por **Mário António Rodrigues Grande Abrantes**
[Departamento de Matemática da Escola Superior de Tecnologia e de Gestão, Instituto Politécnico de Bragança]

Moeda Universal

Através de um só lançamento de uma moeda equilibrada podemos realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis e equiprováveis. No texto é apresentado um algoritmo que generaliza este procedimento para o caso em que os dois resultados possíveis têm probabilidades quaisquer, p e q, $p+q=1$.

1. Introdução

Através do lançamento de uma moeda equilibrada podemos realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis e equiprováveis.

Exemplo:

A senha de almoço numa cantina permite escolher um prato de peixe ou um prato de carne. No caso de alguém estar indeciso sobre a escolha a fazer pode recorrer ao lançamento de uma moeda equilibrada, depois de previamente associar 'carne' a uma face e 'peixe' à outra.

Considere-se agora o seguinte problema. O João costuma estudar com a Maria ou com a Paula. Um dia resolve convidar uma delas para ir ao cinema, mas está indeciso sobre quem convidar. "Vou atirar uma moeda ao ar", diz para si mesmo, retirando uma moeda do bolso. Mas detém-se por uns instantes e põe em causa a justeza do procedimento: "no último mês estudei cinco vezes com elas, duas das quais com a Maria e as restantes três com a Paula. Parece-me mais justo convidar a Paula", pensou. E continuou com os seus pensamentos, olhando para a moeda que tinha na mão. "O que me dava jeito era uma moeda desequilibrada de cujo lançamento pudesse resultar uma das faces, com probabilidade 2/5, que eu associava à Maria, ou a outra face, com probabilidade 3/5, que eu associava à Paula." Foi então que lhe ocorreu a questão: "Haverá maneira de fazer a escolha por meio de lançamentos de uma moeda equilibrada, respeitando as probabilidades dos resultados Maria e Paula?"

A secção 2 deste texto apresenta um algoritmo muito simples, cuja execução permite fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, com probabilidades p e q, $p + q = 1$. Designamos este algoritmo por *Moeda Universal*. A sua execução requer apenas a representação na base 2 de uma qualquer das probabilidades envolvidas e uma moeda equilibrada. O algoritmo *Moeda Universal* fornece uma interpretação interessante do desenvolvimento na base 2 de um número real r, $0<r<1$.

2. Algoritmo para realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, com probabilidades p e q, $p+q=1$, por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada.

Vamos descrever o procedimento para o caso do problema do João, salientando os seus pontos essenciais. Cada etapa do procedimento consiste

Figura 1

no lançamento de uma moeda equilibrada e na interpretação do resultado obtido, por meio de um rectângulo desenhado previamente. Cada rectângulo é dividido em duas partes iguais, que representam cada uma das faces da moeda (figura 1).

Começamos por obter o primeiro rectângulo do processo, representado na figura 2. Para tal, dividimos o rectângulo da figura 1 em cinco partes iguais. Três dessas partes, a cinzento na figura 2, representam o resultado possível Paula. As restantes duas partes, a branco na figura 2, representam o resultado possível Maria. Em cada um dos rectângulos gerados ao longo do processo, as cores cinzento e branco estão sempre associadas aos resultados possíveis Paula e Maria, respectivamente. A metade Cara de cada rectângulo é sempre associada à cor dominante (que pode variar com o decorrer do processo – ver seguimento do exemplo).

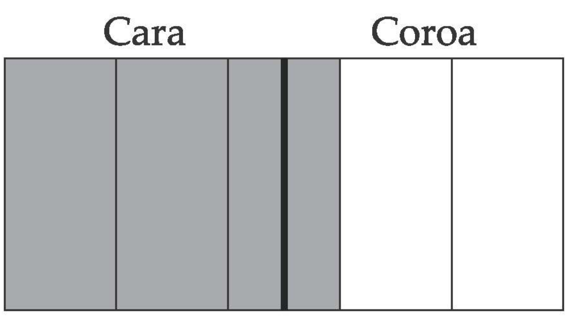

Figura 2

Efectua-se então o primeiro lançamento da moeda, interpretando o seu resultado do seguinte modo:

– Se a face obtida for Cara, então o resultado da escolha é Paula, uma vez que a metade Cara do rectângulo, por ter cor cinzenta, está associada ao resultado Paula. O processo termina;

– Se a face obtida for Coroa, então nada fica decidido, uma vez que a metade Coroa do rectângulo, por ter duas cores, não está associada exclusivamente a um dos resultados possíveis, Paula ou Maria. Neste caso, tem lugar um novo lançamento.

Para interpretar o novo lançamento desenha-se um novo rectângulo, no qual se respeita a proporção branco/cinzento, 4/1, que ocorre na metade Coroa da figura 2, tendo a atenção de fazer corresponder à metade Cara a cor dominante, isto é, a cor branca (figura 3). Se a proporção branco/cinzento fosse 1/1, então qualquer uma das metades do rectângulo ficaria a cinzento e a outra metade a branco.

Se a face obtida no novo lançamento for Cara, então o resultado da escolha é Maria, uma vez que a metade Cara no rectângulo, por ter cor branca, está associada ao resultado Maria. O processo termina. Se a face obtida for Coroa, então tem lugar um novo lançamento que vai ser interpretado num novo rectângulo, no qual se mantém a proporção das áreas das cores na metade Coroa da figura 3, e tudo se repete.

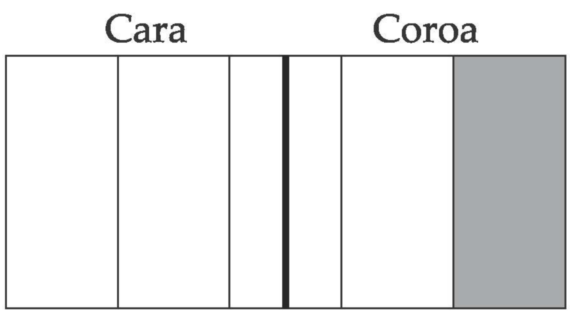

Figura 3

As figuras 4, 5 e 6 representam os três rectângulos seguintes gerados pelo processo, no caso de o resultado dos primeiros quatro lançamentos da moeda ser uma sequência de quatro Coroas. Note-se que os rectângulos das figuras 2 e 6 são iguais, pelo que a sequência de rectângulos é, neste caso, periódica – as representações na base 2 das probabilidades envolvidas são números racionais de período igual a 4.

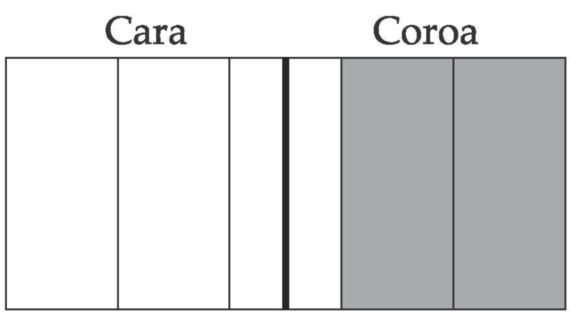

Figura 4

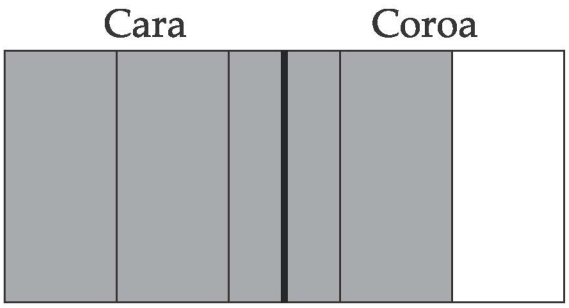

Figura 5

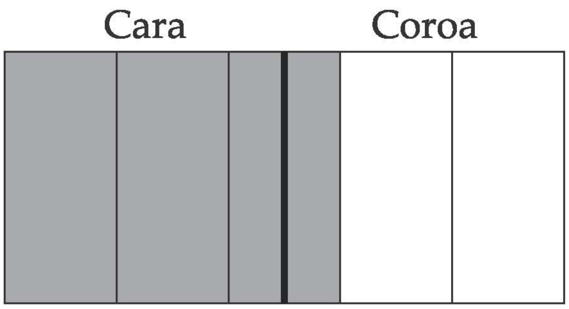

Figura 6

Este processo corresponde à execução do algoritmo seguinte.

Algoritmo 1

Algoritmo para realizar uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, com probabilidades p e q, $p+q=1$, por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada.

1. Considerar um rectângulo como o da figura 1.

a. O rectângulo tem área igual a 1.

b. O rectângulo é preenchido com duas cores, cada uma delas representando um dos dois resultados possíveis.

c. A área correspondente a cada cor é igual à probabilidade do resultado que lhe está associado.

d. A região correspondente a cada cor é um rectângulo.

e. A metade Cara do rectângulo é totalmente preenchida com a cor do resultado de maior probabilidade. Se os resultados tiverem igual probabilidade, então a metade Cara pode ser preenchida com qualquer uma das cores, sendo a metade Coroa preenchida com a outra cor.

f. Designar este rectângulo por R_1. Fazer i=1.

2. Efectuar o i-ésimo lançamento de uma moeda equilibrada e interpretar o resultado usando o rectângulo R_i do seguinte modo:

2.1 Se a face obtida for Cara, então o resultado da escolha é o que está associado à cor da metade Cara de R_i. <u>A execução do algoritmo termina</u>;

2.2 Se a face obtida for Coroa, fazer o seguinte:

2.2.1 Se a metade Coroa de R_i tiver apenas uma cor, então o resultado da escolha é o que está associado a essa cor. <u>A execução do algoritmo termina</u>;

2.2.2 Se a metade Coroa de R_i tiver duas cores, então:

– Somar 1 ao valor de i;

– Obter um novo rectângulo preenchido com as duas cores da metade Coroa de R_{i-1}, na mesma proporção de áreas ocupadas, e respeitando as condições das alíneas 1d e 1e;

– Designar este novo rectângulo por R_i;

– Ir para o passo 2 do algoritmo.

Vamos mostrar que este algoritmo é correcto, i.e., a sua execução representa de facto um processo de escolha aleatória com dois resultados possíveis, de probabilidades p e q.

Para facilitar a exposição que se segue, vamos associar às faces Cara e Coroa da moeda equilibrada os dígitos 1 e 0, respectivamente. Com esta notação, a sequência 0010, por exemplo, lida da esquerda para a direita, representa o resultado Coroa, Coroa, Cara, Coroa, de quatro lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada. Ao longo do texto, representamos um número decimal qualquer, x, na base 2, escrevendo x_2.

Os resultados que se seguem usam a notação e a terminologia do algoritmo 1.

Proposição 1

Se $p,\ q \in R^+$ são tais que $0<p,\ q<1$, $p+q=1$, $p_2=0.d_1,d_2,d_3...$, então q admite uma representação na base dois, $q_2=0.d'_1d'_2d'_3...$, tal que $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\ldots$.

Prova

Fazendo

$$d'_i = 1 - d_i = \begin{cases} 0, \text{ se } d_i = 1 \\ 1, \text{ se } d_i = 0 \end{cases}$$

obtemos $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\ldots$ e $p_2+q_2=0.1(1)=1$.

Como exemplo, sejam $p_2=0.11$ e $q_2=0.01$, $p+q=1$. Podemos representar p e q das formas $p_2=0.10(1)$,

$q_2=0.01(0)$ ou $p_2=0.11(0)$, $q_2=0.00(1)$, de modo a termos $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\ldots$. No seguimento deste texto, assume-se que as representações na base 2 de duas probabilidades, p_2, q_2, com $p+q=1$, são tais que $d_i+d'_i=1$, $i=1,2,3,\ldots$.

Proposição 2

$p_2=0.d_1d_2d_3\ldots$ e $q_2=0.d'_1d'_2d'_3\ldots$ são as probabilidades dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória, então as áreas correspondentes às cores p e q do rectângulo R_i, $i=1,2,3,\ldots$, em que é interpretado o resultado do i-ésimo lançamento de uma moeda equilibrada, são iguais a $p^i_2=0.d_id_{i+1}d_{i+2}\ldots$ e $q^i_2=0.d_id_{i+1}d_{i+2}\ldots$, $i=1,2,3,\ldots$, respectivamente.

Prova

A prova vai ser feita por indução sobre o número i de lançamentos. A proposição é válida para $i=1$, uma vez que no rectângulo inicial, R_1, as áreas correspondentes às cores p e q são $p_2=p^1_2=0.d_1d_2d_3\ldots$ e $q_2=q^1_2=0.d_1d_2d_3\ldots$, respectivamente. Tomemos agora como hipótese de indução a validade da proposição para $i=k$, ou seja, as áreas associadas às cores p e q no rectângulo R_k são $p^k_2=0.d_kd_{k+1}d_{k+2}\ldots$ e $q^k_2=0.d'_kd'_{k+1}d'_{k+2}\ldots$, respectivamente. Vamos mostrar que, no caso de ter lugar um novo lançamento, o (k+1)-ésimo, o seu resultado vai ser interpretado no rectângulo R_{k+1}, com as áreas $p^{k+1}_2=0.d_{k+1}d_{k+2}d_{k+3}\ldots$ e $q^{k+1}_2=0.d'_{k+1}d'_{k+2}d'_{k+3}\ldots$, associadas às cores p e q, respectivamente.

Estamos a supor que o resultado em cada um dos primeiros k lançamentos é Coroa (senão não haveria lugar a um (k+1)-ésimo lançamento). Suponhamos também, sem perda de generalidade, que $p^k_2>q^k_2$ (a metade Cara do rectângulo R_k é totalmente preenchida com a cor de p). Podemos afirmar o seguinte:

– A área correspondente à cor p na metade Coroa do rectângulo R_k é igual a $p^k_2-\dfrac{1}{2}=0.0d_{k+1}d_{k+2}\cdots$;

– A área correspondente à cor q na metade Coroa do rectângulo R_k é igual a $q^k_2=0.d'_{k+1}d'_{k+2}\ldots$;

– Quando se constrói o rectângulo R_{k+1}, o que se faz é atribuir a cada uma das cores o dobro da área que lhe corresponde na metade Coroa do rectângulo R_k (ver subpasso 2.2.2 do algoritmo 1). Notemos que multiplicar por 2 um número na base 2 corresponde a deslocar uma casa para a esquerda, em relação à vírgula, toda a sequência fraccionária do número. Neste caso temos:

$$2\left(p^k-\frac{1}{2}\right)=0.d_{k+1}d_{k+2}\cdots=p_2^{k+1}$$

e

$$2q^k=0.d'_{k+1}d'_{k+2}\cdots=q_2^{k+1}$$

Concluímos que as áreas associadas a p e q, no rectângulo R_{k+1}, são iguais a p^{k+1}_2 e q^{k+1}_2, respectivamente, o que completa a prova por indução.

A proposição seguinte é consequência da anterior.

Proposição 3

Se $p_2=0.d_1d_2d_3\ldots$ e $q_2=0.d'_1d'_2d'_3\ldots$ são as probabilidades dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória, então a metade Cara do rectângulo R_i, no qual é interpretado o resultado do i-ésimo lançamento de uma moeda equilibrada, está associada a p, se $d_1=1$, ou a q, se $d'_1=1$, $i=1,2,3\ldots$.

Prova

Da proposição 2 sabemos que as áreas associadas a p e q no rectângulo R_i são $p^i_2=0.d_id_{i+1}d_{i+2}\ldots$ e $q^i_2=0.d'_id'_{i+1}d'_{i+2}\ldots$, $i=1,2,3\ldots$, respectivamente.

Por ser $d_i\neq d'_i$ e

$$\max(p_2^i,q_2^i)=\begin{cases}p^i_2, \text{ se } d_i=1\\ q^i_2, \text{ se } d'_i=1\end{cases}$$

e também pelo facto de a cor da metade Cara de R_i ser a que corresponde à maior área, decorre a validade da proposição.

Proposição 4

Se A é um dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória e $p_2=0.d_1d_2d_3\ldots$ a probabilidade que lhe está associada, então a probabilidade de a execução do algoritmo terminar com a escolha de A no i-ésimo lançamento da moeda é igual a $\dfrac{d_i}{2^i}$, $i=1,2,\cdots$

Prova

Da proposição 3 sabemos que se $d_i=0$ então a metade Cara de R_i está associada a q, pelo que a probabilidade de o resultado da escolha ser A no i-ésimo lançamento é igual a 0, i.e., igual a $\dfrac{0}{2^i}=\dfrac{d_i}{2^i}$. Se $d_i=1$, então a metade Cara de R_i está associada a p. Existem 2^i sequências de 0s e 1s com comprimento i.

Só uma delas, 00...01, corresponde à obtenção de Coroa em cada um dos primeiros i-1 lançamentos e de Cara no i-ésimo lançamento, pelo que a probabilidade de o resultado da escolha ser A no i-ésimo lançamento é igual a $\frac{1}{2^i} = \frac{d_i}{2^i}$.

A proposição seguinte mostra que o algoritmo é correcto.

Proposição 5

Se A é um dos dois resultados possíveis de uma escolha aleatória e p_2=0.$d_1 d_2 d_3$... a probabilidade que lhe está associada, então:

a) A probabilidade de a execução do algoritmo terminar com a escolha de A, em não mais de i lançamentos, é igual a $\sum_{k=1}^{i} \frac{d_k}{2^k}$;

b) A probabilidade de a execução do algoritmo terminar com a escolha de A tende para p quando consideramos sequências de lançamentos cujo comprimento tende para infinito.

Prova

a) Consequência imediata da proposição 4.

b) $\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{d_i}{2^i} = p$

A proposição seguinte garante que o algoritmo 1 termina.

Proposição 6

Qualquer execução do algoritmo 1 termina.

Prova

Toda a execução do algoritmo termina quando o resultado do lançamento da moeda é Cara. A probabilidade de tal acontecer tende para 1 com o número de lançamentos.

As proposições anteriores permitem-nos reescrever o algoritmo atrás apresentado sem recorrer a figuras, utilizando apenas uma moeda equilibrada e a representação na base 2 de uma das duas probabilidades envolvidas. Designamos por *Moeda Universal* esta nova forma do algoritmo. A moeda é lançada até resultar a face que se associou a 1 (escolhida previamente). Se tal sucede no i-ésimo lançamento, então o resultado da escolha é o correspondente à probabilidade cujo i-ésimo dígito da parte fraccionária é igual a 1.

Algoritmo 2: *Moeda Universal*

Algoritmo de escolha aleatória com dois resultados possíveis, designados por A e B, com probabilidades p e q, respectivamente, $p + q = 1$ por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada. Sejam p_2=0.$d_1 d_2 d_3$... e q_2=0.$d'_1 d'_2 d'_3$..., tais que d_1+d'_1=1, i=1,2,3... .

1. Numerar as faces da moeda com 0 e 1.
2. Seja i=1.
3. Efectuar o i-ésimo lançamento da moeda. Seja R o número da face resultante.
4. Se R=0, então somar 1 ao valor de i. Ir para o passo 3 do algoritmo.
5. Se R=1, então o resultado da escolha é A (B) se d_1=1(d_1=0). A execução do algoritmo termina.

Exemplo 1

Fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, de probabilidades $p = \frac{1}{5}$ e $q = \frac{4}{5}$.

Na base 2 temos p_2=0.0011(0011) e q_2=0.1100(1100). Podemos efectuar lançamentos sucessivos da moeda até surgir a primeira Cara (1), utilizando depois a sequência obtida para executar o algoritmo. Consideremos a sequência de lançamentos correspondente a 001 (da esquerda para a direita). A execução do algoritmo envolve os seguintes passos:

Passo 2. i=1
Passo 3. R=0
Passo 4. i=2
Passo 3. R=0
Passo 4. i=3
Passo 3. R=1
Passo 5. R=1=d_3

A execução do algoritmo termina com o resultado associado a p.

Se as probabilidades envolvidas forem iguais, então a execução do algoritmo 1 necessita apenas de um lançamento. Neste caso, porém, o algoritmo 2 é menos eficiente do que a comum escolha com um único lançamento da moeda, podendo ser necessários vários lançamentos para efectuar a escolha.

Exemplo 2

Fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, de probabilidades p_2=0.1(0) e q_2=0.0(1), $p = q = \frac{1}{2}$.

Se o resultado associado a p não é escolhido no primeiro lançamento, então o algoritmo termina com o resultado associado a q, uma vez que $p_2=0.d_1d_2d_3...$, com $d_i=0$, i=2,3,....

Comentário final

Outra forma de fazer uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, por meio de lançamentos sucessivos de uma moeda equilibrada, foi sugerida por um leitor de uma versão inicial deste texto, e consiste em tomar os resultados dos lançamentos da moeda para gerar um número aleatório r, $0 < r < 1$, sendo o resultado da escolha p, se $r < p$, ou q, se $r > p$. O algoritmo correspondente é o seguinte. Seja $p_2=0.d_1d_2d_3....$ Designar os resultados dos sucessivos lançamentos da moeda por d'_i, i=1,2,3,.... Se for $d'_i=d_i$ então fazer um novo lançamento; se for $d'_i \neq d_i$,então escolher p se $d'_i<d_i$, ou q se $d'_i>d_i$.

Exemplo 3

Seja $p_2=0.011\overline{011}$. Se o resultado dos três primeiros lançamentos for 010, então temos $d'_3<d_3$ e o resultado da escolha é p; se o resultado dos quatro primeiros lançamentos for 0111, então $d'_4>d_4$ e o resultado da escolha é q.

Existe uma diferença entre este algoritmo e o algoritmo *Moeda Universal*, que torna o último vantajoso. O exemplo 3 mostra que a execução do algoritmo agora apresentado pode terminar com o resultado Cara ou com o resultado Coroa, pelo que a sequência de lançamentos da moeda, só por si, não contém informação suficiente para marcar o final da execução (este depende também dos dígitos de p). Na execução do algoritmo *Moeda Universal*, no entanto, o número de lançamentos a efectuar é independente das probabilidades envolvidas (os lançamentos terminam quando resulta o primeiro 1). Esta independência do critério de paragem, em relação aos objectos da escolha, caracteriza o algoritmo *Moeda Universal* e justifica a sua designação, dado ser também uma propriedade de uma escolha aleatória com dois resultados possíveis, equiprováveis, por meio de um só lançamento de uma moeda equilibrada.

A razão de ser desta diferença entre os dois algoritmos é a seguinte: o algoritmo apresentado neste comentário final procede por comparações dos resultados dos sucessivos lançamentos da moeda, com os dígitos binários da parte fraccionária de uma das probabilidades envolvidas d_1, d_2, d_3,... , enquanto o algoritmo *Moeda Universal* usa, para esta comparação, não os dígitos binários da parte fraccionária de uma das probabilidades envolvidas, mas sim os dígitos binários de uma sequência infinita de zeros (quaisquer que sejam as probabilidades envolvidas). Esta sequência de zeros funciona como uma sequência canónica para a escolha.

O interesse do algoritmo *Moeda Universal* reside na interpretação que sugere da parte fraccionária binária de um número positivo menor do que 1, e também na particularidade do critério de paragem referida neste comentário final. Questões de eficiência computacional não foram consideradas.

O autor agradece, por antecipação, todos os comentários dos leitores. Em particular, agradece todas as referências bibliográficas de publicações que apresentem um algoritmo idêntico ao que neste texto se designa por *Moeda Universal*.

A bibliografia abaixo indicada tem por finalidade permitir ao leitor esclarecer eventuais questões sobre fundamentos de probabilidades ([1], Capítulo VII) e representação de números na base 2 ([2], Capítulo 2). M

Referências

[1] **Silva, José Sebastião e** (1978), *Compêndio de Matemática*, 1.º vol., 2.º tomo.

[2] **Sandige, Richard S.** (1990), *Modern Digital Design*, McGraw-Hill Publishing.