a superfície de área mínima entre todas as superfícies limitadas por uma determinada curva.

Teorema 4.2.1. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^d$ um aberto e L um conjunto de Caccioppoli. Então, existe um conjunto E que coincide com L fora de U e tal que*

$$\text{var}(\chi_E) \leq \text{var}(\chi_F)$$

para todo o conjunto F que coincida com L fora de U .

Prova. Como U é limitado, existe r tal que \bar{U} é um subconjunto compacto da bola $B_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < r\}$. Sendo $F = L$ fora de U ,

$$\text{var}(\chi_F) = \text{var}_{B_r}(\chi_F) + \text{var}_{\mathbb{R}^d \setminus B_r}(\chi_L).$$

Basta provar que existe um conjunto E em B_r que coincide com L fora de U e tal que

$$\text{var}_{B_r}(\chi_E) \leq \text{var}_{B_r}(\chi_F)$$

para cada subconjunto F de B_r que coincida com L fora de U .

Como $\text{var}_{B_r}(\chi_F)$ é limitada inferiormente por zero, se E_n for uma sucessão minimizante, tem-se que $\text{var}_{B_r}(\chi_{E_n})$ é uniformemente limitada (por $m(B_r)$). Consequentemente, a sucessão χ_{E_n} é limitada e de variação limitada em B_r . Pelo Teorema 3.3.5, existe uma subsucessão (também denotada E_n) que converge na norma de $L^1(B_r)$ para uma função f de variação limitada. Como a convergência em média implica convergência q.t.p., tem-se $\chi_{E_n}(x) \rightarrow f(x)$ para quase todos os x de B_r . Como, além disso, $\chi_{E_n}(x)$ é igual a zero ou um, pode supôr-se que f é a função característica de um certo conjunto E que coincide com L fora de U . Pelo Teorema 3.2.4, o conjunto E verifica a desigualdade $\text{var}(\chi_E) \leq \text{var}(\chi_F)$. \square

De certa forma o conjunto L determina valores de fronteira para E : ∂E minimiza a área de entre todas as superfícies com fronteira $\partial L \cap \partial U$, como ilustra o exemplo que se segue.

Exemplo 4.2.2. Em \mathbb{R}^2 sejam $U = B_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2\}$ e $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1^2 + (x_2 - 1)^2 < 4)\}$.

Então o conjunto E será $E = \{(x_1, x_2) \in L : x_2 > 1/2\}$, de acordo com a figura:

Figura 4.1: o conjunto E

Exemplo 4.2.3. O conjunto U pode actuar como um obstáculo que afasta ∂E da superfície minimal que gera $\partial L \cap \partial U$.

Figura 4.2: U afasta ∂E da superfície minimal

Como se pode depreender da demonstração do Teorema 4.2.1, a natureza de L longe de E não tem qualquer efeito no conjunto $E \cap U$.

Provada a existência de superfícies minimais (no sentido explicado no início da secção), o resto desta secção é dedicado a propriedades relacionadas com a regularidade do conjunto “minimal” resultante. O próximo teorema, em particular, fornece um método para obter aproximações ‘suaves’ apropriadas para conjuntos de Caccioppoli.

Teorema 4.2.4. *Seja $f \in VL(U)$ e defina-se $F_t = \{x \in U : f(x) < t\}$. Então,*

$$\text{var}_U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{var}_U(\chi_{F_t}) dt.$$

Prova. Suponhamos que $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ e que $\|g\|_0 \leq 1$. Começaremos por supôr $f \geq 0$. Como

$$f(x) = \int_0^\infty (1 - \chi_{F_t}(x)) dt$$

(por se ter $F_t(x) = 0$ para $t < f(x)$, basta atender ao valor de $\int_0^{f(x)} 1 dt$), tem-se que

$$\begin{aligned} \int f \operatorname{div} g \, dm_d &= \int dm_d \int_0^\infty (1 - \chi_{F_t}(x)) \operatorname{div} g \, dt \\ &= \int_0^\infty dt \left\{ \int \operatorname{div} g \, dm_d - \int \chi_{F_t} \operatorname{div} g \, dm_d \right\}. \end{aligned}$$

(pelo Teorema de Fubini, é permitida a mudança da ordem de integração).

Tome-se agora $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ tal que

$$\int \operatorname{div} g \, dm_d = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int f \operatorname{div} g \, dm_d &= - \int_0^\infty dt \int_{F_t} \operatorname{div} g \, dm_d = - \int_0^\infty dt \int_U \chi_{F_t} \operatorname{div} g \, dm_d \\ &= - \int_0^\infty dt \operatorname{var}_U(\chi_{F_t}) \leq \int_0^\infty dt \operatorname{var}_U(\chi_{F_t}). \end{aligned}$$

No caso em que $f \leq 0$, de um modo análogo ao anterior deduz-se que

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 \chi_{F_t} dt$$

e, conseqüentemente, que

$$\int f \operatorname{div} g \, dm_d \leq \int_{-\infty}^0 dt \operatorname{var}_U(\chi_{F_t}).$$

Decompondo f nas suas partes positiva e negativa ($f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = -\min(0, f)$), $f = f^+ + f^-$ obtém-se

$$\int f \operatorname{div} g \, dm_d \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \operatorname{var}_U(\chi_{F_t})$$

para toda a função de $VL(U)$. Tomando o supremo sobre todas as funções g tais que $g \in C_0^1(U, \mathbb{R}^d)$ e $\|g\|_0 \leq 1$, tem-se

$$\operatorname{var}_U(f) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \operatorname{var}_U(\chi_{F_t}).$$

Para provar a outra desigualdade, comecemos por supôr que a propriedade do enunciado se verifica para funções de classe C^∞ . Sejam $f \in VL(U)$ e $(f_n)_n$ uma sucessão que aproxima f , como no Teorema 3.2.8. Então, como $f_n \rightarrow f$ na norma de $L^1(U)$ e

$$\int_U |f_n - f| dm_d = \int_{-\infty}^{+\infty} dt |\chi_{F_{nt}} - \chi_{F_t}|,$$

sendo $F_{nt} = \{x \in U : f_n(x) < t\}$, existe uma subsucessão também denotada $(f_n)_n$ tal que

$$\chi_{F_{nt}} \rightarrow \chi_{F_t}$$

na norma de $L^1(U)$ para quase todos os t . Por conseguinte, pelo Lema de Fatou e pelo Teorema 3.2.4,

$$\text{var}_U(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}_U(f_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \text{var}_U(\chi_{F_{nt}}) \geq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \text{var}_U(\chi_{F_t}).$$

Falta apenas demonstrar a igualdade do enunciado para funções de classe C^∞ . Para isso, repete-se o raciocínio anterior aproximando agora f de classe C^∞ por uma sucessão f_n de funções lineares contínuas em cada conjunto U_i de uma partição de U .

Provemos que para tais funções se tem a igualdade:

Seja $U = \bigcup_{i=1}^D U^i$ e $f(x) = \langle c_i, x \rangle + b_i$ se $x \in U_i$, sendo $c_i \in \mathbb{R}^d$ e $b_i \in \mathbb{R}$. Então, f e as suas derivadas $\partial f / \partial x_i$ pertencem a $L^1(U)$ e

$$\text{var}_U(f) = \sum_{i=1}^D |c_i| m_d(U_i).$$

Além disso,

$$\text{var}_{U_i}(\chi_{F_t}) = m_{d-1}(\{x \in U_i : f(x) = t\}) = m_{d-1}(\{x \in U_i : \langle c_i, x \rangle + b_i = t\}).$$

Suponhamos que o eixo x_1 é perpendicular ao hiperplano $\{x \in U_i : \langle c_i, x \rangle + b_i = t\}$. Fazendo uma mudança de variável em $\int_{-\infty}^{+\infty} dt \text{var}_U(\chi_{F_t})$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \text{var}_{U_i}(\chi_{F_t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |c_i| m_{d-1}(\{x \in U_i : x_1 = t\}) dt = |c_i| m_d(U_i).$$

Consequentemente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \text{var}_U(\chi_{F_t}) = \sum_{i=1}^D |c_i| m_d(U_i) = \text{var}_U(f).$$

□

Vamos agora demonstrar um resultado análogo ao Teorema 3.2.8 que aproxima conjuntos de Caccioppoli por conjuntos C^∞ em vez de funções VL . Na demonstração do teorema será usado o lema que se segue:

Lema 4.2.5. *Seja E um conjunto de Caccioppoli e sejam $0 < t < 1$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $f_{\varepsilon_n} = \eta_{\varepsilon_n} * \chi_E$. Se*

$$E_n = \{x \in \mathbb{R}^d : f_{\varepsilon_n}(x) > t\},$$

então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |\chi_{E_n} - \chi_E| dm_d \leq \frac{1}{\min(t, 1-t)} \int |f_{\varepsilon_n} - \chi_E| dm_d.$$

Prova. Por definição,

$$f_{\varepsilon_n} - \chi_E > t \text{ em } E_n \setminus E$$

e

$$\chi_E - f_{\varepsilon_n} \geq 1 - t \text{ em } E \setminus E_n,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int |f_{\varepsilon_n} - \chi_E| dm_d &\geq \int_{E_n \setminus E} |f_{\varepsilon_n} - \chi_E| dm_d + \int_{E \setminus E_n} |f_{\varepsilon_n} - \chi_E| dm_d \\ &\geq t m_d(E_n \setminus E) + (1-t) m_d(E \setminus E_n) \\ &\geq \min(t, 1-t) \int |\chi_{E_n} - \chi_E| dm_d. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.6. *Todo o conjunto de Caccioppoli E pode ser aproximado por uma sucessão de conjuntos C^∞ E_n , tais que*

$$\int |\chi_{E_n} - \chi_E| dm_d \rightarrow 0 \quad e \quad \text{per}(E_n) \rightarrow \text{per}(E).$$

Prova. De acordo com o Teorema 3.2.8, χ_E pode ser aproximada por uma sucessão de funções C^∞ que se obtêm tomando funções regularizantes de χ_E . A partir dessas funções, usando o Teorema 4.2.4, obtém-se a sucessão de conjuntos “aproximantes” desejada. Sejam $\varepsilon > 0$ e $f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \chi_E$ (ver Apêndice A.1). De novo pelo Teorema 4.2.4 e utilizando o facto de se ter $0 \leq f_\varepsilon \leq 1$,

$$\text{var}(f_\varepsilon) = \int_0^1 dt \int \text{var}(\chi_{E_{\varepsilon t}}),$$

sendo $E_{\varepsilon t} = \{x : f_\varepsilon(x) < t\}$.

Se $A = \mathbb{R}^d$, a Proposição 3.2.7 assegura que $\text{var}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |Df_\varepsilon| dm_d$ e, em particular, se $f = \chi_E$ obtém-se

$$\text{per}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int |Df_\varepsilon| dm_d.$$

Suponhamos que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Tendo em conta que $f_{\varepsilon_n} \rightarrow \chi_E$ quando $\varepsilon_n \rightarrow 0$, pelo Lema 4.2.5 tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int |\chi_{E_{\varepsilon_n}} - \chi_E| dx &\leq \frac{1}{\min(t, 1-t)} \int |f_{\varepsilon_n} - \chi_E| dx \\ &\rightarrow \frac{1}{\min(t, 1-t)} \int |\chi_E - \chi_E| dx = 0. \end{aligned}$$

Então, para todo o t tal que $0 < t < 1$, tem-se

$$\chi_{E_{nt}} \rightarrow \chi_E \text{ q.t.p..}$$

De facto, a convergência ainda se dá em $L^1(\mathbb{R}^d)$ e, pelo Teorema 3.2.4,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\chi_{E_{nt}}) \geq \text{per}(E)$$

para cada t . Então,

$$\text{per}(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(f_{\varepsilon_n}) \geq \int_0^1 \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\chi_{E_{nt}}) dt \geq \text{per}(E)$$

e, conseqüentemente, para cada t tal que $0 < t < 1$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{per}(E_{nt}) = \text{per}(E).$$

Por outro lado, pelo Lema de Sard, para quase todo o t , ∂E_{nt} é regular, por isso pode escolher-se t entre 0 e 1 tal que, se $F_n = E_{nt}$, se tem

1. ∂F_n é de classe C^2 ;
2. $\chi_{F_n} \rightarrow \chi_E$ em $L^1(\mathbb{R}^d)$;
3. $\text{per}(E) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{per}(F_n)$.

Considerando uma subsucessão de $(\varepsilon_n)_n$, pode-se garantir que a terceira propriedade se mantém substituindo $\liminf_{n \rightarrow \infty}$ por $\lim_{n \rightarrow \infty}$, o que prova o teorema. \square

Se $\text{per}(E, \partial A) = 0$, sendo A um aberto, então $\text{per}(E, A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{per}(E_n, A)$ (ver a Proposição 3.2.6). Em geral, não é possível aproximar um conjunto de Caccioppoli E por conjuntos C^∞ *contidos* em E (nem *contendo* E). Consideremos, por exemplo, o conjunto E do Exemplo 3.2.5. Se F for um conjunto que contém E , então ter-se-á $\bar{F} = \mathbb{R}^d$ e, como consequência, $m_d(F - E) = \infty$ ou $m_d(\partial F) = \infty$ (ou ambos). Logo, E não pode ser aproximado “por fora” por conjuntos C^∞ .

Capítulo 5

Aplicações em dinâmica

Este capítulo é dedicado ao estudo da existência de medidas invariantes absolutamente contínuas em relação à medida de Lebesgue para transformações de um espaço nele mesmo. O problema é equivalente ao problema da existência de pontos fixos do operador de Perron-Frobenius correspondente. Mais precisamente, a densidade de uma medida invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue é um ponto fixo do operador de Perron-Frobenius.

5.1 Operador de transferência

Considere-se $R \subset \mathbb{R}^d$ e m_d a medida de Lebesgue definida na σ -álgebra dos borelianos de R . Seja $\tau : R \rightarrow R$ uma transformação que assumiremos *não singular*:

$$m_d(A) = 0 \Rightarrow m_d(\tau^{-1}(A)) = 0 \quad \text{para todo o boreliano } A.$$

Esta suposição sobre τ garante que a medida τ_*m_d definida em (1.1) é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue m_d . Pelo Teorema de Radon-Nikodym, existe uma função mensurável não-negativa denotada $d\tau_*m_d/dm_d$, a derivada de Radon-Nikodym de τ_*m_d com respeito a m_d , tal que

$$\tau_*m_d(A) = \int_A (d\tau_*m_d/dm_d) dm_d \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

À transformação do espaço $L^1(\mathbb{R}^d)$ em si mesmo, que denotaremos \mathcal{L}_τ , definida por

$$\int_A \mathcal{L}_\tau f dm_d = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm_d, \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad (5.1)$$

dá-se o nome de *operador de Perron-Frobenius* ou *operador de transferência*. Pela não-singularidade de τ e pelo Teorema de Radon-Nikodym, $\mathcal{L}_\tau f$ existe e é único q.t.p., pelo que o operador está bem definido.

Exemplo 5.1.1. Seja $R = [0, 1]$ e seja $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a transformação definida por

$$\tau(x) = \text{sen}(\pi x).$$

$$\tau^{-1}([0, x]) = [0, \frac{1}{\pi} \arcsen x] \cup [1 - \frac{1}{\pi} \arcsen x, 1], 0 \leq x \leq 1.$$

Então, para qualquer $f \in L^1$, tem-se

$$\int_{\tau^{-1}[0,x]} f dx = \int_0^{\frac{1}{\pi} \arcsen x} f dx + \int_{1-\frac{1}{\pi} \arcsen x}^1 f dx.$$

Derivando ambos os membros, obtém-se

$$\mathcal{L}_\tau f = \frac{d}{dx} \int_{\tau^{-1}[0,x]} f dx = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}} \left[f\left(\frac{1}{\pi} \arcsen x\right) + f\left(1 - \frac{1}{\pi} \arcsen x\right) \right].$$

Exemplo 5.1.2. Seja $R = [0, 1]$ e seja $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a transformação

$$\tau(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$



Figura 5.1: $\tau(x)$

É fácil verificar, de acordo com a figura, que

$$\tau^{-1}([0, x]) = [0, \frac{1}{2}x], \text{ se } x < \frac{1}{3}$$

e

$$\tau^{-1}([0, x]) = [0, \frac{x}{2}] \cup \left\{ \left[\frac{5}{4} - \frac{3x}{4}, 1 \right] \cap \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right\} \text{ se } 0 \leq x \leq 1.$$

Assim,

$$\mathcal{L}_\tau f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}x\right)\chi_{\tau[\frac{1}{3},1]}$$

qualquer que seja $f \in L^1$.

Vamos agora dar as propriedades fundamentais do operador de transferência.

Proposição 5.1.3. *Seja $\mathcal{L}_\tau : L^1 \rightarrow L^1$ o operador de Perron-Frobenius de uma transformação τ como anteriormente.*

1. \mathcal{L}_τ é um operador linear;
2. \mathcal{L}_τ é positivo: $f \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_\tau f \geq 0$;
3. \mathcal{L}_τ é uma contração: $\|\mathcal{L}_\tau f\|_1 \leq \|f\|_1$;
4. \mathcal{L}_τ preserva a média: $\int_R \mathcal{L}_\tau f dm_d = \int_R f dm_d$.

Prova.

1. Seja $A \subset R$ um conjunto mensurável e sejam a e b constantes. Então, se $f, g \in L^1$,

$$\begin{aligned} \int_A \mathcal{L}_\tau(af + bg) dm_d &= \int_{\tau^{-1}A} (af + bg) dm_d = a \int_{\tau^{-1}A} f dm_d + b \int_{\tau^{-1}A} g dm_d = \\ &= a \int_A \mathcal{L}_\tau f dm_d + b \int_A \mathcal{L}_\tau g dm_d = \int_A (a\mathcal{L}_\tau f + b\mathcal{L}_\tau g) dm_d. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{L}_\tau(af + bg) = a\mathcal{L}_\tau f + b\mathcal{L}_\tau g.$$

2. Qualquer que seja A mensurável, tem-se

$$\int_A \mathcal{L}_\tau f dm_d = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm_d \geq 0.$$

Logo, se $f \geq 0$, $\mathcal{L}_\tau f \geq 0$.

3. Seja $f \in L^1$. Sejam $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = -\min(0, f)$. Então, f^+ e $f^- \in L^1$, $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Como \mathcal{L}_τ é um operador linear, tem-se

$$\mathcal{L}_\tau f = \mathcal{L}_\tau(f^+ - f^-) = \mathcal{L}_\tau(f^+) - \mathcal{L}_\tau(f^-).$$

Consequentemente,

$$|\mathcal{L}_\tau f| \leq |\mathcal{L}_\tau(f^+)| + |\mathcal{L}_\tau(f^-)| = \mathcal{L}_\tau(f^+) + \mathcal{L}_\tau(f^-) = \mathcal{L}_\tau|f|$$

e

$$\|\mathcal{L}_\tau f\|_1 = \int_R |\mathcal{L}_\tau f| dm_d \leq \int_R \mathcal{L}_\tau|f| dm_d \leq \int_R |f| dm_d = \|f\|_1.$$

4. O resultado é consequência de

$$\int_R \mathcal{L}_\tau f \, dm_d = \int_{\tau^{-1}(R)} f \, dm_d = \int_R f \, dm_d.$$

□

Por ser uma contracção, o operador \mathcal{L}_τ é contínuo em relação à topologia da norma.

Proposição 5.1.4. *Sejam $\tau, \sigma : R \rightarrow R$ transformações não-singulares. Então, $\mathcal{L}_{\tau \circ \sigma} f = \mathcal{L}_\tau \circ \mathcal{L}_\sigma f$. Em particular, $\mathcal{L}_{\tau^n} f = \mathcal{L}_\tau^n f$.*

Prova. Seja $f \in L^1$ e defina-se a medida μ do seguinte modo:

$$\mu(A) = \int_{(\tau \circ \sigma)^{-1}(A)} f \, dm_d.$$

Como as transformações τ e σ são não-singulares, temos que $m_d(A) = 0 \Rightarrow m_d((\tau \circ \sigma)^{-1}(A)) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$, pelo que μ é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue m_d ($\mu \ll m_d$) e

$$\mu(A) = \int_A \mathcal{L}_{\tau \circ \sigma} f \, dm_d.$$

Tem-se

$$\int_A \mathcal{L}_\tau(\mathcal{L}_\sigma f) \, dm_d = \int_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(A))} f \, dm_d$$

e

$$\int_A \mathcal{L}_\tau(\mathcal{L}_\sigma f) \, dm_d = \int_{\tau^{-1}(A)} \mathcal{L}_\sigma f \, dm_d = \int_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(A))} f \, dm_d.$$

Consequentemente, $\mathcal{L}_{\tau \circ \sigma} f = \mathcal{L}_\tau \mathcal{L}_\sigma f$ q.t.p.. Prova-se por indução que $\mathcal{L}_{\tau^n} f = \mathcal{L}_\tau^n f$ q.t.p.. □

Na proposição seguinte prova-se que uma função f é um ponto fixo de \mathcal{L}_τ se e só se f é a densidade de uma medida τ -invariante absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue m_d .

Proposição 5.1.5. *Seja $\tau : R \rightarrow R$ uma transformação não-singular. Então, $\mathcal{L}_\tau f = f$ q.t.p. sse a medida $\mu = f m_d$ definida por $\mu(A) = \int_A f \, dm_d$ for τ -invariante, sendo $f \geq 0$, $f \in L^1$ e $\|f\|_1 = 1$.*

Prova. É claro (usando propriedades elementares dos integrais) que μ é uma medida. Suponhamos que a medida μ é τ -invariante, ou seja, que $\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$ qualquer que seja o conjunto mensurável A . Então,

$$\int_{\tau^{-1}(A)} f dm_d = \int_A f dm_d$$

e, conseqüentemente,

$$\int_A \mathcal{L}_\tau f dm_d = \int_A f dm_d.$$

Sendo A um mensurável arbitrário, tem-se que $\mathcal{L}_\tau f = f$ q.t.p.. Suponhamos agora que $\mathcal{L}_\tau f = f$ q.t.p.. Então,

$$\int_A \mathcal{L}_\tau f dm_d = \int_A f dm_d.$$

Por definição de μ ,

$$\int_A \mathcal{L}_\tau f dm_d = \int_{\tau^{-1}(A)} f dm_d = \mu(\tau^{-1}(A)),$$

pelo que $\mu(\tau^{-1}(A)) = \mu(A)$. □

5.2 Transformações expansoras por partes

A noção de variação de uma função, ferramenta essencial no estudo da existência de medidas invariantes absolutamente contínuas, é muito sensível à geometria do seu domínio. Este facto é causador de grandes dificuldades quando se pretendem estudar m.i.a.c.'s em dimensão superior a 1 e, para as ultrapassar, é necessário ter em conta os domínios e diferenciabilidade das transformações.

Definição 5.2.1. Seja $R \subset \mathbb{R}^d$ um conjunto limitado. Diz-se que $\tau : R \rightarrow R$ é uma função *expansora por partes* se existir uma partição $\{R_i\}_{i=1}^\infty$ do domínio R tal que

1. a fronteira de cada R_i é de classe C^2 por partes e tem medida $(d - 1)$ -dimensional finita;
2. a restrição τ_i de τ ao interior de cada R_i é um difeomorfismo de classe C^2 com uma extensão ainda de classe C^2 a $\overline{R_i}$;
3. existe $0 < \sigma_\tau < 1$ tal que $\|D\tau^{-1}\| \leq \sigma_\tau$.

A função expansora por partes τ tem *ramos longos* se verificar duas propriedades adicionais:

4. *distorção limitada*: existir uma constante $K > 0$ tal que, para todo o $i \geq 1$ se tem

$$\frac{\|D(J \circ \tau_i^{-1})\|}{|J \circ \tau_i^{-1}|} < K,$$

sendo J o jacobiano de τ ;

5. Existirem constantes positivas α e δ para as quais existe um campo vectorial unitário H de classe C^1 na fronteira de $\tau(R_i)$, tal que
- $|\text{sen } \angle(\nu, H(x))| \geq \alpha$ para todo o $x \in \partial\tau(R_i)$, sendo ν um vector tangente a $\partial\tau(R_i)$ em x ;
 - os segmentos $[x, x + \delta H(x)]$, $x \in \partial\tau(R_i)$ são disjuntos dois a dois e a sua união é uma vizinhança de $\partial\tau(R_i)$.

Convenciona-se que um campo vectorial é de classe C^1 na fronteira de $\tau(R_i)$ se a sua restrição a cada componente C^2 dessa fronteira é de classe C^1 nessa componente. Além disso, o espaço tangente de $\tau(R_i)$ num “vértice” é a união dos espaços tangentes de todas as componentes de classe C^2 que contêm esse “vértice”.

A última condição é um requisito geométrico sobre as imagens por τ dos domínios de regularidade: estes não devem ser demasiado próximos de zero e os ângulos formados pelos seus “vértices” devem ser limitados inferiormente.

O operador \mathcal{L}_τ foi definido do seguinte modo:

$$\int_A \mathcal{L}_\tau f \, dm_d = \int_{\tau^{-1}(A)} f \, dm_d, \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d). \quad (5.2)$$

Para as transformações expansoras por partes, pode-se deduzir uma representação do operador de Perron-Frobenius muito útil na demonstração das propriedades que se seguem:

Como a restrição de τ a cada R_i é invertível (τ_i é difeomorfismo), pode-se definir

$$\tau_i^{-1} : \tau_i(R_i) \rightarrow R_i,$$

tendo-se

$$\tau^{-1}(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \tau_i^{-1}(\tau_i(R_i) \cap R). \quad (5.3)$$

Conforme o conjunto R , $\tau_i^{-1}(\tau_i(R_i) \cap R)$ poderá ser vazio, mas os conjuntos são sempre disjuntos dois a dois. Substituindo (5.3) em (5.2), obtém-se

$$\int_R \mathcal{L}_\tau f \, dm_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\tau_i^{-1}(\tau_i(R_i) \cap R)} f \, dm_d = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\tau_i(R_i) \cap R} f(\tau_i^{-1}(x)) |(\tau_i^{-1})'| \, dm_d,$$

tendo-se feito uma mudança de variável na última igualdade. Tem-se,

$$\begin{aligned} \int_R \mathcal{L}_\tau f \, dm_d &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_R f(\tau_i^{-1}(x)) |(\tau_i^{-1})'| \chi_{\tau_i(R_i)}(x) dm_d \\ &= \int_R \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(\tau_i^{-1}(x))}{|J(\tau_i^{-1})|} \chi_{\tau_i(R_i)}(x) dm_d. \end{aligned}$$

Pela unicidade do operador de Perron-Frobenius chega-se à caracterização de \mathcal{L}_τ :

$$\mathcal{L}_\tau f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f \circ \tau_i^{-1}}{|J \circ \tau_i^{-1}|} \chi_{\tau(R_i)},$$

sendo J o jacobiano da transformação τ em R .

Com o objectivo de provar que o operador de Perron-Frobenius tem um ponto fixo em $VL(R)$ vamos provar três lemas auxiliares.

Entenda-se por *cone regular* em \mathbb{R}^d um cone cuja base é um disco $(d-1)$ -dimensional B e tal que o raio L que une o vértice ao centro do disco é perpendicular ao disco. Definimos o *ângulo vértice* de um cone regular como sendo o ângulo formado por L e qualquer segmento que una o vértice a um ponto da fronteira de B .

Seja $A \subseteq \mathbb{R}^d$ um domínio fechado com fronteira C^2 por partes com medida $(d-1)$ -dimensional finita.

Na demonstração do lema que se segue far-se-á uso do seguinte :

Em cada ponto singular $x \in D$, construa-se o maior cone regular possível com vértice em x e completamente contido em A . Seja $\theta(x)$ o ângulo vértice deste cone e defina-se

$$\gamma(A) = \min_{x \in D} \theta(x).$$

Como os ângulos formados pelos lados de ∂A são maiores que zero, $\gamma(A) > 0$. Sejam $\alpha(A) = \pi/2 + \gamma(A)$ e

$$\beta(A) = |\cos(\alpha(A))|.$$

Vamos construir um conjunto de segmentos L_y ($y \in \partial A$) de classe C^1 , de modo a que cada L_y seja o raio central de um cone regular contido em A , com ângulo vértice maior ou igual a $\gamma(A)$.

Começemos com os pontos $y \in D$ onde é obtido o ângulo mínimo, definindo L_y como raios centrais dos maiores cones regulares contidos em A . Estendamos este conjunto ao conjunto de segmentos C^1 que desejamos, fazendo L_y suficientemente pequeno para que não haja sobreposição. Seja $\rho(y)$ o comprimento de L_y , $y \in \partial A$. Como ∂A é compacta, tem-se

$$\rho(A) = \inf_{y \in \partial A} \rho(y) > 0.$$

Encurtando L_y até ao comprimento $\rho(A)$, está construído o cone desejado.

Lema 5.2.2. *Seja A um domínio fechado com ramos longos. Se f for de classe C^1 em A , então*

$$\int_{\partial A} f dm_{d-1} \leq \frac{1}{\beta(A)} \left(\frac{1}{\rho(A)} \int_A f dm_d + \text{var}_A(f) \right).$$

Prova. Fixemos $\varepsilon > 0$, suficientemente pequeno e dividamos ∂A em conjuntos ∂A_{x_i} , $i = 1, \dots, m$ tais que

$$\frac{(1 + \varepsilon)^2}{|\cos \alpha| - \varepsilon} \int_{\mathcal{U}(\rho, \alpha, x_i)} f dm_d \geq \int_{\partial A_{x_i}} \left(\int_{L_y} f(\xi) d\xi \right) dm_{d-1}(y), \forall f \in C^1(\mathbb{R}^d)$$

sendo $\mathcal{U}(\rho, \alpha, x_i) = \bigcup_{y \in \partial A_{x_i}} L_y$ e L_y o segmento que une y e $y + \rho H(y)$ (note-se que se ∂A_{x_i} e ρ forem suficientemente pequenos, $\mathcal{U}(\rho, \alpha, x_i)$ está só de um lado de ∂A_{x_i}). Definam-se os conjuntos $\mathcal{U}(\rho(A), \alpha(A), x_i)$, $i = 1, \dots, m$, usando os segmentos L_y , $y \in \partial A$. Sendo D o conjunto dos pontos singulares de ∂A , qualquer que seja $y \in \partial A \setminus D$, tem-se

$$f(y) \leq \min \{f(x) : x \in L_y\} + \text{var}_{L_y}(f)$$

e

$$f(y) \leq \frac{1}{m(L_y)} \int_{L_y} f(\xi) d\xi + \text{var}_{L_y}(f) \leq \frac{1}{\rho(A)} \int_{L_y} f(\xi) d\xi + \text{var}_{L_y}(f).$$

Tem-se ainda

$$\text{var}_{L_y}(f) \leq \int_{L_y} \|Df(x)\| dm_d(x).$$

Integrando sobre ∂A_{x_i} , $i = 1, \dots, m$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\partial A_{x_i}} f(y) dm_{d-1}(y) \\ & \leq \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\beta(A) - \varepsilon} \frac{1}{\rho(A)} \int_{\mathcal{U}(\rho(A), \alpha(A), x_i)} f dm_d + \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\beta(A) - \varepsilon} \int_{\mathcal{U}(\rho(A), \alpha(A), x_i)} \|Df\| dm_d. \end{aligned}$$

Somando e notando que $\mathcal{U}(\rho(A), \alpha(A), x_i)$ não se sobrepõem, chega-se a

$$\int_{\partial A} f(y) dm_{d-1}(y) \leq \frac{(1 + \varepsilon)^2}{\beta(A) - \varepsilon} \left(\frac{1}{\rho(A)} \int_A f dm_d + \int_A \|Df\| dm_d \right).$$

Como ε é arbitrário, está provado o resultado. \square

Lema 5.2.3. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para toda a função $f \in VL(R)$ se tem*

$$\text{var}(\mathcal{L}_\tau f) \leq \sigma_\tau \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \text{var}(f) + C \|f\|_1.$$

Prova. Começemos por demonstrar o caso particular em que $f \in C^1(R)$. Tem-se

$$\mathcal{L}_\tau f = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i \chi_{\tau(R_i)}, \quad \text{sendo } \mathcal{F}_i = \frac{(f \circ \tau_i^{-1})}{(J \circ \tau_i^{-1})}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{L}_\tau f) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \text{var}(\mathcal{F}_i \chi_{\tau(R_i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\tau(R_i)} \|D\mathcal{F}_i\| dm_d + \int_{\partial\tau(R_i)} |\mathcal{F}_i| dm_{d-1} \right). \end{aligned}$$

Para a última desigualdade foi utilizado o Teorema 3.4.6.

Calculemos separadamente cada um dos membros da expressão anterior:

$$\begin{aligned} \int_{\tau(R_i)} \|D\mathcal{F}_i\| dm_d &\leq \int_{\tau(R_i)} \frac{\|D(f \circ \tau_i^{-1})\|}{|J \circ \tau_i^{-1}|} dm_d + \int_{\tau(R_i)} \|(f \circ \tau_i^{-1})D\left(\frac{1}{J \circ \tau_i^{-1}}\right)\| dm_d \\ &\leq \int_{\tau(R_i)} \sigma_\tau \int_{\tau(R_i)} \frac{\|Df(\tau_i^{-1})\|}{|J \circ \tau_i^{-1}|} dm_d + \int_{\tau(R_i)} K \left| \frac{f \circ \tau_i^{-1}}{J \circ \tau_i^{-1}} \right|, \end{aligned}$$

sendo $K > 0$ a constante que aparece na definição 5.2.1 de distorção limitada. Fazendo uma mudança de variável, obtém-se

$$\int_{\tau(R_i)} \|D\mathcal{F}_i\| dm_d \leq \sigma_\tau \int_{R_i} \|Df\| dm_d + K \int_{R_i} |f| dm_d.$$

Calculemos agora a segunda parcela:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\tau(R_i)} |\mathcal{F}_i| dm_{d-1} &\leq \frac{1}{\beta} \left(\frac{1}{\rho} \int_{\tau(R_i)} |\mathcal{F}_i| dm_d + \int_{\tau(R_i)} \|D\mathcal{F}_i\| dm_d \right) \\ &\leq \frac{1}{\beta\rho} \int_{R_i} |f| dm_d + \frac{1}{\beta} \int_{\tau(R_i)} \|D\mathcal{F}_i\| dm_d \\ &\leq \left(\frac{1}{\beta\rho} + \frac{K}{\beta} \right) \int_{R_i} |f| dm_d + \frac{\sigma_\tau}{\beta} \int_{R_i} \|Df\| dm_d. \end{aligned}$$

Somando as duas parcelas obtém-se

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{L}_\tau f) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\left(\sigma_\tau + \frac{\sigma_\tau}{\beta} \right) \int_{R_i} \|Df\| dm_d + \left(K + \frac{1}{\beta\rho} + \frac{K}{\beta} \right) \int_{R_i} |f| dm_d \right) \\ &\leq \sigma_\tau \left(1 + \frac{1}{\beta} \right) \text{var}(f) + \left(K + \frac{1}{\beta\rho} + \frac{K}{\beta} \right) \int_R |f| dm_d. \end{aligned}$$

Fazendo $C = K + \frac{1}{\beta\rho} + \frac{K}{\beta}$, está provado o resultado para o caso particular $f \in C^1(R)$.

Com vista a generalizar o resultado a $f \in VL(R)$, tomemos uma sucessão de funções $(f_n)_n$ de classe C^1 em R (cuja existência é garantida pela Proposição 3.2.8), tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(f_n) = \text{var}(f).$$

Pelo que já foi visto no caso particular, tem-se que $\mathcal{L}_\tau(C^1(R)) \subset VL(R)$. A sucessão $(\mathcal{L}_\tau f_n)_n$ converge em $\mathcal{L}^1(R)$ para a função $\mathcal{L}_\tau f$ e podemos deduzir que

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{L}_\tau f) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\mathcal{L}_\tau f_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sigma_\tau \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \text{var}(f_n) + C \|f\|_1 \right). \end{aligned}$$

Está provada a existência de C nas condições desejadas. \square

Lema 5.2.4. *Existem duas constantes $0 < \lambda < 1$ e $K > 0$ tais que, para toda a função $f \in VL(R)$ e $i \geq 1$, se tem*

$$\text{var}(\mathcal{L}_\tau^i f) \leq \lambda^i \text{var}(f) + K \|f\|_1.$$

Prova. Sejam $\lambda = \sigma_\tau(1 + \frac{1}{\beta})$ e $f \in VL(R)$. Tendo em conta o lema anterior e o facto de \mathcal{L}_τ ser uma contracção, tem-se

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{L}_\tau^i f) &\leq \lambda \text{var}(\mathcal{L}_\tau^{i-1} f) + K_0 \|f\|_1 \\ &\leq \lambda^2 \text{var}(\mathcal{L}_\tau^{i-2} f) + (\lambda + 1)K_0 \|f\|_1 \leq \dots \\ &\leq \lambda^i \text{var}(f) + (\lambda^{i-1} + \dots + 1)K_0 \|f\|_1. \end{aligned}$$

Tome-se $K = K_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i$ e fica provado o resultado. \square

Teorema 5.2.5. *Seja $\tau : R \rightarrow R$ uma transformação de classe C^2 expansora por partes com ramos longos, tal que $\sigma_\tau(1 + 1/\beta) < 1$. Então, qualquer que seja $f \in L^1(R)$, a sucessão*

$$f_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^i f$$

converge em norma para uma função $f_0 \in VL(R)$ que verifica as seguintes propriedades:

1. $\mathcal{L}_\tau f_0 = f_0$, ou seja, f_0 é um ponto fixo de \mathcal{L}_τ (f_0 é a densidade de uma m.i.a.c.);

$$2. f \geq 0 \Rightarrow f_0 \geq 0;$$

$$3. \int_R f_0 dm_d = \int_R f dm_d.$$

Prova. Sejam $f \in L^1(R)$ e $(f_l)_l$ uma sucessão em $VL(R)$ convergente para f na norma de L^1 . Como $\|\cdot\|_1$ é contínua e $f_l \rightarrow f$, temos que $\|f_l\|_1 \rightarrow \|f\|_1$ na norma de L^1 e podemos supôr que

$$\|f_l\|_1 \leq 2\|f\|_1, \forall l \geq 1.$$

Pelo Lema 5.2.4, temos que

$$\text{var}(\mathcal{L}_\tau^j f_l) \leq \lambda^j \text{var}(f_l) + K\|f_l\|_1 \leq 4K\|f\|_1.$$

Aumentando n , se necessário, temos que

$$\text{var}\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f\right) \leq 4K\|f\|_1.$$

Como as sucessões $(\|f_n\|_1)_n$ e $(\text{var}(f_n))_n$ são limitadas (a primeira por o operador \mathcal{L}_τ ser contractivo e a segunda pela majoração feita), podemos concluir a existência de uma subsucessão $(n_i)_i$ tal que $f_{n_i} \in VL(R)$ e é convergente para uma função \hat{f}_l que também está em $VL(R)$ (ver o Teorema 3.3.5). Ou seja,

$$\exists \hat{f}_l \in VL(R) : \lim_{i \rightarrow \infty} \|1/n_i \sum_{j=0}^{n_i-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l - \hat{f}_l\|_1 = 0.$$

Além disso, pelo Teorema 3.2.4 $(f_{n_i} \in VL(R) \text{ e } f_{n_i} \rightarrow_{L^1} \hat{f}_l)$ temos que

$$\text{var}(\hat{f}_l) \leq \liminf_i \text{var}(f_{n_i}) \leq 4K\|f\|_1.$$

Vamos aplicar exactamente o mesmo argumento à sucessão $(\hat{f}_l)_l \in VL(R)$, para a qual se tem $(\text{var}(\hat{f}_l))_l$ e $(\|\hat{f}_l\|_1)_l$ limitadas.

$(\|\hat{f}_l\|_1)$ é limitada pois $\|f_{n_i}\|_1$ é limitada e convergente para $\|\hat{f}_l\|_1$.

Podemos aplicar o Teorema 3.3.5 à sucessão $(\hat{f}_l)_l$ e concluir a existência de uma subsucessão $(l_i)_i$ tal que $(\hat{f}_{l_i})_i$ convergente na norma $\|\cdot\|_1$ para uma função \hat{f} de variação limitada:

$$\hat{f}_{l_i} \rightarrow \hat{f} \in VL(R) \text{ na norma de } L^1.$$

Além disso, pelo Teorema 3.2.4 $(\hat{f}_{l_i} \in VL(R) \text{ e } \hat{f}_{l_i} \rightarrow \hat{f} \text{ na norma de } L^1)$, tem-se

$$\text{var}(\hat{f}) \leq \liminf_i \text{var}(\hat{f}_{l_i}) \leq 5K\|f\|_1.$$

A “dupla desigualdade triangular” que se segue, permite concluir que existe uma sucessão $(n_m)_m \rightarrow \infty$ para a qual se tem

$$\frac{1}{n_m} \sum_{j=0}^{n_m-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l \rightarrow \hat{f} \text{ na norma de } L^1.$$

“dupla desigualdade triangular”:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l - \hat{f} \right\|_1 &= \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l - \hat{f} - \hat{f}_i + \hat{f}_i \right\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l - \hat{f}_i \right\|_1 + \|\hat{f}_i - \hat{f}\|_1 \\ &\rightarrow \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l - \hat{f}_i - \hat{f}_l + \hat{f}_l \right\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f_l - \hat{f}_l \right\|_1 + \|\hat{f}_l - \hat{f}_i\|_1 \rightarrow_{L^1} 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{n_m} \sum_{j=0}^{n_m-1} (\mathcal{L}_\tau^j f_{l_m} - \mathcal{L}_\tau^j f) \right\|_1 \\ &\leq \frac{1}{n_m} \sum_{j=0}^{n_m-1} \|f_{l_m} - f\|_1 \\ &= \|f_{l_m} - f\|_1 \rightarrow_{L^1} 0 \text{ (pois } f_l \rightarrow f). \end{aligned}$$

Finalmente, podemos concluir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n_m} \sum_{j=0}^{n_m-1} \mathcal{L}_\tau^j f - \hat{f} \right\|_1 = 0,$$

sendo \hat{f} um ponto de acumulação (VL) de $f_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f$. Acabámos de concluir que $(f_n)_n$ é compacta em $L^1(R)$. Pelo Teorema de Kakutani-Yosida 1.2.4, para toda a função f em $L^1(R)$, a sucessão $(f_n)_n$ converge em norma para uma função $f_0 \in L^1$. Pelo Lema 5.2.4 (notando que $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lambda^i \rightarrow_i 0$), tem-se

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \text{var}_R (\mathcal{L}_\tau^k f) \leq C \|f\|_1, \forall f \in VL(R).$$

Consequentemente,

$$\limsup \operatorname{var}_R \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^k f \right) \leq C \|f\|_1, \forall f \in VL(R).$$

Fazendo $P = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^k$, o Teorema 3.3.5 permite concluir que

$$\operatorname{var}_R(Pf) \leq C \|f\|_1, \forall f \in VL(R).$$

Como P é linear e contractivo (por \mathcal{L}_τ o ser), podemos usar de novo o Teorema 3.3.5 e estender o resultado anterior ao fecho do conjunto das funções de variação limitada:

$$\operatorname{var}_R(Pf) \leq C \|f\|_1, \forall f \in L^1(R),$$

concluindo que

$$\operatorname{var}_R \left(\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^k f \right) \leq C \|f\|_1, \forall f \in L^1(R),$$

ou seja, que

$$\operatorname{var}_R(f_0) \leq C \|f\|_1, \forall f \in L^1(R).$$

Logo, a função limite f_0 tem variação limitada em R .

Embora o Teorema de Kakutani-Yosida assegure que a função limite é um ponto fixo de \mathcal{L}_τ , vamos demonstrar esse facto directamente:

$$\lim_n f_n = f_0 \in L^1(R).$$

Como o operador de Perron-Frobenius \mathcal{L}_τ é contínuo, tem-se

$$\mathcal{L}_\tau f_n \rightarrow \mathcal{L}_\tau f_0 \text{ na norma de } L^1.$$

Mas, por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\tau f_n &= \mathcal{L}_\tau \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f - \frac{1}{n} \mathcal{L}_\tau^0 f + \frac{1}{n} \mathcal{L}_\tau^n f. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}_\tau^0 f = 1$ e $\mathcal{L}_\tau^n f$ é limitado, as parcelas $\frac{1}{n} \mathcal{L}_\tau^0 f$ e $\frac{1}{n} \mathcal{L}_\tau^n f$ tendem para zero quando $n \rightarrow \infty$. Consequentemente,

$$\mathcal{L}_\tau f_0 = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}_\tau^j f = \lim_n f_n = f_0.$$

As propriedades 2. e 3. do enunciado são consequências directas dos pontos 2. e 4. da Proposição 5.1.3. \square

Apêndice A

A.1 Funções regularizantes

Neste apêndice define-se, para uma função integrável f , uma família de funções f_ε com comportamento semelhante ao de f , mas com a vantagem de terem domínios mais diferenciáveis. Serão demonstradas algumas propriedades fundamentais de tais famílias que ilustram precisamente essa característica e são usadas na prova de alguns resultados ao longo deste trabalho.

Definição A.1.1. Uma função $\eta(x)$ diz-se um *regularizante simétrico positivo* se verificar:

1. $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$;
2. $\eta(x)$ vale zero fora de um subconjunto compacto de $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}$;
3. $\int \eta(x) dm_d = 1$;
4. $\eta(x) \geq 0$;
5. $\eta(x)$ é uma função par.

Se não verificar as duas últimas condições, $\eta(x)$ diz-se apenas um *regularizante*.

A função C^∞ $\eta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases},$$

sendo a constante C tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \eta(x) dm_d = 1$ é um regularizante simétrico positivo. Para cada regularizante define-se a respectiva *família regularizante*

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

e, para $f \in L^1_{loc}(U)$, define-se

$$f_\varepsilon = \eta_\varepsilon * f$$

como

$$f_\varepsilon(x) = \int_U \eta_\varepsilon(x-y)f(y) dy, \text{ sendo } x \in A_\varepsilon = \{x \in U : d(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

A operação $*$ chama-se *convolução*. À função regularizante atrás definida chamaremos *regularizante canónico* e à respectiva família regularizante *família regularizante canónica*.

Na proposição que se segue, η_ε denotará a família regularizante canónica e f_ε a respectiva convolução.

Proposição A.1.2. *Seja $(f_\varepsilon)_\varepsilon$ a família canónica regularizante de f .*

1. $f_\varepsilon \in C^\infty(A_\varepsilon)$ para todo o $\varepsilon > 0$;
2. Se $f \in C(U)$, então $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente nos subconjuntos compactos de U ;
3. Se $f \in L^1_{loc}(U)$, então $f_\varepsilon \rightarrow f$ em $L^1_{loc}(U)$;
4. $f_\varepsilon \rightarrow f$ q.t.p. ;
5. Se $f \in C^1(U)$, então $\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i}$ em A_ε , $i = 1, \dots, d$;
6. Se $A \leq f \leq B$, então $A \leq f_\varepsilon \leq B$;
7. Se $\text{spt}(f) \subset A$, então $\text{spt}(f_\varepsilon) \subset \{x : d(x, A) \leq \varepsilon\}$;
8. $\int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon g dm_d = \int_{\mathbb{R}^d} f g_\varepsilon dm_d$.

Prova.

1. Fixe-se $x \in A_\varepsilon$, escolha-se $1 \leq i \leq d$ e denote-se por e_i o vector $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ com todas as coordenadas iguais a zero excepto a i -ésima. Então, para $|h|$ suficientemente pequeno e $x + he_i \in A_\varepsilon$ pode-se calcular

$$\begin{aligned} \frac{f_\varepsilon(x + he_i) - f_\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_U \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_V \frac{1}{h} \left[\eta \left(\frac{x + he_i - y}{\varepsilon} \right) - \eta \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) \right] f(y) dy, \end{aligned}$$

para V tal que $\bar{V} \subset U$. Quando $h \rightarrow 0$, a diferença converge para

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \left(\frac{x - y}{\varepsilon} \right) = \varepsilon^d \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y),$$

para cada $y \in V$. Além disso, o valor absoluto do integral é majorado por

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{supess}(D\eta)|f| \in L^1(V).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_\varepsilon(x + he_i) - f_\varepsilon(x)}{h}$$

existe e é igual a

$$\int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x - y) f(y) dy.$$

Usando o mesmo argumento, prova-se que as sucessivas derivadas parciais de f_ε existem e são contínuas em cada ponto de A_ε , sendo $f_\varepsilon \in C^\infty$.

Provemos agora 2:

Dado V tal que $\bar{V} \subset U$, escolha-se W tal que $V \subset W \subset U$. Então, para cada $x \in V$,

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B(x, \varepsilon)} \eta\left(\frac{x - y}{\varepsilon}\right) f(y) dy = \int_{B(0,1)} \eta(z) f(x - \varepsilon z) dz.$$

Como $\int_{B(0,1)} \eta(z) dz = 1$, tem-se

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z) - f(x)| dz.$$

Se f for uniformemente contínua em W , esta majoração permite concluir que $f_\varepsilon \rightarrow f$ uniformemente em V , o que prova 2.

Para demonstrar 3, tome-se $f \in L^1_{loc}(U)$. Para V e W tais que $\bar{V} \subset W$ e $\bar{W} \subset U$ e para $x \in V$ e ε suficientemente pequeno,

$$|f_\varepsilon(x)| \leq \int_{B(0,1)} \eta(z) |f(x - \varepsilon z)| dz.$$

Por conseguinte,

$$\int_V |f_\varepsilon(x)| dm_d \leq \int_{B(0,1)} \eta(z) \left(\int_V |f(x - \varepsilon z)| dm_d \right) dz \leq \int_W |f(y)| dy. \quad (\text{A.1})$$

Fixe-se $\delta > 0$. Como $f \in L^1(W)$, existe $g \in C(\bar{W})$ tal que

$$\|f - g\|_{L^1(W)} \leq \delta.$$

De acordo com (A.1),

$$\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^1(V)} \leq \delta.$$

Consequentemente,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(V)} \leq 2\delta + \|g_\varepsilon - g\|_{L_1(V)} \leq 3\delta,$$

desde que ε seja suficientemente pequeno, de acordo com 2. Está demonstrado 3.

Para demonstrar o ponto 4 do enunciado, comecemos por supôr que $f \in L^1_{loc}(U)$. Pelos cálculos já feitos, tem-se

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)| dy \\ &\leq \alpha(d) \operatorname{supess}(\eta) \int_{B(x,\varepsilon)} |f - f(x)| dy = o(1) \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Com vista a provar o ponto 5, suponhamos que $f \in C^1_{loc}(U)$. Pelos cálculos que já foram feitos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_i} &= \int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y) f(y) dy \\ &= - \int_U \frac{\partial \eta_\varepsilon}{\partial y_i}(x-y) f(y) dy = \int_U \eta_\varepsilon(x-y) \frac{\partial f}{\partial y_i}(y) dy \\ &= \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_i}(x), \text{ para } x \in A_\varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova 5.

6 é consequência de 4.

Para demonstrar 7, suponhamos que $\operatorname{spt}(f) \subset A$. Então, se $d(x, A) > \varepsilon$, $f(x) = 0$. Ora,

$$\operatorname{spt}(f_\varepsilon) = \left\{ x : \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) dy \neq 0 \right\} \subset \{x : d(x, A) \leq \varepsilon\},$$

caso contrário, teríamos $f = 0$ e, consequentemente, $f_\varepsilon = 0$.

Finalmente, se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f_\varepsilon g \, dm_d(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \, dm_d(y) g(x) \, dm_d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_U \eta_\varepsilon(x-y) f(y) g(x) \, dm_d(y) \, dm_d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_U f(x) \eta_\varepsilon(x-y) g(y) \, dm_d(y) \, dm_d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \int_U \eta_\varepsilon(x-y) g(y) \, dm_d(y) \, dm_d(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f g_\varepsilon \, dm_d. \end{aligned}$$

Está provado 8. □

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York (1976).
- [2] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Van Nostrand, New York, (1965).
- [3] J. F. Alves, *SRB measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, 33 (2000), 1-32.
- [4] J. F. Alves, *Apontamentos da disciplina de Complementos de Análise*, Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações, FCUP, (1998/1999).
- [5] J. F. Alves, M. Viana *Statistical stability for robust classes of maps with non-uniform expansion*, to appear in Ergod. Th. Dynam. Sys.
- [6] J. F. Alves, C. Bonatti, M. Viana, *SRB measures for partially hyperbolic systems with mostly expanding central direction*, to appear in Invent. Math.
- [7] J. Ding, W. E. Hornor, *A new approach to Frobenius-Perron operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 187, issue 3, (1994).
- [8] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publ. Inc., New York, (1964).
- [9] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [10] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, (1969).
- [11] J. C. Ferreira, *Introdução à Teoria das Distribuições*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, (1990).
- [12] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhauser, Basel, 1984.
- [13] P. Góra, A. Boyarsky, *Absolutely continuous invariant measures for piecewise expanding C^2 transformations in \mathbb{R}^n* , Israel J. Math. 67 (1989) 272-286.

- [14] P. Góra, A. Boyarsky, *On functions of bounded variation in higher dimensions*, Amer. Math. Month. 99 (2) (1992) 159-160.
- [15] P. Góra, A. Boyarsky, *Laws of Chaos*, Birkhauser, Boston, (1997).
- [16] A. Lasota, J. A. Yorke, *On the existence of invariant measures for piecewise monotonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. 186 (1973) 481-488.
- [17] A. Machado, *Introdução à Análise Funcional*, Escolar Editora, Lisboa, (1991).
- [18] A. Machado, *Geometria Diferencial, uma Introdução Fundamental*, Escolar Editora, Lisboa, (1991).
- [19] D. Mitrovic, D. Zubrinic, *Fundamentals of Applied Functional Analysis*, Longman, (1998).
- [20] I.P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Frederick Ungar, New York, (1955).
- [21] J. T. Oden, L. F. Demkowicz, *Applied Functional Analysis*, CRC Press , Boca Raton, (1996).
- [22] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Academic Press, San Diego, (1980).
- [23] F. Riesz, B. Nagy, *Functional Analysis*, Dover, New York, (1990)
- [24] H. L. Royden, *Real Analysis*, Prentice Hall, New Jersey, (1988).
- [25] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, (1987).
- [26] Marek Rychlik, *Bounded variation and invariant measures*, St. Math., T. LXXVI (1983).
- [27] Y. G. Sinai, *Dynamical Systems II*, Springer-Verlag, New York, (1989).
- [28] Robert Strichartz, *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, CRC Press, Boca Raton, (1994).
- [29] M. Viana, *Stochastic dynamics of deterministic systems*, Brazillian Math. Colloquium, IMPA, (1997).
- [30] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Dover, New York, (1965).