

UMA FORMA BIDIMENSIONAL QUE MAXIMIZA A RESISTÊNCIA AERODINÂMICA NEWTONIANA

Paulo D. F. Gouveia ^{*,1} Alexander Plakhov ^{**}
Delfim F. M. Torres ^{**}

** Instituto Politécnico de Bragança, Portugal*

*** Universidade de Aveiro, Portugal*

Resumo: Um corpo bidimensional, apresentando um ligeiro movimento rotacional, desloca-se num meio rarefeito de partículas que colidem com ele de uma forma perfeitamente elástica. Em investigações que os dois primeiros autores realizaram anteriormente [Plakhov and Gouveia, 2007], procuraram-se formas de corpos que maximizassem a força de travagem do meio ao seu movimento. Dando continuidade a esse estudo, encetam-se agora novas investigações que culminam num resultado que representa um grande avanço qualitativo relativamente aos então alcançados. Esse resultado, que agora se apresenta, consiste numa forma bidimensional que confere ao corpo uma resistência muito próxima do seu limite teórico.

Keywords: corpos de resistência máxima, bilhares, problema aerodinâmico newtoniano

1. INTRODUÇÃO

Uma área de investigação da Matemática contemporânea ocupa-se com a procura de formas de corpos, dentro de classes predefinidas, que permitam minimizar ou maximizar a resistência a que ficam sujeitos quando se desloquem em meios rarefeitos. O primeiro problema desta natureza remonta já à década de 80 do século XVII, altura em que Isaac Newton [1687] estudou um problema de resistência mínima para uma classe específica de corpos convexos, que se deslocassem em meios de partículas infinitesimais, de tal modo rarefeitos que fosse possível negligenciar qualquer interacção entre as partículas, e que a interacção destas com o corpo pudesse ser descrita por colisões perfeitamente elásticas. Mais recentemente temos assistido a desenvolvimentos importantes

nesta área com a generalização do estudo a novas classes de corpos e a meios com características menos restritivas. Porém, quase invariavelmente, os resultados que têm vindo a ser publicados têm dado especial atenção a classes de corpos convexos — a convexidade de um corpo é uma condição suficiente para que a resistência seja função unicamente de colisões singulares. Mesmo os vários estudos sobre classes de corpos não convexos que têm surgido, especialmente na última década, assentam quase sempre em condições que garantem um único impacto por partícula — [Brock et al., 1996, Buttazzo and Kawohl, 1993, Comte and Lachand-Robert, 2001, Lachand-Robert and Pelletier, 2001]. Só muito recentemente, começaram a surgir alguns estudos prevendo múltiplas reflexões, como é o caso dos trabalhos de Plakhov [2003a, 2003b, 2004].

Na classe de corpos convexos, o problema reduz-se normalmente à minimização da funcional de Newton — uma fórmula analítica para o valor da re-

¹ A investigação do primeiro autor foi co-financiada pelo Fundo Social Europeu, através do Programa PRODEP III/5.3/2003

sistência, proposta por Isaac Newton [1687]. Mas no contexto de corpos não convexos não existe qualquer fórmula simples conhecida para o cálculo da resistência. Ainda que seja extremamente complexo, em geral, tratar analiticamente problemas de múltiplas colisões, para alguns problemas de minimização específicos a tarefa não se tem revelado particularmente difícil, existindo inclusive já alguns resultados disponíveis [Plakhov, 2003a,b]. Se, pelo contrário, considerarmos o problema de maximização, então a solução chega mesmo a ser trivial — para qualquer dimensão, basta que a parte frontal do corpo seja ortogonal à direcção do movimento.

E se o corpo exibir, para além do seu movimento de translação, um ligeiro movimento rotacional? Quando pensamos neste tipo de problemas temos, por exemplo, em mente satélites artificiais, de órbitas relativamente baixas, que não disponham de qualquer sistema de controlo que estabilize a sua orientação, ou outros engenhos em condições semelhantes. Nessa situação, imaginamos que, ao longo do seu percurso, o engenho rode lentamente sobre si próprio.

O problema de minimização da resistência média em corpos rotativos não convexos foi já estudado para o caso bidimensional [Plakhov, 2004]: demonstrou-se que a redução da resistência que é possível obter em relação ao caso convexo não ultrapassa os 1.22%. Por sua vez, o problema de maximização da resistência média de corpos em rotação está longe de ser trivial, contrariamente ao que se passa quando se trata de movimento puramente translacional. Foi, por isso, esta classe de problemas, o objecto de estudo do trabalho realizado pelo autores em [Plakhov and Gouveia, 2007]: investigaram-se formas de corpos não convexos que maximizassem a resistência que os mesmos teriam que enfrentar quando se deslocassem em meios rarefeitos e, simultaneamente, exibissem um ligeiro movimento rotacional. Com o estudo numérico que se levou a cabo, foram encontradas várias formas geométricas que conferiam aos corpos valores de resistência bastante interessantes; mas foi em investigações posteriores, desenvolvidas na continuação desse trabalho, que os autores conseguiram chegar ao melhor dos resultados: uma forma bidimensional que confere ao corpo uma resistência muito próxima do seu limite máximo teórico. É este último resultado que agora se apresenta.

2. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA PARA O CASO BIDIMENSIONAL

Considere-se um disco em rotação lenta e uniforme, deslocando-se numa direcção paralela ao seu plano. Denotemos o disco de raio r por C_r e a

sua fronteira por ∂C_r . Retiremos então pequenas porções do disco ao longo de todo o seu perímetro, numa vizinhança ε de ∂C_r , com $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ de valor arbitrariamente pequeno quando comparado com r . Ficamos assim com um novo corpo B definido por um subconjunto de C_r e caracterizado por uma certa rugosidade ao longo de todo o seu perímetro. A questão essencial que se coloca é a seguinte: até quanto pode ser aumentada a resistência de um corpo B ? Mais do que conhecermos o valor absoluto dessa resistência, estamos sobretudo interessados em saber qual o ganho que se consegue obter em relação à resistência do corpo liso (contorno perfeitamente circular, neste caso), ou seja, conhecer o valor normalizado

$$R(B) = \frac{\text{Resistência}(B)}{\text{Resistência}(C_r)}. \quad (1)$$

É possível, desde logo, conhecermos alguns valores de referência importantes para a resistência normalizada: $R(C_r) = 1$ e o valor da resistência $R(B)$ terá que se situar entre 0.9878 ([Plakhov, 2004]) e 1.5. O valor 1.5 será hipoteticamente atingido se todas as partículas forem reflectidas pelo corpo com uma velocidade \mathbf{v}^+ (velocidade com que as partículas se afastam definitivamente do corpo) oposta à velocidade de incidência \mathbf{v} (velocidade com que as partícula atingem o corpo pela primeira vez), $\mathbf{v}^+ = -\mathbf{v}$, situação em que é transmitida ao corpo a máxima quantidade de movimento.

De [Plakhov and Gouveia, 2007] percebemos que o corpo B de resistência máxima será aquele cuja fronteira seja integralmente formada pela concatenação de pequenas cavidades iguais, com uma forma Ω que maximize a funcional (resistência normalizada de uma cavidade individual)

$$R(\Omega) = \frac{3}{8} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(\varphi^+(x, \varphi) - \varphi)) \cos \varphi \, d\varphi \, dx, \quad (2)$$

onde, denotamos por φ e φ^+ os ângulos que os vectores $-\mathbf{v}$ e \mathbf{v}^+ fazem com o vector normal (direccionado para fora) à linha de entrada da cavidade Ω , e por x a posição de entrada da partícula. Serão ângulos positivos se forem definidos no sentido anti-horário a partir do vector normal, e negativos caso contrário. Com estas definições, tanto φ como φ^+ tomam valores no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, devendo a função $\varphi^+(x, \varphi)$ ser vista como o ângulo de saída duma partícula que interage com uma cavidade Ω de abertura de tamanho unitário e centrada no eixo dos x .

Podemos então restringir o problema à subclasse de corpos B que tenham a sua fronteira integralmente preenchida por cavidades iguais, e com isso admitir, sem qualquer perda de generalidade,

que cada cavidade com a forma Ω ocupa o lugar de um arco de círculo de tamanho $\varepsilon \ll r$. Nessas condições, demonstrámos em [Plakhov and Gouveia, 2007] que a resistência do corpo B é igual à resistência da cavidade individual Ω , menos uma pequena fracção desse valor, que será negligenciável quando $\varepsilon \ll r$,

$$R(B) = \frac{\sin(\frac{\varepsilon}{2r})}{\frac{\varepsilon}{2r}} R(\Omega) \approx R(\Omega) - \frac{(\frac{\varepsilon}{r})^2}{24} R(\Omega), \quad (3)$$

Assim, as nossas pesquisas têm como objectivo encontrar formas de cavidades Ω que maximizem o valor da funcional (2), cujo supremo sabemos situar-se no intervalo

$$1 \leq \sup_{\Omega} R(\Omega) \leq 1.5, \quad (4)$$

como facilmente se comprova usando (2): se Ω for um segmento liso, $\varphi^+(x, \varphi) = -\varphi$ e $R(\Omega) = \frac{3}{8} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\varphi)) \cos \varphi \, d\varphi \, dx = 1$; nas condições de resistência máxima $\varphi^+(x, \varphi) = \varphi$, logo $R(\Omega) \leq \frac{3}{8} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2 \cos \varphi \, d\varphi \, dx = 1.5$.

3. ESTUDO NUMÉRICO DO PROBLEMA

Na classe de problemas que estamos a considerar, apenas para algumas formas Ω muito elementares será possível desvendar a fórmula analítica da sua resistência (2). Para formas mais elaboradas, o cálculo analítico torna-se demasiado complexo, senão impossível, dada a grande dificuldade em conhecermos a função $\varphi^+ : [-1/2, 1/2] \times [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, que, como sabemos, está intimamente relacionada com o formato da cavidade Ω . Assim, o recurso à computação numérica surge como a abordagem natural e inevitável para se poder investigar essa classe de problemas.

Desenvolveram-se modelos computacionais que simulam a dinâmica de bilhar no interior de cada uma das formas Ω estudadas. Os algoritmos de construção desses modelos, bem como os responsáveis pelo cálculo numérico da resistência associada, foram implementados usando a linguagem de programação C, dado o esforço computacional envolvido.

Para a maximização da resistência dos modelos idealizados, usaram-se os algoritmos de optimização global da *toolbox* “*Genetic Algorithm and Direct Search*” (versão 2.0.1 (R2006a), uma colecção de funções que estende as capacidades de optimização do sistema de computação numérica MATLAB (versão 7.2 (R2006a)). O MATLAB foi também escolhido por dispor de funcionalidades que permitiram que se usasse para função objectivo a subrotina compilada em C de cálculo da resistência, bem como a função $\varphi^+(x, \varphi)$ por si invocada.

3.1 “Dupla Parábola”: uma solução quase óptima

No estudo numérico que os autores realizaram em [Plakhov and Gouveia, 2007] procuraram-se formas Ω_f definidas por funções $f : [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ contínuas e seccionalmente diferenciáveis:

$$\Omega_f = \{(x, y) : -1/2 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq f(x)\}. \quad (5)$$

Não se tendo conseguido, com essa classe de funções, superar o valor de resistência 1.44772, decidiu-se, neste novo estudo, estender a procura a formas Ω^g definidas por funções de y em x :

$$\Omega^g = \{(x, y) : 0 \leq y \leq h, -g(y) \leq x \leq g(y)\}, \quad (6)$$

onde $h > 0$ e se considera $g : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ uma função contínua e seccionalmente diferenciável, com $g(0) = 1/2$ e $g(h) = 0$.

À semelhança do estudo que se fez para os conjuntos Ω_f , na procura das formas Ω^g consideraram-se funções g seccionalmente lineares e seccionalmente quadráticas. Se na classes das funções lineares não se conseguiu qualquer ganho de resistência relativamente aos resultados obtidos para os conjuntos Ω_f , já nas funções quadráticas os resultados superaram as melhores expectativas: encontrou-se uma forma de cavidade Ω^g que apresenta uma resistência de 1.4965, um valor já muito próximo do seu limite teórico de 1.5. Para chegarmos a este importante resultado estudámos o valor da resistência de conjuntos Ω^g , tal como definidos em (6), na classe de funções quadráticas,

$$g_{h,\beta}(y) = \alpha y^2 + \beta y + 1/2, \text{ para } 0 \leq y \leq h,$$

onde $h > 0$ e $\alpha = \frac{-\beta h - 1/2}{h^2}$ (dado que $g_{h,\beta}(h) = 0$). Na optimização da curva, fizeram-se variar os dois parâmetros de configuração da função: h , a altura da curva $\partial\Omega^g$, e β , o seu declive na origem ($g'(0)$). Nesta classe de funções os algoritmos de optimização convergiram rapidamente para o referido resultado: a resistência máxima foi atingida com $h = 1.4142$ e $\beta = 0.0000$, e assumiu o valor $R = 1.4965$, ou seja, um valor 49.65% acima da resistência da forma rectilínea. É efectivamente um resultado muito interessante:

- (1) representa um ganho considerável no valor da resistência, relativamente ao melhor resultado obtido anteriormente, que se situava 44.77% acima do valor de referência;
- (2) o conjunto Ω^g correspondente tem uma forma bastante mais simples do que a do conjunto Ω_f associada ao melhor resultado anterior, uma vez que é formada por dois arcos de parábolas simétricos, quando a anterior era constituída por catorze desses arcos;
- (3) esse novo valor de resistência está já muito próximo do seu majorante teórico que, como se sabe, situa-se 50% acima do valor de referência;
- (4) os parâmetros óptimos parecem assumir valores que dão ao conjunto Ω^g uma configuração

com características muito especiais, como a seguir se perceberá.

Os parâmetros óptimos parecem assumir os valores exactos $h = \sqrt{2}$ e $\beta = 0$. A representação gráfica da função $R(h, \beta)$ através de curvas de nível, Figura 1, está em perfeita concordância com essa possibilidade — repare-se que as curvas de nível parecem perfeitamente centradas no ponto de coordenadas $(\sqrt{2}, 0)$, assinalado na figura por um “+”. Calculou-se então numericamente a re-

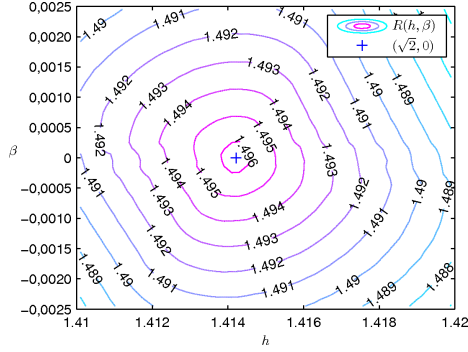


Figura 1. Curvas de nível da função $R(h, \beta)$.

sistência da cavidade $\Omega^{g_{h,\beta}}$ com os valores exactos $h = \sqrt{2}$ e $\beta = 0$, tendo o resultado confirmado o valor 1.49650.

A forma do conjunto $\Omega^{g_{h,\beta}}$ com $h = \sqrt{2}$ e $\beta = 0$ é um caso particular a que estão associadas características especiais que poderão justificar o elevado valor de resistência que apresenta. As duas secções da forma são arcos equivalentes de duas parábolas de eixos horizontais e concavidades voltadas uma para a outra — ver Figura 2b. Mas a particularidade da configuração reside no facto do eixo das parábolas coincidir com a linha de entrada da cavidade (eixo dos x), e o foco de cada uma situar-se no vértice da outra — designemos esta forma de cavidade simplesmente por “Dupla Parábola” (Figura 2a).

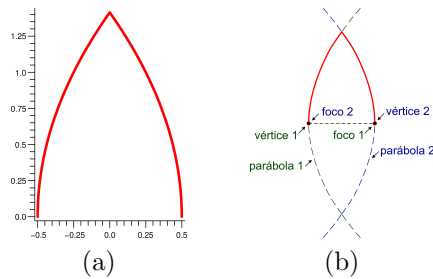


Figura 2. Dupla Parábola.

4. CARACTERIZAÇÃO DAS REFLEXÕES NA FORMA “DUPLA PARÁBOLA”

Cada uma das ilustrações da Figura 3 reproduz, para a Dupla Parábola, uma trajectória concreta, obtida com o nosso modelo computacional. É re-

confortante verificar que, à excepção da última trajectória, em todas as restantes a partícula surge à saída da cavidade com uma velocidade quase invertida relativamente àquela que foi a sua velocidade de entrada. Este é o “sintoma” que caracteriza inequivocamente uma cavidade de óptimo desempenho. Mesmo no caso da trajectória da ilustração (f), a direcção da velocidade de saída parece não andar muito distante da de entrada.

Se analisarmos as cinco primeiras ilustrações, verificamos existir algo em comum no comportamento da partícula: para descrever a trajectória, a partícula é sempre sujeita a três reflexões. Esta parece ser uma característica determinante para a aproximação dos ângulos de entrada e de saída. Embora esta convicção tivesse sido inicialmente de natureza meramente empírica, os resultados do estudo analítico que se veio a realizar em [Gouveia, 2007] vão no sentido de confirmar que uma parte muito significativa das trajectórias “benignas” — aquelas em que os vectores velocidade de entrada e de saída são quase paralelos — subentendem exactamente três reflexões. Nesse estudo, conseguiu-se ainda demonstrar algumas propriedades importantes que ajudam a consolidar os resultados numéricos que obtivemos para a Dupla Parábola, designadamente,

- que não existem trajectórias com menos de 3 reflexões;
- para ângulos de entrada $|\varphi| > \varphi_0 = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \simeq 19.47^\circ$, todas as trajectórias são de 3 reflexões;
- em trajectórias com 4 ou mais reflexões, a diferença angular é delimitada por $2\varphi_0$: $|\varphi - \varphi^+| < 2\varphi_0$.

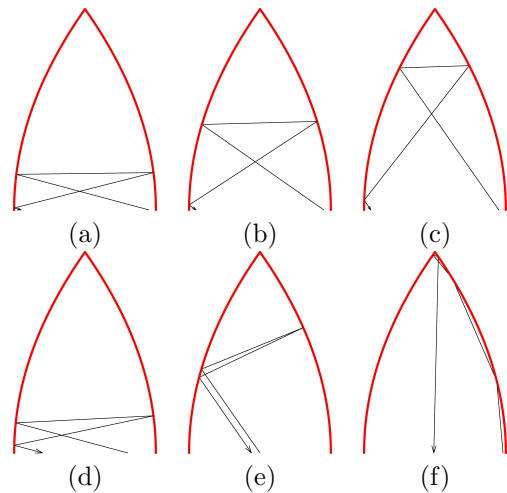


Figura 3. Exemplo de trajectórias obtidas com o modelo computacional: (a) $x = 0.45$, $\varphi = 75^\circ$; (b) $x = 0.45$, $\varphi = 55^\circ$; (c) $x = 0.45$, $\varphi = 35^\circ$; (d) $x = 0.3$, $\varphi = 75^\circ$; (e) $x = 0.0$, $\varphi = 35^\circ$; (f) $x = 0.48$, $\varphi = 5^\circ$.

5. OUTRAS POSSÍVEIS APLICAÇÕES

Para além de maximizar a resistência newtoniana, é entusiasmante verificar que as potencialidades da forma Dupla Parábola por nós encontrada, podem vir a revelar-se também muito interessantes noutros domínios de interesse prático. A Dupla Parábola, embora não garanta a inversão perfeita da velocidade das partículas que com ela colidam, desempenha essa missão com grande sucesso: garante uma grande aproximação das direcções dos fluxos incidente e reflectido para uma parte significativa dos ângulos de incidência, e mesmo para os restantes não permite que o desfazimento atinja valores elevados. Este tipo de característica pode vir a revelar-se muito interessante noutros domínios de aplicação, como por exemplo, na definição de novas geometrias para os elementos ópticos que compõem as superfícies retrorreflectoras — veja-se em [Gouveia, 2007] um estudo exploratório sobre este tipo de aplicação.

6. CONCLUSÃO

Com o trabalho agora apresentado, que surge na continuação do estudo realizado anteriormente pelos autores em [Plakhov and Gouveia, 2007], conseguiu-se obter um resultado original que nos parece de grande alcance: os algoritmos de optimização convergiram para uma forma geométrica muito próxima da forma ideal — a Dupla Parábola. Trata-se de uma forma de rugosidade que confere uma resistência quase máxima (muito próxima do majorante teórico) a um disco que, para além de se deslocar num movimento translacional, rode lentamente sobre si próprio. Na Figura 4 é ilustrado um desses corpos. Atendendo

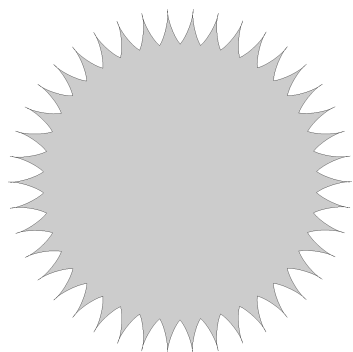


Figura 4. Corpo 2D (quase) óptimo.

a que o contorno do corpo apresentado é integralmente formado por 42 cavidades Ω com a forma da Dupla Parábola, cada uma das quais com uma resistência relativa de 1.49650, de (3) concluímos que $R(B) = \frac{\sin(\pi/42)}{\pi/42} R(\Omega) \approx 1.4951$ é a resistência total do corpo, um valor 49.51% acima do valor de resistência do disco de contorno liso correspondente (o menor disco que inclua o

corpo). Sabemos que se o corpo for formado por um número suficientemente elevado de pequenas dessas cavidades, a sua resistência atingirá mesmo o valor 1.4965, mas o exemplo apresentado é suficiente para percebermos o quão próximos ficámos do conhecido majorante teórico (50%).

Tendo ainda em conta que o majorante 1.5 é um resultado teórico que apenas nos indica a não existência de formas que superem esse valor de resistência, a forma por nós encontrada poderá mesmo tratar-se de uma solução óptima. A confirmar-se esta hipótese o nosso resultado ganhará ainda uma importância redobrada. Embora não se perspectivem fáceis desenvolvimentos, este é um importante problema que fica em aberto à espera de futuras contribuições que, se não vierem a superar o nosso resultado, venham a permitir reforçar esta nossa conjectura.

REFERÊNCIAS

- F. Brock, V. Ferone, and B. Kawohl. A symmetry problem in the calculus of variations. *Calc. Var.*, 4:593–599, 1996.
- G. Buttazzo and B. Kawohl. On Newton’s problem of minimal resistance. *Math. Intell.*, 15: 7–12, 1993.
- M. Comte and T. Lachand-Robert. Newton’s problem of the body of minimal resistance under a single-impact assumption. *Calc. Var. Partial Differ. Eq.*, 12:173–211, 2001.
- Paulo D. F. Gouveia. *Computação de Simetrias Variacionais e Optimização da Resistência Aerodinâmica Newtoniana*. PhD thesis, Universidade de Aveiro, Portugal, 2007. (Submetida em Julho de 2007 para prestação de prova de Doutoramento).
- T. Lachand-Robert and M. A. Peletier. Newton’s problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions. *Math. Nachr.*, 226:153–176, 2001.
- Isaac Newton. *Philosophiae naturalis principia mathematica*. (London: Streater), 1687.
- Alexander Yu. Plakhov. Newton’s problem of a body of minimal aerodynamic resistance. *Dokl. Akad. Nauk.*, 390(3):314–317, 2003a.
- Alexander Yu. Plakhov. Newton’s problem of the body of minimal resistance with a bounded number of collisions. *Russ. Math. Surv.*, 58(1): 191–192, 2003b.
- Alexander Yu. Plakhov. Newton’s problem of the body of minimum mean resistance. *Sbornik: Mathematics*, 195(7–8):1017–1037, 2004.
- Alexander Yu. Plakhov and Paulo D. F. Gouveia. Problems of maximal mean resistance on the plane. *Nonlinearity*, 20:2271–2287, 2007.