



# **ANÁLISE COMPARATIVA DE CORRELAÇÕES PARA O FATOR DE ATRITO EM CONDUTAS**

**Luiz Eduardo Muzzo**

Relatório Final de Dissertação apresentado à  
**Escola Superior de Tecnologia e Gestão**  
**Instituto Politécnico de Bragança**  
no âmbito da dupla diplomação com a  
**Universidade Tecnológica Federal do Paraná**  
para obtenção do grau de Mestre em  
**Engenharia Industrial, ramo de Engenharia Mecânica**

Orientador:

**Luís Manuel Frólén Ribeiro**

Co-orientadores:

**Diana Margarida Domingues de Pinho**

**Luiz Eduardo Melo Lima**

**Junho de 2019**



## **AGRADECIMENTOS**

Este trabalho não poderia ser terminado sem a ajuda de diversas pessoas e instituições às quais presto agora minha homenagem.

Agradeço à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Instituto Politécnico de Bragança pela oportunidade de participar deste programa de dupla diplomação.

Agradeço aos meus orientadores Luís Ribeiro, Diana Pinho e Luiz Lima por me mostrarem os caminhos a serem seguidos.

Agradeço aos meus pais Luiz Carlos e Roseli pelo total apoio em todos os momentos da minha vida.

Enfim, agradeço à todos os que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.



## RESUMO

Um parâmetro fundamental no projeto de sistemas de condutas de fluidos é a perda de energia causada pelo atrito viscoso, a qual é quantificada pelo fator de atrito. Em escoamentos turbulentos a expressão padrão utilizada para quantificar essa perda de energia é a correlação empírica introduzida por Colebrook (1939), que deve ser calculada iterativamente. Como alternativa, várias correlações explícitas já foram propostas e podem reduzir o tempo computacional em simulações de grandes sistemas de condutas. Neste contexto, este trabalho permitiu avaliar a precisão de 43 correlações explícitas e também a complexidade ou eficiência computacional, tanto das correlações explícitas quanto dos métodos de cálculo da correlação de Colebrook. Foram calculados os erros relativos e os coeficientes de determinação das correlações explícitas em relação à correlação de Colebrook e, através das funções tic e toc no programa de computador GNU Octave, foram medidos seus tempos computacionais. O método mais veloz de cálculo da correlação de Colebrook consome aproximadamente o dobro do tempo computacional da correlação explícita mais lenta. As correlações explícitas com o melhor equilíbrio entre precisão e velocidade são: a correlação de Serghides (1984) (Equações (44), (45), (46) e (47)), que apresenta erros máximo de 0.00314% e médio de 0.00055%; a correlação de Shacham (1980) (Equações (34) e (35)), com erro máximo de 0.01740% e erro médio de 0.00206%; a correlação de Brkić e Praks (2019) (Equações (88), (90), (91) e (92)) que possui erro máximo de 0.12447% e erro médio de 0.05500%; e a correlação de Fang, Xu e Zhou (2011) (Equação (69)), que apresenta erros de até 0.49149% e erro médio de 0.16294%.

**Palavras-chave:** Perda de carga. Fator de atrito. Correlação de Colebrook. Correlações explícitas.



## ABSTRACT

A fundamental parameter in the design of pipe system is the energy loss due to viscous friction, which is quantified by the friction factor. For turbulent flow, the standard formula is the empirical correlation introduced by Colebrook (1939), which must be computed iteratively. Alternatively, many explicit correlations were proposed and may reduce the computational time in large pipe systems simulations. In this context, this work allowed to evaluate the accuracy of 43 explicit correlations and also the computational complexity or efficiency of both explicit correlations and iterative computations of Colebrook's correlation. It was calculated the relative errors and coefficients of determination of the explicit correlations against correlation by Colebrook and, using the tic and toc functions in GNU Octave software, the computational times were measured. It was discovered that the fastest method of calculation of Colebrook's correlation spend twice the computational time of the slowest explicit correlation. The explicit correlations with the best balance between accuracy and computational time are: correlation by Serghides (1984) (Equations (44), (45), (46) and (47)), with causes maximum error of 0.00314% and average error of 0.00055%; correlation by Shacham (1980) (Equations (34) and (35)), which has maximum error of 0.01740% and average error of 0.00206%; correlation by Brkić e Praks (2019) (Equations (88), (90), (91) e (92)), which causes maximum error of 0.12447% and average error of 0.05500%; and correlation by Fang, Xu e Zhou (2011) (Equation (69)), which has errors up to 0.49149% and average error of 0.16294%.

**Keywords:** Head loss. Friction factor. Correlation by Colebrook. Explicit correlations.



## ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1	ENQUADRAMENTO . . . . .	1
1.2	OBJETIVOS . . . . .	2
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO . . . . .	2
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> . . . . .	<b>5</b>
2.1	FATOR DE ATRITO EM CONDUTAS . . . . .	5
2.2	EQUAÇÃO DE COLEBROOK . . . . .	7
2.3	CÁLCULO DA EQUAÇÃO DE COLEBROOK . . . . .	11
2.4	CORRELAÇÕES EXPLÍCITAS E TRABALHOS SEME- LHANTES . . . . .	13
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b> . . . . .	<b>31</b>
3.1	AVALIAÇÃO DA PRECISÃO . . . . .	31
3.2	AVALIAÇÃO DO TEMPO COMPUTACIONAL . . . . .	33
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> . . . . .	<b>37</b>
4.1	PRECISÃO DAS CORRELAÇÕES EXPLÍCITAS . . . . .	37
4.2	TEMPO COMPUTACIONAL DAS CORRELAÇÕES . . . . .	40
4.3	ANÁLISE COMPARATIVA DAS CORRELAÇÕES . . . . .	43
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>49</b>



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo das correlações explícitas apresentadas neste trabalho com o seu código, a(s) equação(ões) correspondente(s) e o(s) seu(s) autor(es). . . . .	29
Tabela 2 – Classificação das correlações explícitas do menor ao maior erro máximo em relação à equação de Colebrook. $\varepsilon^*$ é a razão entre o erro máximo e o menor erro máximo entre todas as correlações, $\varepsilon$ é o intervalo de erros, $\bar{\varepsilon}^*$ é a razão entre o erro médio e o menor erro médio entre todas as correlações, $\bar{\varepsilon}$ é o erro médio e $R^2$ é o coeficiente de determinação. . . . .	38
Tabela 3 – Classificação das correlações explícitas do menor ao maior tempo computacional médio. $\bar{t}^*$ é a razão entre o tempo computacional médio e o menor tempo computacional médio entre todas as correlações explícitas, $\bar{t}$ é o tempo computacional médio e $\sigma$ é o seu desvio padrão. . . . .	41
Tabela 4 – Tempo computacional dos métodos numéricos de cálculo da equação de Colebrook sem e com o uso das correlações explícitas como aproximação na primeira iteração. $\bar{t}^*$ é a razão entre o tempo computacional médio do método numérico e o menor tempo computacional médio entre as correlações explícitas, que é 0.23821 s, $\bar{t}$ é o tempo computacional médio, $\sigma$ é o seu desvio padrão, $i$ é o número máximo de iterações para a convergência e $\bar{i}$ é o número médio de iterações para a convergência. . . . .	42



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Caracterização dos escoamentos turbulentos hidraulicamente lisos e rugosos em função da interação entre a subcamada laminar e a rugosidade superficial da conduta. Fonte: Brkić (2012).	8
Figura 2 – Diagrama de Moody. O eixo vertical esquerdo representa o fator de atrito de Darcy-Weisbach, o eixo horizontal representa o número de Reynolds e o eixo vertical direito representa a rugosidade relativa. Fonte: White (2011).	9
Figura 3 – Gráficos de $f(\lambda)$ para os valores mínimo ( $\lambda = 0.00594$ ) e máximo ( $\lambda = 0.07699$ ) do fator de atrito no diagrama de Moody.	12
Figura 4 – Gráfico de $\bar{t}^*$ no eixo vertical e $\varepsilon^*$ no eixo horizontal. As correlações com o melhor balanço entre precisão e carga computacional estão marcadas com quadrados. $\bar{t}^*$ é a razão entre o tempo computacional médio e o menor tempo computacional médio entre todas as correlações explícitas e $\varepsilon^*$ é a razão entre o erro máximo e o menor erro máximo entre todas as correlações explícitas.	44
Figura 5 – Gráfico de $\bar{t}^*$ no eixo vertical e $\bar{\varepsilon}^*$ no eixo horizontal. As correlações com o melhor balanço entre precisão e carga computacional estão marcadas com quadrados. $\bar{t}^*$ é a razão entre o tempo computacional médio e o menor tempo computacional médio entre todas as correlações explícitas e $\bar{\varepsilon}^*$ é a razão entre o erro médio e o menor erro médio entre todas as correlações explícitas.	45



## LISTA DE SÍMBOLOS

### CARACTERES LATINOS

$\bar{i}$	Número médio de iterações	
$\bar{t}$	Tempo médio	[s]
$\bar{t}^*$	Razão entre tempos médios	
$\bar{V}$	Velocidade média	[m/s]
$Nu$	Número de Nusselt	
$Pr$	Número de Prandtl	
$Re$	Número de Reynolds	
$D$	Diâmetro interno	[m]
$g$	Aceleração gravitacional	[m/s <sup>2</sup> ]
$h_l$	Perda de carga	[m]
$h_{bomba}$	Carga adicionada	[m]
$h_{l,d}$	Perda de carga distribuída	[m]
$h_{l,l}$	Perda de carga localizada	[m]
$h_{turbina}$	Carga removida	[m]
$i$	Número máximo de iterações	
$K_l$	Coefficiente de perda localizada	
$L$	Comprimento	[m]
$L_e$	Comprimento equivalente	[m]
$m$	Número de medições	
$P$	Pressão absoluta	[Pa]
$p$	Número de pontos	
$R^2$	Coefficiente de determinação	
$t$	Tempo	[s]
$z$	Altura	[m]

### CARACTERES GREGOS

$\alpha$	Fator de correção da energia cinética	
$\Delta P_l$	Queda de pressão	[Pa]
$\epsilon$	Rugosidade hidráulica	[m]
$\epsilon/D$	Rugosidade relativa	
$\lambda$	Fator de atrito de Darcy-Weisbach	
$\lambda_a$	Valor inicial do fator de atrito	
$\lambda_b$	Valor inicial do fator de atrito	
$\lambda_c$	Fator de atrito por uma correlação explícita	
$\lambda_f$	Fator de atrito de Fanning	
$\lambda_{cw}$	Fator de atrito pela correlação de Colebrook	
$\bar{\lambda}_{cw}$	Média dos fatores de atrito pela correlação de Colebrook	
$\bar{\epsilon}$	Erro relativo médio	
$\bar{\epsilon}^*$	Razão entre erros relativos médios	
$\mu$	Viscosidade dinâmica	[kg/(m·s)]
$\nu$	Viscosidade cinemática	[m <sup>2</sup> /s]
$\rho$	Massa volúmica	[kg/m <sup>3</sup> ]

$\sigma$	Desvio padrão amostral	[s]
$\varepsilon$	Erro relativo	
$\varepsilon^*$	Razão entre erros relativos máximos	

## SUBSCRITOS

$i$	Posição na iteração ou no somatório
-----	-------------------------------------

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são delimitados o assunto/problema abordado juntamente com os objetivos deste trabalho. Também é apresentada a maneira como o texto está organizado.

## 1.1 ENQUADRAMENTO

O escoamento de fluidos através de condutas é um problema da Mecânica dos Fluidos com aplicações práticas, por exemplo, no abastecimento de água, irrigação, transporte de petróleo ou gás natural, condicionamento de ar (aquecimento/resfriamento) ou produção de energia termoelétrica. Em qualquer sistema de condutas há perda de energia do escoamento por atrito viscoso, que também é chamada de perda de carga. Quanto maior for a perda de carga, maior será a potência de bombeamento necessária.

A perda de carga num sistema de condutas pode ser classificada em: localizada ou distribuída. As perdas localizadas são causadas pela recirculação gerada por componentes como contrações, expansões, válvulas, curvas, etc., enquanto que a perda distribuída é causada pelo atrito ou tensão de corte originado nas paredes da conduta. Esse atrito pode ser quantificado em termos adimensionais pelo fator de atrito em função do número de Reynolds e da rugosidade relativa da conduta. Para um escoamento laminar, esse fator de atrito é calculado analiticamente. Para um escoamento turbulento, esse fator de atrito é dado frequentemente pela equação de Colebrook (1939), desenvolvida a partir de dados experimentais.

A equação de Colebrook é considerada o padrão para a determinação do fator de atrito turbulento, no entanto ela é implícita, ou seja, o fator de atrito é dado em função de si próprio, e portanto deve ser calculada iterativamente. Apesar de convergir para valores suficientemente precisos em poucas iterações, o cálculo iterativo consome muito tempo computacional em simulações de grandes sistemas de condutas. Como alternativa à correlação de Colebrook, várias aproximações explícitas para o cálculo do fator de atrito já foram introduzidas

por diferentes autores. Essas correlações explícitas podem reduzir o tempo computacional em programas de simulação, mas os valores calculados podem diferir significativamente dos valores padrão obtidos pela equação de Colebrook. A busca e/ou análise das correlações explícitas mais precisas podem melhorar a fiabilidade dos resultados obtidos em programas de simulação.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho foi o de realizar uma análise comparativa, tanto da precisão quanto do tempo computacional, entre a equação de Colebrook e as correlações explícitas para o fator de atrito disponíveis na literatura. Os objetivos específicos desse trabalho foram:

- Revisar a literatura das principais correlações explícitas para o fator de atrito.
- Avaliar o tempo computacional das correlações explícitas.
- Avaliar o tempo computacional dos métodos de cálculo iterativo da equação de Colebrook.
- Avaliar a precisão das correlações explícitas em relação à equação de Colebrook.
- Recomendar as correlações explícitas com o melhor equilíbrio entre precisão e tempo computacional.

## 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O texto está organizado para apresentar de modo lógico e sequencial o tema do trabalho, as ferramentas e a metodologia utilizada na busca dos objetivos, e os resultados alcançados.

No Capítulo 2 apresenta-se uma revisão de literatura sobre o fator de atrito em condutas. A equação implícita de Colebrook, os métodos de cálculo iterativo e as correlações explícitas do fator de atrito são discutidos. Trabalhos semelhantes já realizados por outros autores são brevemente apresentados.

No Capítulo 3 são apresentados os métodos usados na análise comparativa das correlações. Foram avaliados a precisão das correlações explícitas em relação à equação de Colebrook e também o tempo computacional tanto das correlações explícitas quanto dos métodos iterativos de cálculo da correlação implícita de Colebrook.

No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados das avaliações da precisão e do tempo computacional. Todas as correlações explícitas avaliadas foram classificadas em ordem de precisão e de velocidade computacional, e foram determinadas as correlações com melhor equilíbrio entre precisão de tempo computacional. Por fim, os resultados obtidos são concluídos no Capítulo 5.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão de literatura sobre o fator de atrito em condutas. Discute-se a equação implícita de Colebrook e as correlações explícitas alternativas, bem como os métodos de cálculo iterativo. Trabalhos semelhantes já realizados por outros autores são brevemente apresentados.

### 2.1 FATOR DE ATRITO EM CONDUTAS

O escoamento de fluidos através de condutas é amplamente utilizado em várias aplicações agrícolas, industriais, comerciais e até residenciais, como abastecimento de água, irrigação, transporte de petróleo ou gás natural, processos químicos, refrigeração, condicionamento de ar, produção de energia térmica, energias renováveis, etc. Um parâmetro fundamental no projeto de sistemas de condutas é a perda da energia mecânica do escoamento causada pelo atrito viscoso. Essa perda de carga é um dos fatores que influenciam a queda de pressão ou, mais especificamente, o gradiente de pressão. Além dela, pode ter a contribuição gravitacional e de aceleração do escoamento. Em unidades de metros de coluna de fluido, a equação da conservação da energia entre dois pontos num sistema de condutas é definida como:

$$\left( \frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2g} + z_1 \right) + h_{bomba} = \left( \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2g} + z_2 \right) + h_{turbina} + h_l \quad (1)$$

onde  $P$  é a pressão,  $\rho$  é a massa volúmica do fluido,  $g$  é a aceleração gravitacional local,  $\alpha$  é o fator de correção da energia cinética, cujo valor é 2 para o escoamento laminar e aproximadamente 1 para o escoamento turbulento,  $\bar{V}$  é a velocidade média do escoamento,  $z$  é a altura do fluido em relação a um referencial arbitrário,  $h_{bomba}$  é a carga adicionada ao escoamento por componentes de bombeamento,  $h_{turbina}$  é a carga útil removida do escoamento por componentes como turbinas, motores hidráulicos, etc., e  $h_l$  é a perda de carga por atrito viscoso.

Quanto maior for a perda de carga, maior será a potência de bombea-

mento necessária para manter o escoamento. Portanto, avaliar essa perda de energia útil e as suas causas é fundamental para um projeto adequado de sistemas de condutas. A perda de carga pode ser dividida em dois tipos: localizada e distribuída. As perdas distribuídas, também chamadas de perdas maiores porque, geralmente, são responsáveis pela maior fração da perda de carga total, são causadas pelo atrito viscoso ou pelas tensões de corte originados nas paredes da conduta. Essas perdas distribuídas ou maiores podem ser calculadas pela equação de Darcy-Weisbach, que é definida como:

$$h_{l,d} = \lambda \frac{L}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (2)$$

onde  $h_{l,d}$  é a perda de carga distribuída,  $\lambda$  é o fator de atrito de Darcy-Weisbach,  $L$  é o comprimento do segmento da conduta, que deve ser retilíneo, e  $D$  é o diâmetro interno da conduta. O fator de atrito de Darcy-Weisbach é assim denominado em homenagem aos engenheiros Henry Darcy e Julius Weisbach, mas também é comum a denominação fator de atrito de Fanning em homenagem ao engenheiro John Fanning, que é definido como  $\lambda_f = \lambda/4$ .

As perdas localizadas, que também são chamadas de perdas menores, são causadas pela recirculação e mistura turbulenta causada por componentes como entradas, saídas, contrações, expansões, curvas, válvulas, junções, etc. Essas perdas locais ou menores podem ser definidas como:

$$h_{l,l} = K_l \frac{\bar{V}^2}{2g} = \lambda \frac{L_e}{D} \frac{\bar{V}^2}{2g} \quad (3)$$

onde  $h_{l,l}$  é a perda de carga localizada,  $K_l$  é o coeficiente de perda do componente (adimensional) e  $L_e$  é o comprimento de conduta equivalente. Tanto o coeficiente de perda como o comprimento equivalente de um componente dependem da sua geometria, da rugosidade da sua superfície e do número de Reynolds do escoamento. Existem tabelas com valores representativos para componentes semelhantes, mas, por exemplo, o coeficiente de perda de duas válvulas aparentemente idênticas de dois fabricantes diferentes podem diferir significativamente.

Além da própria perda de carga, o fator de atrito também é usado na Equação (4), que é correlação de Gnielinski (1975) para o cálculo do número de

Nusselt usado no cálculo da transferência de calor convectiva em condutas.

$$\text{Nu} = \frac{(\lambda/8) (\text{Re} - 1000) \text{Pr}}{1.07 + 12.7 (\lambda/8)^{1/2} (\text{Pr}^{2/3} - 1)} \quad (4)$$

onde  $\text{Nu}$  é o número de Nusselt e  $\text{Pr}$  é o número de Prandtl do fluido.

O fator de atrito para o escoamento laminar pode ser determinado analiticamente em função apenas do número de Reynolds. Para condutas de seção transversal circular temos que:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (5)$$

em que  $\text{Re}$  é o número de Reynolds, que é definido como:

$$\text{Re} = \frac{\rho \bar{V} D}{\mu} = \frac{\bar{V} D}{\nu} \quad (6)$$

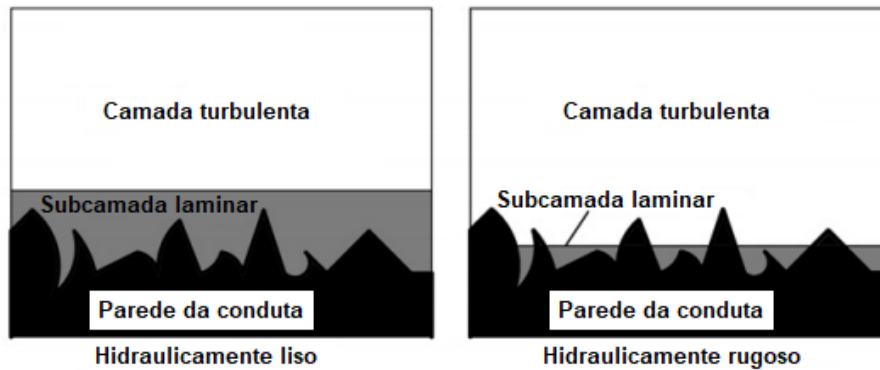
onde  $\mu$  é a viscosidade dinâmica e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Para o escoamento turbulento o fator de atrito não pode ser determinado analiticamente e deve ser calculado por equações empíricas, como a correlação de Colebrook (1939).

## 2.2 EQUAÇÃO DE COLEBROOK

A superfície interna de qualquer conduta possui rugosidade em função do seu material, do processo pelo qual foi fabricada, do seu estado de conservação, etc., no entanto, o escoamento turbulento pode ser considerado hidraulicamente liso ou rugoso. Conforme mostra a Figura 1, mesmo no escoamento turbulento, há uma subcamada laminar em contato com a superfície interna da conduta.

Conforme explicado por Brkić (2011), se a rugosidade da conduta é menor que a espessura da subcamada laminar, ela tem influência desprezível no fator de atrito. Portanto, assim como no escoamento laminar, o fator de atrito é influenciado apenas pela viscosidade do fluido e é apenas função do número de Reynolds, o que caracteriza o escoamento hidraulicamente liso. Se o número de Reynolds é suficientemente grande, a subcamada laminar passa a ser desprezível e o fator de atrito passa a ser em função apenas da rugosidade relativa da



**Figura 1 – Caracterização dos escoamentos turbulentos hidraulicamente lisos e rugosos em função da interação entre a subcamada laminar e a rugosidade superficial da conduta. Fonte: Brkić (2012).**

conduta, o que caracteriza o escoamento hidraulicamente rugoso. Na região de transição entre esses dois extremos, onde os picos da rugosidade trespasam a subcamada laminar, o fator de atrito passa a ser em função tanto do número de Reynolds quanto da rugosidade relativa.

Segundo Colebrook (1939), os resultados experimentais de Prandtl, von Kármán e Nikuradse com um escoamento turbulento foram introduzidos nas Equações (7) e (8) para os regimes hidraulicamente liso e rugoso, respectivamente.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \left( \frac{Re\sqrt{\lambda}}{2,51} \right) \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log_{10} \left( \frac{3,7}{\epsilon/D} \right) \quad (8)$$

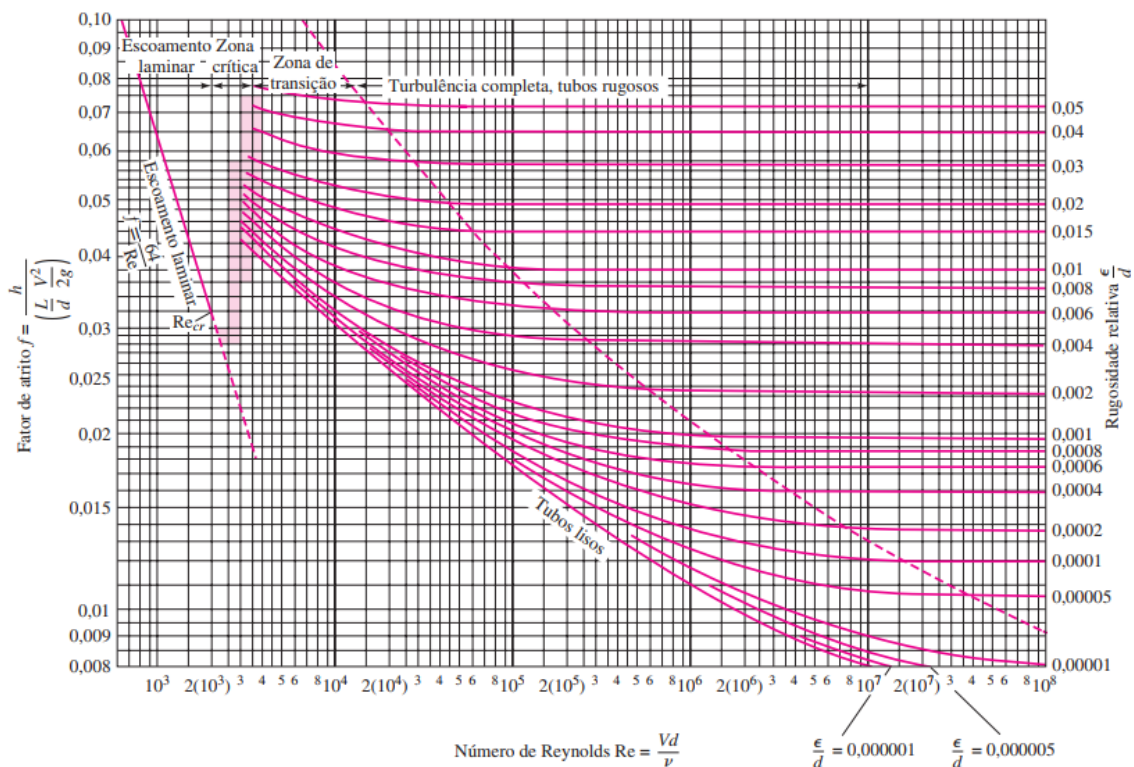
onde  $\epsilon$  é a rugosidade hidráulica equivalente da superfície interna da conduta (absoluta) e  $\epsilon/D$  é a rugosidade relativa da conduta. Colebrook (1939) observou que é possível combinar essas equações e propôs a Equação (9), que é válida também para a transição liso-rugoso.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (9)$$

Para valores suficientemente pequenos de rugosidade relativa, isto é, quando a espessura da subcamada laminar é maior que a altura da rugosidade da conduta, a Equação (9) torna-se a Equação (7), para o escoamento hidraulicamente liso. Já para valores suficientemente grandes de número de Reynolds, isto

é, quando a espessura da camada laminar é menor que a altura da rugosidade da conduta, a Equação (9) torna-se a Equação (8), para o regime hidraulicamente rugoso.

A Equação (9), que também é conhecida como equação de Colebrook-White devido à contribuição de White ao trabalho de Colebrook (1939), foi validada com dados experimentais em condutas comerciais. Essa equação é considerada a expressão padrão para o cálculo do fator de atrito turbulento tanto em condutas circulares e não circulares. O famoso diagrama de Moody (1944), que é a representação gráfica do fator de atrito, Figura 2, usa a equação de Colebrook para o fator de atrito turbulento para o domínio de  $4000 \leq Re \leq 10^8$  e  $0 \leq \epsilon/D \leq 0.05$ .



**Figura 2 – Diagrama de Moody. O eixo vertical esquerdo representa o fator de atrito de Darcy-Weisbach, o eixo horizontal representa o número de Reynolds e o eixo vertical direito representa a rugosidade relativa. Fonte: White (2011).**

É possível observar na Figura 2 que o fator de atrito laminar diminui conforme o número de Reynolds aumenta até ao valor de aproximadamente 2300, que é quando começa a transição laminar-turbulento. No regime turbulento, que é para valores maiores que 4000 para Reynolds, o fator de atrito diminui com o aumento do número de Reynolds até atingir o escoamento hidraulicamente

rugoso onde o seu valor depende apenas da rugosidade relativa, o que é caracterizado pelas linhas horizontais no diagrama.

Segundo Lira (2013), é válido destacar que a aplicação da equação de Colebrook para o projeto de condutas depende de medições experimentais de rugosidade relativa e número de Reynolds, e portanto o fator de atrito carrega as incertezas intrínsecas dessas medições. Por exemplo, os experimentos de Nikuradse que resultaram nas Equações (7) e (8), e que são os alicerces da equação de Colebrook, foram realizados em condutas onde a rugosidade foi criada com grãos de areia de tamanhos uniformes colados em suas superfícies internas. Portanto, a rugosidade absoluta usada nessas equações é uma rugosidade hidráulica equivalente que deve ser obtida através de testes com escoamentos na conduta. Há tabelas com valores de rugosidade representativos em livros de mecânica dos fluidos, por exemplo, em White (2011), mas os valores de rugosidade hidráulica são apresentados com incertezas de até 70%. Como alternativa, Farshad e Rieke (2002) alegam que o fator de atrito pode ser calculado com base na rugosidade média  $R_z$ , que pode ser facilmente medida com um perfilômetro, mas o fator de atrito calculado dessa forma e o fator de atrito obtido através de testes com escoamentos na conduta diferem em média 6.75% com desvio padrão de 4.68%. Segundo eles, a rugosidade média representa adequadamente os picos de rugosidade que trespassam a subcamada laminar e aumentam a perda de energia por atrito viscoso.

A equação de Colebrook é implícita no fator de atrito, ou seja, o fator de atrito é em função de si próprio nessa expressão, portanto deve ser calculado iterativamente. Essa característica é consequência da equação implícita responsável pelo regime hidraulicamente liso. Como alternativa a esse cálculo iterativo, várias equações explícitas para o fator de atrito turbulento foram propostas desde então. Algumas são apenas aproximações para a equação de Colebrook, outras são baseadas em novas teorias para o escoamento turbulento ou em dados experimentais recentes. Nas seções seguintes são apresentados os métodos numéricos de cálculo da equação de Colebrook e também as correlações explícitas.

### 2.3 CÁLCULO DA EQUAÇÃO DE COLEBROOK

O cálculo do fator de atrito através da equação de Colebrook é equivalente a solucionar, para um dado par de rugosidade relativa e número de Reynolds, a equação não linear que é definida como:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + 2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{\lambda}} \right) = 0 \quad (10)$$

Essa solução é obtida através dos métodos numéricos de cálculo de raízes ou zeros. Os principais são os métodos iterativos da bissecção, da falsa posição, do ponto fixo, de Newton-Raphson e da secante. Nesses métodos, a partir de uma aproximação inicial, o fator de atrito é calculado repetidas vezes e converge para seu valor real conforme as iterações são realizadas. Este processo é interrompido quando é atingido um critério de paragem ou convergência, que pode ser tanto uma diferença suficientemente pequena entre os fatores de atrito de duas iterações consecutivas quanto um valor de  $f(\lambda)$  suficientemente próximo de zero.

No método da bissecção, que também é conhecido como método da dicotomia, são usados dois valores iniciais:  $\lambda_a$  e  $\lambda_b$ . O fator de atrito deve estar contido no intervalo definido por esses valores. O processo iterativo consiste em reduzir esse intervalo através do seu ponto médio e é definido como:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (11)$$

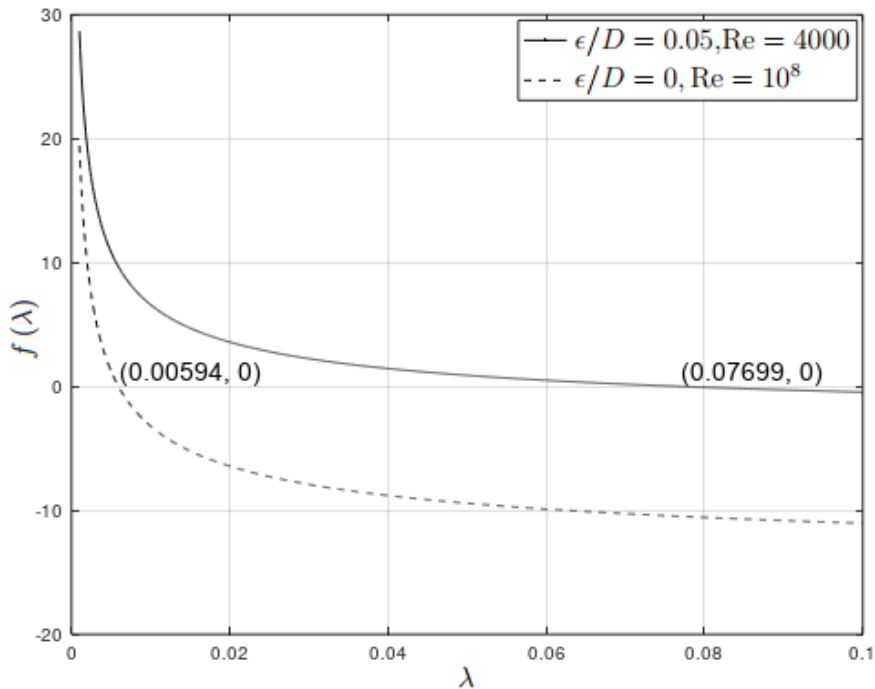
onde  $\lambda_i$  é o fator de atrito na iteração  $i$ . Esse novo fator de atrito substitui  $\lambda_a$  ou  $\lambda_b$  de forma que  $f(\lambda_a) f(\lambda_b) < 0$ , e o processo é repetido até que a condição de paragem seja atingida.

O método da falsa posição é semelhante ao método da bissecção. A única diferença é que o novo fator de atrito não é obtido através de uma média simples, mas sim através de uma média ponderada, que é definida como:

$$\lambda_i = \frac{\lambda_a f(\lambda_b) - \lambda_b f(\lambda_a)}{f(\lambda_b) - f(\lambda_a)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Os métodos da bissecção e da falsa posição precisam de duas aproximações iniciais que definem um intervalo que contém o fator de atrito real. Uma

maneira de garantir isso para qualquer fator de atrito no diagrama de Moody é usar os valores 0.005 e 0.08 porque esse intervalo contém os fatores de atrito mínimo e máximo, conforme mostra a Figura 3. O fator de atrito é mínimo para rugosidade relativa nula e número de Reynolds máximo, e é máximo para rugosidade relativa máxima e número de Reynolds mínimo.



**Figura 3 – Gráficos de  $f(\lambda)$  para os valores mínimo ( $\lambda = 0.00594$ ) e máximo ( $\lambda = 0.07699$ ) do fator de atrito no diagrama de Moody.**

Para a equação de Colebrook, o método do ponto fixo, que também é conhecido como método das aproximações sucessivas, pode ser convenientemente definido como:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda_{i-1}}} \right), \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Esse método é de aplicação simples porque tem a mesma forma que a equação de Colebrook original e precisa apenas de uma aproximação inicial maior que zero para garantir a convergência.

No método de Newton-Raphson,  $f(\lambda)$  é aproximada pela reta tangente no ponto  $\lambda_{i-1}$ . A intersecção entre essa reta e o eixo  $f(\lambda) = 0$  resulta num novo ponto  $\lambda_i$  e, se o critério de paragem não for atingido, o processo é repetido. A

equação iterativa é definida como:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} - \frac{f(\lambda_{i-1})}{f'(\lambda_{i-1})}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

em que  $f'(\lambda)$  é a derivada definida como:

$$f'(\lambda) = -\frac{1}{2\lambda^{3/2}} - 2.51 \left[ \ln 10 \operatorname{Re}\lambda^{3/2} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}} \right) \right]^{-1} \quad (15)$$

O método da secante é semelhante ao método de Newton-Raphson, mas a reta tangente é substituída por uma reta secante. Com dois valores iniciais suficientemente próximos, é possível estabelecer uma reta secante suficientemente aproximada da reta tangente. O processo iterativo pode ser definido como:

$$\lambda_i = \lambda_{i-1} - \frac{(\lambda_{i-2} - \lambda_{i-1}) f(\lambda_{i-1}) / f(\lambda_{i-2})}{[1 - f(\lambda_{i-1}) / f(\lambda_{i-2})]}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (16)$$

Uma desvantagem dos métodos de Newton-Raphson e da secante é que a convergência não é garantida para quaisquer valores iniciais. É possível observar na Figura 3 que se a aproximação inicial não for suficientemente pequena, a reta tangente ou secante pode cruzar o eixo  $f(\lambda) = 0$  em fatores de atrito negativos e, assim, o cálculo diverge.

Todos os cinco métodos numéricos podem ser usados para calcular a equação de Colebrook, mas o número de iterações necessárias, e portanto o tempo computacional, depende do método escolhido. Informações detalhadas sobre os métodos iterativos de cálculo de raízes ou zeros podem ser encontradas em livros de cálculo numérico, por exemplo, em Fernandes (1998).

## 2.4 CORRELAÇÕES EXPLÍCITAS E TRABALHOS SEMELHANTES

As correlações explícitas permitem calcular o fator de atrito diretamente, i.e. sem a necessidade do uso dos métodos iterativos. Muitas foram sugeridas desde a introdução da equação de Colebrook há 80 anos. Também já foram realizados vários trabalhos de avaliação da precisão e até mesmo da eficiência computacional dessas correlações. Genić et al. (2011) analisaram 16 correlações, desde a correlação de Moody (1947) até a de Fang, Xu e Zhou (2011),

usando como critérios de precisão os erros relativos máximo positivo, máximo negativo e médio, o coeficiente de correlação, o desvio padrão e também o Critério de Informação Akaike (AIC), o qual penaliza a complexidade computacional e serve como parâmetro de eficiência computacional. A equação de Colebrook foi calculada iterativamente com uma precisão de  $10^{-8}$ . O domínio de análise foi constituído de um milhão de pontos nos intervalos  $4 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$  e  $0 \leq \epsilon/D \leq 0.05$ .

Winning e Coole (2013) realizaram um trabalho numérico semelhante com 18020 pontos num domínio de 901 valores em  $4 \times 10^3 \leq Re \leq 4 \times 10^8$  e 20 valores em  $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 10^{-1}$ . Para 28 correlações explícitas, desde Moody (1947) até Fang, Xu e Zhou (2011), eles analisaram os erros absoluto e relativo, médio e máximo, e também o erro quadrático médio. Além disso, eles determinaram a eficiência computacional dessas correlações através da medição dos seus tempos computacionais e do tempo computacional do cálculo iterativo da correlação de Colebrook com precisão de  $10^{-9}$ .

Já Offor e Alabi (2016) trabalharam com 17 correlações, desde a proposta de Swamee e Jain (1976) até a de Ghanbari, Farshad e Rieke (2011). Como critérios de precisão, eles usaram os erros absoluto e relativo, tanto médio como máximo, e também o erro quadrático médio. A equação de Colebrook foi calculada com uma precisão de  $10^{-9}$  e foram usados 28000 pontos em  $4 \times 10^3 \leq Re \leq 10^8$  e  $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 0.05$ .

Um estudo mais recente foi realizado por Brkić e Čojbašić (2017), que avaliaram 25 correlações explícitas, desde Moody (1947) até Ghanbari, Farshad e Rieke (2011), e também propuseram formas otimizadas para elas. Eles usaram algoritmos genéticos para otimizar os valores dos fatores, expoentes e parcelas dessas correlações visando minimizar o erro relativo máximo, mas em muitas delas o erro relativo médio aumentou. Essa avaliação foi feita num domínio de 37 valores em  $10^4 \leq Re \leq 10^8$  e 20 valores em  $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 10^{-1}$ , resultando em 740 valores de fator de atrito. O critério de paragem do cálculo iterativo da equação de Colebrook foi uma diferença entre duas iterações consecutivas menor que  $10^{-7}$ .

A seguir são apresentadas 43 correlações explícitas por ordem cronoló-

gica, desde a correlação proposta pelo próprio Moody (1947) até as aproximações introduzidas por Brkić e Praks (2019). Também são apresentados os erros relativos médio e máximo segundo Winning e Coole (2013) e/ou Brkić e Čojbašić (2017). Essa lista visa apresentar as principais correlações explícitas já propostas, mas ela não é exaustiva. Outras correlações foram excluídas devido a não disponibilidade da referência de origem, ou devido a grande semelhança com as correlações apresentadas, ou ainda devido a excessiva complexidade das equações.

A Equação (17) foi criada por Moody (1947). Segundo Brkić e Čojbašić (2017), ela provoca um erro médio de 4.5795% e um erro máximo de 21.4855%, relativos à equação de Colebrook. Segundo Winning e Coole (2013), a Equação (17) leva a um erro médio de 6.098% e um erro máximo de 26.58%.

$$\lambda = 0.0055 \left[ 1 + \left( 2 \times 10^4 \frac{\epsilon}{D} + \frac{10^6}{Re} \right)^{1/3} \right] \quad (17)$$

Eck (1966) recomendou a Equação (18), cuja autoria ele atribuiu a Pečornik. Segundo Brkić e Čojbašić (2017), os erros médio e máximo são, respectivamente, 1.9256% e 8.1953% para a Equação (18). Esses valores concordam com os obtidos por Winning e Coole (2013), que são 1.503% para o erro médio e 8.209% para o erro máximo.

$$\lambda = \frac{0.25}{\{\log_{10} [15/Re + (\epsilon/D)/3.715]\}^2} \quad (18)$$

A forma otimizada da Equação (18), proposta por Brkić e Čojbašić (2017), é definida conforme a Equação (19). Seus erros médio e máximo são, respectivamente, 1.6722% e 5.6955%.

$$\lambda = \left[ -1.963 \log_{10} \left( \frac{14.064}{Re} + \frac{\epsilon/D}{4.034} \right) \right]^{-2} \quad (19)$$

Wood (1966) sugeriu a Equação (20), que não é válida para condutas lisas, i.e. com rugosidade relativa nula. A Equação (20) causa erros médio e máximo de 3.7011% e 23.7204% de acordo com Brkić e Čojbašić (2017), e de

3.876% e 28.25% segundo Winning e Coole (2013).

$$\lambda = 0.53 \frac{\epsilon}{D} + 0.094 \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{0.225} + 88 \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{0.44} \text{Re}^{A_1} \quad (20)$$

onde:

$$A_1 = -1.62 \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{0.134} \quad (21)$$

Churchill (1973) associou a Equação (8), para o regime hidraulicamente rugoso, e a correlação explícita para o regime hidraulicamente liso proposta pelo próprio Colebrook (1939), que é definida como:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.8 \log_{10} \left( \frac{\text{Re}}{7} \right) \quad (22)$$

O resultado foi a Equação (23), que é válida para qualquer número de Reynolds turbulento e rugosidade relativa em condutas comerciais. O seu erro médio é de 0.492% e o seu erro máximo é de 3.407% conforme Winning e Coole (2013).

$$\lambda = \left\{ -2 \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7} + \left( \frac{7}{\text{Re}} \right)^{0.9} \right] \right\}^{-2} \quad (23)$$

O mesmo Churchill (1977) apresentou uma correlação válida também para os regimes laminar e de transição laminar-turbulento. Ele combinou a Equação (5), para regime laminar, a Equação (23) e uma correlação para a região de transição laminar-turbulento desenvolvida por ele com base em dados experimentais. O resultado foi a Equação (24), que possui um erro médio de 0.475% e um erro máximo de 16.31% de acordo com Winning e Coole (2013).

$$\lambda = 8 \left[ \left( \frac{8}{\text{Re}} \right)^{12} + \frac{1}{(A_2 + B_2)^{3/2}} \right]^{1/12} \quad (24)$$

sendo:

$$A_2 = \left\{ 2.457 \ln \left[ \frac{1}{(7/\text{Re})^{0.9} + 0.27 (\epsilon/D)} \right] \right\}^{16} \quad (25)$$

$$B_2 = \left( \frac{37.530}{\text{Re}} \right)^{16} \quad (26)$$

Por ajuste de curva de valores calculados pela equação de Colebrook, Swamee e Jain (1976) sugeriram a correlação explícita para o regime hidraulicamente liso que é definida como:

$$\lambda = \frac{0.25}{[\log_{10} (5.74/Re^{0.9})]^2} \quad (27)$$

e, combinando-a com a Equação (8), que é para o regime hidraulicamente rugoso, propuseram a Equação (28). Essa correlação explícita apresenta um erro médio de 0.4314% e um erro máximo de 2.1872% segundo Brkić e Čojbašić (2017), e causa um erro médio de 0.478% e um erro máximo de 3.343% segundo Winning e Coole (2013).

$$\lambda = \frac{0.25}{\{\log_{10} [(\epsilon/D)/3.7 + 5.74/Re^{0.9}]\}^2} \quad (28)$$

Swamee (1993) apresentou a Equação (29), que é a combinação da Equação (5), para o regime laminar, e da Equação (28), e portanto é válida também para o escoamento laminar.

$$\lambda = \left\{ \left( \frac{64}{Re} \right)^8 + 9.5 \left[ \ln \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{Re^{0.9}} \right) - \left( \frac{2500}{Re} \right)^6 \right]^{-16} \right\}^{0.125} \quad (29)$$

Chen (1979) introduziu a Equação (30), que é válida para qualquer número de Reynolds turbulento e rugosidade relativa. A Equação (31) é a forma otimizada da Equação (30) conforme Brkić e Čojbašić (2017).

$$\lambda = \left( -2 \log_{10} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0452}{Re} \log_{10} \left[ \frac{1}{2.8257} \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1098} + \frac{5.8506}{Re^{0.8981}} \right] \right\} \right)^{-2} \quad (30)$$

$$\lambda = \left( -2.003 \log_{10} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3.689} - \frac{4.933}{Re} \log_{10} \left[ \frac{1}{2.762} \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{1.109} + \frac{5.89}{Re^{0.923}} \right] \right\} \right)^{-2} \quad (31)$$

A Equação (30) apresenta um erro médio de 0.1229% e um erro máximo de 0.3649%, relativos à correlação de Colebrook, e a Equação (31) possui um erro médio de 0.0808% e um erro máximo de 0.1851% de acordo com Brkić e Čojbašić (2017). Segundo Winning e Coole (2013), a Equação (30) tem um erro médio de 0.097% e um erro máximo de 0.3387%.

Round (1980) recomendou a Equação (32) como uma melhoria de uma correlação cuja autoria ele atribuiu a Altshul. Ela é válida para qualquer número de Reynolds turbulento e rugosidade relativa no diagrama de Moody. A Equação (32) otimizada por Brkić e Čojbašić (2017) é a Equação (33).

$$\lambda = \left\{ 1.8 \log_{10} \left[ \frac{\text{Re}}{0.135 \text{Re} (\epsilon/D) + 6.5} \right] \right\}^{-2} \quad (32)$$

$$\lambda = \left\{ 1.898 \log_{10} \left[ \frac{\text{Re}}{0.202 \text{Re} (\epsilon/D) + 9.779} \right] \right\}^{-2} \quad (33)$$

Winning e Coole (2013) concluíram que a Equação (32) leva a um erro médio de 4.474% e um erro máximo de 13.15%. Já segundo Brkić e Čojbašić (2017), a Equação (32) leva a um erro médio de 4.0149% e um erro máximo de 10.9183%, e a Equação (33) tem um erro médio de 2.6418% e um erro máximo de 5.5094%.

Shacham (1980) usou apenas uma iteração do método de Newton-Raphson na equação de Colebrook e introduziu a Equação (34). Ele usou o valor médio de 0.03 como valor inicial para o fator de atrito, porque, de acordo com o diagrama de Moody, o fator de atrito deve estar entre 0.005 e 0.08.

$$\lambda = \left\{ \left[ A_3 (1 - \ln A_3) - \frac{\epsilon/D}{3.7} \right] / \left( 1.15129 A_3 + \frac{2.51}{\text{Re}} \right) \right\}^{-2} \quad (34)$$

onde:

$$A_3 = \frac{\epsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{\text{Re}} \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{14.5}{\text{Re}} \right) \quad (35)$$

Barr (1981) combinou uma nova correlação explícita para o regime hidráulicamente liso com a Equação (8), que é para o regime hidráulicamente rugoso, e aplicou algumas correções que resultaram na correlação definida como:

$$\lambda = \left( -2 \log_{10} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{4.518 \log_{10} (\text{Re}/7)}{\text{Re} [1 + (\text{Re}^{0.52}/29) (\epsilon/D)^{0.7}]} \right\} \right)^{-2} \quad (36)$$

Segundo Brkić e Čojbašić (2017), a Equação (36) possui um erro médio de 0.0548% e um erro máximo de 0.2774%, relativos à equação de Colebrook.

Já segundo Winning e Coole (2013), a Equação (36) apresenta um erro médio de 0.063% e um erro máximo de 0.5533%.

Zigrang e Sylvester (1982) introduziram a Equação (37) através da aplicação do método das aproximações sucessivas na equação de Colebrook com três iterações e 0.04 como valor inicial do fator de atrito. Os erros médio e máximo obtidos são, respectivamente, 0.0696% e 0.1385% de acordo com Brkić e Čojbašić (2017), e 0.019% e 0.1305% segundo Winning e Coole (2013).

$$\lambda = \left( -2 \log_{10} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7} - \frac{5.02}{Re} \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{13}{Re} \right) \right] \right\} \right)^{-2} \quad (37)$$

Brkić e Čojbašić (2017) recomendaram a Equação (38) com a forma otimizada da equação Equação (37). Essa correlação causa um erro médio de 0.0521% e um erro máximo de 0.0831%.

$$\lambda = \left\{ -2.0012 \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7027} - \frac{5.0605}{Re} \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7027} - \frac{5.0605}{Re} \log_{10} A_4 \right) \right] \right\}^{-2} \quad (38)$$

sendo:

$$A_4 = \frac{\epsilon/D}{3.7027} + \frac{12.513}{Re} \quad (39)$$

Haaland (1983) recomendou uma correlação explícita que combina a Equação (8), para o regime hidraulicamente rugoso, com a correlação explícita para o regime hidraulicamente liso que é definida como:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.8 \log_{10} \left( \frac{Re}{6.9} \right) \quad (40)$$

que ele atribuiu a Colebrook. Essa correlação difere daquela usada por Churchill (1973) apenas pela troca do fator 7 por 6.9. É notável que as correlações desenvolvidas por Haaland e Churchill são praticamente as mesmas, mas Haaland sugeriu apresentar sua correlação conforme a Equação (41).

$$\lambda = \left\{ -1.8 \log_{10} \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{\epsilon/D}{3,7} \right)^{1.11} \right] \right\}^{-2} \quad (41)$$

A Equação (41) leva a um erro médio de 0.4657% e um erro máximo de 1.4083% segundo Brkić e Čojbašić (2017), e segundo Winning e Coole (2013) os erros médio e máximo são 0.373% e 1.434% .

Chen (1984) introduziu uma nova correlação com base na correlação explícita para o regime hidraulicamente liso, cuja autoria ele atribui a Blasius, que é definida como:

$$\lambda = 0.3164\text{Re}^{-0.25} \quad (42)$$

Ele desenvolveu a Equação (43), que é válida para todo o regime turbulento. Ela apresenta um erro médio de 7.4537% e um erro máximo de 27.5074%, relativos à equação de Colebrook, conforme Brkić e Čojbašić (2017). O próprio Chen reconheceu que sua correlação não apresenta alta precisão, principalmente para valores altos de número de Reynolds porque a própria correlação de Blasius não é precisa nesse intervalo.

$$\lambda = 0.3164 \left( \frac{1}{\text{Re}^{0.83}} + 0.11 \frac{\epsilon}{D} \right)^{0.3} \quad (43)$$

Serghides (1984) introduziu a Equação (44). Segundo Brkić e Čojbašić (2017), essa correlação possui um erro médio de 0.0508% e um erro máximo de 0.1385%, relativos à equação de Colebrook. Segundo Winning e Coole (2013), a Equação (44) é muito mais precisa porque causa um erro médio de 0.006% e um erro máximo de 0.02372%. Este é o melhor exemplo da disparidade entre os valores de erro alegados por diferentes autores.

$$\lambda = \left[ A_5 - \frac{(B_5 - A_5)^2}{A_5 - 2B_5 + C_5} \right]^{-2} \quad (44)$$

sendo:

$$A_5 = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{12}{\text{Re}} \right) \quad (45)$$

$$B_5 = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51A_5}{\text{Re}} \right) \quad (46)$$

$$C_5 = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51B_5}{\text{Re}} \right) \quad (47)$$

A Equação (48) é a forma otimizada da correlação de Serghides segundo Brkić e Čojbašić (2017). Comparada à equação original, apenas os coeficientes

12 e 3.7 foram trocados por 12.585 e 3.71, respectivamente. A Equação (48) causa um erro médio de 0.0004% e um erro máximo de 0.0026%.

$$\lambda = \left[ A_6 - \frac{(B_6 - A_6)^2}{A_6 - 2B_6 + C_6} \right]^{-2} \quad (48)$$

onde:

$$A_6 = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{12.585}{\text{Re}} \right) \quad (49)$$

$$B_6 = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51A_6}{\text{Re}} \right) \quad (50)$$

$$C_6 = -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.71} + \frac{2.51B_6}{\text{Re}} \right) \quad (51)$$

Manadilli (1997) propôs a Equação (52). Segundo Brkić e Čojbašić (2017), a Equação (52) apresenta um erro médio de 0.3716% e um erro máximo de 2.0651%. Já Winning e Coole (2013) verificaram que a Equação (52) possui um erro médio de 0.393% e um erro máximo de 2.710%.

$$\lambda = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.70} + \frac{95}{\text{Re}^{0.983}} - \frac{96.82}{\text{Re}} \right) \right]^{-2} \quad (52)$$

Através de uma regressão não linear multivariável em valores calculados pela correlação de Colebrook, Romeo, Royo e Monzón (2002) sugeriram a Equação (53), que segue o mesmo formato da correlação proposta por Zigrang e Sylvester (1982).

$$\lambda = \left\{ -2 \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7065} - \frac{5.0272}{\text{Re}} \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.827} - \frac{4.567}{\text{Re}} \log_{10} A_7 \right) \right] \right\}^{-2} \quad (53)$$

onde:

$$A_7 = \left( \frac{\epsilon/D}{7.7918} \right)^{0.9924} + \left( \frac{5.3326}{208.815 + \text{Re}} \right)^{0.9345} \quad (54)$$

A Equação (55) é a forma otimizada por Brkić e Čojbašić (2017) da Equação (53).

$$\lambda = \left\{ -2 \log_{10} \left[ \frac{\epsilon/D}{3.7106} - \frac{5}{\text{Re}} \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.8597} - \frac{4.795}{\text{Re}} \log_{10} A_8 \right) \right] \right\}^{-2} \quad (55)$$

sendo:

$$A_8 = \left( \frac{\epsilon/D}{7.646} \right)^{0.9685} + \left( \frac{4.9755}{206.2795 + \text{Re}} \right)^{0.0,8759} \quad (56)$$

De acordo com os resultados de Winning e Coole (2013), os erros médio e máximo da Equação (53) são, respectivamente, 0.057% e 0.1226%. Segundo Brkić e Čojbašić (2017), a Equação (53) leva a um erro médio de 0.0544% e um erro máximo de 0.1345%, e a Equação (55) apresenta um erro médio de 0.0037% e um erro máximo de 0.0083%.

Sonnad e Goudar (2006) introduziram a Equação (57). Eles reformularam a equação de Colebrook e aplicaram algumas simplificações. Segundo eles, a sua correlação é matematicamente equivalente à equação de Colebrook.

$$\lambda = \left\{ 0.8686 \ln \left[ \frac{0.4587\text{Re}}{A_9^{A_9/(A_9+1)}} \right] \right\}^{-2} \quad (57)$$

sendo:

$$A_9 = 0.124 \frac{\epsilon}{D} \text{Re} + \ln(0.4587\text{Re}) \quad (58)$$

A Equação (57) apresenta um erro médio de 0.2167% e um erro máximo de 0.8007% segundo Brkić e Čojbašić (2017), e causa um erro médio de 0.174% e um erro máximo de 0.9688% de acordo com Winning e Coole (2013). Essa correlação foi otimizada por Vatankhah (2014) e o resultado é Equação (59). Segundo o próprio Vatankhah, sua correlação tem um erro máximo em relação à correlação de Colebrook de 0.022%.

$$\lambda = \left\{ 0.8686 \ln \left[ \frac{0.4599\text{Re}}{(A_{10} - 0.2753)^{A_{10}/(A_{10}+0.9741)}} \right] \right\} \quad (59)$$

onde:

$$A_{10} = 0.124 \frac{\epsilon}{D} \text{Re} + \ln(0.4599\text{Re}) \quad (60)$$

Buzzelli (2008) apresentou a Equação (61), baseada na equação de Colebrook, para calcular o fator de atrito em um único passo.

$$\lambda = \left\{ A_{11} - \left[ \frac{A_{11} + 2 \log_{10}(B_{11}/\text{Re})}{1 + 2.18/B_{11}} \right] \right\}^{-2} \quad (61)$$

sendo:

$$A_{11} = \frac{0.774 \ln \text{Re} - 1.41}{1 + 1.32\sqrt{\epsilon/D}} \quad (62)$$

$$B_{11} = \frac{\epsilon/D}{3.7} \text{Re} + 2.51A_{11} \quad (63)$$

A Equação (61) apresenta um erro médio de 0.0526% e um erro máximo de 0.1385%, relativos à equação de Colebrook, conforme Brkić e Čojbašić (2017), ou um erro médio de 0.005% e um erro máximo de 0.02355% segundo Winning e Coole (2013). Buzzelli destacou que os valores calculados pela sua correlação são ligeiramente maiores que os valores calculados pela correlação de Colebrook, portanto ligeiramente conservadores. A Equação (64) é a otimização proposta por Brkić e Čojbašić (2017) e tem um erro médio de 0.0265% e um erro máximo de 0.0797%.

$$\lambda = \left\{ A_{12} - \left[ \frac{A_{12} + 1.9999 \log_{12} (B_{12}/\text{Re})}{0.9996 + 2.1018/B_{12}} \right] \right\}^{-2} \quad (64)$$

sendo:

$$A_{12} = \frac{0.7314 \ln \text{Re} - 1.3163}{1.0025 + 1.2435\sqrt{\epsilon/D}} \quad (65)$$

$$B_{12} = \frac{\epsilon/D}{3.7165} \text{Re} + 2.5137A_{12} \quad (66)$$

Avci e Karagoz (2009) recomendaram a Equação (67). Eles propuseram uma nova abordagem matemática para o escoamento turbulento e dela derivaram uma correlação explícita. Eles alegam que a nova correlação possui erro máximo de 3% relativo a resultados experimentais do fator de atrito. A Equação (67) possui um erro médio de 1.2521% e um erro máximo de 4.7858% segundo Brkić e Čojbašić (2017), ou um erro médio de 1.716% e um erro máximo de 6.084% de acordo com Winning e Coole (2013).

$$\lambda = \frac{6.4}{\left\{ \ln \text{Re} - \ln \left[ 1 + 0.01\text{Re}(\epsilon/D) \left( 1 + 10\sqrt{\epsilon/D} \right) \right] \right\}^{2.4}} \quad (67)$$

A Equação (68) foi introduzida por Papaevangelou, Evangelides e Tzimopoulos (2010). Ela visa limitar o erro máximo a 0.8%, relativamente à correlação

de Colebrook. Segundo Winning e Coole (2013), os seus erros médio e máximo são 0.230% e 1.411%, mas, segundo Brkić e Čojbašić (2017), são 0.2001% e 0.8248%.

$$\lambda = \frac{0.2479 - 0.0000947 (7 - \log_{10} \text{Re})^4}{\left\{ \log_{10} \left[ (\epsilon/D) / 3.615 + 7.366 / \text{Re}^{0.9142} \right] \right\}^2} \quad (68)$$

Fang, Xu e Zhou (2011) propuseram a Equação (69) através da regressão de 1056 valores calculados pela equação de Colebrook, cobrindo o domínio  $3000 \leq \text{Re} \leq 10^8$  e  $0 \leq \epsilon/D \leq 0.05$ . De acordo com Brkić e Čojbašić (2017), a Equação (70) é a forma otimizada da Equação (69).

$$\lambda = 1.613 \left\{ \ln \left[ 0.234 \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1007} - \frac{60.525}{\text{Re}^{1.1105}} + \frac{56.291}{\text{Re}^{1.0712}} \right] \right\}^{-2} \quad (69)$$

$$\lambda = 1.61 \left\{ \ln \left[ 0.234 \left( \frac{\epsilon}{D} \right)^{1.1007} - \frac{61.948}{\text{Re}^{1.1105}} + \frac{57.449}{\text{Re}^{1.0712}} \right] \right\}^{-2} \quad (70)$$

Segundo Brkić e Čojbašić (2017), a Equação (69) tem um erro médio de 0.3101% e um erro máximo de 0.6167%, e a Equação (70) apresenta um erro médio de 0.1526% e um erro máximo de 0.5669%. Já segundo Winning e Coole (2013), a Equação (69) apresenta um erro médio de 0.156% e um erro máximo de 0.5347%.

A Equação (71) foi recomendada por Ghanbari, Farshad e Rieke (2011) através do ajuste de curva de 62 números de Reynolds para cada curva de rugosidade lidos no diagrama de Moody. Contra a equação de Colebrook, a Equação (71) tem um erro médio de 0.8028% e um erro máximo de 2.8962% segundo Brkić e Čojbašić (2017).

$$\lambda = \left\{ -1.52 \log_{10} \left[ \left( \frac{\epsilon/D}{7.21} \right)^{1.042} + \left( \frac{2.731}{\text{Re}} \right)^{0.9152} \right] \right\}^{-2.169} \quad (71)$$

Samadianfard (2012) propôs a Equação (72). Ele usou programação de expressão genética para desenvolver sua aproximação da equação de Colebrook.

$$\lambda = \left[ \frac{\text{Re}^{\epsilon/D} - 0.6315093}{\text{Re}^{1/3} + \text{Re}(\epsilon/D)} \right] + 0.0275308 \left( \frac{6.929841}{\text{Re}} + \epsilon/D \right)^{1/9} + A_{13} \quad (72)$$

sendo:

$$A_{13} = \left[ \frac{10^{\epsilon/D}}{(\epsilon/D) + 4.781616} \right] \left( \sqrt{\epsilon/D} + \frac{9.99701}{\text{Re}} \right) \quad (73)$$

Segundo o próprio Samadianfard, a Equação (72) possui um erro médio de 0.05113% e um erro máximo de 0.08152%, relativos à equação de Colebrook. Entretanto, Vatankhah (2014) concluiu que o seu erro pode chegar a 7.374%. Segundo ele, o erro no trabalho de Samadianfard pode ter sido devido à falta de precisão no cálculo iterativo da correlação de Colebrook. Em resposta, Vatankhah (2014) apresentou a Equação (74). Segundo o próprio autor, a Equação (74) causa um erro máximo de 0.008%, relativo à equação de Colebrook.

$$\lambda = \left[ \frac{2.51/\text{Re} + 1.1513A_{14}}{A_{14} - (\epsilon/D)/3.71 - 2.3026A_{14} \log_{10}(A_{14})} \right]^2 \quad (74)$$

sendo:

$$A_{14} = \frac{6.0173}{\text{Re} [0.07(\epsilon/D) + \text{Re}^{-0.885}]^{0.109}} + \frac{\epsilon/D}{3.71} \quad (75)$$

Heydari, Narimani e Pakniya (2015) sugeriram a Equação (76). Eles usaram ajuste de curva em valores calculados pela correlação de Colebrook. Segundo seus autores, a Equação (76) leva a um erro relativo médio de 0.22% e um erro relativo máximo de 1.52%.

$$\lambda = \left[ 0.42 + 16.27 \frac{\epsilon}{D} - 1.81 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) - 54.81 (\epsilon/D)^2 + A_{15} \right]^{-2} \quad (76)$$

onde:

$$A_{15} = 0.02 \left[ \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \right]^2 + 8.74 (\epsilon/D) \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{5.74}{\text{Re}^{0.9}} \right) \quad (77)$$

Shaikh, Massan e Wagan (2015) propuseram a Equação (78). Segundo os próprios autores, essa correlação possui um erro médio de 0.0962%, mas um erro máximo de 186.1135%, relativo à equação de Colebrook. Segundo eles,

esse erro tão elevado está concentrado em valores baixos de rugosidade e de Reynolds, e por isso ela é recomendada apenas para valores altos.

$$\lambda = 0.25 \left( \log_{10} \left\{ \frac{2.51}{[1.14 - 2 \log_{10} (\epsilon/D)]^{-2} \text{Re}} + \frac{\epsilon/D}{3.7} \right\} \right)^{-2} \quad (78)$$

Brkić (2016) introduziu uma pequena mudança na Equação (78) e sugeriu a Equação (79). A única diferença é que o expoente -2 presente no numerador foi substituído por -0.75. Segundo ele, essa simples mudança reduz o erro relativo máximo para 6.46%.

$$\lambda = \left( -2 \log_{10} \left\{ \frac{2.51 [1.14 - 2 \log_{10} (\epsilon/D)]^{0.75}}{\text{Re}} + \frac{\epsilon/D}{3.71} \right\} \right)^{-2} \quad (79)$$

Offor e Alabi (2016) também apresentaram uma nova correlação. Eles observaram que o produto  $\text{Re}\sqrt{f}$  varia linearmente com o número de Reynolds e propuseram substituir esse produto, na equação de Colebrook, por uma equação linear. Por ajuste de curva, eles propuseram a Equação (80), que, segundo os autores, apresenta um erro médio de 0.0025% e um erro máximo de 0.0664% relativos à equação de Colebrook.

$$\lambda = \left( -2 \log_{10} \left\{ \frac{\epsilon/D}{3.71} - \frac{1.975}{\text{Re}} \ln \left[ \left( \frac{\epsilon/D}{3.93} \right)^{1.092} + \frac{7.627}{\text{Re} + 395.9} \right] \right\} \right)^{-2} \quad (80)$$

Beluco e Schettini (2016) introduziram a Equação (81). Eles propuseram um modelo de equação generalizado das correlações de Eck, de Churchill, de Swamee e Jain, de Barr e de Haaland. Segundo os próprios autores, a Equação (81) causa um erro máximo de 4.44%, relativo à equação de Colebrook. Eles alegam que, para 96.78% dos pontos analisados, o erro relativo é inferior a 1%.

$$\lambda = 0.3009 \left\{ \log_{10} \left[ \left( \frac{\epsilon/D}{3.7315} \right)^{1.0954} + \left( \frac{5.9802}{\text{Re}} \right)^{0.9695} \right] \right\}^{-2} \quad (81)$$

Segundo Biberg (2017), a Equação (82) é uma representação da equação de Colebrook em termos da função  $W$  de Lambert:  $W(x) = x/e^{W(x)}$ .

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\ln 10} W(e^{A_{16}}) - \frac{\text{Re}}{9.287} \frac{\epsilon}{D} \quad (82)$$

em que:

$$A_{16} = \ln \left( \frac{\ln 10 \operatorname{Re}}{5.02} \right) + \frac{\ln 10 \operatorname{Re} \epsilon}{18.574 D} \quad (83)$$

Assim como a correlação de Colebrook, a função  $W$  de Lambert não possui representação explícita, mas existem expansões em série e aproximações suficientemente precisas. A partir da Equação (82), Biberg usou os três primeiros termos da expansão em série da função  $W$  de Lambert e recomendou a Equação (84). Ele alega que seu erro máximo é 0.153%.

$$\lambda = \left\{ \frac{2}{\ln 10} \left[ \ln \left( \frac{\ln 10 \operatorname{Re}}{5.02} \right) + \left( \frac{1}{A_{16}} - 1 \right) \ln A_{16} \right] \right\}^{-2} \quad (84)$$

Gregory e McEnery (2017) apresentaram a Equação (85). Segundo os autores, seu erro máximo é de 1% e a maioria dos erros é menor que 0.3%, relativos a 357 valores calculados iterativamente pela correlação de Colebrook com precisão na quinta casa decimal.

$$\lambda = \left[ -2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{1.64 A_{17}}{\operatorname{Re}^{B_{17}}} \right) \right]^{-2} \quad (85)$$

onde:

$$A_{17} = 0.9 - 4.9 \frac{\epsilon}{D} + 0.1 e^{-400(\epsilon/D)} \quad (86)$$

$$B_{17} = 1 - \frac{1}{4 + 0.208 \ln(\operatorname{Re}/3000)} \quad (87)$$

Brkić e Praks (2019) recomendaram a Equação (88) e a Equação (89). Assim como o correlação de Biberg, elas foram desenvolvidas a partir da representação da correlação de Colebrook através da função  $W$  de Lambert.

$$\lambda = \left\{ 0.8686 \left[ A_{18} - C_{18} + \frac{C_{18}}{A_{18} + B_{18}} \right] \right\}^{-2} \quad (88)$$

$$\lambda = \left\{ 0.8686 \left[ A_{18} - C_{18} + \frac{1.0119 C_{18}}{A_{18} + B_{18}} + \frac{C_{18} - 2.3849}{(A_{18} + B_{18})^2} \right] \right\}^{-2} \quad (89)$$

onde:

$$A_{18} = \ln \operatorname{Re} - 0.779397488 \quad (90)$$

$$B_{18} = \frac{\text{Re}(\epsilon/D)}{8.0878} \quad (91)$$

$$C_{18} = \ln(A_{18} + B_{18}) \quad (92)$$

Segundo os seus autores, a Equação (88) possui 0.13% como erro máximo e a Equação (89), 0.0096%. Além disso, eles alegam que as suas correlações são mais eficientes do ponto de vista da carga computacional porque contêm apenas duas funções logarítmicas, já que elas possuem maior carga computacional que as outras operações.

A Tabela 1 apresenta um resumo de todas as correlações explícitas apresentadas. Daqui em diante, as correlações explícitas são referenciadas pelo código apresentado, e.g. C1 para a correlação de Moody (1947).

**Tabela 1 – Resumo das correlações explícitas apresentadas neste trabalho com o seu código, a(s) equação(ões) correspondente(s) e o(s) seu(s) autor(es).**

<b>Correlação</b>	<b>Equação(ões)</b>	<b>Autor(es)</b>
C1	(17)	Moody (1947)
C2	(18)	Eck (1966)
C3	(19)	Brkić e Čojbašić (2017)
C4	(20) e (21)	Wood (1966)
C5	(23)	Churchill (1973)
C6	(24), (25) e (26)	Churchill (1977)
C7	(28)	Swamee e Jain (1976)
C8	(29)	Swamee (1993)
C9	(30)	Chen (1979)
C10	(31)	Brkić e Čojbašić (2017)
C11	(32)	Round (1980)
C12	(33)	Brkić e Čojbašić (2017)
C13	(34) e (35)	Shacham (1980)
C14	(36)	Barr (1981)
C15	(37)	Zigrang e Sylvester (1982)
C16	(38) e (39)	Brkić e Čojbašić (2017)
C17	(41)	Haaland (1983)
C18	(43)	Chen (1984)
C19	(44), (45), (46) e (47)	Serghides (1984)
C20	(48), (49), (50) e (51)	Brkić e Čojbašić (2017)
C21	(52)	Manadilli (1997)
C22	(53) e (54)	Romeo, Royo e Monzón (2002)
C23	(55) e (56)	Brkić e Čojbašić (2017)
C24	(57) e (58)	Sonnad e Goudar (2006)
C25	(59) e (60)	Vatankhah (2014)
C26	(61), (62) e (63)	Buzzelli (2008)
C27	(64), (65) e (66)	Brkić e Čojbašić (2017)
C28	(67)	Avci e Karagoz (2009)
C29	(68)	Papaevangelou, Evangelides e Tzimopoulos (2010)
C30	(69)	Fang, Xu e Zhou (2011)
C31	(70)	Brkić e Čojbašić (2017)
C32	(71)	Ghanbari, Farshad e Rieke (2011)
C33	(72) e (73)	Samadianfard (2012)
C34	(74) e (75)	Vatankhah (2014)
C35	(76) e (77)	Heydari, Narimani e Pakniya (2015)
C36	(78)	Shaikh, Massan e Wagan (2015)
C37	(79)	Brkić (2016)
C38	(80)	Offor e Alabi (2016)
C39	(81)	Beluco e Schettini (2016)
C40	(84) e (83)	Biberg (2017)
C41	(85), (86) e (87)	Gregory e McEnery (2017)
C42	(88), (90), (91) e (92)	Brkić e Praks (2019)
C43	(89), (90), (91) e (92)	Brkić e Praks (2019)



### 3 METODOLOGIA

No Capítulo 3 são apresentados os métodos usados na análise comparativa das correlações do fator de atrito. Foram avaliados a precisão das correlações explícitas em relação à equação de Colebrook e também o tempo computacional tanto das correlações explícitas quanto dos métodos iterativos de cálculo da correlação implícita de Colebrook. Todos os cálculos foram codificados no programa de computador GNU Octave versão 4.2.1 numa máquina com processador Intel Core i5-6600 3.90 GHz e RAM de 8 GB.

#### 3.1 AVALIAÇÃO DA PRECISÃO

A precisão, em relação à equação de Colebrook, de cada uma das 43 correlações explícitas apresentadas na seção 2.4 e resumidas na Tabela 1, foi avaliada através do intervalo de erros relativos (erros mínimo e máximo), do erro relativo médio e do coeficiente de determinação ou  $R^2$ . Esse erro relativo (percentual) é o critério de precisão mais comum em trabalhos semelhantes como os apresentados na seção 2.4.

O fator de atrito foi calculado para 1688802 pontos no domínio de 402 valores de rugosidade relativa entre  $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 0.05$  e para  $\epsilon/D = 0$  ( $0, 1.0 \times 10^{-6}, 1.1 \times 10^{-6}, \dots, 9.9 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-5}, 1.1 \times 10^{-5}, \dots, 5.0 \times 10^{-2}$ ) e 4201 valores de número de Reynolds entre  $4000 \leq Re \leq 10^8$  ( $4.00 \times 10^3, 4.01 \times 10^3, \dots, 9.99 \times 10^3, 1.00 \times 10^4, 1.01 \times 10^4, \dots, 1.00 \times 10^8$ ). As correlações foram avaliadas em todo esse domínio porque ele corresponde ao que Moody usou no seu diagrama. Para as correlações que não admitem rugosidade relativa nula, i.e. as correlações C4, C36 e C37, esse valor foi removido do domínio e 1684601 pontos foram usados para a avaliação da sua precisão. O objetivo desse elevado número de pontos na malha foi obter resultados com maior refinamento/resolução que os trabalhos semelhantes.

O erro relativo não é uniformemente distribuído, i.e. pontos diferentes têm erros relativos diferentes. Para cada ponto, foi calculado a diferença ou erro relativo entre o fator de atrito calculado por cada uma das correlações explícitas

e o fator de atrito calculado pela equação de Colebrook. Foi usado o método de cálculo iterativo do ponto fixo, porque ele é o método mais simples, e o critério de convergência foi uma diferença absoluta entre duas iterações consecutivas menor que  $10^{-10}$ . O erro relativo de cada ponto é definido como:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_c - \lambda_{cw}}{\lambda_{cw}} \quad (93)$$

onde  $\varepsilon$  é o erro relativo,  $\lambda_c$  é o fator de atrito calculado por uma correlação explícita e  $\lambda_{cw}$  é o fator de atrito calculado pela equação de Colebrook. O erro relativo médio é definido como:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \frac{|\lambda_{c,i} - \lambda_{cw,i}|}{\lambda_{cw,i}} \quad (94)$$

onde  $\bar{\varepsilon}$  é o erro médio,  $p$  é o número de pontos usados na avaliação da precisão,  $\lambda_{c,i}$  é o fator de atrito calculado por uma correlação explícita para o ponto e  $\lambda_{cw,i}$  é o fator de atrito calculado pela equação de Colebrook para o ponto. O erro relativo de uma correlação explícita é o fator pelo qual o fator de atrito calculado por ela é maior (erro relativo positivo) ou menor (erro relativo negativo) que o fator de atrito calculado pela equação de Colebrook. Por exemplo, um erro relativo de 1% significa que o fator de atrito é 0.01 vezes maior, i.e. 1.01 vezes, e um erro relativo de -1% significa que o fator de atrito é 0.01 vezes menor, i.e. 0.99 vezes. Portanto, quanto mais próximo de zero for o seu erro relativo, mais precisa é a correlação explícita.

A fim de facilitar a comparação das correlações explícitas em relação ao seu erro, foram também calculados  $\varepsilon^*$ , que é a razão entre o erro máximo da correlação e o menor erro máximo entre todas as correlações, e  $\bar{\varepsilon}^*$ , que é a razão entre o erro médio da correlação e o menor erro médio entre todas as correlações. Por exemplo, um  $\varepsilon^*$  igual a 1 significa que a correlação correspondente possui o menor erro máximo entre todas as correlações, e um  $\bar{\varepsilon}^*$  igual a 2 significa que a correlação correspondente possui um erro médio que é duas vezes o valor do menor erro médio entre todas as correlações.

O coeficiente de determinação é definido como:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^p (\lambda_{cw,i} - \lambda_{c,i})^2}{\sum_{i=1}^p (\lambda_{cw,i} - \bar{\lambda}_{cw})^2} \quad (95)$$

onde  $R^2$  é o coeficiente de determinação e  $\bar{\lambda}_{cw}$  é a média dos fatores de atrito calculados pela equação de Colebrook, que é definida como:

$$\bar{\lambda}_{cw} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \lambda_{cw,i} \quad (96)$$

O coeficiente de determinação de uma correlação explícita é o fator pelo qual o erro associado ao fator de atrito calculado por ela é reduzido em comparação ao erro associado à média dos fatores de atrito calculados pela equação de Colebrook, que é aproximadamente 0.025. Por exemplo, um  $R^2$  de 0.99 significa que, na média, o erro associado à correlação é 0.99 vezes menor, i.e. 0.01 vezes o erro associado ao valor constante de 0.025, mas um  $R^2$  negativo significa que o erro associado à correlação é maior, e.g. um  $R^2$  de -0.99 significa que o erro é 0.99 vezes maior, i.e. 1.99 vezes o erro associado ao valor constante de 0.025. Portanto, quanto mais próximo da unidade for seu coeficiente de determinação, mais precisa é correlação explícita.

### 3.2 AVALIAÇÃO DO TEMPO COMPUTACIONAL

Recorrendo às funções tic e toc do programa de computador GNU Octave, mediu-se o tempo computacional para cada uma das 43 correlações explícitas e também para cada um dos cinco métodos iterativos de cálculo da equação de Colebrook apresentados na seção 2.3. Também foram medidos os números máximo e médio de iterações necessárias para a convergência de cada método iterativo. O número de iterações foi limitado a 1000, i.e. se não houver convergência dentro de 1000 iterações, então o cálculo termina. O mesmo critério de paragem da avaliação da precisão foi usado: uma diferença absoluta entre duas iterações consecutivas menor que  $10^{-10}$ .

Os cálculos iterativos da equação de Colebrook foram realizados com valores fixos e também com o auxílio das correlações explícitas para as condições iniciais. No primeiro caso, para os métodos iterativos da bissecção e da falsa

posição foram usados 0.005 e 0.08 como intervalo inicial, visto que esses são os valores mínimo e máximo de fator de atrito no diagrama de Moody, i.e. qualquer valor de fator de atrito está contido nesse intervalo. Para o método do ponto fixo foi usado o valor médio desse intervalo como valor inicial, i.e. 0.0425. Para o método de Newton-Raphson foi usado 0.005 como valor inicial porque esse valor garante que haja convergência para todos os pares de rugosidade relativa e número de Reynolds. Para o método da secante foram usados 0.005 e 0.0055 como valores iniciais, porque assim a reta secante aproxima-se da reta tangente e, assim como no método de Newton-Raphson, a convergência é garantida.

As correlações explícitas também foram usadas como aproximação para as condições iniciais dos métodos iterativos. Apesar de aumentar o número de cálculos, essa aproximação reduz o número de iterações necessárias para a convergência e assim pode reduzir o tempo computacional. Para os métodos iterativos da bisseção e da falsa posição foram usadas as correlações C24 e C25 como intervalo inicial, porque a primeira calcula fatores de atrito maiores que a equação de Colebrook e a segunda calcula fatores de atrito menores (ver seção 4.1), e portanto o fator de atrito está contido entre eles. Para os métodos do ponto fixo e de Newton-Raphson foi usada a correlação C25 como valor inicial, e para o método da secante também foram usadas as correlações C24 e C25 como valores iniciais. Isso permite avaliar se o uso das correlações explícitas como aproximação inicial permite reduzir o tempo computacional do cálculo iterativo da correlação de Colebrook.

O tempo computacional foi medido para o cálculo do fator de atrito para todos os pontos no domínio de 42 valores de rugosidade relativa entre  $10^{-6} \leq \epsilon/D \leq 0.05$  e para  $\epsilon/D = 0$  ( $0, 1 \times 10^{-6}, 2 \times 10^{-6}, \dots, 9 \times 10^{-6}, 1 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-5}, \dots, 5 \times 10^{-2}$ ) e 421 valores de número de Reynolds entre  $4000 \leq Re \leq 10^8$  ( $4.0 \times 10^3, 4.1 \times 10^3, \dots, 9.9 \times 10^3, 1.0 \times 10^4, 1.1 \times 10^4, \dots, 1.0 \times 10^8$ ), totalizando 17682 pontos. Novamente, para as correlações que não admitem rugosidade relativa nula, esse valor foi removido do domínio de avaliação. A medição desse tempo computacional foi repetida nove vezes e foi calculado

lado a média e o desvio padrão  $\sigma$ , que é definido como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (t_i - \bar{t})^2} \quad (97)$$

onde  $m$  é o número de medições (i.e. 9),  $t_i$  é o tempo computacional para uma medição e  $\bar{t}$  é a média dos tempos computacionais medidos. De forma a tornar esse tempo computacional adimensional e independente da capacidade de cálculo do computador, tanto para as correlações explícitas quanto para os métodos numéricos foi calculado  $\bar{t}^*$ , que é o tempo computacional médio dividido pelo menor tempo médio entre as correlações ou métodos iterativos. Por exemplo, um  $\bar{t}^*$  igual a 1 para uma correlação explícita significa que seu tempo computacional é o menor, e um  $\bar{t}^*$  igual a 10 para um método iterativo significa que seu tempo computacional é 10 vezes o tempo computacional dessa correlação explícita.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

No Capítulo 4 são apresentados e discutidos os resultados das avaliações da precisão das correlações explícitas e do tempo computacional tanto das correlações explícitas quanto dos métodos iterativos de cálculo da equação de Colebrook. Os códigos computacionais desenvolvidos neste trabalho estão publicados na plataforma Code Ocean e disponíveis em: <https://codeocean.com/capsule/7657118/>.

### 4.1 PRECISÃO DAS CORRELAÇÕES EXPLÍCITAS

A Tabela 2 mostra a precisão de cada uma das 43 correlações explícitas apresentadas na seção 2.4 e resumidas na Tabela 1 em relação à equação de Colebrook. São mostrados os intervalos entre erros mínimos e máximos, os erros médios e os coeficientes de determinação. As correlações estão classificadas do menor para maior erro máximo. A ordem de classificação não muda significativamente se o erro médio for usado como critério.

Apenas uma correlação possui  $R^2$  menor que 0.97, e portanto o melhor parâmetro de comparação é o erro relativo. A correlação C19 possui os menores erros máximo e médio, que são 0.00314% e 0.00055%. Esses valores não estão em concordância com o trabalho de Brkić e Čojbašić (2017), que alegam um erro máximo de 0.1385% e um erro médio de 0.0508%. Essa grande disparidade entre os resultados pode ter sido causada pela pequena diferença nos domínios de análise usados. O presente trabalho considera valores de rugosidade relativa de até 0.05, mas o trabalho de Brkić e Čojbašić usa valores de até 0.1, e portanto o erro relativo máximo alegado por eles pode estar no intervalo entre esses valores. Outra possível fonte de disparidades é a diferença na precisão usada no cálculo iterativo da equação de Colebrook, que em seu trabalho foi uma diferença entre duas iterações consecutivas de  $10^{-7}$ , mas no presente trabalho é  $10^{-10}$ . Além disso, a correlação C20, que é a forma otimizada proposta por esses autores, não apresenta 0.0026% de erro máximo como eles alegam, mas sim 0.12530%. Mesmo não estando em total concordância, mais próximos

dos resultados obtidos estão os valores apontados por Winning e Coole (2013), porque eles alegam um erro máximo de 0.02372%.

**Tabela 2 – Classificação das correlações explícitas do menor ao maior erro máximo em relação à equação de Colebrook.  $\varepsilon^*$  é a razão entre o erro máximo e o menor erro máximo entre todas as correlações,  $\varepsilon$  é o intervalo de erros,  $\bar{\varepsilon}^*$  é a razão entre o erro médio e o menor erro médio entre todas as correlações,  $\bar{\varepsilon}$  é o erro médio e  $R^2$  é o coeficiente de determinação.**

Correlação	$\varepsilon^*$	$\varepsilon$ [%]	$\bar{\varepsilon}^*$	$\bar{\varepsilon}$ [%]	$R^2$
C19	1.00000	[-0.00314, 0.00000]	1.00000	0.00055	1.00000
C13	5.54637	[-0.00044, 0.01740]	3.76497	0.00206	1.00000
C27	33.16356	[-0.10407, 0.07123]	59.87069	0.03280	1.00000
C15	36.20211	[-0.11360, 0.04060]	44.66199	0.02447	1.00000
C26	37.67072	[-0.00000, 0.11821]	13.78810	0.00755	1.00000
C42	39.66605	[-0.12447, 0.08703]	100.38350	0.05500	1.00000
C38	39.93023	[-0.12530, 0.04924]	94.89416	0.05199	1.00000
C34	39.93048	[-0.12530, 0.05958]	78.42556	0.04297	1.00000
C20	39.93048	[-0.12530, 0.00000]	77.51046	0.04247	1.00000
C43	41.32170	[-0.12967, 0.00794]	80.94064	0.04435	1.00000
C23	42.31998	[-0.13280, 0.00137]	82.51739	0.04521	1.00000
C25	44.33863	[-0.13913, -0.00509]	87.81330	0.04811	1.00000
C22	46.59921	[-0.08151, 0.14623]	111.57814	0.06113	1.00000
C40	48.71029	[-0.10478, 0.15285]	65.39433	0.03583	1.00000
C16	48.99252	[-0.15374, 0.10635]	167.20137	0.09161	0.99999
C10	96.82851	[-0.30384, 0.10366]	219.79711	0.12043	0.99999
C9	103.74837	[-0.31561, 0.32556]	204.48228	0.11204	0.99999
C30	156.62707	[-0.44092, 0.49149]	297.39235	0.16294	0.99999
C31	161.59810	[-0.41758, 0.50709]	349.00527	0.19122	0.99998
C14	170.10547	[-0.53378, 0.32094]	119.88697	0.06569	0.99999
C29	257.77584	[-0.80889, 0.57827]	319.78703	0.17521	0.99998
C24	316.34152	[0.00187, 0.99267]	458.56478	0.25125	0.99993
C35	417.81326	[-1.25486, 1.31108]	1236.09677	0.67725	0.99984
C41	431.85845	[-1.35515, 0.72541]	410.59980	0.22497	0.99997
C17	453.68782	[-1.42365, 1.31384]	820.48321	0.44954	0.99991
C8	790.53967	[-0.74426, 2.48068]	837.89880	0.45908	0.99972
C21	869.52101	[-0.00407, 2.72852]	696.63955	0.38169	0.99972
C32	922.96631	[-2.89623, 2.15521]	1319.76042	0.72309	0.99937
C28	954.27655	[-2.99448, 2.90109]	1890.71211	1.03591	0.99901
C39	1046.80961	[-0.93384, 3.28485]	526.99129	0.28874	0.99997
C7	1070.18734	[-0.70862, 3.35820]	942.58644	0.51644	0.99959
C6	1073.77844	[-0.64184, 3.36947]	930.59884	0.50987	0.99959
C5	1089.57825	[-0.62086, 3.41905]	966.91087	0.52977	0.99957
C12	1742.94614	[-5.15812, 5.46929]	4222.22900	2.31334	0.99863
C3	2545.82949	[-6.94966, 7.98871]	3858.16627	2.11387	0.99685
C2	3066.96628	[-9.62401, 6.45952]	3989.30911	2.18573	0.99776
C11	3244.01462	[-8.45314, 10.17958]	5972.67066	3.27240	0.99243
C37	3872.05151	[-6.47580, 12.15034]	4646.14211	2.54560	0.99688
C33	3956.45491	[-12.41519, 7.42849]	3201.84763	1.75428	0.99889
C1	5066.56332	[-15.89867, 12.53223]	5655.61863	3.09869	0.97956
C4	8997.41867	[-28.23353, 6.24061]	6023.38733	3.30019	0.99387
C18	14578.89625	[-45.74798, 10.37852]	15761.36390	8.63559	0.98286
C36	182422.61018	[0.00089, 572.43466]	113310.10624	62.08214	-3.92565

A segunda correlação mais precisa é a C13, que possui erro máximo de

0.01740% e erro médio de 0.00206%. Em seguida, na Tabela 2, da correlação C27 à correlação C16 o erro máximo está entre 0.10407% e 0.15374%, e o erro médio está entre 0.00755% e 0.09161%. É importante notar que possuir um erro máximo menor não implica que a correlação também possui um erro médio menor. Em geral, para essas correlações, não há concordância com os erros obtidos pelos outros autores. Por exemplo, a correlação C26 possui um erro máximo de 0.11821%, mas para Winning e Coole (2013) esse erro é de apenas 0.02355%, e, contrariando o erro máximo de 0.0664% alegado pelo seu autor, a correlação C38 causa um erro máximo de 0.12530%. Como contra exemplo, para a correlação C22, que possui 0.14623% como erro máximo, há boa concordância com o erro de 0.1345% alegado por Brkić e Čojbašić (2017) e até com o erro de 0.1226% obtido por Winning e Coole (2013).

Na Tabela 2, com erros máximos entre 0.30384% e 0.99267%, e erros médios entre 0.06569% e 0.25125%, tem-se da correlação C10 à correlação C24. Neste intervalo, há maior semelhança com os erros obtidos pelos outros trabalhos. A correlação C9, por exemplo, possui erro máximo de 0.3387% para Winning e Coole (2013), de 0.3649% para Brkić e Čojbašić (2017) e de 0.32556% no presente trabalho. Entretanto, a correlação C29, que possui 0.80889% como erro máximo, tem um erro de 0.8249% segundo Brkić e Čojbašić (2017), mas causa até 1.411% de erro de acordo com Winning e Coole (2013).

As correlações C35, C41 e C17 possuem, respectivamente, erros máximos de 1.31308%, 1.35515% e 1.42365%, e erros médios de 0.67725%, 0.22497% e 0.44954%. A correlação C17 está em ótima concordância com os resultados de Winning e Coole (2013), com um erro máximo de 1.434%, e de Brkić e Čojbašić (2017), onde apresenta erro máximo de 1.4083%.

Entre as correlações C8 e C5, na Tabela 2, os erros máximos vão de 2.48068% a 3.41905% com erros médios entre 0.28874% e 1.03591%. O erro máximo de 2.8962% obtido por Brkić e Čojbašić (2017) para a correlação C32 está em perfeita concordância com o valor de 2.89623% obtido neste trabalho. As correlações C21, C7 e C5, que possuem, respectivamente, erros de até 2.72852%, 3.35820% e 3.41905%, estão em ótima concordância com o trabalho de Winning e Coole (2013), que alega erros máximos de 2.710%, 3.343% e

3.407%.

Na Tabela 2, da correlação C12 à correlação C18 o erro máximo está entre 5.46929% e 45.74798%, e o erro médio está entre 1.75428% e 8.63559%. Neste intervalo, os resultados obtidos estão em boa concordância com os outros trabalhos. A correlação menos precisa é a C36 e causa um erro máximo de 572.43466%, um erro médio de 62.08214% e possui um  $R^2$  de -3.92565, e portanto não deve ser usada como substituta da equação de Colebrook.

É notável que a correlação C25, que causa um erro máximo de 0.13913% e um erro médio de 0.04811%, é a única que possui apenas erros negativos, i.e. todos os fatores de atrito calculados por ela são menores que os calculados pela equação de Colebrook, e a correlação C24, que causa um erro máximo de 0.99267% e um erro médio de 0.25125%, é a única que possui apenas erros positivos.

Os resultados obtidos não concordam totalmente com os trabalhos de comparação dos outros autores, assim como eles não concordam totalmente entre si. Conforme já foi argumentado, isso pode ter sido causado pela diferença nos domínios de números de Reynolds e rugosidades relativas usados ou por diferenças na precisão do cálculo iterativo da equação de Colebrook.

É importante salientar que esses resultados limitam-se às precisões das correlações explícitas quando comparadas à equação de Colebrook. Testar a precisão das correlações (inclui-se a correlação de Colebrook) contra medições experimentais em condutas reais está além dos objetivos deste trabalho. Portanto, na prática da engenharia, mesmo as correlações menos precisas podem ser adequadas porque a incerteza em condutas reais pode ser maior.

## 4.2 TEMPO COMPUTACIONAL DAS CORRELAÇÕES

A Tabela 3 mostra os tempos computacionais das 43 correlações explícitas. As correlações estão classificadas do menor ao maior tempo computacional médio.

Como esperado, em geral, as correlações explícitas mais rápidas em termos computacionais são também as menos precisas e, reciprocamente, as correlações mais precisas são também as mais lentas computacionalmente. Por

exemplo, para a correlação C19, que é a mais precisa, o tempo computacional é 4.47833 vezes maior que o tempo da correlação C1, que é a mais rápida, mas também uma das menos precisas.

**Tabela 3 – Classificação das correlações explícitas do menor ao maior tempo computacional médio.  $\bar{t}^*$  é a razão entre o tempo computacional médio e o menor tempo computacional médio entre todas as correlações explícitas,  $\bar{t}$  é o tempo computacional médio e  $\sigma$  é o seu desvio padrão.**

Correlação	$\bar{t}^*$	$\bar{t}$ [s]	$\sigma$ [s]
C1	1.00000	0.23821	0.00438
C18	1.02485	0.24413	0.01804
C2	1.59715	0.38045	0.01329
C30	1.62218	0.38641	0.00509
C5	1.62941	0.38814	0.00686
C3	1.65171	0.39345	0.02216
C7	1.66194	0.39589	0.01599
C39	1.66650	0.39697	0.01020
C17	1.70599	0.40638	0.02625
C31	1.71237	0.40790	0.02332
C32	1.80823	0.43074	0.04267
C12	2.01129	0.47910	0.05840
C11	2.01804	0.48071	0.06147
C21	2.07453	0.49417	0.05694
C8	2.13343	0.50820	0.05648
C42	2.19184	0.52211	0.00555
C4	2.19406	0.52264	0.00486
C24	2.31085	0.55046	0.00441
C25	2.33074	0.55520	0.00871
C6	2.36104	0.56242	0.05366
C43	2.40820	0.57367	0.01263
C38	2.56558	0.61114	0.01196
C28	2.64305	0.62959	0.08425
C37	2.79510	0.66581	0.01663
C29	2.87608	0.68510	0.07418
C36	2.92263	0.69619	0.04323
C9	2.99924	0.71444	0.03907
C34	3.01924	0.71921	0.00634
C10	3.05794	0.72842	0.03721
C41	3.20991	0.76462	0.00825
C14	3.47848	0.82869	0.06868
C26	3.62208	0.86281	0.09297
C27	3.62546	0.86361	0.08607
C13	3.62941	0.86455	0.07591
C40	3.85815	0.91904	0.03053
C33	3.99840	0.95245	0.00846
C15	4.00288	0.95352	0.01309
C16	4.09496	0.97545	0.01689
C23	4.09536	0.97555	0.00474
C22	4.10846	0.97867	0.00766
C19	4.47833	1.06677	0.02110
C20	4.50047	1.07205	0.00561
C35	5.16117	1.22943	0.01771

As correlações com maior tempo computacional são aquelas com mais

operações matemáticas, principalmente operações logarítmicas. Em geral, nas equações da correlação C1 à correlação C8, na Tabela 3, há apenas uma operação logarítmica, da correlação C42 à correlação C13 há duas e da correlação C40 à correlação C35 há três.

A Tabela 4 mostra a carga computacional dos cinco métodos numéricos de cálculo da correlação de Colebrook apresentados na seção 2.3, tanto com valores fixos quanto com o auxílio das correlações explícitas para as aproximações iniciais. São mostrados os tempo computacionais, os números máximos e os números médios de iterações até a condição de paragem.

**Tabela 4 – Tempo computacional dos métodos numéricos de cálculo da equação de Colebrook sem e com o uso das correlações explícitas como aproximação na primeira iteração.  $\bar{t}^*$  é a razão entre o tempo computacional médio do método numérico e o menor tempo computacional médio entre as correlações explícitas, que é 0.23821 s,  $\bar{t}$  é o tempo computacional médio,  $\sigma$  é o seu desvio padrão,  $i$  é o número máximo de iterações para a convergência e  $\bar{i}$  é o número médio de iterações para a convergência.**

Método numérico	$\bar{t}^*$	$\bar{t}$ [s]	$\sigma$ [s]	$i$	$\bar{i}$
<b>Sem aproximação</b>					
Bisseção	241.24581	57.46658	3.72217	39	34.90572
Falsa posição	1707.79599	406.33344	2.15002	1000	172.96663
Ponto fixo	13.33385	3.17622	0.02452	12	7.12363
Newton-Raphson	58.96808	14.04664	0.44110	8	6.27633
Secante	129.51250	30.85086	0.17396	10	8.25093
<b>Com aproximação</b>					
Bisseção	174.97695	41.68083	2.19520	28	24.17668
Falsa posição	1432.28865	341.18201	37.36728	1000	125.52302
Ponto fixo	11.65146	2.77547	0.09321	9	4.85477
Newton-Raphson	21.37473	5.09162	0.19339	2	2.00000
Secante	47.87382	11.40391	0.32742	4	3.61520

É notável que os tempos computacionais de todas as correlações explícitas são menores que os tempos de qualquer método iterativo de cálculo da equação de Colebrook. O tempo computacional do método numérico mais rápido, que é o método do ponto fixo com aproximação, é 2.26 vezes maior que o tempo computacional da correlação mais lenta, que é a correlação C35.

O método numérico mais rápido é o método do ponto fixo com o auxílio da correlação explícita para a aproximação inicial, mas, em segundo lugar, o tempo computacional desse método usando um valor inicial constante é apenas 14% maior. O método de Newton-Raphson com aproximação é o que converge com o menor número de iterações, mas ele possui o terceiro menor tempo com-

putacional, que é 83% maior que o método do ponto fixo com aproximação. Apesar de convergir com menos iterações que o método do ponto fixo, o método de Newton-Raphson demanda mais operações matemáticas. Além disso, a implementação do método do ponto fixo é muito mais simples e possui garantia de convergência para qualquer valor inicial maior que zero.

O método da secante com aproximação inicial pela correlação explícita exige o quarto menor tempo computacional e é seguido pelo método de Newton-Raphson com valor inicial fixo. Os demais métodos possuem tempos computacionais mais de 10 vezes maiores que o método mais rápido. O método mais lento é o método da falsa posição tanto sem como com aproximação, uma vez que para alguns valores de rugosidade relativa e número de Reynolds não houve convergência mesmo após 1000 iterações.

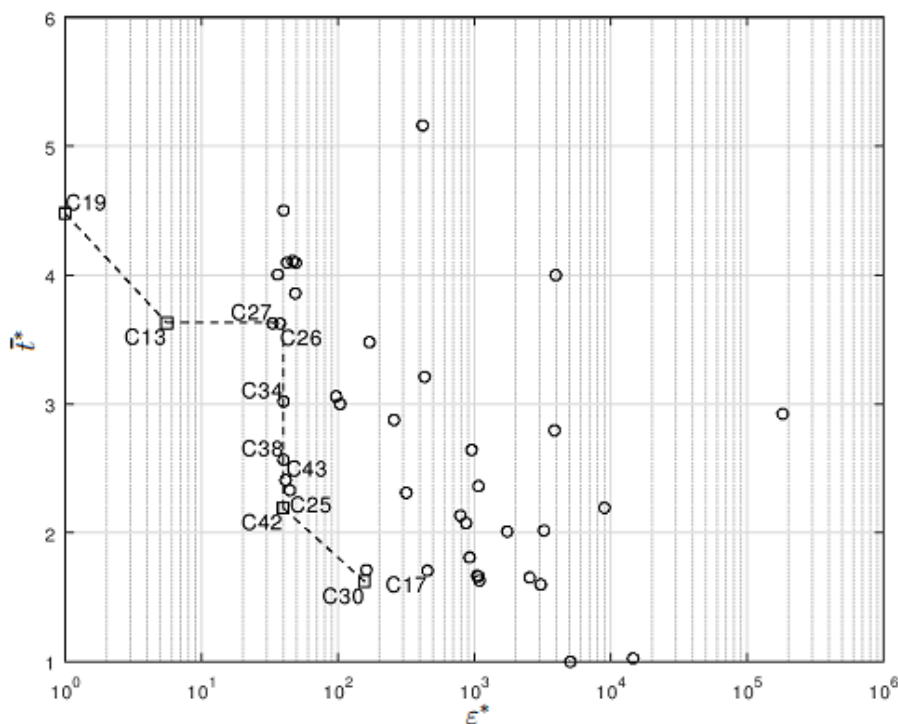
As correlações explícitas reduzem o tempo computacional em pelo menos 2.26 vezes e, a depender da precisão necessária, podem ser usadas como alternativa à equação de Colebrook. É importante observar que o tempo computacional medido depende das especificações do computador e também do método como o cálculo é realizado. Neste trabalho, não foi utilizado nenhum tipo de artifício para reduzir o tempo computacional das correlações ou dos métodos numéricos, sendo todos eles implementados do mesmo modo como apresentados no texto.

#### 4.3 ANÁLISE COMPARATIVA DAS CORRELAÇÕES

O tempo computacional do cálculo iterativo da equação de Colebrook é maior que o tempo computacional de qualquer correlação explícita. Portanto, dependendo da precisão necessária, qualquer correlação explícita pode ser usada para reduzir o tempo computacional em simulações computacionais.

A Figura 4 mostra o gráfico da razão entre os tempos computacionais contra a razão entre os erros máximos para todas as 43 correlações explícitas e permite determinar as correlações com o melhor equilíbrio entre precisão e carga computacional.

As correlações recomendadas são as que possuem a melhor relação entre precisão e carga computacional. Quanto menor o tempo computacional



**Figura 4 – Gráfico de  $\bar{t}^*$  no eixo vertical e  $\epsilon^*$  no eixo horizontal. As correlações com o melhor balanço entre precisão e carga computacional estão marcadas com quadrados.  $\bar{t}^*$  é a razão entre o tempo computacional médio e o menor tempo computacional médio entre todas as correlações explícitas e  $\epsilon^*$  é a razão entre o erro máximo e o menor erro máximo entre todas as correlações explícitas.**

e menor o erro máximo, melhor. A primeira, que é o ponto na parte superior esquerda da Figura 4, é a correlação C19 de Serghides (1984) (Equações (44), (45), (46) e (47)), que possui um erro máximo de 0.00314%. Ela é mais precisa e mais rápida que a correlação C35, que é o ponto na parte superior central.

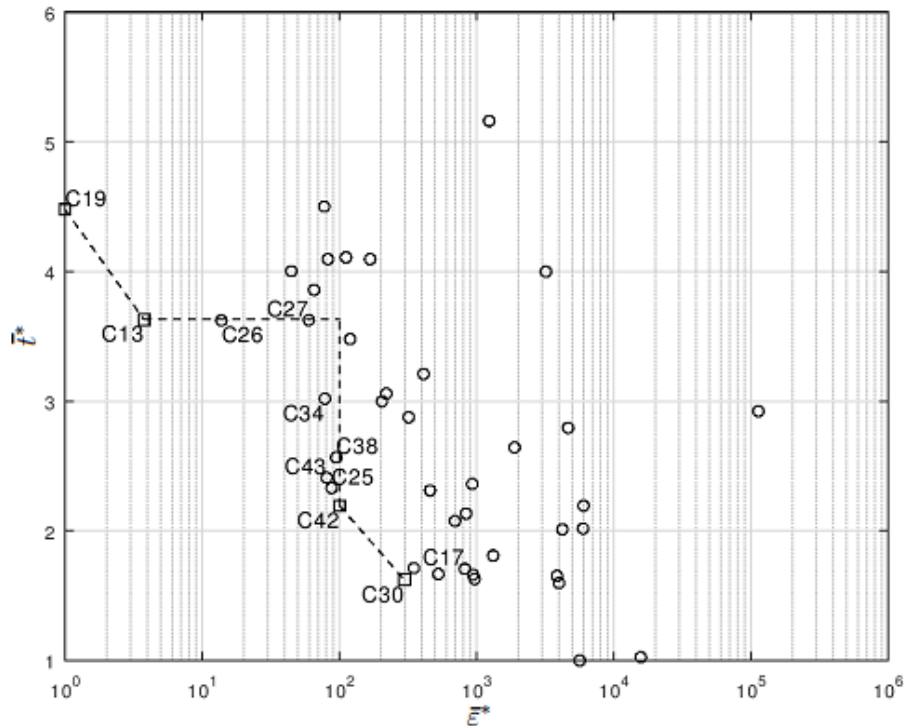
A próxima correlação recomendada é a C13 de Shacham (1980) (Equações (34) e (35)), que apresenta erros de até 0.01740%. É possível observar na linha tracejada que os tempos computacionais das correlações C27 e C26 são muito semelhantes ao da correlação C13, mas os seus erros máximos de 0.10407% e 0.11821% são mais elevados.

A correlação C42 de Brkić e Praks (2019) (Equações (88), (90), (91) e (92)) é a próxima recomendação. Ela possui um erro máximo de 0.12447%, sendo muito semelhante aos erros das correlações C34, C38, C43 e C25, mas o tempo computacional da correlação recomendada é ligeiramente menor.

Por fim, também é recomendada a correlação C30 de Fang, Xu e Zhou (2011) (Equação (69)), que tem um erro máximo de 0.49149%. A correlação C17 é tão rápida quanto a correlação C30, mas causa erros de até 1.42365%.

Entretanto, a correlação C17 de Haaland (1983) (Equação (41)) é a mais precisa com apenas uma entrada de rugosidade relativa e de número de Reynolds, e portanto é a mais adequada para cálculos manuais.

A Figura 5 mostra o gráfico da razão entre os tempos computacionais em relação à razão entre os erros médios para todas as 43 correlações explícitas.



**Figura 5 – Gráfico de  $\bar{t}^*$  no eixo vertical e  $\bar{\varepsilon}^*$  no eixo horizontal. As correlações com o melhor balanço entre precisão e carga computacional estão marcadas com quadrados.  $\bar{t}^*$  é a razão entre o tempo computacional médio e o menor tempo computacional médio entre todas as correlações explícitas e  $\bar{\varepsilon}^*$  é a razão entre o erro médio e o menor erro médio entre todas as correlações explícitas.**

Usando o erro médio como critério de comparação, a correlação C42, que possui um erro médio de 0.0550%, perde para as correlações C34, C38, C43 e C25, que têm erros de 0.04297%, 0.05199%, 0.04435% e 0.04811%, respectivamente. Se um erro médio menor é necessário, então é sugerida a correlação C25 de Vatankhah (2014) (Equações (59) e (60)) e (58)), porque ela possui o menor tempo computacional entre as concorrentes e possui ainda a característica de causar apenas erros negativos (erro mínimo de -0.13913%), i.e. qualquer fator de atrito calculado por ela é menor que o calculado pela equação de Colebrook. A correlação C24 de Sonnad e Goudar (2006) (Equações (57) e (58)) apresenta comportamento semelhante, uma vez que ela possui apenas erros positivos, mas ela leva a erros de até 0.99267% e o erro médio causado

é 0.25125%. Essas duas correlações, que possuem tempos computacionais semelhantes, podem ser usadas quando essas características são necessárias, e.g. no cálculo iterativo da equação de Colebrook pelo método da bissecção.

## 5 CONCLUSÕES

Considerando apenas o tempo computacional, qualquer uma das 43 correlações explícitas para o fator de atrito apresentadas na seção 2.4 e resumidas na Tabela 1 pode substituir a equação implícita de Colebrook no cálculo do fator de atrito, e assim reduzir o tempo computacional em simulações. Mesmo a correlação explícita mais lenta possui menos da metade do tempo computacional do método de cálculo iterativo da correlação de Colebrook mais rápido. Considerando também a precisão em relação à correlação de Colebrook, a escolha de uma correlação explícita depende dos valores de erro percentual máximo e médio necessários. Apenas a correlação de Shaikh, Massan e Wagan (2015) é contraindicada por apresentar erro significativamente elevado: erro máximo de 572.43466% e erro médio de 62.08214%. As demais correlações possuem erros máximos menores que 46% e erros médios menores que 9%.

Em geral, as correlações mais precisas são também as menos rápidas. Da mais lenta à mais rápida, as correlações explícitas mais eficientes/com o melhor equilíbrio entre precisão e velocidade são: a correlação de Serghides (1984) (Equações (44), (45), (46) e (47)), que leva a erros máximo de 0.00314% e médio de 0.00055%; a correlação de Shacham (1980) (Equações (34) e (35)), que possui um erro máximo de 0.01740% e um erro médio de 0.00206%; a correlação de Brkić e Praks (2019) (Equações (88), (90), (91) e (92)), que tem um erro máximo de 0.12447% e um erro médio de 0.05500%; e a correlação de Fang, Xu e Zhou (2011) (Equação (69)), que apresenta erros de até 0.49149% e um erro médio de 0.16294%. A correlação de Serghides (1984), a qual é a mais lenta entre essas, consome apenas 38% do tempo computacional necessário ao cálculo iterativo da equação de Colebrook, e a correlação de Fang, Xu e Zhou (2011) consome apenas 14%.

Se houver necessidade do cálculo iterativo da equação de Colebrook, sugere-se o método numérico do ponto fixo apresentado na seção 2.3, por ser o mais rápido e mais simples e por ter a convergência garantida para qualquer aproximação inicial maior que zero.

Outras correlações explícitas notáveis são as correlações de Sonnad e

Goudar (2006) (Equações (57) e (58)), que sempre calcula fatores de atrito maiores que a correlação de Colebrook, e a sua forma otimizada proposta por Vantankhah (2014) (Equações (59) e (60)), que calcula fatores de atrito menores. Elas podem ser usadas quando essas características são necessárias, e.g. no cálculo iterativo da equação de Colebrook pelo método da bissecção. Essas duas correlações possuem, respectivamente, erros máximo e médio de 0.99267% e 0.25125%, e 0.13913% e 0.04811%. A correlação de Haaland (1983) (Equação (41)) também é destacável por possuir a maior precisão com apenas uma entrada de rugosidade relativa e uma de número de Reynolds, sendo portanto a mais adequada para cálculos manuais. Ela apresenta erros de até 1.42365% contra a equação implícita de Colebrook.

É válido lembrar que a aplicação de qualquer uma das correlações do fator de atrito no projeto de sistemas de condutas depende de medições experimentais, seja da rugosidade relativa, do número de Reynolds ou até mesmo do próprio fator de atrito, e portanto o resultado carrega as incertezas intrínsecas dessas medições. A elevada precisão de algumas correlações explícitas pode até mesmo ser desnecessária na prática da engenharia, porque a incerteza em condutas reais pode ser maior. Os resultados deste trabalho limitam-se a apresentar as precisões das correlações explícitas em relação à equação de Colebrook, que é considerada a fórmula padrão. Para trabalhos futuros, sugere-se avaliar a precisão das correlações do fator de atrito contra medições experimentais em condutas reais.

## REFERÊNCIAS

AVCI, A.; KARAGOZ, I. A novel explicit equation for friction factor in smooth and rough pipes. **Journal of Fluids Engineering**, v. 131, n. 6, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.

BARR, D. I. H. Solutions of the Colebrook-White function for resistance to uniform turbulent flow. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 71, n. 2, p. 529–535, 1981. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

BELUCO, A.; SCHETTINI, E. B. C. An improved expression for a classical type of explicit approximation of the Colebrook White equation with only one internal iteration. **International Journal of Hydraulic Engineering**, v. 5, n. 1, p. 19–23, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.

BIBERG, D. Fast and accurate approximations for the Colebrook equation. **Journal of Fluids Engineering**, v. 139, n. 3, p. 031401, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.

BRKIĆ, D. Review of explicit approximations to the Colebrook relation for flow friction. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 77, n. 1, p. 34–48, 2011. Citado na página 7.

\_\_\_\_\_. Can pipes be actually really that smooth? **International Journal of Refrigeration**, v. 35, n. 1, p. 209–215, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 8.

\_\_\_\_\_. A note on explicit approximations to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 93, p. 513–515, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 29.

BRKIĆ, D.; ČOJBAŠIĆ, Ž. Evolutionary optimization of Colebrook's turbulent flow friction approximations. **Fluids**, v. 2, n. 2, 2017. Citado 13 vezes nas páginas 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 29, 37 e 39.

BRKIĆ, D.; PRAKS, P. Accurate and efficient explicit approximations of the Colebrook flow friction equation based on the Wright  $\omega$ -function. **Mathematics**, v. 7, n. 1, p. 34, 2019. Citado 7 vezes nas páginas 3, 5, 15, 27, 29, 44 e 47.

BUZZELLI, D. Calculating friction in one step. **Machine Design**, v. 80, n. 12, p. 54–55, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 29.

CHEN, J. J. J. A simple explicit formula for the estimation of pipe friction factor. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, v. 77, n. 1, p. 49–55, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 29.

CHEN, N. H. An explicit equation for friction factor in pipe. **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 18, n. 3, p. 296–297, 1979. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 29.

CHURCHILL, S. W. Empirical expressions for the shear stress in turbulent flow in commercial pipe. **AIChE Journal**, v. 19, n. 2, p. 375–376, 1973. Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 29.

\_\_\_\_\_. Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes. **Chemical Engineering**, v. 84, n. 24, p. 91–92, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 29.

COLEBROOK, C. F. Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. **Journal of the Institution of Civil Engineers**, v. 11, n. 4, p. 133–156, 1939. Citado 7 vezes nas páginas 3, 5, 1, 7, 8, 9 e 16.

ECK, B. **Technische Strömungslehre**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 29.

FANG, X.; XU, Y.; ZHOU, Z. New correlations of single-phase friction factor for turbulent pipe flow and evaluation of existing single-phase friction factor correlations. **Nuclear Engineering and Design**, v. 241, n. 3, p. 897 – 902, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 3, 5, 13, 14, 24, 29, 44 e 47.

FARSHAD, F. F.; RIEKE, H. H. Flow test validation of direct measurement methods used to determine surface roughness in pipes (OCTG). **Society of Petroleum Engineers**, 2002. Citado na página 10.

FERNANDES, E. M. G. P. **Computação numérica**. [S.l.]: Universidade do Minho, Braga, 1998. Citado na página 13.

GENIĆ, S. et al. A review of explicit approximations of Colebrook's equation. **FME Transactions**, v. 39, n. 2, p. 67–71, 2011. Citado na página 13.

GHANBARI, A.; FARSHAD, F. F.; RIEKE, H. H. Newly developed friction factor correlation for pipe flow and flow assurance. **Journal of Chemical Engineering and Materials Science**, v. 2, n. 6, p. 83–86, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 14, 24 e 29.

GNIELINSKI, V. Neue Gleichungen für den Wärme-und den Stoffübergang in turbulent durchströmten Rohren und Kanälen. **Forschung im Ingenieurwesen A**, v. 41, n. 1, p. 8–16, 1975. Citado na página 6.

GREGORY, J. M.; MCENERY, J. A. Process-based friction factor for pipe flow. **Open Journal of Fluid Dynamics**, v. 7, n. 2, p. 219, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 29.

HAALAND, S. E. Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow. **Journal of Fluids Engineering**, v. 105, n. 1, p. 89–90, 1983. Citado 4 vezes nas páginas 19, 29, 45 e 48.

HEYDARI, A.; NARIMANI, E.; PAKNIYA, F. Explicit determinations of the Colebrook equation for the flow friction factor by statistical analysis. **Chemical Engineering & Technology**, v. 38, n. 8, p. 1387–1396, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 29.

LIRA, I. On the uncertainties stemming from use of the Colebrook-White equation. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, v. 52, n. 22, p. 7550–7555, 2013. Citado na página 10.

MANADILLI, G. Replace implicit equations with signomial functions. **Chemical Engineering Journal**, v. 104, n. 8, p. 129–130, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 29.

MOODY, L. F. Friction factors for pipe flow. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 66, p. 671–684, 1944. Citado na página 9.

\_\_\_\_\_. An approximate formula for pipe friction factors. **Transactions of the American Society of Mechanical Engineers**, v. 69, n. 12, p. 1005–1011, 1947. Citado 5 vezes nas páginas 13, 14, 15, 28 e 29.

OFFOR, U. H.; ALABI, S. B. An accurate and computationally efficient explicit friction factor model. **Advances in Chemical Engineering and Science**, v. 6, n. 03, p. 237–245, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 14, 26 e 29.

PAPAEVANGELOU, G.; EVANGELIDES, C.; TZIMOPOULOS, C. A new explicit relation for the friction coefficient in the Darcy-Weisbach equation. **Protection and Restoration of the Environment**, v. 166, p. 1–7, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 29.

ROMEO, E.; ROYO, C.; MONZÓN, A. Improved explicit equations for estimation of the friction factor in rough and smooth pipes. **Chemical Engineering Journal**, v. 86, n. 3, p. 369–374, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 29.

ROUND, G. F. An explicit approximation for the friction factor-Reynolds number relation for rough and smooth pipes. **The Canadian Journal of Chemical Engineering**, v. 58, n. 1, p. 122–123, 1980. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 29.

SAMADIANFARD, S. Gene expression programming analysis of implicit Colebrook–White equation in turbulent flow friction factor calculation. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 92–93, n. 0, p. 48–55, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.

SERGHIDES, T. K. Estimate friction factor accurately. **Chemical Engineering**, v. 91, p. 63–64, 1984. Citado 6 vezes nas páginas 3, 5, 20, 29, 44 e 47.

SHACHAM, M. Comments on: "An explicit equation for friction factor in pipe". **Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals**, v. 19, n. 2, p. 228–228, 1980. Citado 6 vezes nas páginas 3, 5, 18, 29, 44 e 47.

SHAIKH, M. M.; MASSAN, S. R.; WAGAN, A. I. A new explicit approximation to Colebrook's friction factor in rough pipes under highly turbulent cases. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 88, p. 538–543, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 25, 29 e 47.

SONNAD, J. R.; GOUDAR, C. T. Turbulent flow friction factor calculation using a mathematically exact alternative to the Colebrook-White equation. **Journal of Hydraulic Engineering**, v. 132, n. 8, p. 863–867, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 22, 29, 45 e 48.

SWAMEE, P. K. Design of a submarine oil pipeline. **Journal of Transportation Engineering**, v. 119, n. 1, p. 159–170, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 29.

SWAMEE, P. K.; JAIN, A. K. Explicit equations for pipe-flow problems. **Journal of the Hydraulics Division**, v. 102, n. 5, p. 657–664, 1976. Citado 3 vezes nas páginas 14, 17 e 29.

VATANKHAH, A. R. Comment on “Gene expression programming analysis of implicit colebrook–white equation in turbulent flow friction factor calculation”. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 124, n. 0, p. 402–405, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 22, 25, 29, 45 e 48.

WHITE, F. M. **Mecânica dos fluidos**. São Paulo, SP: AMGH, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 11, 9 e 10.

WINNING, H. K.; COOLE, T. Explicit friction factor accuracy and computational efficiency for turbulent flow in pipes. **Flow, Turbulence and Combustion**, v. 90, n. 1, p. 1–27, 2013. Citado 13 vezes nas páginas 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 38 e 39.

WOOD, D. J. An explicit friction factor relationship. **Civil Engineering**, v. 36, n. 12, p. 60–61, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 29.

ZIGRANG, D.J.; SYLVESTER, N.D. Explicit approximations to the solution of Colebrook’s friction factor equation. **AIChE Journal**, v. 28, n. 3, p. 514–515, 1982. Citado 3 vezes nas páginas 19, 21 e 29.