

# INFLUÊNCIA DA PRESSÃO INTERNA NA RIGIDEZ DE SISTEMAS TUBULARES. DESENVOLVIMENTO NUMÉRICO.

Elza Fonseca<sup>1</sup>, Francisco Queirós de Melo<sup>2</sup> e Carlos Magalhães Oliveira<sup>3</sup>

## RESUMO

*Em engenharia o uso de elementos tubulares é frequente. Estas estruturas submetidas a diversos carregamentos exigem uma análise cuidada do seu comportamento. No projecto de sistemas tubulares é importante a análise do efeito da pressão interna, por diminuir a flexibilidade dos elementos aumentando por isso a rigidez da estrutura. Apresenta-se o desenvolvimento de uma formulação para a caracterização da deformação em sistemas tubulares de parede fina usando o método dos elementos finitos. Desenvolveu-se um elemento de 2 nós, com base num campo de deslocamentos para uma casca. Apresenta-se uma formulação para obtenção da matriz rigidez de forma a poder considerar-se o efeito da pressão interna. Apresentam-se casos numéricos para cálculo do factor flexibilidade e campo de deslocamentos em estruturas submetidas a pressão interna.*

## 1 - FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE TUBO TRIDIMENSIONAL

### 1.1 - Definição geométrica do elemento finito tubular com dois nós

Para o desenvolvimento deste elemento foram incluídas na formulação algumas hipóteses simplificativas: a espessura é considerada muito pequena quando comparada com o raio da secção transversal, medido em relação à espessura média; o raio da secção é considerado muito inferior ao raio de curvatura do círculo médio; a deformação circunferencial é considerada nula,  $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = 0$ , ou seja a superfície média é transversalmente

inextensível como proposto inicialmente por Love, 1944 e a contribuição da flexão segundo a direcção longitudinal é considerada desprezável, pelo que o problema será resolvido com base na teoria de semi-membrana. Os parâmetros geométricos considerados para a definição do elemento são o comprimento do arco curvo ( $s$ ), o raio de curvatura média ( $R$ ), a espessura ( $h$ ), o raio da secção recta do tubo ( $r$ ) e o ângulo ao centro ( $\alpha$ ), como se verifica na figura 1.

Os deslocamentos  $u$ ,  $v$  e  $w$  são calculados à superfície da casca do elemento estrutural, função da definição de um campo de deslocamentos sobre a linha média do arco do tubo ( $U$ ,  $W$  e  $\varphi$ ). Estes parâmetros estão relacionados entre si através de expressões diferenciais simples que são consequência directa da teoria de flexão de vigas de secção transversal indeformável. Constituem hipóteses simplificativas consideradas por Melo e Castro, 1992 e por Thomson,

<sup>1</sup> CENUME - IDMEC, Instituto Politécnico de Bragança.

<sup>2</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro.

<sup>3</sup> Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade Engenharia da Universidade do Porto.

1980. Na 1ª hipótese a rotação de cada secção está associada ao deslocamento transversal  $W$  através da equação diferencial, à semelhança da teoria de Euler-Bernoulli:

$$\varphi = \frac{dW}{ds} \quad (1)$$

Na 2ª hipótese, considerando que a solicitação se refere à flexão de uma viga curva no plano de curvatura o deslocamento tangencial  $U$  relaciona-se com  $W$  admitindo que o eixo curvo baricentrico é de perímetro constante (inextensível):

$$W = -\frac{dU}{ds}R \quad (2)$$

A curvatura é dada pela expressão:

$$k_s = \frac{d^2W}{ds^2} \quad (3)$$

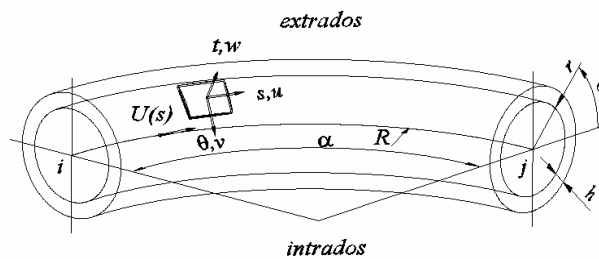


Fig. 1 – Parâmetros geométricos do elemento de tubo

O campo de deslocamentos a obter é sobre a linha média do arco considerado como elemento de viga rígida:  $U_x$  é o deslocamento tangencial,  $U_y$  e  $U_z$  deslocamentos transversos,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  e  $\varphi_z$  as rotações nas direcções de cada eixo, conforme se representa na figura 2a e 2b, para o plano do elemento e fora do plano do elemento, apresentado por Fonseca *et all*, 2003.

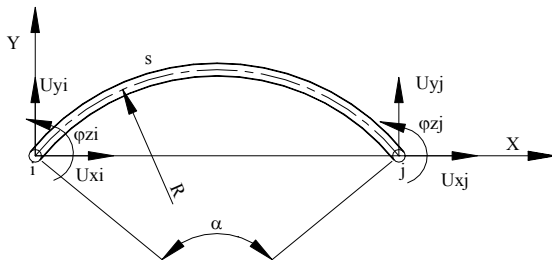


Fig. 2a – Graus de liberdade no plano

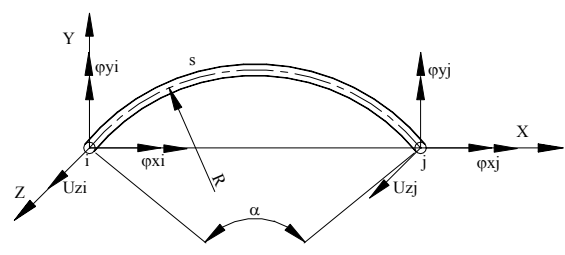


Fig. 2b – Graus de liberdade fora do plano

Quando o elemento de tubo tem deslocamentos no plano considerou-se uma formulação de alta ordem do tipo viga curva, sendo necessários seis parâmetros para definir o campo de deslocamentos.  $U$  pode ser aproximado pelo seguinte polinómio de 5ª ordem:

$$U_{(s)} = a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \quad (4)$$

Os coeficientes são determinados em função de condições de fronteira impostas, à passagem de um elemento considerado recto, num sistema local  $(X, Y)$ , para o referencial curvo  $(s)$ , conforme a figura 2a. Nestas condições, o campo de deslocamentos genérico determinado no sistema local, designado por sub índice  $IN$ , é função das seguintes equações:

$$U_{(s)IN} = (U_{xi}N_{xi} + U_{xj}N_{xj}) + (U_{yi}N_{yi} + U_{yj}N_{yj}) + (\varphi_{zi}N_{zi} + \varphi_{zj}N_{zj}) \quad (5a)$$

$$W_{(s)IN} = -R((U_{xi}N'_{xi} + U_{xj}N'_{xj}) + (U_{yi}N'_{yi} + U_{yj}N'_{yj}) + (\varphi_{zi}N'_{zi} + \varphi_{zj}N'_{zj})) \quad (5b)$$

$$\varphi_{(s)IN} = -R \left( (U_{xi} N''_{xi} + U_{xj} N''_{xj}) + (U_{yi} N''_{yi} + U_{yj} N''_{yj}) + (\varphi_{zi} N''_{zi} + \varphi_{zj} N''_{zj}) \right) \quad (5c)$$

As funções de forma são determinadas de acordo com as expressões:

$$N_{xi} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{R} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) s + \left( -\frac{10}{L^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{6}{RL^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^3 + \left( \frac{15}{L^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{8}{RL^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^4 + \left( -\frac{6}{L^5} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3}{RL^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^5 \quad (6)$$

$$N_{xj} = \left( \frac{10}{L^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{4}{RL^2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^3 + \left( -\frac{15}{L^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{7}{RL^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^4 + \left( \frac{6}{L^5} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{RL^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^5 \quad (7)$$

$$N_{yi} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{R} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) s + \left( -\frac{10}{L^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{6}{RL^2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^3 + \left( \frac{15}{L^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{8}{RL^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^4 + \left( -\frac{6}{L^5} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{RL^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^5 \quad (8)$$

$$N_{yj} = \left( -\frac{10}{L^3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{4}{RL^2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^3 + \left( \frac{15}{L^4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{7}{RL^3} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^4 + \left( -\frac{6}{L^5} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3}{RL^4} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) s^5 \quad (9)$$

$$N_{zi} = -\frac{1}{2R} s^2 + \frac{3}{2LR} s^3 - \frac{3}{2L^2 R} s^4 + \frac{1}{2L^3 R} s^5 \quad (10)$$

$$N_{zj} = -\frac{1}{2LR} s^3 + \frac{1}{L^2 R} s^4 - \frac{1}{2L^3 R} s^5 \quad (11)$$

O campo de deslocamentos genérico para fora do plano, designado pelo sub índice *OUT*, no sistema local do elemento, é função das seguintes equações:

$$W_{(s)OUT} = U_{zi} N_1 - \varphi_{yi} N_2 + U_{zj} N_3 - \varphi_{yj} N_4 \quad (12a)$$

$$\varphi_{(s)OUT} = U_{zi} N'_1 - \varphi_{yi} N'_2 + U_{zj} N'_3 - \varphi_{yj} N'_4 \quad (12b)$$

$$\beta_{(s)OUT} = \varphi_{xi} N_i + \varphi_{xj} N_j \quad (12c)$$

As funções de forma utilizadas referem-se a deslocamentos do tipo viga de terceira e de primeira ordem conforme se representa nas seguintes expressões:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, \quad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \quad N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad \text{e} \quad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (13)$$

$$N_i = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{e} \quad N_j = \frac{x}{L} \quad (14)$$

## 1.2 - Definição do campo de deslocamentos e de deformações

O campo de deslocamentos à superfície da casca é função do deslocamento longitudinal ou tangencial ao longo de  $s$  ( $u$ ), do deslocamento meridional ou tangencial segundo  $\theta$  ( $v$ ) e do deslocamento transversal da casca  $t$  ( $w$ ), conforme a figura 1. Este campo de deslocamentos é obtido por sobreposição de um campo de deslocamentos associado a um tubo de secção circular em que a sua configuração não é alterada para qualquer ponto da secção e por deslocamentos associados à distorção da secção circular por ovalização e empenamento.

A solução apresentada para o cálculo dos deslocamentos de distorção consiste na utilização de um elemento toroidal em que o campo de deslocamentos é definido por combinação de funções lineares, polinómios de 1ª ordem, com desenvolvimentos em série trigonométrica destinados à ovalização e empenamento na secção. O deslocamento da superfície na direcção radial resultante unicamente da ovalização, considerada dentro e fora do plano, conforme definido por Thomson, 1980, é dado pela equação 15.

$$w(s, \theta) = \sum_{i \geq 2} a_i \cos i \theta + \sum_{i \geq 2} \bar{a}_i \sin i \theta \quad (15)$$

O deslocamento meridional resultante da ovalização é obtido através da expressão 16.

$$v(s, \theta) = -\sum_{i \geq 2} \frac{a_i}{i} \sin i\theta + \sum_{i \geq 2} \frac{\bar{a}_i}{i} \cos i\theta \quad (16)$$

Finalmente o deslocamento longitudinal resultante do empenamento da secção é função da seguinte equação:

$$u(s, \theta) = \sum_{i \geq 2} b_i \cos i\theta + \sum_{i \geq 2} \bar{b}_i \sin i\theta \quad (17)$$

A condição de inextensibilidade circunferencial verifica a primeira e a segunda das expressões anteriores em que:

$$w(s, \theta) = -\frac{\partial v(s, \theta)}{\partial \theta} \quad (18)$$

Os termos  $a_i$  e  $\bar{a}_i$  são constantes a determinar função do desenvolvimento da série de Fourier para os termos de ovalização, dentro e fora do plano, respectivamente. As constantes  $b_i$  e  $\bar{b}_i$  também função do desenvolvimento da série de Fourier, resultam dos deslocamentos devidos ao empenamento, para o plano e fora do plano, respectivamente. Sobrepondo este campo de deslocamentos ao do elemento de viga rígida, equações 5 e 12, obtém-se o campo de deslocamentos à superfície de uma casca, conforme as equações seguintes:

$$u = U_{(s)IN} - r \cos \theta \varphi_{(s)IN} - r \sin \theta \varphi_{(s)OUT} + u(s, \theta) \quad (19a)$$

$$v = -W_{(s)IN} \sin \theta + W_{(s)OUT} \cos \theta + r \beta_{(s)OUT} + v(s, \theta) \quad (19b)$$

$$w = W_{(s)IN} \cos \theta + W_{(s)OUT} \sin \theta + w(s, \theta) \quad (19c)$$

O campo de deformação refere-se a deformações de membrana e a variações de curvatura. Foi adoptado um modelo de deformação de semi-membrana e desprezou-se a rigidez à flexão na direcção longitudinal da casca toroidal, considerando-se a flexão meridional resultante da ovalização, conforme proposto por Melo e Castro, 1992, por Flügge, 1973 e Kitching, 1970.

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \gamma_{s\theta} \\ K_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (20)$$

$\varepsilon_s$  representa a deformação longitudinal de membrana,  $\gamma_{s\theta}$  a deformação de corte e  $K_\theta$  é a curvatura meridional relativa à ovalização.

No caso de elementos tubulares rectos utilizaram-se unicamente as funções de Hermite conforme desenvolvimento anterior.

Foram considerados 22 deslocamentos nodais (6 de viga e 16 de distorção), sendo necessário o desenvolvimento em 8 termos na série de Fourier para a ovalização e empenamento.

A matriz rigidez linear elástica foi calculada efectuando integrações exactas em  $s$  e  $\theta$ , conforme a equação 21.

$$[K]_{local} = \int_{s=0}^{s=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} [B]_{local}^T [D][B]_{local} r h ds d\theta \quad (21)$$

$D$  representa a matriz de constantes elásticas e  $B$  é a matriz obtida em função do operador diferencial apresentado na equação 20 multiplicado pelas funções de forma. O termo  $1/R$  é nulo, no caso em que se consideram os termos de viga rígida. Para os termos de ovalização e empenamento o operador diferencial considerado é o referido na mesma equação.

### 1.3 – Desenvolvimento de novas matrizes de rigidez devido à influência da pressão

Para cálculo da pressão interna no tubo, é definida a área diferencial no cálculo do trabalho efectuado por essa pressão sob o efeito da flexão, apresentado por Bathe e Almeida, 1982. A flexão de tubos é efectuada considerando que a secção transversal permanece inextensível. Desta forma, considerando que o comprimento do tubo não se altera, verifica-se uma variação de volume que traduz um acréscimo na energia de deformação do tubo, a partir das forças de pressão. Essa energia sob a forma de trabalho é dado por:

$$W_{P\_CURVA} = p \times \Delta V = - \int_0^L \int_0^{2\pi} p \frac{(R - r \cos \theta) \alpha}{2} dA(s, \theta) ds \quad (22a)$$

$$W_{P\_RECTA} = p \times \Delta V = - \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{p}{2} L dA(s, \theta) ds \quad (22b)$$

$p$  representa a pressão interna,  $(R - r \cos \theta) \alpha$  ou  $L$  representam o comprimento de arco longitudinal para a superfície média do tubo,  $s$  é a coordenada longitudinal e  $dA(s, \theta)$  é a alteração da área da secção recta do tubo. Considerando um elemento diferencial de área antes e depois da ovalização, figura 3, obtém-se a expressão para  $dA(s, \theta)$ .

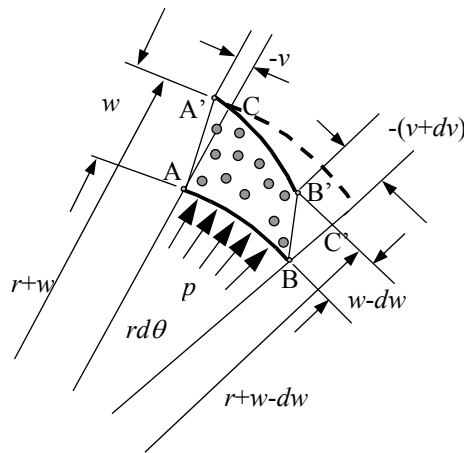


Fig. 3 – Elemento de tubo antes e depois da deformação (por ovalização)

Na figura 3 deve notar-se que o elemento de arco  $AB$  é igual a  $A'B'$ , por se considerar a condição de inextensibilidade. Calculando a área diferencial  $ABA'B'$ , teremos o desenvolvimento conforme a equação 23 (a menos de quantidades de 2ª ordem). Considera-se ainda que  $dv = -wd\theta$  (por ser o tubo inextensível). Portanto a área diferencial obtida representa-se por:

$$\begin{aligned} dA(s, \theta) &= \frac{1}{2}(r+w)(r+w)d\theta - \frac{1}{2}rrd\theta - \frac{1}{2}(r+w)d\theta dw + \frac{wv}{2} - \frac{1}{2}(v+dv)(w-dw) \\ &\cong w^2 d\theta + \frac{1}{2}vdw + wrd\theta = w^2 d\theta + wrd\theta + \frac{1}{2}v \frac{dw}{d\theta} d\theta \end{aligned} \quad (23)$$

Considerando o efeito da pressão interna como factor dominante na ovalização do tubo,  $w$  e  $v$  representam os deslocamentos de distorção apresentados nas equações 15 e 16 respectivamente.

Substituindo a expressão 23 na expressão 22 e considerando que o produto interno de  $w$  com  $rd\theta$  é nulo, por ser ortogonal, teremos as seguintes expressões para tubos curvos e rectos:

$$W_{PIN\_CURVA(nói)} = -\frac{1}{4} p \alpha R \pi L (a_i^2); \quad W_{PIN\_CURVA(nój)} = -\frac{1}{4} p \alpha R \pi L (a_j^2) \quad (24a)$$

$$W_{POUT\_CURVA(nói)} = -\frac{1}{4} p \alpha R \pi L (\bar{a}_i^2); \quad W_{POUT\_CURVA(nój)} = -\frac{1}{4} p \alpha R \pi L (\bar{a}_j^2) \quad (24b)$$

$$W_{PIN\_RECTA(nói)} = -\frac{1}{4} p \pi L^2 (a_i^2); \quad W_{PIN\_RECTA(nój)} = -\frac{1}{4} p \pi L^2 (a_j^2) \quad (24c)$$

$$W_{POUT\_RECTA(nói)} = -\frac{1}{4} p \pi L^2 (\bar{a}_i^2); \quad W_{POUT\_RECTA(nój)} = -\frac{1}{4} p \pi L^2 (\bar{a}_j^2) \quad (24d)$$

Estes resultados obtêm-se da integração dos termos trigonométricos entre  $(0, 2\pi)$  e os termos em  $s$  (funções de forma) entre  $(0, L)$  para cada elemento. Os resultados da equação 24 devem somar-se aos termos da diagonal da matriz rigidez  $K$ , equação 21, referentes aos termos da ovalização.

Para se poder considerar o efeito da pressão em sistemas tubulares com extremidades fechadas, como se observa na figura 4, desenvolveu-se uma matriz de rigidez geométrica que deverá ser adicionada à matriz de rigidez linear elástica, conforme sugere Rajagopalan, 1993.

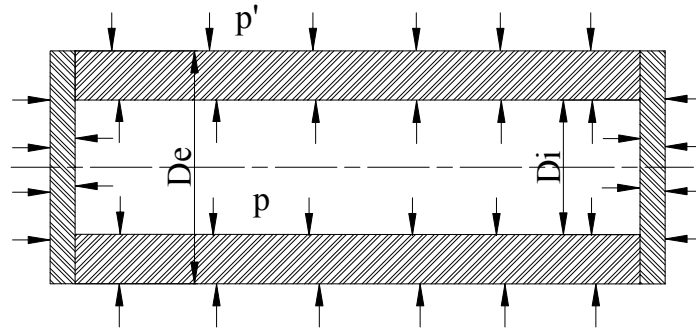


Fig. 4 – Tubo com extremidades fechadas submetido ao efeito da pressão

Considerou-se unicamente o efeito da deformação longitudinal no cálculo da matriz rigidez devida à presença da pressão, conforme sugerido por Boresi e Schmidt, 1993.

$$[K]_{local\_pressão} = \left[ \frac{(p' r_e^2 - p r_i^2)}{r_e^2 - r_i^2} \right]_{s=0}^{s=L} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} [G]_{local}^T [1][G]_{local} r ds d\theta \quad (25)$$

Nesta expressão  $p$  representa a pressão interna,  $p'$  a pressão externa,  $r_e$  o raio exterior e  $r_i$  o raio interior.  $G$  representa-se por:

$$[G] = [G_{xx}] = \left[ \frac{\partial}{\partial s} \quad -\frac{\sin \theta}{R} \quad \frac{\cos \theta}{R} \right] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (26)$$

A matriz transformação  $T$  permite a passagem da matriz rigidez para o sistema global, na forma:

$$[K]_{global} = [T]^T ([K]_{local} + [K]_{local\_press\~ao}) [T] \quad (27)$$

Os deslocamentos nodais são obtidos conforme o seguinte sistema de equações:

$$\{F\}_{global} = [K]_{global} \{\delta\}_{global} \quad (28)$$

O vector força pode ser formado por termos que envolvam forças longitudinais, forças transversais, momentos de flexão e torção, ou termos relativos à expansão de Fourier para os deslocamentos de ovalização e empenamento. Todas as forças e momentos referidos nesta situação devem pertencer ao sistema global do elemento, com excepção das forças relativas aos deslocamentos de ovalização e empenamento.

## 2 - DETERMINAÇÃO DO FACTOR DE FLEXIBILIDADE EM TUBOS

O coeficiente de flexibilidade é um parâmetro que torna possível calcular com garantia o tipo de constrangimento a considerar em sistemas tubulares. Podem ser utilizadas equações de projecto baseadas no método das forças ou dos deslocamentos, para determinação do factor de flexibilidade. O coeficiente de flexibilidade pode ser calculado conforme a seguinte expressão:

$$K = \frac{M_c(\delta\alpha)}{M_s(\overline{\delta\alpha})} = \frac{\delta\alpha}{\overline{\delta\alpha}} \quad (29)$$

onde:  $M_c(\delta\alpha)$  é o momento resistente num tubo curvo submetido a um ângulo de  $\delta\alpha$  numa extremidade e  $M_s(\overline{\delta\alpha})$  é o momento de flexão correspondente num tubo recto, com o comprimento igual ao tubo curvo e o mesmo ângulo de flexão na extremidade.

Para o caso de um momento imposto,  $\overline{\delta\alpha}$  pode ser determinado em função de:

$$\overline{\delta\alpha} = \frac{ML(1-\nu^2)}{EI} \quad (30)$$

No caso da presença de uma carga transversal:

$$\overline{\delta\alpha} = \frac{PL^2(1-\nu^2)}{2EI} \quad (31)$$

Em que  $I$  é o momento de inércia para uma estrutura tubular de parede fina e  $\delta\alpha$  a rotação nodal calculada por elementos finitos através da equação 32.

De acordo com o código ASME, *American Standards for Mechanical Engineers*, o cálculo do factor de flexibilidade em tubos curvos submetidos a flexão uniforme, é obtido pelas expressões seguintes:

$$K = \frac{1.65}{\bar{h}^{2/3}} \quad (\text{para tubos flangeados}) \quad (32a)$$

$$K = \frac{1.65}{\bar{h}} \quad (\text{para tubos sem flanges}) \quad (32b)$$

Onde  $\bar{h}$  é o parâmetro do tubo, obtido através da equação:

$$\bar{h} = hR/r^2 \quad (33)$$

### 3 – CASOS EM ESTUDO

#### 3.1 - Caso 1: O efeito da pressão interna numa estrutura tubular

O caso da figura 5a representa metade de uma estrutura tubular conforme estudo efectuado por Bathe e Almeida, 1982. Utilizou-se uma malha por elementos finitos conforme se representa na figura 5b, utilizando elementos rectos e curvos. Foi aplicada uma carga vertical numa das extremidades do tubo, estando este sujeito a pressão interna. O parâmetro do tubo  $\bar{h}$  é igual a 0.1. Para este caso, a influência da pressão interna no tubo é significativa, aumentando a rigidez da estrutura.

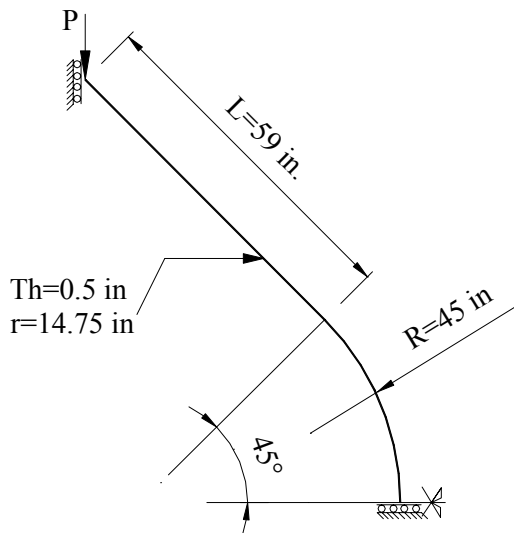


Fig. 5a - Parâmetros geométricos

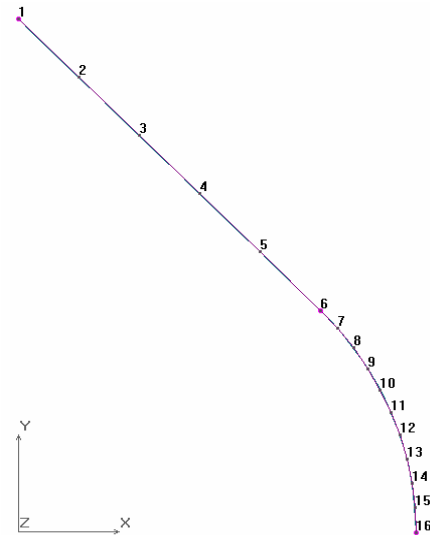


Fig. 5b – Malha de elementos finitos

Na figura 6 comparam-se os resultados obtidos para os vários casos de carga com os resultados referenciados. Como se pode verificar, quando a pressão interna aumenta, a flexibilidade da estrutura diminui.

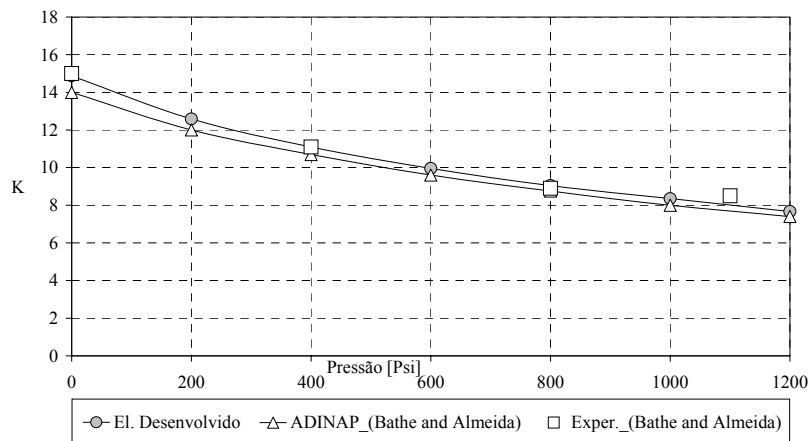


Fig. 6 – Factor de flexibilidade para diferentes casos de pressão interna

#### 3.2 - Caso 2: Factor flexibilidade em tubos curvos quando submetidos a pressão interna

Na tabela 1 apresentam-se 12 geometrias diferentes para tubos curvos segundo a ISO 1127. Todos estes tubos curvos são estudados tendo em conta o tipo de restrição nas suas extremidades e submetidos ao efeito de um momento flector uniforme combinado com uma pressão interna. Dada a simetria geométrica e de carregamento, estudou-se metade da estrutura e os resultados são apresentados para a secção  $s = 0$ , como se observa na figura 7. O

material dos tubos possui módulo de elasticidade de  $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  vale 0.3. A relação  $R/r$  mantém-se igual a 3.

Tabela 1 - Parâmetros geométricos

$2r=D$ [mm]	$h$ [mm]	$R$ [mm]	$L$ [mm]
21.30	2	31.95	50.19
33.70	2	50.55	79.40
60.30	2	90.45	142.08
101.60	2	152.40	239.39
323.90	2	485.85	763.17
406.40	3	609.60	957.56
508.00	3	762.00	1196.95
609.60	3	914.40	1436.34
711.20	4	1066.80	1675.73
812.80	4	1219.20	1915.11
914.40	4	1371.60	2154.50
1016.00	4	1524.00	2393.89

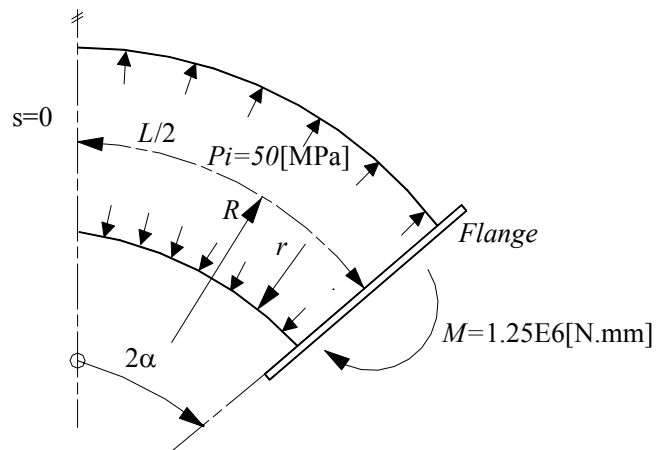


Fig. 7 - Geometria do tubo curvo analisado

Utilizou-se a formulação desenvolvida, considerando malhas de 5 e 10 elementos para a obtenção do cálculo da flexibilidade dos tubos, com a influência da pressão interna combinada com o esforço de flexão. Os resultados obtidos são comparados com os factores de flexibilidade no caso da existência única de esforço de flexão apresentados por Fonseca *et al*, 2003 e ainda com as curvas de projecto da ASME conforme as equações 32. Nas figuras 8 e 9 relativas à presença de pressão interna nos tubos, observa-se que à medida que o diâmetro da secção recta do tubo aumenta, o factor de flexibilidade diminui, tornando os tubos mais rígidos. Verifica-se ainda que para diâmetros de tubos relativamente pequenos, a influência da pressão interna não é significativa, quando comparada com o efeito único da flexão.

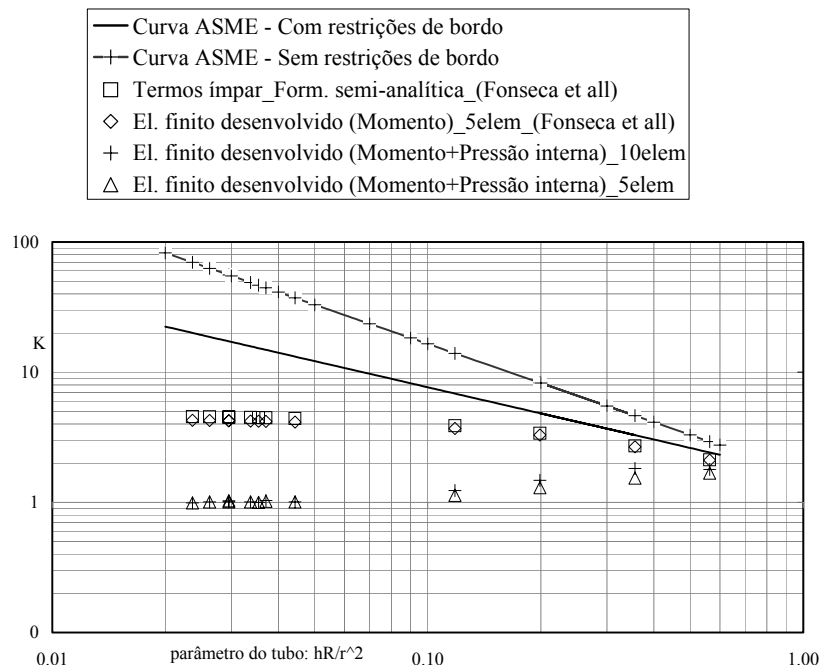


Fig. 8 – Factor de flexibilidade para tubos curvos com flanges rígidas.

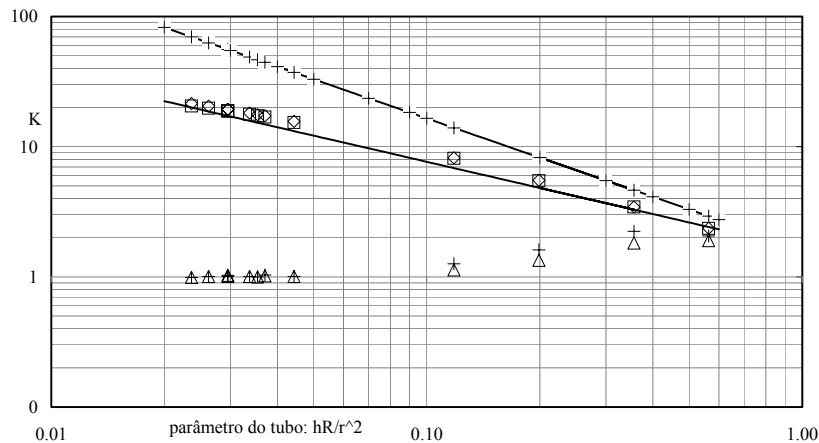


Fig. 9 – Factor de flexibilidade para tubos curvos com flanges finas.

### 3.3 - Caso 3: Efeito da pressão interna nos deslocamentos obtidos de um sistema tubular

Fez-se o estudo do comportamento mecânico de uma estrutura tubular impedida de se movimentar numa extremidade, como se representa na figura 10. Foi imposto um carregamento pontual de 1000 [N] na extremidade oposta. Posteriormente a mesma estrutura, com o mesmo carregamento pontual foi submetida a uma pressão interna de 100 [MPa]. A estrutura é composta por tubos curvos a 90° ASTM A234 e tubos rectos ASTM A106, conforme se verifica na figura 10a. Os tubos tem um diâmetro nominal de 44.62 [mm] e espessura uniforme de 4 [mm]. O material utilizado possui um módulo de elasticidade de  $2.1 \times 10^5$  [N/mm<sup>2</sup>] e o coeficiente de Poisson  $\nu$  igual a 0.3. Neste problema, o tubo dado possui um parâmetro  $\bar{h}$  de 0,46, o que significa que o efeito da pressão interna na ovalização do tubo não vai ser significativa. A contribuição da pressão interna para o aumento da rigidez desta estrutura apenas se verifica pelo facto de se considerar o tubo com extremidades fechadas.

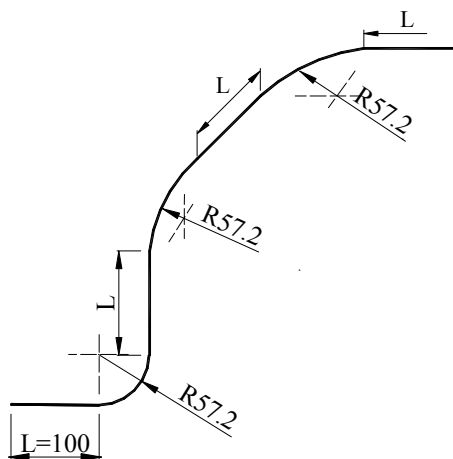


Fig. 10a – Metade da geometria da estrutura

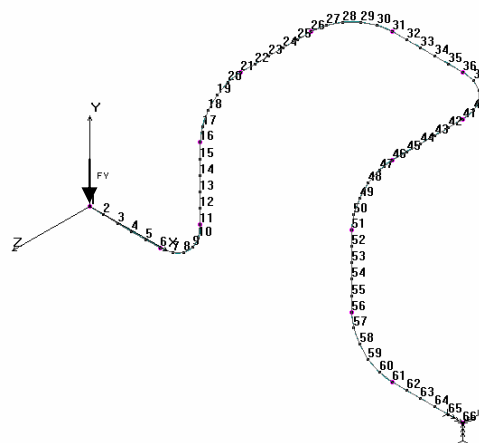


Fig. 10b – Malha de elementos finitos

A estrutura foi discretizada com uma malha de 65 elementos usando o elemento de tubo desenvolvido. Os resultados numéricos dos deslocamentos são comparados com os obtidos utilizando o programa comercial ANSYS<sup>®</sup>, conforme gráficos apresentados na figura 11. Os elementos finitos disponíveis no ANSYS<sup>®</sup>, possíveis para esta comparação, são o elemento ELBOW e PIPE, utilizados em conjunto na malha de elementos finitos. Como se pode verificar a introdução da pressão interna aumentou a rigidez da estrutura tubular, diminuindo o campo de deslocamentos.

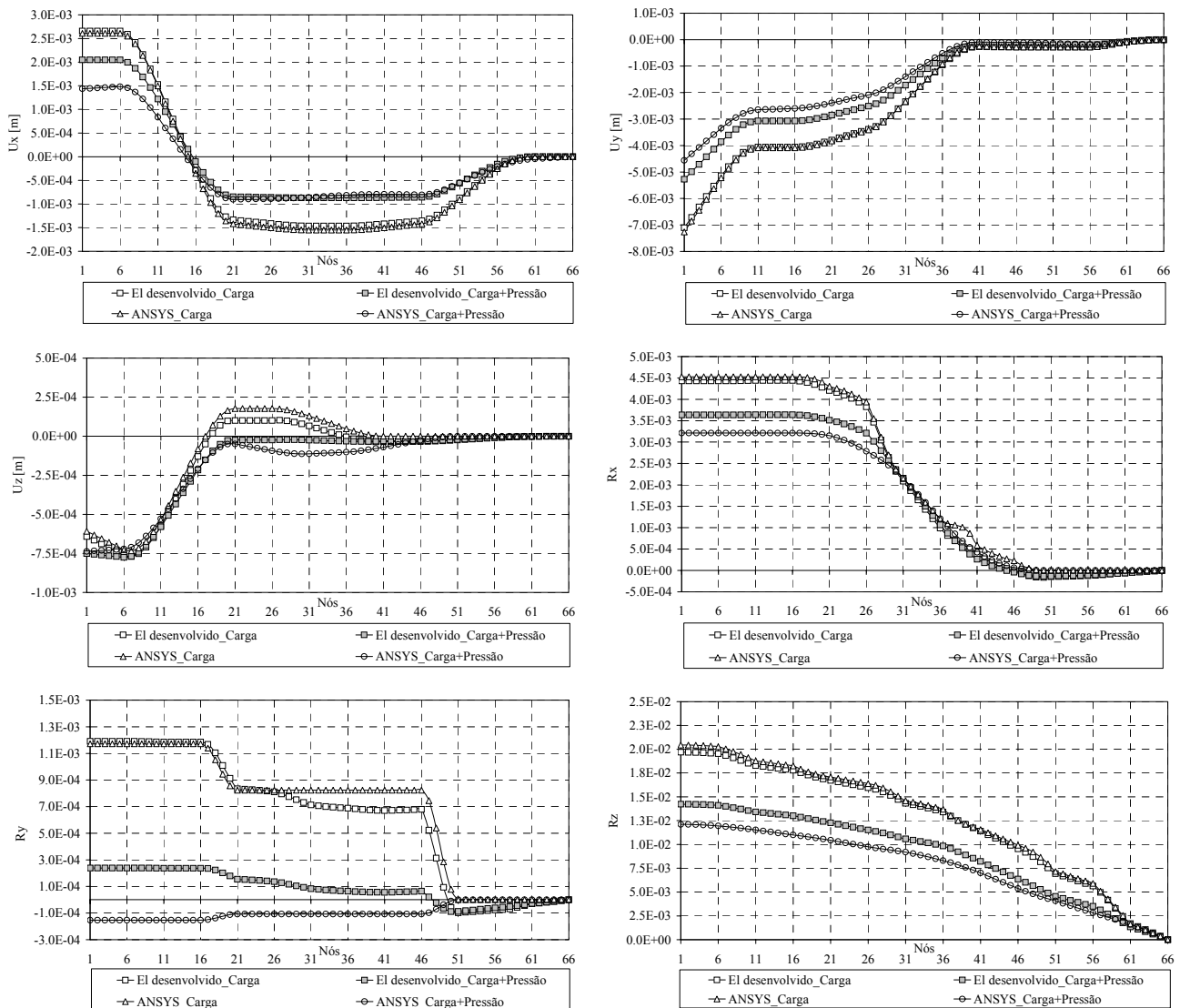


Fig. 11 – Deslocamentos obtidos com o elemento desenvolvido comparáveis com os elementos PIPE e ELBOW do programa ANSYS®

#### 4 – CONCLUSÕES

O elemento finito desenvolvido é baseado numa formulação da teoria de cascas finas. A solução combina uma formulação do campo de deslocamentos de elementos de viga com termos da série de Fourier para a modelação da ovalização e empenamento da superfície tubular. O elemento unidimensional desenvolvido permite um desempenho computacional elevado no que respeita à facilidade da geração de malhas, na simulação das condições de fronteira com ou sem restrições de bordo, bem como na possibilidade da utilização de vários casos de carga. Apresentou-se um desenvolvimento para a matriz rigidez devido à influência da pressão em tubos. Considerou-se o efeito da pressão interna nos termos de rigidez devido à ovalização e ainda para a contribuição da deformação longitudinal do tubo, quando este possui extremidades fechadas. Os resultados obtidos apresentam boa concordância com as referências apresentadas, bem como os resultados através do programa ANSYS®. Verificou-se que à medida que o diâmetro da secção recta do tubo aumenta, o factor de flexibilidade diminui, tornando-se por isso os tubos mais rígidos. Verifica-se ainda que, para diâmetros de tubos relativamente pequenos a influência da pressão interna não é muito significativa,

quando comparada com o efeito único da flexão. Nestes casos, o efeito da pressão interna é significativa quando os tubos contêm extremidades fechadas. É importante realçar a contribuição deste elemento finito no estudo e análise destas situações permitindo ao projectista uma escolha atempada de materiais ou soluções prévias alternativas de projecto. As vantagens da sua utilização referem-se à simplicidade da geração da malha de elementos finitos, à utilização de um único elemento finito, ao reduzido esforço computacional dispendido e ainda à capacidade de estudo de vários casos de carga e tipos de constrangimento.

## 5 – REFERÊNCIAS

E. H. Love, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publ., N.Y. 1944.

F.J.M.Q. Melo and P.M.S.T. Castro, A reduced integration Mindlin beam element for linear elastic stress analysis of curved pipes under generalized in-plane loading, *Comp. & Structures* 43, 787-794 1992.

G. Thomson, In plane bending of smooth pipe bends, PhD Thesis, University of Strathclyde, Scotland, UK 1980.

Fonseca, Elza; Oliveira, Carlos; Melo, Francisco; Ribeiro, Paulo; Um novo elemento finito de tubo curvo para análise de tubagens tridimensionais. Caso de estudo numérico e experimental, aceite para publicação nas actas do VII Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Évora, Abril 2003.

W. Flugge, Thin Elastic Shells, Springer, Berlim 1973.

R. Kitching, Smooth and mitred pipe bends, Gill, S.S. (Ed.), The stress analysis of pressure vessels and pressure vessels Components, Chapter 7, Pergamon Press, Oxford 1970.

K. J. Bathe and C. A. Almeida, A simple and effective pipe elbow element - Pressure stiffening effects, *Journal of Applied Mechanics* 49, 914-916 1982.

K. Rajagopalan, Finite element buckling analysis of stiffened cylindrical shells, Indian Institute of Technology, Rotterdam 1993.

A. O. Boresi, R.J. Schmidt, O. M. Sidebottom, Advanced mechanics of materials, John Willey & Sons, 5ª edição 1993.

E. M. M. Fonseca, F. J. M. Q. de Melo and C. A. M de Oliveira, Determination of flexibility factors on curved pipes with end restrains using a semi-analytic formulation, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol.79/12, pp 829-840 2003.

E. M. M. Fonseca, F. J. M. Q. de Melo and C. A. M de Oliveira, Desenvolvimento de um Elemento Finito para Análise de Tensões em Tubos Curvos, aceite para publicação na revista *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecânica*, nº refª RI-02/001501 2003.