Fernandes, J. A., Martinho, M. H., Tinoco, J., & Viseu, F. (Orgs.) (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Raciocínios de estudantes do ensino superior na resolução de tarefas sobre matrizes

Paula Maria Barros[1], *Cláudia Mendes Araújo*[2], *José António Fernandes*[3]
[1]ESTiG - Instituto Politécnico de Bragança, pbarros@ipb.pt
[2]Centro de Matemática – Universidade do Minho, clmendes@math.uminho.pt
[3]CIEd – Universidade do Minho, jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo

No presente texto estudam-se os raciocínios desenvolvidos por estudantes do ensino superior na resolução de uma tarefa sobre matrizes, com particular ênfase nos erros e dificuldades por eles revelados. Participaram no estudo trezentos estudantes do ensino superior politécnico de vários cursos de engenharia, que se encontravam a frequentar a unidade curricular de Álgebra Linear e Geometria Analítica do 1.º ano dos respetivos cursos. Inserido na avaliação, depois de abordados os diferentes temas da unidade curricular, os estudantes realizaram no ano letivo 2011/2012 vários trabalhos sobre esses temas, um dos quais incluía uma questão sobre matrizes, que é aqui estudada. Dos resultados obtidos conclui-se que os estudantes demonstraram dificuldades consideráveis na resolução da tarefa proposta, evidenciando-se também que a ausência de conhecimentos sobre lógica clássica induziu a que os alunos justificassem a sua resposta de forma incorreta.

Palavras-chave: álgebra linear; matrizes; raciocínios; ensino superior.

Introdução

A álgebra linear está subjacente a quase todos os domínios da matemática e até mesmo de outras áreas, como as ciências da computação, a engenharia e a física. É assim natural que os seus conteúdos sejam estudados em diversos cursos do ensino superior.

Apesar da sua grande aplicabilidade, "o ensino da álgebra a um nível universitário é quase universalmente considerado como uma experiência frustrante para professores e estudantes" (Hillel, 2000, p.191). Esta constatação é corroborada por investigadores como Gueudet-Chartier (2004) ao afirmar que "é um facto bem conhecido que os estudantes consideram este assunto difícil" (p. 491) e Dorier, Robert e Sierspinska (2000) ao referirem que "há um amplo consenso em afirmar que tanto o ensino como a aprendizagem da álgebra linear são difíceis" (p. 273).

Coloca-se então a questão de como promover um ensino da álgebra linear que, para além de manter os alunos motivados, permita que estes desenvolvam as competências consideradas essenciais para promover um bom desempenho sempre que precisarem de recorrer a esses conhecimentos.

Tendo por base esta preocupação, partindo do pressuposto que conhecer os erros e dificuldades dos alunos pode ser um bom princípio para o professor conseguir programar um ensino mais eficaz e adequado às necessidades destes (Godino, Batanero & Font, 2003; Ferreira & Brumatti, 2009) e tendo em atenção que a reflexão e discussão sobre os erros pode ser um ponto de partida para os estudantes participarem ativamente na sua superação (Pochulu, 2005), realizou-se um estudo, envolvendo estudantes do ensino superior politécnico, com o intuito de responder, entre outras, à seguinte questão de investigação: Quais os erros e dificuldades revelados pelos estudantes na aprendizagem de conteúdos sobre matrizes e determinantes?

Mais especificamente, tendo em consideração as limitações de espaço, neste texto apresentam-se apenas os resultados obtidos numa questão sobre matrizes que se colocou aos alunos que participaram no estudo.

Investigação sobre dificuldades relativas a matrizes

A álgebra linear é uma fonte de dificuldades para muitos alunos do ensino superior (Celestino, 2000; Coimbra, 2008; Dorier, 2000) para o que contribui também a falta de conhecimentos sobre lógica elementar e sobre métodos de prova.

Como mencionam Dorier, Robert, Robinet e Rogalski (2000), já no final dos anos oitenta Robert e Robinet, num trabalho de diagnóstico sobre dificuldades dos alunos, referem que estes criticam na álgebra linear o excessivo uso de formalismo, a enorme quantidade de novas definições e a falta de conexão com o que já sabem de matemática. Nesse estudo ficou patente que os alunos tinham a sensação de estar a aterrar num novo planeta não sendo capazes de encontrar o seu caminho nesse novo mundo.

Hurman (2007), numa investigação com alunos do primeiro ano da Licenciatura em Administração de uma universidade argentina, num exercício de um teste parcial que se relacionava com propriedades matriciais, em que os alunos tinham de completar afirmações indicando os passos intermédios, verificou que os estudantes não tinham em conta a característica dos entes com que estavam a operar, pelo que continuavam a trabalhar com as matrizes como se fossem números e com determinantes como se fossem matrizes. Para além disso, muitos dos erros comuns que cometiam com números eram transpostos para as matrizes. Por exemplo, numa das alíneas do exercício em que os alunos tinham de completar a afirmação "Se A e B são matrizes quadradas, então $(AB)^2 = ...$" houve alunos que recorreram ao que a autora chama de fenómenos didáticos, isto é, consideraram $(AB)^2 = A^2B^2$, $(AB)^2 = B^2A^2$ ou $(AB)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

A autora também observou que a não comutatividade do produto de matrizes é para os estudantes meramente declarativa pois não é considerada quando realizam as operações matriciais. Por exemplo, quando completam as afirmações “Se A é invertível e $AX = B$, então $X = ...$” e “Se P é invertível e $P^{-1}AP = B$, então $A = ...$”, há alunos que multiplicam em qualquer lugar (à esquerda ou à direita) e, no caso da segunda afirmação, alguns esquecem-se de ter em conta a não comutatividade da multiplicação de matrizes.

Leder (1991, citado em Sanches, 2002) realizou um estudo em que dois professores de matemática do terceiro grau foram encorajados a apresentar o tema teorema de Pitágoras e matrizes de forma clara, lógica e compreensível a vinte e um professores universitários que não ensinavam matemática. Estes deviam prestar atenção, tomando notas, discutindo e fazendo perguntas sempre que algo não estivesse claro. Além disso, foi-lhes solicitado que anotassem as reflexões e conclusões da sua experiência pedagógica. A análise das anotações mostrou que, embora os sujeitos do estudo fossem professores universitários, apresentavam grande dificuldade em compreender o produto de matrizes e a sua não comutatividade.

Ozdag e Aygor (2012), num estudo com setenta e um estudantes do 1.º ano de licenciatura em matemática, em que pretendiam investigar o seu desempenho e os métodos utilizados para encontrar a factorização de um determinante de uma matriz de dimensão $n \times n$, verificaram que apenas dez estudantes conseguiram resolver a questão proposta completamente, tendo trinta e seis sido incapazes de a resolver. Confrontando o desempenho nessa questão com questões colocadas antes aos alunos, em que a dimensão da matriz era 3×3, os autores constataram que o desempenho piorou consideravelmente quando a dimensão da matriz aumentou, pelo que concluíram que a dimensão das matrizes afeta o desempenho dos estudantes negativamente.

Ferro (2011), num estudo com um grupo de estudantes do ensino secundário (2.º ano do Bachillerato), em que analisou provas de avaliação sobre a temática matrizes e determinantes, concluiu que o tema apresenta uma notável dificuldade para os alunos. Embora os exercícios que consistiam unicamente na repetição de uma rotina não lhes tenham levantado obstáculos, os estudantes sentiram dificuldades na compreensão e aplicação dos conceitos teóricos. O êxito que tiveram nas respostas às perguntas teóricas dos exames deveu-se à repetição de demonstrações observadas na aula, faltando-lhes conhecimentos teóricos suficientes para abordar outro tipo de situações. Mais concretamente, a autora menciona que os principais erros detetados foram:

- Incorreções nas operações simples (adição, subtração,...) que conduzem a erros de vulto ao longo do exercício. O aluno não se dá conta da incoerência de alguns resultados e não os verifica, mostrando uma falta de sentido crítico;
- Aplicação incorreta de resultados teóricos, sobretudo ao aplicar o teorema de Rouché-Fröbenius e as propriedades dos determinantes;
- Dificuldades em lidar com situações diversas que dependam de um parâmetro;
- Imprecisão nas definições de conceitos que indicam uma compreensão insuficiente;
- Confusão entre a notação e os conceitos de matriz e determinante;
- Realização incorreta de demonstrações, excetuando as realizadas com antecedência na aula e que só supõem a memorização.

Esta última constatação foi também mencionada por Hillel (2000), considerando este autor que as dificuldades em álgebra linear resultam simplesmente da inexperiência dos alunos com demonstrações. Mais concretamente, afirma que

> as dificuldades dos alunos relacionadas com as provas incluem: não compreender a necessidade de provas nem as várias técnicas de prova, não sendo capazes de lidar com os quantificadores, muitas vezes implícitos; confundir condições necessárias e suficientes; fazer generalizações apressadas com base em evidências muito instáveis e escassas (Hillel, 2000, p. 191).

No mesmo sentido, Alvarado e González (2009) referem que uma vez que durante os últimos anos as provas têm assumido um papel de menor relevo na escola secundária, quando os estudantes começam os seus estudos universitários têm grandes dificuldades no reconhecimento, compreensão e construção de provas. Estas autoras, num estudo com estudantes de matemáticas aplicadas que responderam a um questionário onde tinham de selecionar o argumento válido de entre várias afirmações apresentadas e justificar a sua escolha, constataram que os estudantes apresentaram, entre outras, as seguintes dificuldades: utilização indiferenciada da implicação ($p \Rightarrow q$) e da sua recíproca ($q \Rightarrow p$) ou da negação das suas premissas ($\neg p \Rightarrow \neg q$) e a crença de que um simples exemplo é suficiente para provar uma afirmação.

Alvarado e González (2013) argumentam ainda que a linguagem do quotidiano também representa um obstáculo para a aprendizagem de demonstrações. Particularizando, referem que uma implicação, em muitas ocasiões, admite diversas conotações de causalidade e temporalidade que fazem com que o seu significado se afaste do sentido matemático e que, noutras ocasiões, a linguagem comum lhe dá um significado diferente pela tendência a subentender o que não está dito. Corroborando esta opinião, Epp (2003) sugere que a diferença existente entre a linguagem informal do quotidiano e a linguagem da matemática pode conduzir a cometer "o erro da recíproca" (de se p então q e q, deduzir p), a dificuldades na interpretação de proposições quantificadas e na sua negação e a cometer erros na negação de implicações e de afirmações que contêm os conectivos e/ou.

Metodologia

O estudo dos raciocínios desenvolvidos na resolução das tarefas sobre matrizes e determinantes realizou-se a partir das respostas dadas pelos estudantes a um questionário escrito, assumindo-se como um estudo de natureza, fundamentalmente, quantitativa e descritiva, pois "em investigação quantitativa é normalmente possível obter dados sobre um conjunto alargado de pessoas relativos a um certo número de questões pré-determinadas" (Fernandes, 1991, p. 66).

A aplicação do questionário realizou-se no ano letivo de 2011/2012 e envolveu trezentos alunos (Ai, com $1 \leq i \leq 300$) do ensino superior politécnico inscritos em várias licenciaturas de engenharia e que se encontravam a frequentar a unidade curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica. Nos cursos em causa, a unidade curricular integra o 1.º ano do plano de estudos e inclui o tema matrizes e determinantes.

A unidade curricular foi lecionada por três professoras, uma das quais coautora deste estudo e responsável pela docência em alguns dos cursos. A preparação da unidade curricular foi efetuada em equipa, pelas três professoras, o que fez com todos os alunos tivessem tido acesso ao mesmo material de apoio às aulas (apontamentos teóricos e fichas de trabalho).

Em termos da avaliação das aprendizagens, por acordo entre os alunos e as docentes, foi decidido que ao longo do semestre se fariam pequenos trabalhos, ou seja, questionários escritos, durante as aulas, os quais consistiam na resolução de algumas questões sobre cada um dos temas lecionados, sendo matrizes e determinantes um dos temas em que isso aconteceu. Neste caso, o trabalho incluía também uma questão sobre o tema números complexos, que foi o primeiro tema lecionado na unidade curricular. Os alunos foram previamente avisados da realização do trabalho e aquando da sua resolução já tinham sido lecionados os conteúdos relativos aos respetivos temas.

As questões sobre as matrizes e determinantes eram três, tendo sido dados cerca de 30 minutos aos alunos para a sua resolução durante uma das aulas teóricas (incluindo também a questão sobre números complexos). Ao todo foram utilizadas doze versões diferentes do trabalho, pelo facto dos alunos em algumas turmas serem em número considerável e ser importante garantir que a resolução fosse realizada individualmente, tendo cada aluno respondido apenas a uma versão. Para facilitar o tratamento dos dados relativos ao tema matrizes e determinantes, agruparam-se as questões das várias versões tendo em conta a similaridade do tipo de pergunta efetuada, de que resultaram cinco grupos de questões.

Neste texto trata-se apenas um desses grupos de questões, envolvendo apenas o tema matrizes, cujas respostas às diferentes versões foram analisadas tendo em conta a classificação em três tipos de questões: X, Y e Z, conforme se apresenta na próxima secção.

Em termos de tratamento e análise de dados, começou-se por classificar as respostas dos alunos com base no recurso a raciocínios válidos e não válidos e, de seguida, definiram-se categorias, estabelecidas *a posteriori*, em cada um desses tipos de raciocínios (Gall, Gall & Borg, 2003). Essas categorias são apresentadas na secção seguinte, aquando da apresentação dos resultados.

Análise das respostas e raciocínios dos alunos

Nesta questão pretendia-se que os alunos indicassem, justificando, se a afirmação apresentada era verdadeira ou falsa. As afirmações apresentadas foram:

- Questão do tipo X: Se B é uma matriz do tipo $m \times n$ e $A+(BC)$ está definida, então A e C são matrizes com a mesma dimensão;
- Questão do tipo Y: Se $A(BA)$ está definida, então A e B são matrizes quadradas;

– Questão do tipo Z: Se $A(BA^T)$ está definida e B é uma matriz quadrada, então A é uma matriz quadrada.

A categorização das respostas dos alunos segundo se baseiam em raciocínios válidos ou não válidos é indicada na Tabela 1.

Tabela 1. Raciocínios dos alunos na questão apresentada

Raciocínios	Tipo de questão			Total
	X	Y	Z	
Válidos	48	8	10	66 (22,0%)
Não válidos	60	51	38	149 (49,7%)
Sem justificação ou não responde	45	22	18	85 (28,3%)
Total	153	81	66	300 (100%)

Genericamente, os dados da Tabela 1 mostram que os estudantes revelaram muitas dificuldades na resolução da questão, já que a grande maioria baseou as suas respostas em raciocínios não válidos, não apresentou qualquer justificação ou simplesmente não respondeu. Seguidamente, tendo em vista aprofundar a compreensão dos raciocínios dos alunos, analisam-se as suas justificações.

Os alunos que apresentaram raciocínios válidos indicaram um exemplo concreto de matrizes que contrariava a afirmação feita, efetuando ou não as operações envolvidas, explicitaram a possível dimensão das matrizes ou combinaram ambos os processos para justificarem a sua resposta. Ou seja, estes alunos recorreram a um exemplo ou a uma classe de exemplos para justificar a sua resposta. Por exemplo, o aluno A36 apresenta um exemplo concreto para cada uma das matrizes e efetua as respetivas operações (ver Figura 1).

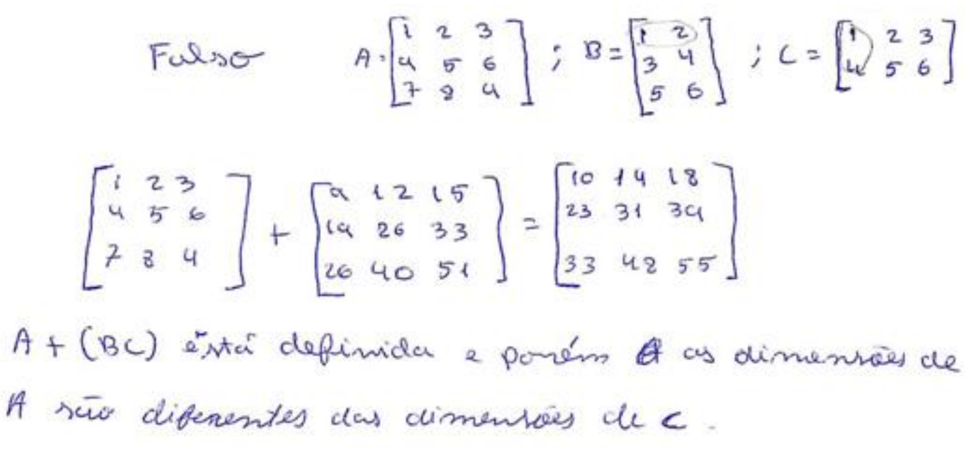


Figura 1. Apresentação de um contraexemplo (A36, questão do tipo X).

Já o aluno A207 opta por fazer apenas referência à dimensão de cada uma das matrizes, tendo em atenção a possibilidade de realizar as operações envolvidas (ver Figura 2).

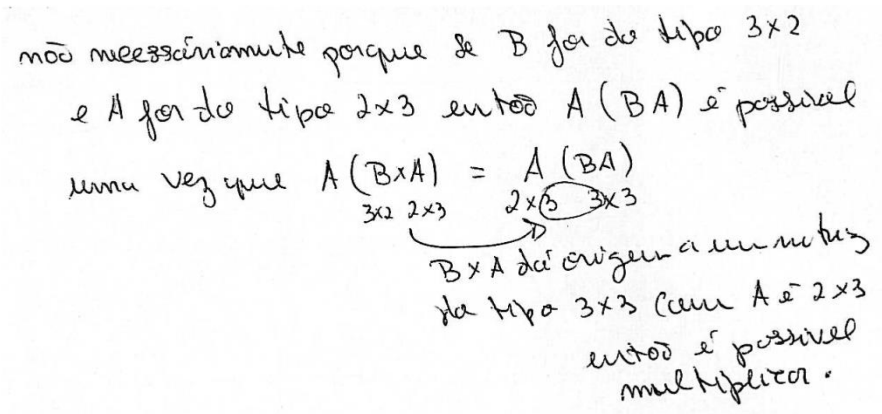

não necessariamente porque se B for do tipo 3x2
e A for do tipo 2x3 então A (BA) é possível
uma vez que A (BxA) = A (BA)
3x2 2x3 2x3 3x3
BxA dá origem a uma matriz
do tipo 3x3 como A é 2x3
então é possível
multiplicar.

Figura 2. Referência à possível dimensão das matrizes (A207, questão do tipo Y).

Na categoria *sem justificação ou não responde* integraram-se as resoluções dos alunos que não deram qualquer resposta e os que mencionaram (45 alunos) que a afirmação era verdadeira ou falsa sem indicar qualquer justificação ou apenas reescreveram a afirmação dada ou a sua negação.

Analisadas as 149 respostas que se basearam em raciocínios não válidos, estabeleceram-se várias categorias, que são apresentadas na Tabela 2 com o propósito de caracterizar os principais erros cometidos.

Tabela 2. Categorização dos raciocínios não válidos na resolução da questão

Raciocínios	Tipo de questão			Total
	X	Y	Z	
Dificuldades nas operações com matrizes	26	15	7	48 (32,2%)
Exemplo que verifica a afirmação	9	19	11	39 (26,2%)
Análise incompleta	4	11	5	20 (13,4%)
Recurso a propriedades não válidas	6	2	8	16 (10,7%)
Incompreensão de conceitos	1	3	5	9 (6,1%)
Recurso a argumentos irrelevantes	8	–	1	9 (6,1%)
Prova da falsidade do recíproco	5	–	1	6 (4,0%)
Outros	1	1	–	2 (1,3%)

No raciocínio *dificuldades nas operações com matrizes* incluíram-se as resoluções dos alunos que revelaram dificuldades em trabalhar a operação de multiplicação (47 alunos) ou adição (1 aluno) de matrizes.

No caso das dificuldades na multiplicação, surgiram distintas situações: dificuldade no reconhecimento das condições em que é possível efetuar o produto (23 alunos); nas justificações baseadas na dimensão das matrizes, dedução incorreta da dimensão da matriz produto (13 alunos); apresentação de um exemplo concreto, mas multiplicando de forma incorreta as matrizes (11 alunos).

Por exemplo, o aluno A155 menciona que "só se pode multiplicar matrizes quadradas" e o aluno A82 multiplica as entradas correspondentes (produto de Hadamard) das matrizes que apresenta como exemplo (ver Figura 3).

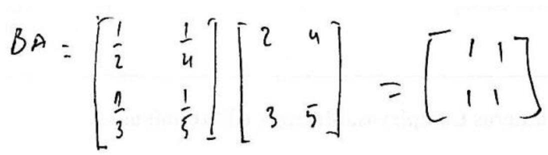


Figura 3. Multiplicação das entradas respetivas (A82, questão do tipo Y).

No raciocínio *exemplo que verifica a afirmação* incluíram-se as resoluções dos alunos que apresentam:

- Um exemplo concreto de matrizes que verificam a afirmação dada ou, de forma semelhante, referem a dimensão possível dessas matrizes de forma a comprovar a afirmação, pelo que concluem erradamente que a afirmação é verdadeira (30 alunos);
- Um exemplo concreto ou uma classe de exemplos, quando se referem apenas à dimensão, de matrizes que verificam o contrarrecíproco da afirmação dada (9 alunos). Como nem sempre interpretam de forma correta o resultado do seu raciocínio, alguns (5 alunos) chegam à conclusão (correta) de que a afirmação é falsa.

No primeiro caso, tem-se, por exemplo, o aluno A169 (ver Figura 4) que faz referência a matrizes de ordem 2, que permitem verificar a afirmação dada.

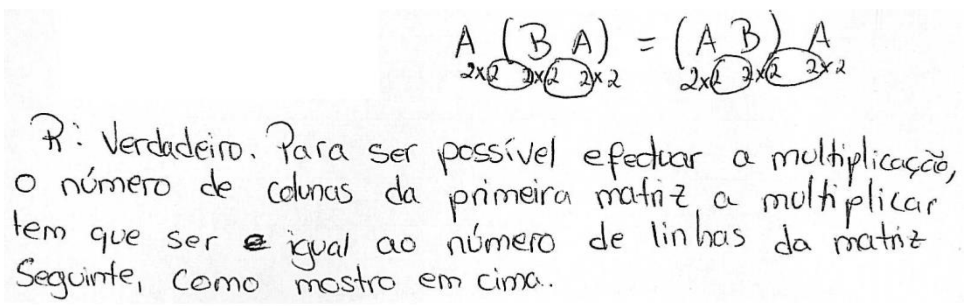


Figura 4. Classe de matrizes de ordem 2 que verificam a afirmação (A169, questão do tipo Y).

No segundo caso, verificar o contrarrecíproco, tem-se, por exemplo, o raciocínio do aluno A95 (ver Figura 5). Simbolicamente, se na afirmação dada traduzirmos o antecedente pela proposição p e o consequente pela proposição q, obtém-se a proposição $p \Rightarrow q$, concluindo-se que o aluno apresenta um exemplo que verifica a proposição $\neg q \Rightarrow \neg p$.

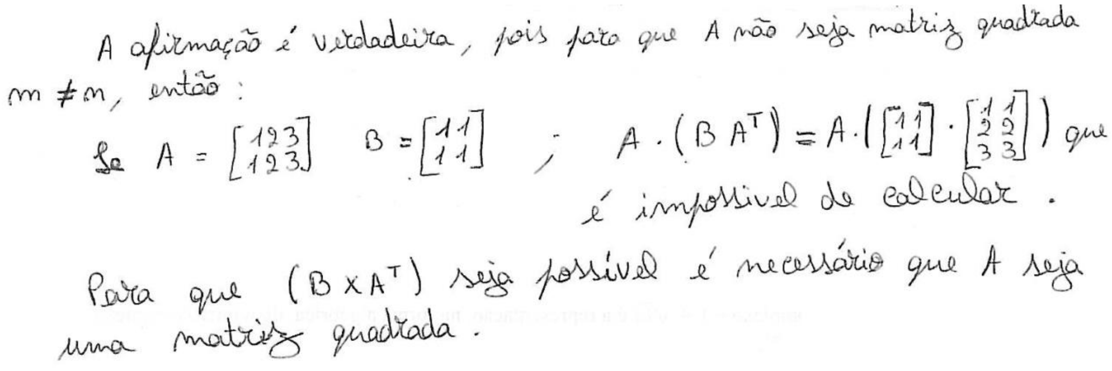


Figura 5. Exemplo que verifica o contrarrecíproco da afirmação (A95, questão do tipo Z).

De realçar que nesta categoria de raciocínio, mais do que dificuldades no âmbito da álgebra linear, estão presentes dificuldades no âmbito da lógica clássica, já que os alunos aceitam que basta um exemplo para confirmar a validade de uma afirmação e não reconhecem o tipo de raciocínio que utilizam quando verificam o contrarrecíproco.

No raciocínio *análise incompleta*, os alunos, com base num exemplo concreto ou fazendo referência à dimensão de matrizes, fazem apenas uma análise de parte da expressão dada, normalmente que está dentro de parêntesis. Embora, em alguns casos (10 alunos), os argumentos que os alunos apresentam não sirvam para justificar a situação na totalidade, há outros casos em que isso acontece (10 alunos). Assim, nestes últimos pode-se considerar que se está próximo da resposta correta, embora de forma incompleta.

Por exemplo, no caso da resposta do aluno A134 (ver Figura 6), este podia continuar a justificação para $A(BA^T)$ com base no exemplo dado.

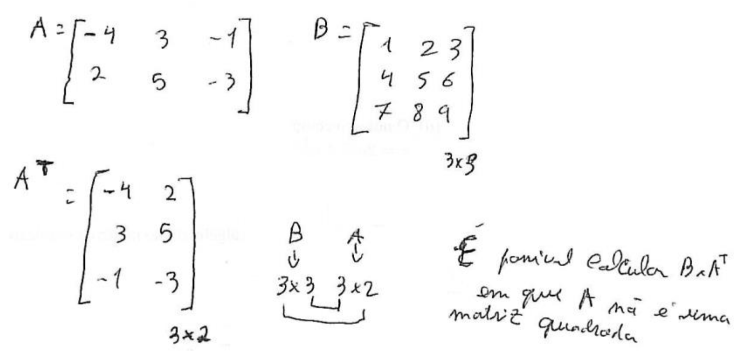
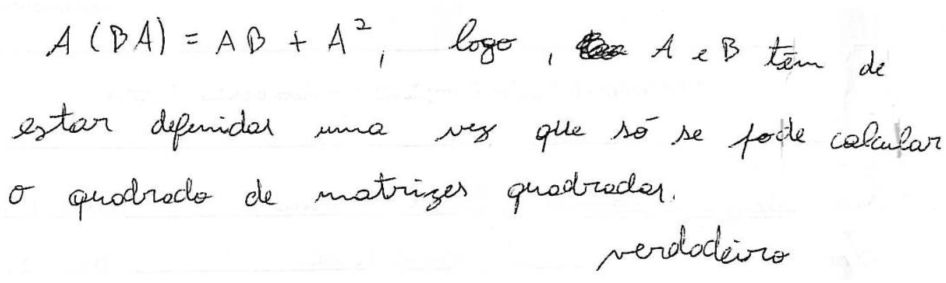


Figura 6. Referência apenas a BA^T (A134, questão do tipo Z).

No raciocínio *recurso a propriedades não válidas* incluíram-se as respostas dos alunos que recorrem a propriedades que parecem ser uma adaptação de várias propriedades válidas noutros contextos. Por exemplo, o aluno A281 (ver Figura 7) considera que $A(BA)$ é o mesmo que $AB + A^2$, resolvendo a expressão como se estivesse a aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.



$A(BA) = AB + A^2$, logo, ~~...~~ A e B têm de estar definidas uma vez que só se pode calcular o quadrado de matrizes quadradas.

verdadeiro

Figura 7. Recurso a propriedade não válida (A281, questão do tipo Y).

No raciocínio *incompreensão de conceitos*, os alunos demonstram que não têm ideais muito claras sobre os conceitos envolvidos na afirmação dada, entre eles o conceito de transposta de uma matriz, o de matriz quadrada e o de dimensão de uma matriz. Por exemplo, no caso da transposta, cinco alunos associam-na apenas a matrizes quadradas, como se pode exemplificar com a afirmação do aluno A18: “Verdadeiro, pois para ser transposta tem de ser quadrada” (questão do tipo Z).

No raciocínio *recurso a argumentos irrelevantes*, os alunos fazem referência a argumentos válidos mas que ou são irrelevantes para dar resposta à questão ou, embora tenham a ver com a questão, não são aplicados devidamente à situação em causa. O argumento mais usado é o que faz referência à possibilidade de adicionar matrizes: “Verdadeira, pois apenas se podem somar matrizes que tenham a mesma dimensão” (A240, questão do tipo X).

No raciocínio *prova da falsidade do recíproco*, os alunos partem de exemplos (concretizando as matrizes) ou de classes de exemplos (indicando a dimensão das matrizes) que confirmam o consequente da afirmação dada e concluem que o antecedente é falso, ou seja, que a expressão dada não está definida, pelo que, no geral, chegam à conclusão correta de que a afirmação é falsa mas utilizando um raciocínio que não é válido (ver Figura 8). Explicitando, em termos de lógica clássica, se na afirmação dada se traduzir o antecedente pela proposição p e o consequente pela proposição q, obtém-se a proposição $p \Rightarrow q$. Os alunos tentam provar que a implicação recíproca, $q \Rightarrow p$, é falsa, ou seja, que se tem $\neg(q \Rightarrow p)$, que é equivalente a $q \wedge \neg p$.

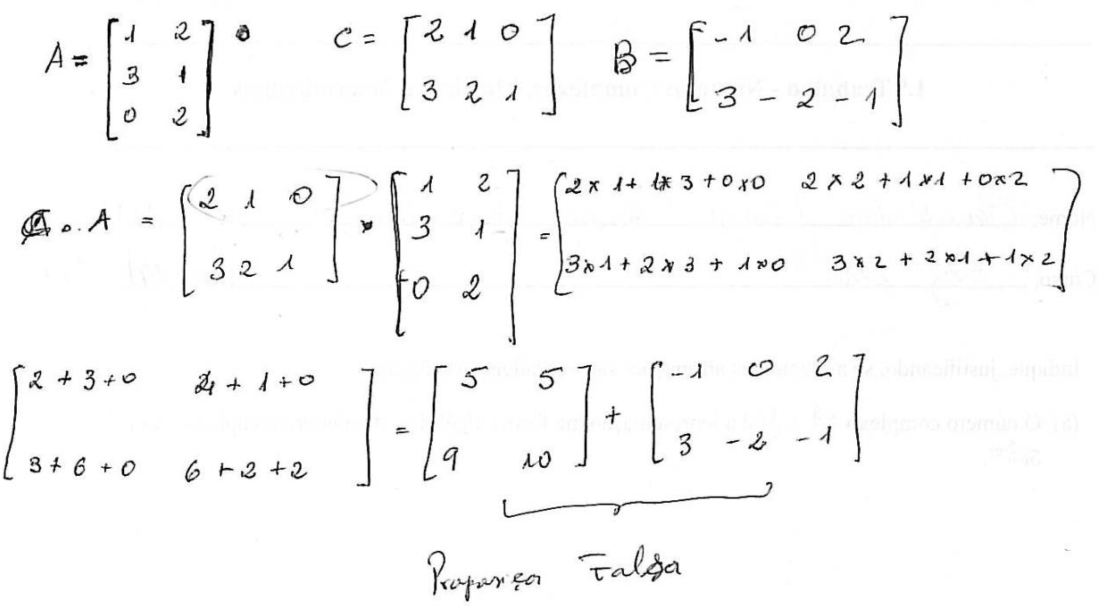


Figura 8. Exemplo para provar a falsidade do recíproco (A54, questão do tipo X).

Finalmente, no raciocínio *outros* incluíram-se as respostas dos alunos cujas justificações são incompreensíveis face à pergunta formulada ou que se consideraram irrelevantes no contexto do estudo.

Conclusões

Perante a análise apresentada verifica-se que, mesmo podendo consultar os apontamentos das aulas, os alunos continuam a manifestar dificuldades consideráveis na resolução das tarefas propostas pois apenas 22% apresentaram resoluções que se consideraram corretas.

Diretamente relacionadas com o cálculo matricial, destacam-se as dificuldades relacionadas com a multiplicação de matrizes, facto explicável porque o algoritmo da multiplicação de matrizes é novo para os alunos e diferencia-se da habitual multiplicação de números reais. Também se evidenciam dificuldades que se relacionam mais especificamente com processos de prova e conhecimentos de lógica clássica (Alvarado & González, 2009; Epp, 2003). De notar que muitos dos alunos (29%) consideram que basta um exemplo que verifique a afirmação, ou a sua contrarrecíproca, para concluir que ela é verdadeira e outros (4%) consideram que mostrar que a afirmação é falsa é equivalente a provar a falsidade da afirmação recíproca.

É de realçar também o facto de bastantes alunos (13%) se centrarem apenas em parte da expressão dada, aspeto que também foi observado por Ferro (2011). Esta autora considera que este tipo de erros se encontra frequentemente em problemas onde é preciso fazer cálculos prévios para chegar ao resultado final, já que o aluno se centra na realização desse cálculos esquecendo-se da meta que tem em vista.

Concluindo, em termos de perspetivas futuras, o conhecimento dos erros que os alunos cometem pode proporcionar ao professor ideias sobre estratégias a utilizar no processo de ensino e aprendizagem dessas temáticas, nomeadamente servir como ponto de partida para explorações matemáticas criativas (Pochulu, 2005).

Referências bibliográficas

Alvarado, A., & González, M. T. (2013). Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 37-63.

Alvarado, A., & González, M. T. (2009). A study of university student' performance with proof. *Proceedings CIAEM 61. In Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)* (Suplemento 2, pp.348-352). Universidade de Palermo, Itália.

Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de S. Paulo, S. Paulo.

Coimbra, J. L. (2008). *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da álgebra linear*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Pará, Pará.

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra – A variety of studies from 1987 until 1995. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp.85-124). Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.- L., Robert, A., & Sierpinska, A. (2000). Conclusion. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 273-276). Kluwer Academic Publishers.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *American Mathematical Monthly, 110* (10), 886-899.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas da investigação em educação. *Noesis*, *18*, 64-66.

Ferreira, D. H., & Brumatti, R. N. (2009). Dificuldades em matemática em um curso de engenharia elétrica. *Horizontes*, *27*(1), 51-60.

Ferro, P. (2011). *Significado referencial e evaluado de los conceptos de matriz e determinante en estudiantes preuniversitarios. En estudio a partir de la práctica instruccional*. Tese de doutoramento, Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

Gall, M. D., Gall, J. P., & Borg, W. R. (2003). *Educational Research: An introduction. Boston: Allyn and Bacon.*

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. *Matemáticas y su Didáctica para Maestros — Manual para el Estudiante*. Acedido em julho 29, 2011, em: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry? *Linear Algebra and its Applications*, *379*, 491-501.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Kluwer Academic Publishers.

Hurman, A. L. (2007). El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra lineal. In Ruiz, A. (Productor académico), *Enseñanza del algebra* (N.º3). Colección digital Eudoxus. Acedido em junho 11, 2013, em: www.cimm.ucr.ac.cr/.../Algebra%20Teaching/.../Hurman,%20A.%20El%20papel%20de%20las%20Aplicaciones%20en%20el%20.

Pochulu, M. D. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matematica en alumnos que ingresan a la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*, *35*(4).

Sanches, M.H. (2002). *Efeitos de uma estratégia diferenciada de ensino do conceito de matrizes*. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.