international conference on teacher education

incte'23

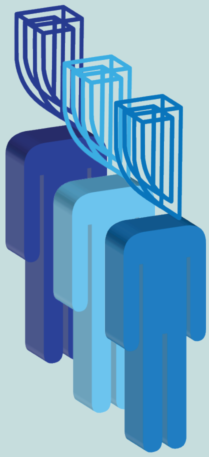
VII Encontro International de Formação na Docência

7th International Conference on Teacher Education

ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
IPB . Bragança . PORTUGAL

livro de atas
conference proceedings

incte.ipb.pt



international conference on teacher education

Bragança . 2023

Título | Title
VII Encontro International
de Formação na Docência: Livro de Atas

7th International Conference
on Teacher Education: Conference Proceedings

Editores | Editors
Cristina Mesquita, Elisabete Mendes Silva, Manuel Vara Pires, Rui Pedro Lopes, Paula Vaz
Instituto Politécnico de Bragança

Editores Gráficos | Grafic Editors
Jacinta Costa, Carlos Casimiro da Costa
Instituto Politécnico de Bragança

Apoio Técnico | Technical Support
Clarisse Pais

Publicação | Publisher
Instituto Politécnico de Bragança

Morada | Address
Escola Superior de Educação de Bragança
Campus de Santa Apolónia
5300-253 Bragança . Portugal
http://incte.ipb.pt/
incte@ipb.pt

ISBN
978-972-745-318-4

HANDLE
http://hdl.handle.net/10198/28160

DOI
https://doi.org/10.34620/incte.2023

Contribuições do GeoGebra para a apreensão de conceitos relativos aos espaços vetoriais

GeoGebra contributions to the understanding of concepts related to vector spaces

Edite Cordeiro[1], Paula Maria Barros[1,2]
https//orcid.org/ 0000-0002-6026-1283, htps://orcid.org/0000-0002-6297-0868
emc@ipb.pt, pbarros@ipb.pt

[1] *Escola Superior de Tecnologia e Gestão, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal*
[2] *Centro de Investigação em Educação Básica, Instituto Politécnico de Bragança, Portugal*

Resumo

Diversos estudos apontam para as vantagens de um modelo de ensino apoiado em tecnologia educativa, muito por via da concretização de conceitos mais abstratos. O *software* GeoGebra, na medida em que permite explorações interativas e a visualização de múltiplas representações, é uma ferramenta que pode facilitar a compreensão de conceitos matemáticos e ajudar a caminhar para a sua generalização, mesmo ao nível do ensino superior. Tendo como fundamento estas ideias, realizou-se uma experiência com estudantes que frequentavam a unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica, no âmbito de um curso de Licenciatura em Engenharia Informática numa instituição portuguesa de ensino superior, em que foi proposta a resolução de uma tarefa sobre espaços vetoriais com recurso ao GeoGebra. Especificamente, a tarefa tinha como objetivo levar os estudantes a apreender e relacionar, no espaço bidimensional, os conceitos de combinação linear, espaço gerado por um conjunto de vetores, dependência/independência linear e base de um espaço vetorial, por via da visualização gráfica em ambiente dinâmico do GeoGebra. A experiência foi avaliada com base nas perceções da professora, enquanto observadora participante, nas produções dos estudantes e respostas destes a um questionário. Os resultados mostraram que, para além do aspeto motivacional, o GeoGebra foi uma mais-valia para que os estudantes explorassem os conceitos envolvidos na tarefa de forma mais flexível, estabelecendo uma relação entre o que visualizavam e as respetivas definições, o que permitiu ajudar a ultrapassar a barreira da abstração neste tipo de conteúdos. Porém, alguns estudantes tiveram dificuldades por desconhecerem conceitos prévios sobre os vetores ou por não estarem habituados a usar o GeoGebra. Ainda assim, adquiriram algumas competências ao contactar com um software que os poderá ajudar a pensar e aplicar matemática.

Palavras-chave: espaços vetoriais, GeoGebra, visualização, ensino superior.

Abstract

Several studies point to the advantages of a teaching model supported by educational technology, largely through the implementation of more abstract concepts. The GeoGebra software, because it allows interactive explorations and the visualization of multiple representations, is a tool that can facilitate the understanding of mathematical concepts and help to move towards its generalization, even at the level of higher education. Based on these ideas, an experiment was carried out with students who attended the course of Linear Algebra and Analytical Geometry, within the scope of a Degree in Computer Engineering in a Portuguese institution of higher education. It was proposed the resolution of a task on vector spaces using GeoGebra. Specifically, the task aimed to make students learn and relate, in two-dimensional space, the concepts of linear combination, space generated by a set of vectors, linear dependency/independence and the basis of a vector space, through graphic visualization in dynamic environment of GeoGebra. The experience was evaluated based on the teacher's perceptions, as a participant observer, on the students' productions and their responses to a questionnaire. The results showed that, in addition to the motivational aspect, GeoGebra provided the advantage of students exploring the concepts involved in the task in a more flexible way, establishing a relationship between what they visualized and the respective definitions, which helped to overcome the barrier of abstraction in this type of content. However, some students had difficulties because they did not know previous concepts about vectors or because they were not used to using GeoGebra. Even so, they acquired some skills when they came into contact with software that could help them think and apply mathematics.

Keywords: vector spaces, GeoGebra, visualization, higher education.

1 Introdução

Os cursos da área de engenharia em Portugal integram habitualmente no seu plano de estudos unidades curriculares de matemática que abarcam conteúdos de álgebra linear. Esta é uma das áreas de matemática a que diversas investigações nacionais e internacionais associam dificuldades dos estudantes, tanto ao nível dos conhecimentos propedêuticos, que seriam necessários para a compreensão dos conceitos (e.g., Barros, 2018; Barros et al., 2020; Uzuriaga et al., 2010) como dificuldades inerentes aos próprios conteúdos de álgebra linear (e.g., Andreoli, 2005; Barros, 2018; Birinci et al., 2014; Britton & Henderson, 2009; Cardoso et al., 2013; Cerutti & Andreoli, 2002; Dorier & Sierpinska, 2001; Hillel, 2000). Assim, é importante que os professores do ensino superior experimentem práticas de sala de aula facilitadoras da melhoria das aprendizagens dos estudantes. A utilização de *software* que permita diferentes representações de conceitos mais abstratos do domínio da álgebra linear pode favorecer a sua compreensão. Neste estudo, procuramos averiguar a relevância de algumas das potencialidades do GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica, para melhorar a apreensão dos estudantes de conceitos fundamentais do âmbito dos espaços vetoriais.

Nas secções a seguir, fazemos um breve enquadramento teórico do tema, apresentamos a tarefa proposta aos estudantes e o contexto em que foi realizada, discutimos a resolução da tarefa recorrendo às aplicações que os estudantes produziram e referimos as suas opiniões sobre a experiência realizada. Por fim, sintetizamos as principais conclusões do estudo.

2 Enquadramento teórico

De acordo com as nossas perceções e tal como apontam alguns estudos (Harel, 2017; Hillel, 2000; Stewart et al., 2018), é frequente que os estudantes apresentem dificuldades conceituais pelo facto de a sua estrutura cognitiva nem sempre facilitar a realização de um nível de pensamento matemático necessário à construção de conhecimento do domínio da álgebra. Para estes autores, fornecer diferentes formas de representação dos conceitos algébricos ajuda os estudantes a estabelecer conexões entre esses mundos do pensamento matemático. Neste sentido, a exploração dos conceitos recorrendo à geometria pode ajudar na construção do conhecimento, facilitando o caminho para a generalização. Por exemplo, para Harel (2000), a geometria a duas e três dimensões será o contexto concreto para se introduzirem os conceitos de conjunto gerador, dependência linear e base, entre outros, a partir do qual ficará facilitada a capacidade de generalização dos mesmos para espaços de ordem superior. Dundar et al. (2012) são, também, da opinião que os conceitos de álgebra linear devem ser explicados por via de possíveis representações visuais, pois sendo conceitos abstratos, serão apenas memorizados pelos estudantes e não completamente compreendidos, caso não sejam explicados através de alguma exposição concreta. Porém, consideram que a geometria nem sempre permite clarificar as definições ou conceitos na sua totalidade. Assim, advogam que depois de um conceito ser explorado geometricamente, é preciso dar lugar às suas definições algébrica e abstrata; se um conceito ou uma definição for apresentado na perspetiva algébrica, a sua compreensão carece de alguma perspetiva geométrica. Porém, Harel (2000, 2017) adverte que embora as representações geométricas se apresentem como uma motivação e facilitem a interpretação de conceitos de álgebra linear, uma vez que fornecem contextos mais intuitivos, podem também restringir a capacidade de abstração dos estudantes. Na sua perspetiva é preciso considerar cuidadosamente a forma como a geometria é usada, deve ser dado o "salto" do particular para o geral. Afirma que quando a abordagem geométrica precede a introdução algébrica dos conceitos, constata-se a tendência de os alunos se remeterem ao "mundo geométrico dos vetores" e não passarem para o caso geral. Deste modo, Harel (2000) sugere que para ensinar álgebra linear se devem considerar os princípios da concretização, da necessidade e da generalização.

Vários estudos (Beltrán-Meneu et al., 2016; Cooley et al., 2014; Dogan, 2018; Dominiquez-Garcia et al., 2016; Stewart et al., 2018) enfatizam o uso de ambientes de geometria dinâmica para a manipulação e visualização de conceitos de álgebra linear, por se apresentarem como uma mais-valia para a efetivação dos três princípios de Harel. Em particular, o *software* GeoGebra (https://www.geogebra.org) inclui diversas ferramentas de construção que permitem produzir modelos geométricos dinâmicos em função de parâmetros específicos das expressões algébricas associadas. Tal como Turgut (2017) afirma, as potencialidades dos modelos dinâmicos facilitam que os estudantes explorem situações particulares e estabeleçam conjeturas a caminho da compreensão de certas propriedades ou definições. De acordo com os estudos de Iranzo e Fortuny (2011), Pittalis et al. (2009) e Hutkemri (2014), as explorações interativas em GeoGebra facilitam a compreensão de conceitos matemáticos, através da experimentação e da visualização das múltiplas representações. Particularmente, Diković (2009) apresenta exemplos de como o GeoGebra pode ser útil para a compreensão de conceitos de álgebra linear, por fornecer uma sensação intuitiva ao visualizar o processo matemático.

3 Contexto do estudo e experiência realizada

O estudo foi desenvolvido no âmbito da unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica do curso de licenciatura em Engenharia de uma instituição do ensino superior português. Nesse curso, essa unidade curricular, com 6 ECTS, é lecionada no 1.º ano do 2.º semestre. Em termos de conteúdos gerais, abarca os temas Números Complexos, Matrizes e Determinantes, Sistemas de Equações Lineares, Geometria Analítica, Espaços Vetoriais, Aplicações Lineares e Valores e Vetores Próprios.

As aulas são teórico-práticas, verificando-se habitualmente a exposição de conteúdos seguida da proposta de questões relacionadas, a que os alunos vão respondendo com a ajuda da professora, havendo também lugar à sua correção no quadro.

Face à necessária capacidade de abstração para a compreensão de conceitos relativos ao tema Espaços Vetoriais, consideramos que seria pertinente experimentar uma estratégia alternativa no sentido de melhorar a compreensão de alguns conceitos pelos estudantes. Assim, após terem sido abordados os conceitos de espaço e subespaço vetorial, foi proposta a resolução, em grupo, de uma tarefa (Figura 1) com recurso ao GeoGebra.

Figura 1

Tarefa proposta aos estudantes

Tarefa 1: Combinação linear de vetores e espaço gerado
(Resolução com recurso ao Geogebra)

Definição

- w é combinação linear de $A = \{u\}$, se $w = ku$, para $k \in \mathbb{R}$
- w é combinação linear de $A = \{u, v\}$, se $w = k_1u + k_2v$, para $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

I. Considere o conjunto $\boldsymbol{A} = \{(\mathbf{2}, -\mathbf{1})\}$ $\boldsymbol{de}$ $\mathbb{R}^2$.

1.1. Verifique se cada um dos vetores $\boldsymbol{w}$, seguintes, é combinação linear de $\boldsymbol{A}$:

a) $w = (-4, 2)$;
b) $w = (2, 1)$;
c) $w = (3, -4)$;
d) $w = (0, 0)$.

1.2. Qual o conjunto de vetores que é combinação linear de A? (Sugestão: Represente, em Geogebra, $w = ku$)

II. Considere o conjunto dos vetores $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ das alíneas a seguir:

i) $u = (-1, 2)$ e $v = (1, 1)$;
ii) $u = (1, -2)$ e $v = (-2, 4)$;
iii) $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$;
iv) $u = (0, 3)$ e $v = (0, -1)$;

2.1. Justifique se o vetor (4, 5) se escreve como combinação linear de A.

2.2. Indique o espaço gerado pelo conjunto A.

2.3. Indique, justificando, quais conjuntos A são linearmente independentes.

2.4. Quando é que um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^2$ gera todo o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$?

III. Base de um espaço vetorial $\boldsymbol{V}$ é qualquer conjunto $\boldsymbol{A}$ de vetores de $\boldsymbol{V}$ linearmente independente e que gera $\boldsymbol{V}$. Quais dos conjuntos $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$ de II representam uma base de $\mathbb{R}^2$?

Foi escolhido o *software* GeoGebra por, tal como já foi referido, permitir explorações interativas e a visualização de múltiplas representações. Mais concretamente, com esta tarefa pretendia-se levar os estudantes a apreender e relacionar, no espaço bidimensional, os conceitos de combinação linear, espaço gerado por um conjunto de vetores, dependência e independência linear e base de um espaço vetorial.

Consideraram-se como participantes no estudo os 51 estudantes de Engenharia Informática (designados no texto por E_i, com $i = 1, \ldots, 51$) que, frequentando a unidade curricular de álgebra linear e geometria analítica, realizaram o trabalho de grupo e responderam a um questionário final de avaliação da experiência.

A maioria dos estudantes (88%) nunca tinha trabalhado com o GeoGebra. Seis estudantes (12%) já tinham trabalhado com este *software*, quatro numa unidade curricular no ensino superior e dois no ensino secundário.

A tarefa foi desenvolvida em duas aulas da unidade curricular, de 2 horas cada uma. Os estudantes trabalharam em grupos com 3 ou 4 elementos, tendo-se formado 15 grupos (designados por Grupo i, com $i = 1, \ldots, 15$).

No início os estudantes tiveram oportunidade de se familiarizarem com o GeoGebra, sendo incentivados a explorar algumas das ferramentas que iriam se necessárias. Durante a resolução da tarefa, a professora ia passando pelos vários grupos para esclarecer eventuais dúvidas e sugerir possibilidades para a adequação das construções dinâmicas, em face do que se pretendia visualizar. Procurou fomentar a discussão nos grupos sobre os conceitos inerentes às várias questões da tarefa. Houve também alguns momentos de debate em grande grupo sempre que surgiram dificuldades transversais aos vários grupos, como, por exemplo, problemas de operacionalização com a interface do GeoGebra ou a eficiência das construções com vista à concretização da tarefa.

No final da resolução de cada uma das três questões que constituem a tarefa, todos os grupos tiveram oportunidade de partilhar as suas conclusões em grande grupo. Tal permitiu averiguar a sua validade, corrigir eventuais erros cometidos na resposta dada e discutir o caráter mais geral dos conceitos envolvidos. Após terminarem a tarefa, os grupos entregaram as respostas dadas às questões propostas, bem como as construções em GeoGebra por eles produzidas.

Estamos perante um estudo exploratório de natureza qualitativa. A experiência foi avaliada com base nas notas de campo da professora enquanto orientadora do trabalho (estatuto de observador participante), nas produções realizadas pelos estudantes e num questionário aplicado após a concretização da tarefa. Com este questionário, procurou-se perceber se os estudantes já conheciam o GeoGebra, as dificuldades que tiveram em realizar o trabalho proposto, as aprendizagens que realizaram, em que medida as representações geométricas ajudaram na compreensão dos conceitos trabalhados e as vantagens/desvantagens sentidas com a realização da tarefa por esta via. Neste artigo faz-se referência a todos estes aspetos, à exceção do último.

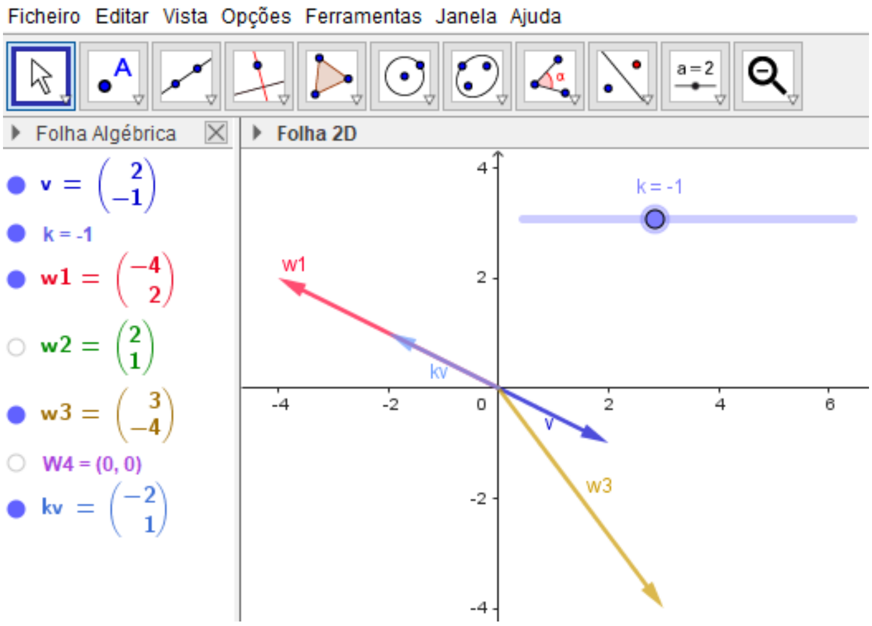
4 Resultados e sua discussão

4.1 Resolução da tarefa: produções dos alunos e comentários

A questão 1.1. da tarefa tinha como objetivo levar os estudantes a compreender a definição de um vetor ser combinação linear de outro vetor (Figura 1). Para verificar se os vetores das várias alíneas eram combinação linear do conjunto $A = \{(2, -1)\}$, os estudantes representaram o vetor $(2,-1)$ e foram acrescentando os restantes vetores envolvidos em cada alínea para tentar responder às questões. Alguns compreenderam de imediato que tal conceito estava associado ao conceito de colinearidade de um vetor, tendo sido sugerido aos restantes estudantes que considerassem, em GeoGebra, o vetor genérico $k(2,-1)$, através de uma variável k (um seletor ou ferramenta deslizante). Tal permitiu-lhes visualizar múltiplos vetores a serem combinação linear de A e, por comparação com os vetores dados, responderam corretamente às várias alíneas (ver na Figura 2 a construção do Grupo 3).

Figura 2

Resolução da Questão 1 – produção do Grupo 3



Durante a discussão, a professora sugeriu que poderiam manter alguns vetores visíveis e ocultar outros, para que mais facilmente observassem se um dado vetor era colinear com o vetor do conjunto A. Desta forma, a mesma construção permitiu-lhes averiguar se os diferentes vetores poderiam ser iguais a algum dos vetores da forma $(2k,-1k)$, e assim reconhecer que um vetor é combinação linear de outro se ambos forem colineares. Todos os grupos acabaram por responder corretamente à questão, isto é, concluíram que apenas os vetores $(4,-2)$ e $(0{,}0)$ são combinação linear de A.

Com a questão 1.2. pretendia-se determinar todos os vetores que são combinação linear de $A=\{(2,-1)\}$, com vista a explorar o conceito de espaço gerado por um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$ (ver Figura 1). A intenção era que os estudantes percebessem que se um vetor é multiplicado por um qualquer escalar mantém sempre a mesma direção, pelo que só pode gerar objetos naquela direção. O facto de já terem considerado um seletor para fazer variar o valor de k na construção realizada, permitiu que todos os grupos visualizassem esta ideia. A discussão em grande grupo permitiu concluir que o lugar geométrico em causa era uma reta na direção do vetor $(2,-1)$ que teria de conter a origem do referencial. Porém, alguns elementos tiveram dificuldades ao nível da representação algébrica dessa reta, as quais foram superadas com a ajuda dos colegas de grupo ou da professora.

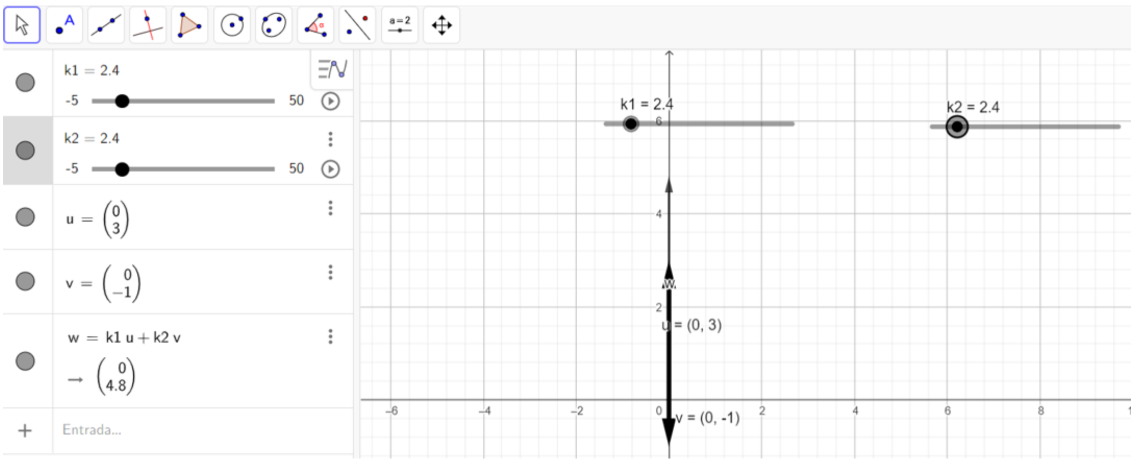
Com a questão II pretendia-se relacionar o conceito de combinação linear com o de espaço gerado por um conjunto de vetores, começando por serem considerados conjuntos de dois vetores de $\mathbb{R}^2$ (alíneas 2.1. e 2.2.), e explorar o conceito de independência linear (alínea 2.3). Os estudantes deveriam identificar quais conjuntos de vetores são geradores de $\mathbb{R}^2$ (alínea 2.4) e posteriormente responder à questão III.

Para verificar se o vetor $(4,5)$ se pode escrever como combinação linear de um conjunto $A = \{u, v\}$, os estudantes representaram múltiplos escalares de u e v com base em dois seletores e construíram o vetor soma, $ku + kv$. A manipulação dos seletores permitiu identificar quando se conseguia ou não obter o vetor $(4,5)$. Posteriormente, em grande grupo discutiu-se qual seria o espaço gerado pelo conjunto A dos vários itens, isto é, que vetores são combinação linear de A.

Na Figura 3 apresenta-se a construção produzida pelo Grupo 7 que lhes permitiu concluir que o vetor $(4,5)$ não se escreve como combinação linear de $A = \{(0,3), (0,-1)\}$. Observaram também que o espaço gerado por A é igual ao espaço gerado somente por um dos vetores $(0,3)$ ou $(0,-1)$ e que o mesmo é representado por uma reta que passa na origem do referencial, afirmando que "apenas geravam vetores naquela direção".

Figura 3

Resolução da Questão 2 – produção do Grupo 7

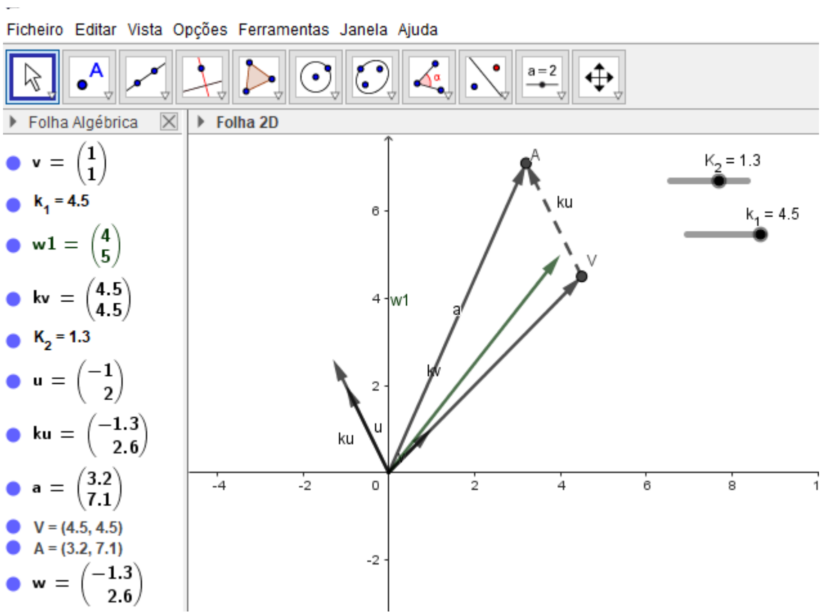


Para o caso de $A = \{(-1,2), (1,1)\}$, o Grupo 11 construiu a aplicação apresentada na Figura 4. Fazendo variar os seletores, concluiu que $(4,5)$ se podia escrever como combinação linear de A e o mesmo acontecia com qualquer outro vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. A manipulação e discussão de aplicações como esta, permitiu que os vários grupos visualizassem a propriedade relativa a dois vetores de $\mathbb{R}^2$ para que qualquer outro vetor de $\mathbb{R}^2$ se escreva como combinação linear destes. Ainda assim, alguns estudantes pediram ajuda para a formalização analítica do espaço gerado.

Foi com base nas construções dinâmicas produzidas, que os grupos intuíram o conceito de independência linear, a partir do qual se procurou debater e justificar a redundância de certos vetores para gerar um dado espaço vetorial. Em particular, os estudantes foram levados a explorar o facto de o vetor nulo ser linearmente dependente, tal como um vetor e o seu múltiplo escalar. Para a justificação de um único vetor diferente do vetor zero ser linearmente independente houve necessidade de formalizar o conceito.

Figura 4

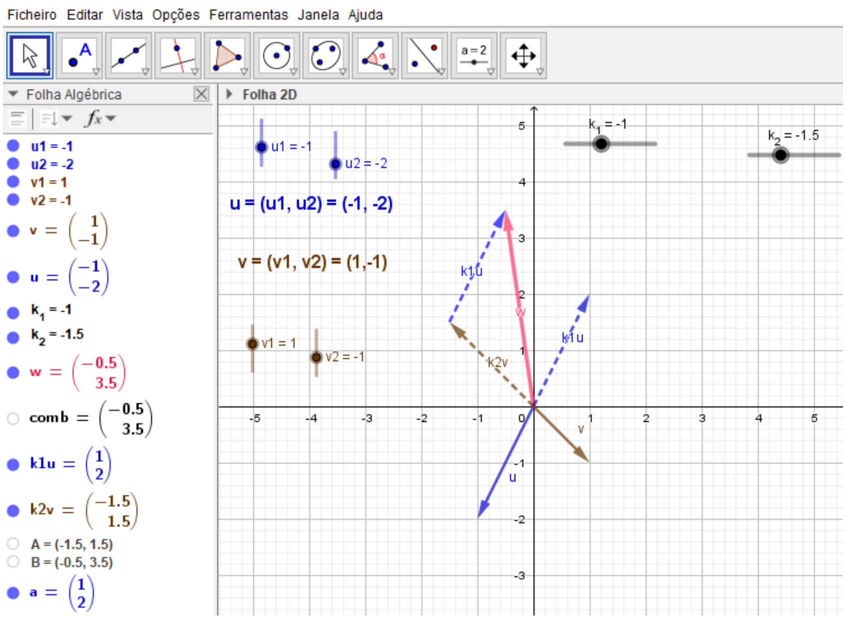
Resolução da Questão 2 – produção do Grupo 11



Com o propósito de que os estudantes experimentassem uma maior amplitude de possíveis conjuntos de vetores linearmente independentes que geram todo o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, a professora forneceu a aplicação da Figura 5.

Figura 5

Aplicação fornecida para ajudar na resolução da questão 3



Após terem experimentado diversas possibilidades para os vetores u e v, refletiu-se sobre o facto de que as combinações lineares de dois quaisquer vetores linearmente independentes varrem todo o $\mathbb{R}^2$. Essas experiências facilitaram que os estudantes relacionassem os conceitos de combinação linear e independência/dependência e, em geral terminaram a tarefa respondendo corretamente à terceira questão, identificando como base os conjuntos $\{(-1,2),(1,1)\}$ e $\{(1,0),(0,1)\}$.

4.2 Opiniões dos estudantes

As dificuldades mencionadas pelos estudantes para a realização da tarefa proposta, relacionam-se, essencialmente, com a produção de elementos matemáticos dinâmicos em GeoGebra. Tal muitas vezes prendia-se com o desconhecimento de conceitos prévios sobre os vetores (dificuldade também identificada por Barros et al., 2020), com o facto de não estarem familiarizados com o GeoGebra ou não estarem habituados a usar *software* para pensar matemática.

> Por ser a primeira vez a usar o GeoGebra senti algumas dificuldades pois nunca tinha usado nada parecido e não sabia como configurar certas coisas (E51); Senti dificuldades na utilização do GeoGebra ao criar vetores (E23); …aumentar e diminuir os vetores para confirmar que eram colineares (E1); Tive dificuldades em encontrar algumas funcionalidades do GeoGebra, por exemplo, como definir um limite para uma variável (E41).
>
> Tive dificuldades em usar as fórmulas, e como iria descobrir os subespaços (E23); A identificar os espaços gerados pelos conjuntos de vetores (E42); em compreender o conceito de combinação linear e relembrar a matéria de vetores (E15); Senti as dificuldades inerentes a não ter bases sobre estas matérias, mas com os materiais fornecidos e as sugestões da professora tornou-se possível (E27).

Alguns estudantes também mencionaram dificuldades de interpretação da própria tarefa, dificuldades com o tempo e com o facto de usarem o telemóvel em vez do computador.

> Tive dificuldades em interpretar o que foi pedido (E22); Tive dificuldades em perceber o que era para fazer nos exercícios (E36).
>
> Não consegui acabar os exercícios por falta de tempo (E21).
>
> Aprender a usar o GeoGebra no telemóvel uma vez que não era muito explícito em como usar as ferramentas (E2); inicialmente, e trabalhando no telemóvel, não encontrava algumas funcionalidades, mas rapidamente fui de encontro ao pretendido (E28).

Relativamente às aprendizagens que consideram ter realizado, há estudantes que se focam na aprendizagem da própria ferramenta de trabalho, sendo que outros destacam a compreensão dos conceitos e definições envolvidos na tarefa. Mencionam também a relevância da componente geométrica para a sua apreensão.

> Aprendi a utilizar o programar para me ajudar a compreender melhor exercícios relacionados com a matéria em questão (E45); A usar as ferramentas do GeoGebra, principalmente no que toca a vetores (E20); Aprendi o básico de GeoGebra (E10).

> O GeoGebra permitiu facilitar o entendimento sobre espaços vetoriais (E28); Através desta tarefa consegui entender melhor os conceitos de vetores colineares (E11); Compreendi que vetores são combinação linear de um conjunto e ajudou-me a verificar se um conjunto é linearmente independente (E2); Aprendi a verificar se um vetor é combinação linear de um certo conjunto, assim como a determinar o espaço gerado por esse mesmo conjunto (E6); O aplicativo possibilitou-me a construção e interpretação de uma combinação linear com vetores, ajudando na compreensão da representação algébrica (E35); Uma forma mais fácil de visualizar os vetores no plano (E1); Permitiu visualizar no plano a definição de combinação linear (E43).

Quando questionados sobre se as construções dinâmicas que produziram ou manipularam facilitaram a compreensão dos conceitos trabalhados, 94% dos estudantes considera que sim (o que corrobora os estudos de Iranzo e Fortuny, 2011; Pittalis et al., 2009 e Hutkemri, 2014), apontando para as vantagens dessa capacidade interativa do GeoGebra para ajudar a concretizar os conceitos.

> O facto de podermos visualizar o resultado e podermos manipular os vetores ajuda a interiorizar os conceitos de combinações lineares (E28); Sim, especialmente o controlo da variável k para mudar o vetor (E20).
>
> Sim facilitaram na compreensão da matéria pois deu para perceber mais claramente a matéria e de uma forma mais intuitiva (E48). Sim, na minha opinião, aprender conceitos é sempre melhor/mais fácil quando é possível observar fisicamente o conceito em questão em ação (E33); Imenso, porque existem certos conceitos mais abstratos que parece que se absorvem, mas como entidades é difícil materializá-las. Com o GeoGebra é possível ver essas entidades e com a ajuda das animações (E27); Sim, pois facilitou a visualização das mesmas, visto que os conceitos trabalhados são muito teóricos (E23).

5 Conclusões

No âmbito da experiência apresentada, os estudantes realizaram uma tarefa, com recurso a construções em GeoGebra para a visualização e compreensão de conceitos fundamentais relativos aos espaços vetoriais. Esta experiência veio confirmar que a interação com as representações geométrica e algébrica de elementos do espaço bidimensional facilita a sua generalização para espaços de dimensão superior, seja pela via algébrica ou de uma forma mais abstrata. Também tivemos a perceção de que as representações geométrica e algébrica de objetos matemáticos em ambientes de geometria dinâmica, fomentam uma maior ação e reflexão, tal como Baltaci (2018) e Avni Yildiz et al. (2017) afirmaram.

Por via da visualização interativa das aplicações produzidas, os estudantes experimentaram diretamente o significado dos objetos em estudo, ao interagir com as propriedades relativas aos mesmos, explorando a transição entre as diferentes representações, o que de acordo com Hillel (2000) é de grande relevância no processo de aprendizagem.

Consideramos que a experiência realizada permitiu criar um bom ambiente de aprendizagem em várias perspetivas. Embora alguns estudantes revelassem dificuldades para implementar em GeoGebra possíveis combinações lineares de vetores dados, adquiriram algumas competências ao conhecer um *software* que lhes permite pensar e aplicar matemática. Ainda que tenham recorrido frequentemente à ajuda da professora para avançar no trabalho, também desenvolveram competências relativamente ao trabalho em equipa, mantendo uma postura mais ativa com vista a explorar os assuntos. Apesar das dificuldades reveladas por alguns estudantes para explicitarem as suas conclusões e formalizarem as suas respostas, consideramos que todos foram adquirindo competências no que toca a uma linguagem com conceitos próprios.

Quanto a implicações práticas, este estudo sugere algumas estratégias facilitadoras do ensino e aprendizagem da álgebra linear, as quais tanto podem ser adotadas em sala de aula, em regime presencial, como adaptadas para o ensino remoto.

6 Referências

Andreoli, D. I. (2005). Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad (Tercera fase). In *Comunicações Científicas y Tecnológicas 2005*. Universidad Nacional del Nordeste, Argentina. http://host140.200-45-54.telecom.net.ar/unnevieja/Web/cyt/com2005/9-Educacion/D-004.pdf

Avni Yildiz, Serdal Baltaci, & Betül Küçük Demir (2017). Reflection on the Analytic Geometry Courses: The GeoGebra Software and its Effect on Creative Thinking. *Universal Journal of Educational Research*, *5*(4), 620–630.

Baltaci, S. (2018). The Impact of Teaching Geometric Locus Problems in a Computer-Assisted Environment on the Metacognitive Awareness of Preservice Teachers. *Acta Didactica Napocensia*, *11*(2), 121–134.

Barros, P. M. P. (2018). *O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico* [Tese de doutoramento, Universidade do Minho]. http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/56688

Barros, P. M., Silva, F., & Fernandes, J. A. (2020). Transição secundário-superior: Diagnóstico dos conhecimentos matemáticos de alunos portugueses e africanos. In *LUSOCONF2019 - II Encontro Internacional de Língua Portuguesa e Relações Lusófonas: livro de atas* (pp. 209–220). Instituto Politécnico de Bragança.

Beltran-Meneu, M. J., Murillo-Arcila, M., & Albarracin, L. (2016). Emphasizing visualization and physical applications in the study of eigenvectors and eigenvalues. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA*, *36*(3), 123–135. https://doi.org/10.1093/teamat/hrw018

Birinci, D. K., Delice, A., & Aydin, E. (2014). University students' solution processes in systems of linear equation. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, *152*, 563–568. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.09.244

Britton, S., & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: An attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*(7), 963–974. https://doi.org/10.1080/00207390903206114

Cardoso, V. C., Kato, L. A., & Oliveira, S. R. (2013). Um estudo no campo conceitual de Vergnaud aplicado às matrizes: Uma investigação acerca dos invariantes operatórios. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *8*, 95–116. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8nespp95

Cerutti, R. A., & Andreoli, D. I. (2002). Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la universidad (Primera fase). In *Comunicações Científicas y Tecnológicas 2002*. Universidad Nacional del Nordeste, Argentina. http://www.unne.edu.ar/unnevieja/Web/cyt/cyt/2002/09-Educacion/D-018.pdf

Cooley, L., Vidakovic, D., Martin, W. O., Dexter, S., Suzuki, J., & Loch, S. (2014). Modules as learning tools in linear algebra. *PRIMUS*, *24*(3), 257–278.

Dikovic, L. (2009). Implementing dynamic mathematics resources with GeoGebra at the college level. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET*), *4*(3), 51–54.

Dogan, H. (2018). Differing instructional modalities and cognitive structures: Linear algebra. *Linear algebra and its applications*, 542, 464–483.

Dominguez-Garcia, S., Garcia-Plana, M. I., & Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: An alternative way to teach linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(7), 1076–1086. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1153736.

Dorier, J.- L., & Sierpinska (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 255–273). Kluwer Academic Publishers.

Harel, G. (2017). The learning and teaching of linear algebra: Observations and generalizations. *Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95.

Hillel, J (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191–207). Kluwer Academic Publishers.

Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra, the case of Geogebra. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, *27*(3), 126–131.

Hutkemri, E. Z. (2014). Impact of using GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge of limit function. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, *5*(23), 873–881.

Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2011). Influence of GeoGebra on problem solving strategies. In L. Bu, & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra* (pp. 91–103). Sense Publishers.

Pittalis, M., Mousoulides, N., & Christou, C. (2009). Levels of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonides (Eds.), *Proceedings of 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 377-384). Aristotle University of Thessaloniki & University of Macedonia.

Stewart, S., Andrews-Larson, C., Berman, A., & Zandieh, M. (2018). *Challenges and strategies in teaching linear algebra*. Springer.

Stewart, S., & Thomas, M. O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*(2), 173–188. https://doi.org/10.1080/00207390903399620

Turgut, M. (2015). Theory of semiotic mediation in teaching and learning linear algebra: In search of a viewpoint in the use of ICT. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2418–2424). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. https://hal.science/hal-01289297/

Uzuriaga, V. L., Arias, J. J., & Manco, D. G. (2010). Algunas causas que determinan el bajo rendimiento académico en el curso de álgebra lineal. *Scientia et Technica, 1*(44), 286–291. http://dx.doi.org/10.22517/23447214.1849