

Maria de La Salette Dias Esteves

# Duplicação de período, renormalização e entropia em sistemas unidimensionais



Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Setembro / 2004



Maria de La Salette Dias Esteves

# Duplicação de período, renormalização e entropia em sistemas unidimensionais



*Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
para obtenção do grau de Mestre em Matemática- Fundamentos e Aplicações,  
realizada sob a orientação científica do Professor Jorge Rocha*

Departamento de Matemática Pura  
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto  
Setembro / 2004

Ao Zé e aos meus pais

# Agradecimentos

O meu primeiro agradecimento é dirigido ao meu orientador, Jorge Rocha, por tudo o que me ensinou e as condições que me proporcionou.

Agradeço ainda, à Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Mirandela pela concessão da dispensa do serviço docente na parte final da elaboração deste trabalho.

Finalmente agradeço ao Professor Fernando Jorge Moreira pelos prestáveis esclarecimentos sobre alguns dos assuntos abordados nesta minha tese.



# Índice

Agradecimentos .....	iii
Índice .....	v
Introdução .....	1
<b>Capítulo 1:</b> Definições e resultados preliminares .....	3
Ordem de Sarkovskii e órbitas simples .....	3
Pontos homoclínicos .....	6
Entropia .....	9
<b>Capítulo 2:</b> Órbitas periódicas e entropia .....	19
Entropia positiva e períodos dos pontos periódicos .....	19
Entropia zero e estrutura das órbitas periódicas .....	29
<b>Capítulo 3:</b> Pontos homoclínicos e entropia .....	37
<b>Capítulo 4:</b> Bifurcação de órbitas periódicas .....	43
<b>Capítulo 5:</b> Entropia e aplicações afim com patamares .....	51
<b>Capítulo 6:</b> Pontos recorrentes, entropia e renormalização .....	65

**Bibliografia.....73**

# Introdução

Nesta dissertação estudam-se algumas relações entre entropia, duplicação de período e renormalização de um sistema dinâmico unidimensional permitindo um melhor conhecimento do comportamento das suas órbitas.

Com a noção de entropia topológica de uma aplicação  $f \in C^0(X, X)$ , onde  $(X, d)$  é um espaço métrico compacto, é possível medir a complexidade da sua dinâmica. Mais rigorosamente, define-se *entropia de  $f$* ,  $h(f)$ , como sendo

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log r(n, \epsilon, f)}{n},$$

onde  $r(n, \epsilon, f)$  representa o número máximo de órbitas de tamanho  $n$  que se conseguem distinguir utilizando a precisão  $\epsilon$ . Se  $h(f) > 0$ , então  $r(n, \epsilon, f)$  apresenta um crescimento exponencial, relativamente a  $n$ , e neste caso diz-se que a aplicação  $f$  é caótica. De notar que a palavra caótica revela a ausência de previsibilidade.

Por outro lado, uma aplicação contínua definida num intervalo fechado é caótica se e só se existe um ponto homoclínico (capítulo 3) ou, equivalentemente, uma órbita periódica cujo período não é uma potência de 2 (capítulo 2). Assim a entropia de uma aplicação  $f \in C^0(I, I)$  é zero se e somente se os períodos das suas órbitas periódicas são potências de 2. Verifica-se ainda que a estrutura dessas órbitas (ordenação em  $\mathbb{R}$ ) é rígida: são órbitas simples (capítulo 2).

Esta tese encontra-se dividida em seis capítulos, apresentando-se no início de cada um deles uma pequena introdução informativa sobre o seu conteúdo.

No capítulo 1, introduzem-se as definições de *órbita simples*, *ponto homoclínico* e *entropia topológica*, bem como alguns resultados sobre a existência de pontos periódicos. Aqui apresenta-se um resultado (Proposição 1.18) que desempenhará um papel im-

portante na prova dos resultados a estudar. Este fornece uma condição suficiente para que uma aplicação contínua, definida num intervalo fechado, tenha entropia positiva.

O capítulo 2 é dedicado ao estudo das relações entre entropia, períodos de órbitas periódicas e estrutura dessas órbitas.

No capítulo 3 estuda-se a relação entre a existência de pontos homoclínicos e entropia.

No capítulo 4 abordam-se propriedades topológicas do espaço das aplicações  $C^1$  com entropia positiva, nomeadamente demonstra-se que este é aberto e que a sua fronteira é um subconjunto de

$$\{f \in C^1(I, I) : P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}\},$$

onde  $P(f)$  representa o conjunto formado pelos períodos (das órbitas periódicas de  $f$ ). A inclusão recíproca corresponde a uma conjectura feita por L. Block e D. Hart em [5] e demonstrada por V. Jiménez López em [8].

No capítulo 5 mostra-se que qualquer vizinhança de uma *aplicação afim com patamares*,  $S_w$ , cujo conjunto dos pontos periódicos é constituído pelas potências de dois, contém aplicações afins com patamares,  $S_{w'}$  e  $S_{w''}$ , verificando

$$P(S_{w'}) \subsetneq \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\} \subsetneq P(S_{w''})$$

e portanto  $S_w$  pertence à fronteira do conjunto formado pelas aplicações afins com patamares com entropia positiva. De referir que no decorrer da demonstração provou-se que se  $f \in C^0(I, I)$  é uma aplicação multimodal e  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então a aplicação  $f$  admite um ponto recorrente não periódico.

Finalmente, no capítulo 6, introduzem-se as noções de *aplicação renormalizável* e *infinitamente renormalizável*. Prova-se que se uma aplicação  $f \in C^0(I, I)$  admite um ponto recorrente não periódico e  $h(f) = 0$ , então  $f$  é uma aplicação infinitamente renormalizável. Assim, se  $f \in C^0(I, I)$  é uma aplicação multimodal e  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então a aplicação é infinitamente renormalizável.

# Capítulo 1

## Definições e resultados preliminares

Neste capítulo apresentam-se algumas noções e resultados fundamentais para a compreensão dos assuntos a estudar. Alguns dos resultados são apresentados sem a respectiva prova, uma vez que estes não constituem, por si só, o objectivo deste trabalho, mas sim ferramentas imprescindíveis no estudo que se segue.

Este capítulo encontra-se dividido em três secções: *ordem de Sarkovskii e órbitas simples*; *pontos homoclínicos* e *entropia*.

### 1.1 Ordem de Sarkovskii e órbitas simples

Nesta secção procede-se à apresentação de alguns resultados elementares sobre a existência de pontos periódicos (Proposição 1.1, 1.2, 1.3 e 1.4), do Teorema de Sarkovskii e à introdução da noção de *órbita simples*.

Ao longo de todo o trabalho, considera-se  $I$  um intervalo compacto e  $C^0(I, I)$  o espaço das aplicações contínuas de  $I$  em  $I$ . Para  $f \in C^0(I, I)$  e  $n \in \mathbb{N}_0$ , define-se  $f^n$  indutivamente em  $\mathbb{N}_0$  por  $f^0 = id$  e  $f^n = f \circ f^{n-1}$ . Para cada  $x \in I$ , o conjunto

$$\mathcal{O}(x) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{f^n(x)\}$$

representa a *órbita* de  $x$ . Quando  $\mathcal{O}(x) = \{x\}$  diz-se que  $x$  é um *ponto fixo* de  $f$ . Mais, se existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k(x) = x$  e  $f^j(x) \neq x$ , para todo  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ , então  $x$

diz-se um *ponto periódico* de período  $k$  e denotar-se-á a sua órbita por  $P$ , afirmando-se que  $P$  é uma *órbita periódica*.

No que se segue,  $Per(f)$  representa o conjunto dos pontos periódicos da aplicação  $f$  e  $P(f)$  o conjunto dos inteiros positivos  $k$  tais que  $f$  admite pelo menos um ponto periódico de período  $k$ .

Um ponto  $x \in I$  diz-se um *ponto pré-periódico* de  $f$  se existe  $s \in \mathbb{N}_0$  tal que  $f^s(x) \in Per(f)$ .

Um ponto  $y$  é  $\omega$ -limite de  $x$  se existe uma sucessão  $n_k \rightarrow +\infty$ , quando  $k \rightarrow +\infty$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{n_k}(x) = y$ . O conjunto formado pelos  $\omega$ -limite de  $x$  denota-se por  $\omega(x)$  e  $x$  diz-se que um *ponto recorrente* se  $x \in \omega(x)$ . De notar que se  $x$  é um ponto recorrente então, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n = f^n(x)$  é ainda um ponto recorrente e  $\mathcal{O}(x) \subseteq \omega(x)$ . Claramente os pontos periódicos são pontos recorrentes.

Um ponto  $x \in I$  diz-se um *ponto não errante* de  $f$  se para toda a vizinhança  $U$  de  $x$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Representar-se-á por  $\Omega(f)$  o conjunto formado pelos pontos não errantes, tendo-se  $\bigcup_{x \in I} \omega(x) \subseteq \Omega(f)$ . De referir que  $\Omega(f)$  é um conjunto fechado e  $f$ -invariante, isto é,  $f(\Omega(f)) \subseteq \Omega(f)$ .

Dados  $K, J \subseteq I$  intervalos fechados, escreve-se  $K \rightarrow J$  quando  $f(K) \supseteq J$ .

As proposições que se seguem permitem obter condições suficientes para a existência de pontos periódicos.

**Proposição 1.1** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $K \subseteq I$  um intervalo fechado. Se  $K \rightarrow K$ , então  $f$  admite pelo menos um ponto fixo em  $K$ .*

**Demonstração:** Da hipótese, existem  $x, y \in K$  tais que  $K = [f(x), f(y)]$ . Consequentemente  $f(x) \leq x$  e  $f(y) \geq y$ , donde, por continuidade, existe  $z \in K$  tal que  $f(z) = z$ . □

**Proposição 1.2** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $J, K \subseteq I$  intervalos fechados. Se  $J \rightarrow K$ , então existe um intervalo fechado  $L \subseteq J$  tal que  $f(L) = K$ .*

**Demonstração:** Sejam  $a, b \in J$  tais que  $K = [f(a), f(b)]$ . Suponha-se que  $a < b$  (o outro caso é análogo). Considerando  $a_0 = \max\{x \in [a, b] : f(x) = f(a)\}$  e  $b_0 = \min\{x \in [a_0, b] : f(x) = f(b)\}$ , tem-se  $f([a_0, b_0]) = K$ . □

**Proposição 1.3** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $k \in \mathbb{N}$ . Sejam  $I_i \subseteq I$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$  intervalos fechados. Se  $I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{k-1} \rightarrow I_0$ , então existe  $x \in I_0$  tal que  $f^k(x) = x$  e  $f^i(x) \in I_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .*

**Demonstração:** Aplicando sucessivamente a Proposição 1.2 obtém-se

$$\begin{aligned} \exists J_{k-1} \subseteq I_{k-1} : f(J_{k-1}) &= I_0 \\ \exists J_{k-2} \subseteq I_{k-2} : f(J_{k-2}) &= J_{k-1} \\ &\vdots \\ \exists J_1 \subseteq I_1 : f(J_1) &= J_2 \\ \exists J_0 \subseteq I_0 : f(J_0) &= J_1, \end{aligned}$$

donde  $f^k(J_0) = I_0 \supseteq J_0$  e portanto existe  $x \in J_0$  tal que  $f^k(x_0) = x_0$ . Por construção segue que  $f^i(x_0) \in J_i \subseteq I_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ .  $\square$

**Proposição 1.4** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $J, K \subseteq I$  intervalos fechados. Se o conjunto  $J \cap K$  não contém pontos fixos de  $f$  e  $f(J) \cap f(K) \supseteq J \cup K$ , então  $3 \in P(f)$ .*

**Demonstração:** Considerando os intervalos  $J$  e  $K$ , tem-se

$$J \rightarrow K \rightarrow K \rightarrow J,$$

pelo que existe  $a \in J$  tal que  $f(a), f^2(a) \in K$  e  $f^3(a) = a$ . Se  $f(a) = a$ , então  $a \in J \cap K$ , o que contradiz a hipótese. Logo  $a$  é um ponto periódico de período 3 de  $f$ , donde  $3 \in P(f)$ .  $\square$

Em 1975, Li e Yorque publicaram um artigo onde se prova que se uma aplicação  $f$  tem um ponto periódico de período 3, então admite pontos periódicos de qualquer período. No entanto já em 1964 Sarkovskii tinha descrito a estrutura do conjunto  $P(f)$ .

Apresenta-se de seguida a *ordem de Sarkovskii*,  $\triangleleft$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} \cup \{2^\infty\}$ :  
 $3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft 2 \cdot 7 \triangleleft 2 \cdot 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft 2^2 \cdot 7 \triangleleft 2^2 \cdot 9 \triangleleft$   
 $\dots \triangleleft 2^n \cdot 3 \triangleleft 2^n \cdot 5 \triangleleft 2^n \cdot 7 \triangleleft 2^n \cdot 9 \triangleleft \dots \triangleleft 2^\infty \triangleleft \dots \triangleleft 16 \triangleleft 4 \triangleleft 2 \triangleleft 1.$

Se  $k = k' \cdot 2^p$ , onde  $p$  é um inteiro não negativo e  $k'$  um inteiro positivo ímpar, então  $k \triangleleft 2^\infty$  se e só se  $k' > 1$ .

Fazendo um uso bastante subtil da ideia central da prova da Proposição 1.3, demonstra-se o teorema que se segue.

**Teorema 1.5 (Teorema de Sarkovskii)** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $n, k \in \mathbb{N}$ . Se  $n \in P(f)$  e  $n \triangleleft k$ , então  $k \in P(f)$ .*

**Demonstração:** Ver, por exemplo, em [13]. □

De seguida, introduz-se a noção de *órbita simples*.

**Definição 1.6** *Seja  $P$  uma órbita periódica de  $f \in C^0(I, I)$  de período  $2^k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ . Diz-se que  $P$  é uma órbita simples se para qualquer  $\{q_1, \dots, q_n\} \subseteq P$  órbita periódica de  $f^r$ , onde  $n \geq 2$ ,  $n \times r = 2^k$  e  $q_1 < \dots < q_n$ , tem-se*

$$f^r(\{q_1, \dots, q_{\frac{n}{2}}\}) = \{q_{\frac{n}{2}+1}, \dots, q_n\}.$$

**Nota 1.1** Note-se que, para uma órbita periódica simples,  $f(q_i)$  não pode pertencer ao intervalo aberto limitado por  $q_i$  e  $f^2(q_i)$ .

**Exemplo 1.1** Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $P = \{p_1, \dots, p_8\}$  uma órbita periódica de período 8 com  $p_1 < p_2 < \dots < p_8$ . A órbita  $P$  é simples se e só se  $f(\{p_1, p_2, p_3, p_4\}) = \{p_5, p_6, p_7, p_8\}$ ,  $f^2(\{p_1, p_2\}) = \{p_3, p_4\}$  e  $f^2(\{p_5, p_6\}) = \{p_7, p_8\}$ . Assim, se  $f(p_1) = p_5$ ,  $f(p_2) = p_6$ ,  $f(p_3) = p_8$ ,  $f(p_4) = p_7$ ,  $f(p_5) = p_3$ ,  $f(p_6) = p_4$ ,  $f(p_7) = p_1$  e  $f(p_8) = p_2$ , então  $P$  é simples.

## 1.2 Pontos homoclínicos

Nesta secção procede-se à definição de *ponto homoclínico* e de *variedade instável*. Considera-se  $\mathcal{V}_p$  o conjunto formado pelas vizinhanças de  $p$ .

**Definição 1.7** *Seja  $p$  um ponto fixo de  $f \in C^0(I, I)$ . O conjunto*

$$W^u(p, f) = \{x \in I \mid \forall V \in \mathcal{V}_p, \exists n \in \mathbb{N} : x \in f^n(V)\}$$

*designa-se por variedade instável de  $p$  em  $f$ .*

Define-se ainda *variedade instável à direita*

$$W^u(p, f, +) = \{x \in I \mid \forall b \in I (b > p), \exists n \in \mathbb{N} : x \in f^n([p, b])\}$$

e *variedade instável à esquerda*

$$W^u(p, f, -) = \{x \in I \mid \forall a \in I (a < p), \exists n \in \mathbb{N} : x \in f^n((a, p])\}.$$

Segue-se a apresentação de algumas propriedades dos conjuntos definidos anteriormente.

**Proposição 1.8** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $p$  um ponto fixo de  $f$ . Então:*

1. *os conjuntos  $W^u(p, f)$ ,  $W^u(p, f, +)$  e  $W^u(p, f, -)$  são conexos;*
2.  *$f(W^u(p, f)) \subseteq W^u(p, f)$ ,  $f(W^u(p, f, +)) \subseteq W^u(p, f, +)$  e  $f(W^u(p, f, -)) \subseteq W^u(p, f, -)$ ;*
3.  *$W^u(p, f, +) \cup W^u(p, f, -) = W^u(p, f)$ .*

**Demonstração:**

1. De seguida prova-se que  $W^u(p, f)$  é um conjunto conexo.

Sejam  $x, y \in W^u(p, f)$ . Admita-se, sem perda de generalidade, que  $x < p < y$ . Considerando  $z \in [x, y]$  e  $V \in \mathcal{V}_p$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(p) \subseteq V$  e  $B_\delta(p) \in \mathcal{V}_p$ , donde

$$\exists n_x \in \mathbb{N} : x \in f^{n_x}(B_\delta(p)) \text{ e } \exists n_y \in \mathbb{N} : y \in f^{n_y}(B_\delta(p)).$$

Como  $B_\delta(p)$  é um intervalo,  $f^{n_x}(B_\delta(p))$  e  $f^{n_y}(B_\delta(p))$  são conjuntos conexos e portanto, uma vez que  $p$  é ponto fixo, se  $z \in [x, p]$ , então  $z \in f^{n_x}(B_\delta(p)) \subseteq f^{n_x}(V)$ , caso contrário, se  $z \in [p, y]$ , então  $z \in f^{n_y}(B_\delta(p)) \subseteq f^{n_y}(V)$ . Assim,  $z \in W^u(p, f)$  e conseqüentemente  $W^u(p, f)$  é um conjunto conexo. Analogamente se prova que os conjuntos  $W^u(p, f, +)$  e  $W^u(p, f, -)$  são conexos.

2. Basta atender à definição de  $W^u(p, f)$ ,  $W^u(p, f, +)$  e  $W^u(p, f, -)$ .

3. Dada uma vizinhança  $V$  de  $p$ , existem  $a, b \in I$ ,  $a < p < b$ , tais que  $(a, p], [p, b) \subseteq V$  e portanto

$$W^u(p, f, +) \cup W^u(p, f, -) \subseteq W^u(p, f).$$

Seja  $x \in W^u(p, f)$ . Admitindo que  $x \notin W^u(p, f, +)$ , então existe  $b > p$  tal que  $x \notin f^n([p, b))$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $a < p$ , o intervalo  $(a, b) \in \mathcal{V}_p$ , donde

$$\exists n \in \mathbb{N} : x \in f^n((a, b)).$$

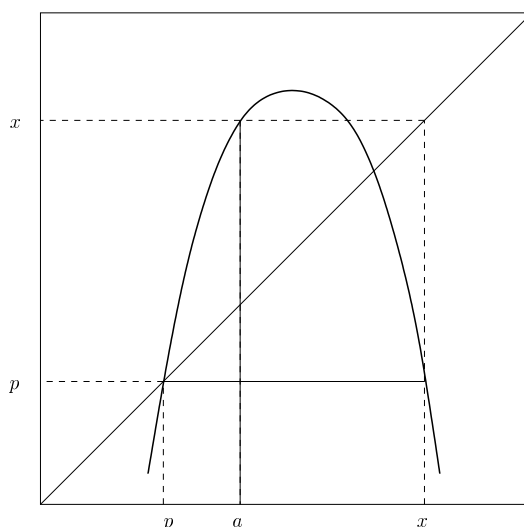
Como  $f^n((a, b)) = f^n((a, p]) \cup f^n([p, b))$ , conclui-se que  $x \in f^n((a, p])$  e consequentemente  $x \in W^u(p, f, -)$ . Logo  $W^u(p, f, +) \cup W^u(p, f, -) = W^u(p, f)$ .

□

**Definição 1.9** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Um ponto  $x \in I$  diz-se um ponto homoclínico se existe um ponto periódico  $p$  de  $f$  tal que:*

1.  $x \neq p$ ;
2.  $x \in W^u(p, f^n)$ , onde  $n$  é o período de  $p$ ;
3.  $f^{nm}(x) = p$ , para algum inteiro positivo  $m$ .

Finaliza-se a secção apresentando o gráfico de uma aplicação  $f$  contínua que admite um ponto homoclínico (ver Figura 1.1).



**Figura 1.1**

Note-se que  $a \in W^u(p, f)$ , donde  $x = f(a) \in W^u(p, f)$ . Como  $f(x) = p$ , segue que  $x$  é um ponto homoclínico de  $f$ .

## 1.3 Entropia

Pretendendo estudar a complexidade da dinâmica de uma aplicação contínua definida num espaço métrico compacto, interessa medir a taxa de crescimento, quando  $n$  tende para infinito, do número de órbitas de tamanho  $n$  que se podem distinguir com precisão fixada, pelo que se procede à definição de *entropia topológica*.

Nesta secção pretende-se atingir dois objectivos principais. Denotando por  $h(f)$  a entropia topológica de  $f$ , com  $f \in C^0(I, I)$ , primeiro demonstra-se que se  $f$  é de classe  $C^1$ , então  $h(f) < +\infty$  (Proposição 1.11) e segundo prova-se que se existem  $I_0, I_1 \subseteq I$  intervalos fechados e disjuntos e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $f^n(I_0) \cap f^n(I_1) \supseteq I_0 \cup I_1$ , então  $h(f) > 0$  (Proposição 1.18).

A finalizar apresenta-se um exemplo de uma aplicação contínua com entropia  $+\infty$ .

**Definição 1.10** *Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação contínua. Diz-se que um conjunto  $S \subseteq X$  é  $(n, \epsilon)$ -separado se, para quaisquer dois pontos distintos  $x, y \in S$ ,*

$$\max_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y)) > \epsilon.$$

Sendo  $X$  um espaço métrico compacto, qualquer conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado é finito. Assim, define-se

$$r(n, \epsilon, f) = \max\{\#S : S \subseteq X \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado}\}.$$

e

$$h(\epsilon, f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log r(n, \epsilon, f)}{n}.$$

De referir que  $r(n, \epsilon, f)$  conta o número máximo de órbitas de tamanho  $n$  que se podem distinguir com precisão  $\epsilon$  e se  $h(\epsilon, f) > 0$ , então esse número cresce de forma exponencial com  $n$ . Mais, como  $r(n, \epsilon_2, f) \geq r(n, \epsilon_1, f)$ , para  $0 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ , a função  $\epsilon \mapsto h(\epsilon, f)$  é decrescente.

Finalmente, definindo *entropia topológica* por

$$h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} h(\epsilon, f),$$

tem-se claramente  $0 \leq h(f) \leq +\infty$ .

**Proposição 1.11** *Se  $f \in C^1(I, I)$ , então  $h(f) \leq \max \left\{ 0, \log \left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right) \right\}$*

**Demonstração:** Seja  $f \in C^1(I, I)$ . Se  $\max_{x \in I} |f'(x)| \leq 1$ , então, para  $a, b \in I$ ,  $|f(a) - f(b)| \leq |a - b|$  e portanto  $h(f) = 0$ . Se  $\max_{x \in I} |f'(x)| > 1$ , considere-se  $\epsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $S \subseteq I$  um conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado. Dados  $a, b \in S$ , existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que  $|f^i(a) - f^i(b)| > \epsilon$ , donde, como

$$|f^i(a) - f^i(b)| \leq \left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right)^i |a - b| < \left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right)^n |a - b|,$$

se conclui que

$$|a - b| > \frac{|f^i(a) - f^i(b)|}{\left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right)^n} > \frac{\epsilon}{\left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right)^n}.$$

Assim  $\#S < \left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right)^n \frac{|I|}{\epsilon}$ , onde  $|I|$  é a amplitude do intervalo  $I$ , e consequentemente

$$\begin{aligned} h(\epsilon, f) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log r(n, \epsilon, f)}{n} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( \left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right)^n \frac{|I|}{\epsilon} \right)}{n} \\ &= \log \left( \max_{x \in I} |f'(x)| \right). \end{aligned}$$

□

De forma a encontrar uma condição suficiente para que determinada aplicação, definida num intervalo, tenha entropia positiva, calcula-se a entropia topológica da aplicação shift unilateral. Para tal considere-se o conjunto

$$\Sigma_2^+ = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : x_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}_0\}$$

munido da métrica

$$d((x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{3^i}.$$

Prova-se que o espaço métrico  $\Sigma_2^+$  é compacto e que a aplicação shift unilateral, definida por

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \rightarrow & \Sigma_2^+ \\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}_0} & \mapsto & (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0} \end{array},$$

é contínua.

**Proposição 1.12** *Seja  $\sigma$  a aplicação shift unilateral. Então  $h(\sigma) = \log 2$ .*

**Demonstração:** Inicialmente considere-se  $\epsilon = 2^{-1}$ . O conjunto  $\{(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}, (t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}\}$  é  $(n, 2^{-1})$ -separado se e somente se existe  $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  tal que  $s_j \neq t_j$ . Assim,  $r(n, 2^{-1}, \sigma) = 2^n$  e conseqüentemente

$$\begin{aligned} h(2^{-1}, \sigma) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log 2^n}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n \log 2}{n} \\ &= \log 2. \end{aligned}$$

Considerando agora  $\epsilon = 2^{-1}3^{-k}$ , com  $k \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$r(n, 2^{-1}3^{-k}, \sigma) = r(n+k, 2^{-1}, \sigma),$$

pois  $d(\sigma^i((s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}), \sigma^i((t_n)_{n \in \mathbb{N}_0})) > 2^{-1}3^{-k}$ , para algum  $0 \leq i < n$ , se e somente se  $s_j \neq t_j$ , para algum  $0 \leq j < n+k$ . Desta forma

$$\begin{aligned} h(2^{-1}3^{-k}, \sigma) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log r(n, 2^{-1}3^{-k}, \sigma)}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log r(n+k, 2^{-1}, \sigma)}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+k}{n} \frac{\log r(n+k, 2^{-1}, \sigma)}{n+k} \\ &= h(2^{-1}, \sigma). \end{aligned}$$

Sendo  $\epsilon \mapsto h(\epsilon, f)$  uma função monótona decrescente, conclui-se que

$$h(\sigma) = h(2^{-1}, \sigma) = \log 2.$$

□

Da definição de entropia obtém-se directamente o resultado que a seguir se apresenta.

**Proposição 1.13** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $f \in C^0(X, X)$ . Se  $K \subseteq X$  é fechado e  $f(K) \subseteq K$ , então  $h(f|_K) \leq h(f)$ .*

**Demonstração:** Sejam  $\epsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Claramente todo o conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado para  $f|_K$  é também  $(n, \epsilon)$ -separado para  $f$ , donde  $r(n, \epsilon, f|_K) \leq r(n, \epsilon, f)$  e consequentemente  $h(f|_K) \leq h(f)$ .  $\square$

Considerando  $K = \Omega(f)$ , pela Proposição 1.13, tem-se  $h(f|_{\Omega(f)}) \leq h(f)$ . Utilizando a definição de  $\Omega(f)$  prova-se a igualdade entre as entropias.

**Teorema 1.14** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $f \in C^0(X, X)$ . Então  $h(f) = h(f|_{\Omega(f)})$ .*

**Demonstração:** Ver, por exemplo, em [1], p.194-195.

**Teorema 1.15** *Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico compacto e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua. Se  $k$  é um inteiro positivo, então  $h(f^k) = kh(f)$ .*

**Demonstração:** Pela continuidade uniforme de  $f$  sabe-se que, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que se  $d(x, y) \leq \delta$ , então  $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \epsilon$ , para  $0 \leq j < k$ . Assim, todo o conjunto  $(nk, \epsilon)$ -separado para  $f$  é  $(n, \delta)$ -separado para  $f^k$ , logo

$$r(n, \delta, f^k) \geq r(nk, \epsilon, f).$$

Por outro lado, para  $y \in X$ ,

$$\{f^{ki}(y) : 0 \leq i < n\} \subseteq \{f^i(y) : 0 \leq i < nk\},$$

pelo que qualquer conjunto  $(n, \delta)$ -separado para  $f^k$  é também  $(nk, \delta)$ -separado para  $f$  e portanto

$$r(n, \delta, f^k) \leq r(nk, \delta, f).$$

Consequentemente, para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\frac{r(nk, \delta, f)}{n} \geq \frac{r(n, \delta, f^k)}{n} \geq \frac{r(nk, \epsilon, f)}{n},$$

donde, fazendo  $n \rightarrow +\infty$ , obtém-se

$$\begin{aligned} kh(\delta, f) &\geq h(\delta, f^k) \geq kh(\epsilon, f) \\ &\quad \Downarrow_{\epsilon \rightarrow 0^+} \\ kh(f) &\geq h(f^k) \geq kh(f), \end{aligned}$$

o que permite concluir que

$$kh(f) = h(f^k).$$

□

Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espaços métricos compactos e  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  e  $\varphi : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Diz-se que  $f$  e  $g$  são *semi-conjugadas* se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} f : X & \rightarrow & X \\ & \varphi \downarrow & \downarrow \varphi \\ g : Y & \rightarrow & Y \end{array}$$

comuta, isto é,  $\varphi \circ f = g \circ \varphi$ . Quando a aplicação  $\varphi$  é bijectiva diz-se que as aplicações  $f$  e  $g$  são *topologicamente conjugadas*.

**Teorema 1.16** *Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espaços métricos compactos. Sejam  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  aplicações contínuas semi-conjugadas por  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Se a aplicação  $\varphi$  é sobrejectiva, então  $h(f) \geq h(g)$ .*

**Demonstração:** Pela continuidade uniforme de  $\varphi$  sabe-se que, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $0 < \delta < \epsilon$  tal que  $d(x_1, x_2) > \delta$  sempre que  $d'(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) > \epsilon$ . Seja  $E(n, \epsilon, g) \subseteq Y$  um conjunto  $(n, \epsilon)$ -separado tal que  $\#E(n, \epsilon, g) = r(n, \epsilon, g)$ . Construindo o conjunto  $E(n, \delta, f)$  através da escolha de um elemento  $a \in \varphi^{-1}(\{x\})$ , para cada  $x \in E(n, \epsilon, g)$ , tem-se  $\#E(n, \delta, f) = \#E(n, \epsilon, g)$ . Assim, dados  $a, b \in E(n, \delta, f)$  existem  $x, y \in E(n, \epsilon, g)$  tais que  $\varphi(a) = x$  e  $\varphi(b) = y$ , donde, pela definição de  $E(n, \epsilon, g)$ , existe  $j \in \{0, \dots, n-1\}$  tal que

$$d'(g^j(x), g^j(y)) > \epsilon.$$

Consequentemente

$$d'(\varphi(f^j(a)), \varphi(f^j(b))) > \epsilon,$$

logo

$$d(f^j(a), f^j(b)) > \delta.$$

Assim,

$$r(n, \delta, f) \geq \#E(n, \delta, f) = \#E(n, \epsilon, g) = r(n, \epsilon, g)$$

e, tomando  $n \rightarrow +\infty$ , obtém-se

$$h(\delta, f) \geq h(\epsilon, g),$$

donde se conclui que

$$h(f) \geq h(g).$$

□

**Corolário 1.17** *Sejam  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  espaços métricos compactos. Sejam  $f : X \rightarrow X$ ,  $g : Y \rightarrow Y$  aplicações contínuas topologicamente conjugadas por  $\varphi : X \rightarrow Y$ . Então  $h(f) = h(g)$ . Em particular a entropia de uma aplicação não depende da métrica.*

**Demonstração:** Basta notar que as aplicações  $\varphi$  e  $\varphi^{-1}$  são sobrejectivas e deduzir do Teorema 1.16 que  $h(f) = h(g)$ . □

Está-se agora em condições de cumprir o objectivo proposto logo após a Proposição 1.11.

**Proposição 1.18** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $I_0, I_1 \subseteq I$  intervalos fechados e disjuntos. Se  $f^n(I_0) \cap f^n(I_1) \supseteq I_0 \cup I_1$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , então  $h(f) \geq \frac{\log 2}{n}$ .*

**Demonstração:** Seja  $g = f^n$ . Pela Proposição 1.15,  $h(f) = \frac{h(g)}{n}$ , donde é suficiente provar que  $h(g) \geq \log 2$ .

Considere-se o seguinte conjunto

$$\Lambda = \{x \in I : g^n(x) \in I_0 \cup I_1, \forall n \in \mathbb{N}_0\}.$$

De referir que  $\Lambda$  é compacto e  $g(\Lambda) \subseteq \Lambda$ .

Comece-se por provar que  $g|_\Lambda$  é topologicamente semi-conjugada a  $\sigma$ .

Definindo a aplicação

$$\begin{aligned}\pi : \Lambda &\rightarrow \Sigma_2^+ \\ x &\mapsto \pi(x)\end{aligned}$$

por

$$\begin{cases} (\pi(x))_i = 0 & \text{se } g^i(x) \in I_0 \\ (\pi(x))_i = 1 & \text{se } g^i(x) \in I_1 \end{cases}, \quad i \in \mathbb{N}_0,$$

tem-se  $\pi \circ g|_\Lambda = \sigma \circ \pi$ . Com efeito, dado  $x \in \Lambda$ , com  $\pi(g(x)) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  e  $\pi(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , tem-se

$$\begin{cases} g^i(g(x)) \in I_{b_i} \\ g^i(x) \in I_{a_i} \end{cases} \Rightarrow b_i = a_{i+1} \Rightarrow \sigma(\pi(x)) = \pi(g(x)).$$

Prove-se agora que  $\pi$  é contínua. Sejam  $q \in \Lambda$ ,  $\epsilon > 0$  e  $n_0$  um inteiro positivo tal que  $\frac{1}{2 \cdot 3^{n_0}} < \epsilon$ . Como  $g$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que, para  $p \in \Lambda$  e  $d(p, q) < \delta$  tem-se  $g^j(p) \in I_{s_j}$ , onde  $0 \leq j \leq n_0$  e  $\pi(q) = (s_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ , e consequentemente

$$d(p, q) < \delta \Rightarrow d(\pi(p), \pi(q)) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^{n_0}} < \epsilon.$$

Assim, as aplicações  $\sigma$  e  $g|_\Lambda$  são semi-conjugadas por  $\pi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2^+$ .

De seguida mostre-se que  $\pi$  é uma aplicação sobrejectiva. Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \Sigma_2^+$ . Considerando o conjunto

$$I_{a_0 a_1 \dots a_n} = \{x \in I : g^i(x) \in I_{a_i}, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}\},$$

facilmente se deduz que

$$I_{a_0 a_1 \dots a_n} = I_{a_0} \cap g^{-1}(I_{a_1 \dots a_n}); \quad (1.1)$$

$$I_{a_0 a_1 \dots a_n} = I_{a_0 \dots a_{n-1}} \cap g^{-n}(I_{a_n}). \quad (1.2)$$

De referir que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , pela Proposição 1.3,  $I_{a_0 a_1 \dots a_n} \neq \emptyset$ . Por indução, utilizando a igualdade (1.1), prova-se que, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $I_{a_0 a_1 \dots a_n}$  é um conjunto fechado (logo compacto) e, atendendo a (1.2), conclui-se que  $(I_{a_0 a_1 \dots a_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$  é uma sucessão decrescente relativamente à inclusão de conjuntos. Assim,  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} I_{a_0 a_1 \dots a_n}$

é um conjunto não vazio e  $\pi(x) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , para qualquer  $x \in K$ , logo  $\pi$  é sobrejectiva. Desta forma, pela Proposição 1.12 e pelo Teorema 1.16, se conclui que

$$h(g) \geq h(g|_\Lambda) \geq h(\sigma) = \log 2.$$

□

Finalmente apresenta-se uma aplicação contínua com entropia  $+\infty$ . Para isso enuncia-se um resultado auxiliar que permite calcular a entropia de aplicações monótonas por bocados definidas num intervalo fechado. Representar-se-á por  $l(f)$  o número de intervalos maximais para os quais  $f$  é monótona.

**Teorema 1.19** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua e monótona por bocados. Então*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log l(f^n) = h(f).$$

**Demonstração:** Ver, por exemplo, em [9], p.169-170. □

**Exemplo 1.2** Seja  $I = [0, 1]$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n \in C^0(I, I)$  representa a aplicação afim por bocados verificando  $l(f_n) = n$ ,

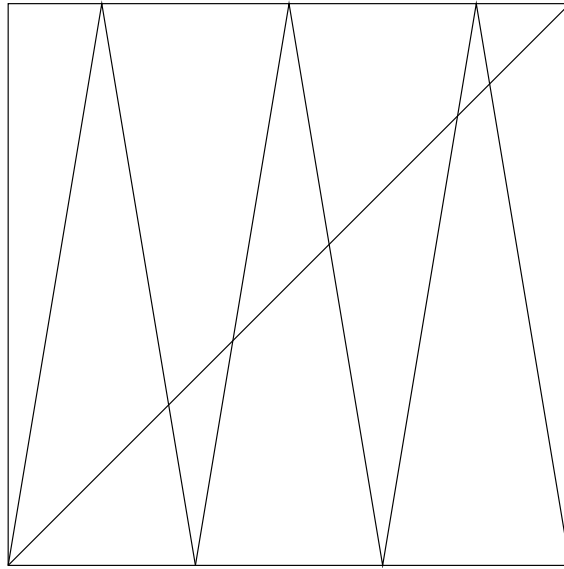
$$f_n^{-1}(0) = \left\{ \frac{2k}{n} : k = 0, 1, \dots, \left[ \frac{n}{2} \right] \right\}$$

e

$$f_n^{-1}(1) = \left\{ \frac{2k+1}{n} : k = 0, 1, \dots, \left[ \frac{n-1}{2} \right] \right\}.$$

A Figura 1.2 apresenta o gráfico de  $f_6$ . Claramente  $l(f_n^k) = n^k$ , donde  $h(f_n) = \log n$ .

Considere-se a aplicação contínua  $f : I \rightarrow I$  topologicamente conjugada com  $f_{2n-1}$  em  $[2^{-n}, 2^{-n+1}]$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ , e  $f(0) = 0$ . A Figura 1.3 mostra o gráfico de  $f$ .



**Figura 1.2**

Assim, da Proposição 1.13 e do Corolário 1.17, vem

$$h(f) \geq h(f|_{[2^{-n}, 2^{-n+1}]}) = h(f_{2n-1}) = \log(2n - 1), \forall n \in \mathbb{N}$$

e conseqüentemente  $h(f) = +\infty$ .

**Figura 1.3**



# Capítulo 2

## Órbitas periódicas e entropia

Neste capítulo estabelecem-se relações entre entropia, períodos de órbitas periódicas e estrutura (ordenação em  $\mathbb{R}$ ) das órbitas periódicas. Mais precisamente na secção 2.1 (Teoremas 2.1 e 2.2) mostra-se que  $f \in C^0(I, I)$  tem entropia topológica positiva se e somente se admite alguma órbita periódica cujo período não é uma potência de 2.

Assim, a entropia de  $f \in C^0(I, I)$  é zero se e só se todas as órbitas periódicas de  $f$  têm períodos que são potências de 2. Na secção 2.2 (Teorema 2.12) mostra-se que a estrutura destas órbitas é bastante rígida: são órbitas simples.

### 2.1 Entropia positiva e períodos dos pontos periódicos

O teorema seguinte apresenta uma condição suficiente para que uma aplicação contínua, definida num intervalo, tenha entropia positiva. Considera-se que  $1 = 2^0$  é uma potência de 2.

**Teorema 2.1** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Se  $f$  admite um ponto periódico cujo período não é potência de 2, então  $h(f) > 0$ .*

**Demonstração:** Atendendo ao Teorema de Sarkovskii, existe  $r \geq 1$  tal que  $f^r$  admite um ponto periódico  $x$  de período 3.

Sejam  $x_0 = \min\{x, f^r(x), f^{2r}(x)\}$  e  $x_i = f^{ir}(x_0)$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . Admitindo, sem perda de generalidade, que  $x_0 < x_2 < x_1$ , existem  $z \in [x_0, x_2]$ ,  $w \in [x_2, x_1]$

tais que  $f^r(z) = x_2$  e  $f^r(w) = z$ . Considerando  $I_0 = [x_0, z]$  e  $I_1 = [w, x_1]$ , tem-se  $f^{3r}(I_0) \cap f^{3r}(I_1) \supseteq I_0 \cup I_1$  e portanto, pela Proposição 1.18,  $h(f) \geq \frac{\log 2}{3r}$ .  $\square$

O objectivo seguinte é provar a afirmação recíproca do teorema anterior.

**Teorema 2.2** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Se  $h(f) > 0$ , então  $f$  admite um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2.*

A demonstração deste teorema é efectuada após os Lemas 2.3 a 2.11 ([1], capítulo 4). Inicialmente apresentam-se três resultados auxiliares.

**Lema 2.3** *Se  $a_{n,i}$ , com  $k, n \in \mathbb{N}$  e  $i = 1, \dots, k$ , são números reais não negativos, então*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i=1}^k a_{n,i} = \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_{n,i}.$$

**Demonstração:** Como  $\sum_{i=1}^k a_{n,i} \geq a_{n,j}$  para cada  $j \in \{1, \dots, k\}$ , tem-se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i=1}^k a_{n,i} \geq \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_{n,i}.$$

Por outro lado,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log n = 0$ , pelo que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{i=1}^k a_{n,i} &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log (n \max_{1 \leq i \leq k} a_{n,i}) \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} \log n + \frac{1}{n} \log \max_{1 \leq i \leq k} a_{n,i} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \max_{1 \leq i \leq k} a_{n,i} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq k} \log a_{n,i} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log a_{n,i}. \end{aligned}$$

$\square$

**Lema 2.4** *Sejam  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  e  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  duas sucessões de números reais. Então*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \sum_{k=0}^n e^{\alpha_k + \beta_{n-k}} \right) \leq \max \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{n} \right\}.$$

**Demonstração:** Sejam

$$a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}, \quad b = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{n} \quad \text{e} \quad c = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \sum_{k=0}^n e^{\alpha_k + \beta_{n-k}} \right),$$

e considerem-se as séries de potências

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\alpha_n} z^n \quad \text{e} \quad B(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{\beta_n} z^n.$$

O raio de convergência da série  $A(z)$  é

$$\frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{e^{\alpha_n}}} = \left( e^{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}} \right)^{-1} = e^{-a},$$

e analogamente se conclui que o raio de convergência da série  $B(z)$  é  $e^{-b}$ . Considerando o produto das séries,

$$c(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n e^{\alpha_k + \beta_{n-k}} \right) z^n,$$

cujo raio de convergência é  $e^{-c}$ , tem-se  $e^{-c} \geq \min\{e^{-a}, e^{-b}\}$  e consequentemente  $c \leq \max\{a, b\}$ .  $\square$

**Lema 2.5** *Sejam  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de números reais,  $b, u \in \mathbb{R}$  e  $p \in \mathbb{N}$  tais que:*

1.  $u > 0$ ;
2.  $a_{n+1} \leq a_n + b, \forall n \in \mathbb{N}$ ;
3. *Se  $n \geq p$  e  $\frac{a_n}{n} \geq u$ , então  $a_{n+1} \leq a_n + u$ .*

*Então  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq u$ .*

**Demonstração:** Para cada  $n \geq p$ , considere-se  $P(n)$  a seguinte propriedade

$$a_n \leq nu + \max\{b, a_p\}.$$

A propriedade é trivial para  $n = p$ . Suponha-se que a propriedade é válida para  $n > p$ . Se  $a_n < nu$ , então, por 1. e 2.,

$$a_{n+1} \leq a_n + b < nu + b < (n+1)u + \max\{b, a_p\},$$

caso contrário, atendendo a 3.,

$$a_{n+1} \leq a_n + u \leq (n+1)u + \max\{b, a_p\}.$$

Portanto,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \left( u + \frac{\max\{b, a_p\}}{n} \right) = u.$$

□

No que se segue,  $\mathcal{P}(I) = \bigcup_{A \subseteq I} \{A\}$ .

**Definição 2.6** *Um conjunto  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(I)$  diz-se uma cobertura de  $I$  se  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = I$ . A cobertura diz-se aberta se é constituída por conjuntos abertos.*

Dada uma cobertura  $\mathcal{A}$  (não necessariamente aberta) de  $I$  definem-se

$$\mathcal{A}^n = \left\{ \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{k_j}) : A_{k_j} \in \mathcal{A} \text{ e } \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j}(A_{k_j}) \neq \emptyset \right\}$$

e

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}) = \min \left\{ \#\mathcal{C} : \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \text{ e } I \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right\}.$$

Tal como na secção 1.1, o objectivo é medir a complexidade da dinâmica de  $f$ , pelo que se define

$$h(\mathcal{A}, f) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \log \frac{\mathcal{N}(\mathcal{A}^n)}{n}$$

e

$$h(f) = \sup\{h(\mathcal{A}, f) : \mathcal{A} \text{ é uma cobertura aberta de } I\}. \quad (2.1)$$

A definição acima referida é equivalente à definição introduzida na secção 1.1 para conjuntos  $(n, \epsilon)$ -separados. É importante salientar que o mesmo não acontece caso se substitua em (2.1) “cobertura aberta” por “cobertura”, como evidencia o exemplo seguinte presente em [1], p.203-205.

**Exemplo 2.1** Seja  $I = [-1, 1]$ . A aplicação  $f : I \rightarrow I$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é contínua. Como  $|f(x)| \leq \frac{|x|}{2}$ , para todo  $x \in [-1, 1]$ , tem-se  $f^n(x) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , donde  $\Omega(f) = \{0\}$  e portanto, pelo Teorema 1.14,

$$h(f) = h(f|_{\Omega(f)}) = h(f|_{\{0\}}) = 0.$$

Considerando  $L = [-1, 0]$ ,  $R = [0, 1]$  e  $\mathcal{A} = \{L, R\}$  quer-se demonstrar que  $h(\mathcal{A}, f) > 0$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $(M_i)_{i=0}^n$  representa uma sucessão tal que, para todo  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $M_k \in \mathcal{A}$ . Aplicando o Princípio de Indução, prova-se que existe um intervalo fechado não degenerado  $J \subseteq I$  que satisfaz as seguintes propriedades:  $f|_J^n$  é um homeomorfismo;  $0 \in f^n(J)$  e  $f^i(J) \subseteq M_i$ , para cada  $i \in \{0, \dots, n\}$ .

Assim, a uma sucessão  $(M_i)_{i=0}^n$ , corresponde um intervalo  $J$  que satisfaz as propriedades enunciadas acima. Como  $f^n(\overset{\circ}{J})$  é um intervalo aberto e  $f^n(\overset{\circ}{J}) \subseteq M_n$ , para  $x \in \overset{\circ}{J}$ , tem-se  $f^n(x) \neq 0$ , pelo que o conjunto  $M_i$  é o único elemento de  $\mathcal{A}$  ao qual  $f^i(x)$  pertence e consequentemente  $\bigcap_{i=0}^n f^{-i}(M_i)$  é o único elemento de  $\mathcal{A}^{n+1}$  que contém  $x$ .

Donde, se  $\mathcal{B}$  é uma subcobertura escolhida de  $\mathcal{A}^{n+1}$ , então  $\bigcap_{i=0}^n f^{-i}(M_i) \in \mathcal{B}$ . Uma vez que a sucessão  $(M_i)_{i=0}^n$  foi escolhida de modo arbitrário, tem-se  $\mathcal{N}(\mathcal{A}^{n+1}) = 2^{n+1}$  e portanto  $h(\mathcal{A}, f) = \log 2$ .

No que se segue,  $\mathcal{A}|_Y$  representa a cobertura  $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$  de  $Y$ , onde  $Y \subseteq I$ .

**Definição 2.7** *Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas coberturas de  $I$ . Diz-se que  $\mathcal{A}$  é mais fina que  $\mathcal{B}$ , e escreve-se  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$ , se*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \exists B \in \mathcal{B} : A \subseteq B.$$

**Nota 2.1** De notar que se  $\mathcal{A} \succeq \mathcal{B}$ , então  $\mathcal{N}(\mathcal{A}) \geq \mathcal{N}(\mathcal{B})$  e  $\mathcal{A}^n \succeq \mathcal{B}^n$ , donde

$$\mathcal{A} \succeq \mathcal{B} \Rightarrow h(\mathcal{A}, f) \geq h(\mathcal{B}, f).$$

Em todo o texto considera-se um intervalo compacto  $I \subseteq \mathbb{R}$ , pelo que é dado especial relevo a uma classe especial de coberturas: partições de intervalos.

**Definição 2.8** *Seja  $I$  um intervalo compacto. Diz-se que uma cobertura é uma partição de  $I$  em intervalos se é constituída por intervalos disjuntos dois a dois.*

**Lema 2.9** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $\mathcal{A}$  uma partição finita de  $I$  em intervalos. Então, para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $A \in \mathcal{A}^n$ , existe um intervalo  $K \subseteq A$  tal que  $f^n(K) = f^n(A)$ . Em particular, o conjunto  $f^n(A)$  é um intervalo.*

**Demonstração:** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $P(n)$  a seguinte propriedade

$$\forall A \in \mathcal{A}^n, \exists K \subseteq A : f^n(K) = f^n(A).$$

Se  $n = 1$ , então basta considerar  $K = A$ . Admita-se que a propriedade é válida para  $n$  e prove-se para  $n + 1$ . Dado  $A \in \mathcal{A}^{n+1}$ , tem-se

$$A = C \cap f^{-n}(B),$$

onde  $B \in \mathcal{A}$  e  $C \in \mathcal{A}^n$ , pelo que

$$\begin{aligned} x \in f^n(A) &\Leftrightarrow x = f^n(y), y \in A \\ &\Leftrightarrow x = f^n(y), y \in C \cap f^{-n}(B) \\ &\Leftrightarrow x = f^n(y), f^n(y) \in f^n(C) \cap B \text{ e } y \in C \\ &\Leftrightarrow x \in f^n(C) \cap B. \end{aligned}$$

Atendendo à hipótese de indução, existe um intervalo  $L \subseteq C$  tal que  $f^n(L) = f^n(C)$ , donde

$$f^n(A) = f^n(C) \cap B = f^n(L) \cap B.$$

Como  $L$  e  $B$  são intervalos,  $f^n(A)$  é ainda um intervalo e  $f^n(L) \supseteq f^n(A)$ . Assim, existe um intervalo  $K \subseteq L$  tal que  $f^n(K) = f^n(A)$ , tendo-se, por um lado,  $K \subseteq L \subseteq C$  e por outro,  $f^n(K) = f^n(A) \subseteq B$ , consequentemente  $K \subseteq C \cap f^{-n}(B)$  e

$$f^{n+1}(K) = f(f^n(K)) = f(f^n(A)) = f^{n+1}(A).$$

□

Sendo  $\mathcal{A}$  uma partição finita de intervalos em  $I$ , para quaisquer  $A, B \in \mathcal{A}$  e  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$f^{-n}(A) \cap f^{-n}(B) = f^{-n}(A \cap B) = \emptyset,$$

donde

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}^n) = \#\mathcal{A}^n$$

e portanto, atendendo ao Lema 2.3,

$$\begin{aligned} h(\mathcal{A}, f) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathcal{N}(\mathcal{A}^n)}{n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{A \in \mathcal{A}} \#(\mathcal{A}_{|A}^n) \\ &= \max_{A \in \mathcal{A}} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{A}_{|A}^n). \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$\xi = \left\{ A \in \mathcal{A} : \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{A}_{|A}^n) = h(\mathcal{A}, f) \right\},$$

tem-se claramente  $\xi \neq \emptyset$ .

**Lema 2.10** *Para qualquer  $A \in \xi$ , tem-se*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) = h(\mathcal{A}, f).$$

**Demonstração:** Para  $n \in \mathbb{N}$  tem-se  $\#(\xi_{|A}^n) \leq \#\mathcal{A}^n$ , donde

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) \leq h(\mathcal{A}, f).$$

Considere-se  $\alpha_n = \log \#(\xi_{|A}^n)$  e  $\beta_n = \log \left( \sum_{B \in \mathcal{A} \setminus \xi} \#(\mathcal{A}_{|B}^n) \right)$ , para  $n \in \mathbb{N}$ , e  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ .

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Para cada  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  defina-se

$$T_k = \left\{ B \in \mathcal{A}_{|A}^n : B = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i), B_i \in \xi \text{ para } i < k, B_k \in \mathcal{A} \setminus \xi \right\}$$

e

$$T_n = \xi_{|A}^n.$$

Note-se que

$$\begin{aligned} B \in T_k &\Leftrightarrow B = \bigcap_{i=0}^{n-1} f^{-i}(B_i), B_i \in \xi \text{ para } i < k, B_k \in \mathcal{A} \setminus \xi \\ &\Leftrightarrow B = \bigcap_{i=0}^{k-1} f^{-i}(B_i) \cap f^{-k} \left( \bigcap_{i=0}^{n-k-1} f^{-i}(B_{i+k}) \right), \end{aligned}$$

donde  $\#T_k \leq e^{\alpha_k} e^{\beta_{n-k}}$ . Por um lado, como  $\mathcal{A}_{|A}^n = \bigcup_{k=1}^n T_k$ , vem

$$\#(\mathcal{A}_{|A}^n) \leq \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k + \beta_{n-k}},$$

donde

$$h(\mathcal{A}, f) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \left( \sum_{k=0}^n e^{\alpha_k + \beta_{n-k}} \right). \quad (2.2)$$

Por outro lado, dado  $B \in \mathcal{A} \setminus \xi$ , por definição de  $\xi$ , tem-se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\mathcal{A}_{|B}^n) < h(\mathcal{A}, f)$$

e portanto, pelo Lema 2.3,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\beta_n}{n} < h(\mathcal{A}, f).$$

Assim, pelo Lema 2.4 e por (2.2),

$$h(\mathcal{A}, f) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n},$$

donde a igualdade

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) = h(\mathcal{A}, f).$$

□

Para quaisquer  $A, B \in \xi$ , defina-se

$$\gamma(A, B, n) = \#\{E \in \xi_{|A}^n : f^n(E) \supseteq B\}.$$

**Lema 2.11** *Se  $h(\mathcal{A}, f) > \log 3$ , então existe  $A_0 \in \xi$  tal que*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A_0, A_0, n) = h(\mathcal{A}, f).$$

**Demonstração:** Sejam  $u \in \mathbb{R}$  tal que  $\log 3 < u < h(\mathcal{A}, f)$  e  $A \in \xi$ . Como

$$\log \#(\xi_{|A}^{n+1}) \leq \log \#(\xi_{|A}^n) + \log \#\xi,$$

admitindo que existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que

$$\forall n \geq p, \frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) \geq u \Rightarrow \#(\xi_{|A}^{n+1}) \leq 3\#(\xi_{|A}^n),$$

pelo Lema 2.5, tem-se

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) \leq u,$$

o que contradiz o Lema 2.10. Assim, para cada  $p \in \mathbb{N}$ , existe um inteiro  $n \geq p$  tal que

$$\frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) \geq u \text{ e } \#(\xi_{|A}^{n+1}) \geq 3\#(\xi_{|A}^n). \quad (2.3)$$

Dado  $E \in \xi_{|A}^n$ , pelo Lema 2.9,  $f^n(E)$  é um intervalo e portanto se intersecta  $r$  elementos de  $\xi$  terá de conter pelo menos  $r - 2$  desses elementos. Mas

$$\begin{aligned} \#\xi_{|E}^{n+1} &= \#\{E_i \in \xi : E \cap f^{-n}(E_i) \neq \emptyset\} \\ &= \#\{E_i \in \xi : f^n(E) \cap E_i \neq \emptyset\} \\ &= r, \end{aligned}$$

pelo que,

$$\#\{B \in \xi : f^n(E) \supseteq B\} \geq \#(\xi_{|E}^{n+1}) - 2.$$

Somando relativamente a  $E \in \xi_{|A}^n$ , tem-se

$$\sum_{B \in \xi} \gamma(A, B, n) \geq \#(\xi_{|A}^{n+1}) - 2\#(\xi_{|A}^n)$$

e por (2.3), para cada  $p \in \mathbb{N}$ , existe  $n \geq p$  tal que

$$\sum_{B \in \xi} \gamma(A, B, n) \geq 3\#(\xi_{|A}^n) - 2\#(\xi_{|A}^n),$$

donde

$$\frac{1}{n} \log \sum_{B \in \xi} \gamma(A, B, n) \geq \frac{1}{n} \log \#(\xi_{|A}^n) \geq u$$

e consequentemente

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B \in \xi} \gamma(A, B, n) \geq u.$$

Atendendo à escolha de  $u$ , pode-se concluir que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B \in \xi} \gamma(A, B, n) \geq h(\mathcal{A}, f).$$

Como  $\xi$  é finito, pelo Lema 2.3,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{B \in \xi} \gamma(A, B, n) = \max_{B \in \xi} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A, B, n),$$

donde, para cada  $A \in \xi$ , existe  $\phi(A) \in \xi$  tal que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A, \phi(A), n) \geq h(\mathcal{A}, f). \quad (2.4)$$

A aplicação  $\phi : \xi \rightarrow \xi$  admite um ponto periódico. Denote-se esse conjunto por  $A_0$  e o seu período por  $m$ .

Sejam  $A, B, C \in \xi$  e  $D \in \xi_{|A}^n$ ,  $D' \in \xi_{|B}^k$  tais que  $f^n(D) \supseteq B$  e  $f^k(D') \supseteq C$ . De notar que  $f^n(D) \supseteq B \supseteq D'$ . Assim,

$$D \cap f^{-n}(D') \in \xi_{|A}^{n+k} \text{ e } f^{n+k}(D \cap f^{-n}(D')) \supseteq C$$

e portanto

$$\gamma(A, C, n+k) \geq \gamma(A, B, n)\gamma(B, C, k). \quad (2.5)$$

Aplicando (2.5)  $m-1$  vezes, obtém-se

$$\gamma(A_0, A_0, nm) \geq \prod_{i=0}^{m-1} \gamma(\phi^i(A_0), \phi^{i+1}(A_0), n),$$

para qualquer  $n \in \mathbb{N}$ , donde, por (2.4), se conclui que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A_0, A_0, n) \geq h(\mathcal{A}, f).$$

Mas,  $\gamma(A_0, A_0, n) \leq \#\mathcal{A}^n$ , pelo que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \gamma(A_0, A_0, n) = h(\mathcal{A}, f).$$

□

Encontram-se reunidas as ferramentas necessárias para demonstrar o Teorema 2.2.

**Demonstração do Teorema 2.2:** Considere-se um inteiro  $r > \frac{1+\log 3}{h(f)}$  (se  $h(f) = +\infty$ , toma-se  $r = 1$ ).

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , existe uma cobertura aberta  $\mathcal{B}$  tal que

$$h(\mathcal{B}, f^r) \geq h(f^r) - \frac{1}{n} = rh(f) - \frac{1}{n} > \log 3 + 1 - \frac{1}{n} \geq \log 3.$$

(Se  $h(f) = +\infty$ , substitui-se a última fórmula por  $h(\mathcal{B}, f) > n + \log 3$ .)

Uma vez que qualquer cobertura de um compacto admite uma subcobertura finita e os intervalos abertos constituem uma base de abertos de  $I$ , então existe uma cobertura finita  $\mathcal{C} \succeq \mathcal{B}$  constituída apenas por intervalos abertos e portanto uma partição finita  $\mathcal{A}$  de  $I$  em intervalos e mais fina que  $\mathcal{B}$ . Donde, pelo Lema 2.11 e pela Nota 2.1, existe um intervalo  $A_0 \in \xi$  e um inteiro positivo  $m_n$  grande tal que

$$\frac{1}{m_n} \log \gamma(A_0, A_0, m_n) \geq h(\mathcal{A}, f^r) - \frac{1}{n} \text{ (ou } n + \log 3 \text{ se } h(f) = +\infty \text{)}.$$

Sendo  $s_n = \gamma(A_0, A_0, m_n)$ , tem-se claramente  $s_n \geq 3^{m_n}$ . Assim, pela definição de  $\gamma$ , existem intervalos  $E_1, \dots, E_{s_n}$  de  $\xi_{f^r}^{m_n}|_{A_0}$  tais que, para cada  $i \in \{1, \dots, s_n\}$ ,  $(f^r)^{m_n}(E_i) \supseteq A_0$  e, pelo Lema 2.9, para cada  $i$ , existe um intervalo  $K_i \subseteq E_i$  com  $(f^r)^{m_n}(K_i) = (f^r)^{m_n}(E_i)$ . Portanto os intervalos  $K_1, \dots, K_{s_n}$  são subconjuntos de  $A_0$  dois a dois disjuntos tais que  $(f^r)^{m_n}(K_i) \supseteq A_0$ , para cada  $i \in \{1, \dots, s_n\}$ . Como  $s_n \geq 5$  existem  $1 \leq s_i, s_j \leq s_n$  tais que  $\overline{K_{s_i}}, \overline{K_{s_j}} \subseteq A_0$  e  $\overline{K_{s_i}} \cap \overline{K_{s_j}} = \emptyset$ . Assim,

$$(f^r)^{m_n}(\overline{K_{s_i}}) \cap (f^r)^{m_n}(\overline{K_{s_j}}) \supseteq A_0 \supseteq \overline{K_{s_i}} \cup \overline{K_{s_j}},$$

donde, pela Proposição 1.4,  $f^{rm_n}$  admite um ponto periódico de período 3 e consequentemente  $f$  admite um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2.

□

## 2.2 Entropia zero e estrutura das órbitas periódicas

Dada uma órbita periódica  $P$  de  $f \in C^0(I, I)$ , com período  $m = 2^k$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ , diz-se que  $P$  é *simples* quando para qualquer  $\{q_1, \dots, q_n\} \subseteq P$  órbita periódica de  $f^r$ , onde  $n \cdot r = m$  e  $n \geq 2$ , com  $q_1 < \dots < q_n$ , se verifica

$$f^r(\{q_1, \dots, q_{\frac{n}{2}}\}) = \{q_{\frac{n}{2}+1}, \dots, q_n\}.$$

O resultado que se segue permite concluir que a entropia de  $f$  é nula se e só se todas as suas órbitas periódicas são simples.

**Teorema 2.12** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . A aplicação  $f$  tem um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2 se e somente se admite órbitas periódicas não simples.*

A demonstração deste teorema é longa e será feita com base em resultados auxiliares (Proposição 2.13 e Lemas 2.14 a 2.18). Segue-se principalmente [3].

**Proposição 2.13** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Se  $P$  é uma órbita periódica de  $f$  de período  $n$ , onde  $n$  é par, então existem dois subconjuntos disjuntos de  $P$  que são órbitas periódicas de  $f^2$  de período  $\frac{n}{2}$ .*

**Demonstração:** Considerando a órbita  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  tal que, para cada  $i \in \{2, \dots, n\}$ ,  $p_i = f(p_{i-1})$ , basta colocar  $P_1 = \{p_i : i \text{ é ímpar}\}$  e  $P_2 = \{p_i : i \text{ é par}\}$ . □

Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $P$  uma órbita periódica de  $f$  contendo pelo menos dois elementos. Denote-se por  $P_{\min}(f)$  e  $P_{\max}(f)$ , respectivamente, o menor e o maior elemento de  $P$ .

Definindo os conjuntos

$$U(f) = \{x \in I : f(x) > x\},$$

$$D(f) = \{x \in I : f(x) < x\}$$

e considerando  $P_U(f)$  o maior elemento de  $P \cap U(f)$  e  $P_D(f)$  o menor elemento de  $P \cap D(f)$ , tem-se claramente  $P_{\min}(f) \leq P_U(f) < P_{\max}(f)$  e  $P_{\min}(f) < P_D(f) \leq P_{\max}(f)$ .

**Lema 2.14** ([13]) *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $P$  uma órbita periódica de  $f$ . Se  $f$  tem um ponto fixo entre  $P_{\min}(f)$  e  $P_U(f)$ , ou entre  $P_D(f)$  e  $P_{\max}(f)$ , então  $f$  admite órbitas periódicas de qualquer período.*

**Demonstração:** Seja  $p_0$  um ponto fixo entre  $P_{\min}(f)$  e  $P_U(f)$ . Considere-se o conjunto

$$A = \{x \in P \cap U(f) : x > p_0\}.$$

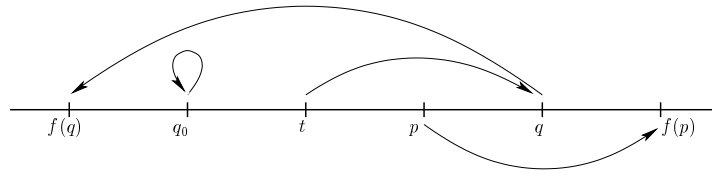
Note-se que  $A \neq \emptyset$  porque  $P_U(f) \in A$ . Seja  $p \in A$  tal que  $f(p) = \max_{x \in A} f(x)$  e  $q_0$  o maior ponto fixo de  $f$  em  $[p_0, p]$ . Por um lado, como

$$P_{\min}(f) < p_0 \leq q_0,$$

$P$  não pode estar contido em  $[q_0, f(p)]$ . Por outro lado, para  $x \in P \cap [q_0, f(p)]$ , tem-se  $x \in A$  e  $x < f(x) \leq f(p)$  se  $x \in U(f)$ , e  $f(x) < x \leq f(p)$ , caso contrário. Assim, existe  $q \in P \cap [q_0, f(p)]$  tal que  $f(q) < q_0 < q$ . Como  $f(p) > p$  a condição  $q < p$  implica que  $f([q, p]) \supseteq [q, p]$  e portanto a existência de um ponto fixo em  $[q, p]$ , contradizendo a definição de  $q_0$ , pelo que

$$f(q) < q_0 < p < q \leq f(p).$$

Seja  $t \in [q_0, p]$  tal que  $f(t) = q$  (ver Figura 2.1).



**Figura 2.1**

Assim,  $f([q_0, t]) \cap f([t, q]) \supseteq [q_0, q]$ , donde, pela Proposição 1.4,  $f$  admite um ponto periódico de período 3 e portanto, pelo Teorema de Sarkovskii,  $f$  admite pontos periódicos de qualquer período.

No outro caso a prova é análoga. □

**Lema 2.15** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $P$  uma órbita periódica de  $f$ . Se  $P_D(f) < P_U(f)$ , então  $f$  admite pontos periódicos de qualquer período.*

**Demonstração:** Se  $P_D(f) < P_U(f)$ , como  $f(P_D(f)) < P_D(f)$  e  $f(P_U(f)) > P_U(f)$ , então  $f$  admite um ponto fixo no intervalo  $[P_D(f), P_U(f)]$ . Mas  $P_{\min}(f) < P_D(f)$ , pelo que, atendendo ao Lema 2.14,  $f$  admite pontos periódicos de qualquer período. □

**Lema 2.16** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $g = f^r$ , com  $r = 2^l$ ,  $l \geq 1$ . Admita-se que  $P_0 = \{q_1, \dots, q_n\}$ , com  $q_1 < q_2 < \dots < q_n$ , é uma órbita periódica de  $g$  com período  $n = 2^k$ ,  $k \geq 1$ . Se existem  $i, j \leq \frac{n}{2}$  tais que  $g(q_i) = q_j$ , então  $f$  admite uma órbita periódica não simples.*

**Demonstração:** Sendo  $P$  a órbita de  $q_1$  relativamente a  $f$ , tem-se que  $P$  é uma órbita periódica de  $f$  e  $P_0 \subseteq P$ . Seja  $m$  o período de  $P$ . Pretende-se provar que  $m = n \cdot r = 2^k \cdot 2^l$  e  $P$  não é simples.

Afirma-se que

$$\forall s \in \{1, \dots, r-1\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}, f^s(q_j) \notin P_0. \quad (2.6)$$

Admita-se que existem  $s \in \{1, \dots, r-1\}$  e  $q_j \in P_0$  tais que  $f^s(q_j) \in P_0$ . Pode supor-se, escolhendo  $s$  suficientemente pequeno, que

$$\forall t < s, \forall i \in \{1, \dots, n\}, f^t(q_i) \notin P_0. \quad (2.7)$$

Assim, para  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$$f^s(f^{kr}(q_j)) = f^{kr}(f^s(q_j)) \in P_0$$

pelo que

$$f^s(P_0) \subseteq P_0.$$

Mas  $f$  restrita a  $P_0$  é injectiva, logo  $f^s(P_0) = P_0$ , donde, por (2.7) e porque  $f^r(P_0) = P_0$ , se conclui que  $s$  divide  $r$ . Por outro lado existe uma órbita  $P_1 \subseteq P_0$  periódica de  $f^s$ , pelo que

$$\begin{cases} f^s(P_1) = P_1 \\ s|r \end{cases} \Rightarrow f^r(P_1) = P_1 \Rightarrow P_1 = P_0$$

e portanto  $P_0$  é uma órbita periódica de  $f^r$  e  $f^s$ . Como  $r$  é uma potência de 2,  $s$  divide  $r$  e  $P_0$  tem pelo menos dois elementos, aplicando a Proposição 2.13 encontra-se um subconjunto  $Q_0 \subsetneq P_0$  que verifica  $f^r(Q_0) = Q_0$ , contradizendo a definição de  $P_0$ . Assim, a afirmação (2.6) é verdadeira.

Seguidamente mostra-se que os pontos

$$q_1, \dots, q_n, f(q_1), \dots, f(q_n), \dots, f^{r-1}(q_1), \dots, f^{r-1}(q_n)$$

são distintos dois a dois.

Admita-se que  $f^a(q_i) = f^b(q_j)$ , para  $0 \leq a \leq r-1$  e  $0 \leq b \leq r-1$ . Assuma-se, sem perda de generalidade, que  $a \leq b$ . Assim

$$\begin{aligned} f^a(q_i) = f^b(q_j) &\Rightarrow f^{r-b+a}(q_i) = f^r(q_j) \\ &\Rightarrow f^{r-b+a}(q_i) \in P_0 \\ &\Rightarrow r-b+a = r, \text{ porque } r-b+a \leq r \\ &\Rightarrow b = a \\ &\Rightarrow q_i = q_j \end{aligned}$$

e portanto  $P = \{q_1, \dots, q_n, f(q_1), \dots, f(q_n), \dots, f^{r-1}(q_1), \dots, f^{r-1}(q_n)\}$  admite  $n \cdot r$  elementos. Segue da hipótese do lema que  $P$  não é simples.  $\square$

**Lema 2.17** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$ ,  $P$  uma órbita periódica de  $f$  de período  $k \geq 2$ , onde  $k$  é uma potência de 2, e  $n \geq 3$  um número ímpar. Se  $f^n$  não admite pontos periódicos de período 3, então  $P_U(f^n) = P_U(f)$  e  $P_D(f^n) = P_D(f)$ .*

**Demonstração:** Como  $P$  é uma órbita periódica de  $f^n$ ,  $P_U(f^n)$  e  $P_D(f^n)$  estão bem definidos. Atendendo à hipótese conclui-se que  $f$  não admite pontos periódicos de período  $3n$ , donde, pelo Lema 2.15,  $P_U(f) < P_D(f)$  e assim, pela definição de  $P_U(f)$  e de  $P_D(f)$ , não existem elementos de  $P$  entre  $P_U(f)$  e  $P_D(f)$ . Novamente pelo Lema 2.15, conclui-se que  $P_U(f^n) < P_D(f^n)$  e não existem elementos de  $P$  entre  $P_U(f^n)$  e  $P_D(f^n)$ . Assim, basta provar que  $P_U(f^n) = P_U(f)$ .

Suponha-se que  $P_U(f^n) \neq P_U(f)$ .

Caso 1:  $P_U(f) < P_U(f^n)$ .

Neste caso  $P_U(f) < P_D(f) \leq P_U(f^n) < P_D(f^n)$ . Como  $f(P_{\min}(f)) > P_{\min}(f)$  e  $f(P_D(f)) < P_D(f)$ , conclui-se que  $f$  admite um ponto fixo em  $[P_{\min}(f), P_D(f)]$ , donde  $f^n$  tem um ponto fixo entre  $P_{\min}(f^n) = P_{\min}(f)$  e  $P_U(f^n)$  e portanto, pelo Lema 2.14,  $f^n$  admite órbitas periódicas de qualquer período, o que contradiz a hipótese.

Caso 2:  $P_U(f) > P_U(f^n)$ .

Nesta situação prova-se que  $f^n$  admite um ponto fixo entre  $P_D(f^n)$  e  $P_{\max}(f^n)$  e portanto, pelo Lema 2.14, obtém-se uma contradição.  $\square$

**Lema 2.18** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $P = \{p_1, \dots, p_n\}$  uma órbita periódica de  $f$  de período  $n = 2^k$ , com  $k > 1$ , e  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ . Se para qualquer  $0 < m < n$  número ímpar,  $f^m$  não tem pontos periódicos de período 3, então*

$$f(\{p_1, \dots, p_{\frac{n}{2}}\}) = \{p_{\frac{n}{2}+1}, \dots, p_n\} \text{ e } f(\{p_{\frac{n}{2}+1}, \dots, p_n\}) = \{p_1, \dots, p_{\frac{n}{2}}\}.$$

**Demonstração:** Inicialmente demonstra-se que  $f(P \cap U(f)) \subseteq P \cap D(f)$ . Suponha-se, por absurdo, que

$$\exists p_i \in P \cap U(f) : f(p_i) \in P \cap U(f). \quad (2.8)$$

Seja  $l \in \{2, \dots, n-1\}$  tal que  $f^l(f(p_i)) = p_1$ .

Se  $l$  é ímpar, então  $f^l$  admite um ponto fixo em  $[p_1, f(p_i)]$ . Como  $f(p_i) \leq P_U(f)$  e, pelo Lema 2.17,  $P_U(f) = P_U(f^l)$ , conclui-se, pelo Lema 2.14, que  $f^l$  admite pontos periódicos de qualquer período, o que contradiz a hipótese.

Se  $l$  é par, então  $f^{l+1}$  tem um ponto fixo entre  $p_1$  e  $p_i$ , pelo que, atendendo ao Lema 2.17,  $f^{l+1}$  tem um ponto fixo entre  $P_{\min}(f^{l+1})$  e  $P_U(f^{l+1})$ , logo  $f^{l+1}$  admite pontos periódicos de qualquer período, o que contradiz a hipótese.

Assim  $f(P \cap U(f)) \subseteq P \cap D(f)$ . Analogamente se prova que  $f(P \cap D(f)) \subseteq P \cap U(f)$ .

Como  $f$  restrita a  $P$  é uma aplicação bijectiva segue que  $f(P \cap U(f)) = P \cap D(f)$  e  $f(P \cap D(f)) = P \cap U(f)$ , donde  $P \cap U(f)$  e  $P \cap D(f)$  têm o mesmo número de elementos. Pelo Lema 2.15  $P_U(f) < P_D(f)$ , logo

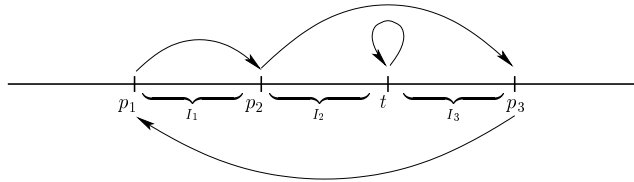
$$P \cap U(f) = \{p_1, \dots, p_{\frac{n}{2}}\} \text{ e } P \cap D(f) = \{p_{\frac{n}{2}+1}, \dots, p_n\}.$$

□

**Demonstração do Teorema 2.12:** Suponha-se que  $f$  admite um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2. Pelo Teorema de Sarkovskii existe um inteiro positivo  $r = 2^l$ ,  $l \geq 1$ , tal que  $f^r$  admite uma órbita periódica  $P = \{p_1, p_2, p_3\}$  de período 3, com  $p_1 < p_2 < p_3$ . Considere-se  $g = f^r$ . Assumindo, sem perda de generalidade, que  $g(p_2) = p_3$  e  $g(p_3) = p_1$ , tem-se

$$g(p_2) > p_2 \text{ e } g(p_3) < p_3,$$

donde  $g$  admite um ponto fixo  $t$  entre  $p_2$  e  $p_3$ . Sejam  $I_1 = [p_1, p_2]$ ,  $I_2 = [p_2, t]$  e  $I_3 = [t, p_3]$  (ver Figura 2.2).



**Figura 2.2**

Assim

$$I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_2 \rightarrow I_3 \rightarrow I_1,$$

pelo que existe  $c \in I_1$  tal que  $g(c), g^4(c), g^6(c) \in I_2, g^2(c), g^5(c), g^7(c) \in I_3, g^3(c) \in I_1$  e  $g^8(c) = c$ . Portanto, atendendo ao itinerário de  $c$ ,  $c$  é um ponto periódico de período 8.

Seja  $\{q_1, \dots, q_8\}$  a órbita de  $c$ , onde  $q_1 < q_2 < \dots < q_8$ . Note-se que dois dos pontos  $g(c), g^4(c)$  e  $g^6(c)$  pertencem a  $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ , assim como os pontos  $c, g^3(c)$ .

Afirma-se que,

$$\exists(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2 : g(q_i) = q_j. \quad (2.9)$$

Caso 1:  $g(c) \in \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ .

A afirmação é verdadeira considerando  $q_i = c$  e  $q_j = g(c)$ .

Caso 2:  $g(c) \notin \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ .

Nessa situação  $g^4(c) \in \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ , pelo que basta tomar  $q_i = g^3(c)$  e  $q_j = g^4(c)$ .

Atendendo a (2.9) e ao Lema 2.16,  $f$  admite uma órbita periódica que não é simples.

Reciprocamente, suponha-se que  $f$  admite uma órbita periódica que não é simples.

Seja  $P$  essa órbita e  $2^k$  o seu período. Por definição, existe uma órbita periódica  $\{q_1, \dots, q_n\} \subseteq P$  de  $f^r$  onde  $n \cdot r = 2^k$ , com  $q_1 < q_2 < \dots < q_n$  e  $f^r(\{q_1, \dots, q_{\frac{n}{2}}\}) \neq \{q_{\frac{n}{2}+1}, \dots, q_n\}$ .

Pelo Lema 2.18 existe um número ímpar  $s < n$  tal que  $(f^r)^s$  tem um ponto periódico de período 3, donde  $f$  admite uma órbita periódica cujo período não é uma potência de 2. □



# Capítulo 3

## Pontos homoclínicos e entropia

Um ponto  $x \in I$  diz-se um *ponto homoclínico* de  $f \in C^0(I, I)$  se existe um ponto periódico  $p$  com período  $n$  tal que  $x \neq p$ ,  $x \in W^u(p, f^n)$  e  $f^{nm}(x) = p$ , para algum inteiro positivo  $m$ .

Neste capítulo estuda-se a relação entre a existência de pontos homoclínicos e entropia. Na verdade uma aplicação contínua admite um ponto homoclínico se, e somente se, tem entropia positiva (Teorema 3.1).

**Teorema 3.1** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . A aplicação  $f$  tem entropia positiva se e só se admite um ponto homoclínico.*

A demonstração que se apresenta segue essencialmente [2].

**Lema 3.2** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . A aplicação  $f$  admite um ponto homoclínico se e só se, para algum inteiro positivo  $n$ , existem  $p$  ponto fixo de  $f^n$  e  $z \in W^u(p, f^n)$  tais que  $z \neq p$  e  $f^n(z) = p$ .*

**Demonstração:** Suponha-se que  $f$  admite um ponto homoclínico  $x$ . Por definição, existe um ponto periódico  $p \neq x$  de  $f$  tal que  $x \in W^u(p, f^n)$ , onde  $n$  é o período de  $p$ , e  $f^{nm}(x) = p$  para algum inteiro positivo  $m$ . Assim, definindo

$$s_0 = \min\{s \in \mathbb{N} : f^{ns}(x) = p\} \text{ e } z = f^{n(s_0-1)}(x).$$

tem-se  $z \in W^u(p, f^n)$  e  $f^n(z) = f^{ns_0}(x) = p$ .

Reciprocamente, admita-se que, para algum inteiro positivo  $n$  existem  $p$  ponto fixo de  $f^n$  e  $z \in W^u(p, f^n)$  tais que  $z \neq p$  e  $f^n(z) = p$ . Considerando  $m$  o período de  $p$ , tem-se  $m|n$ , donde  $W^u(p, f^n) \subseteq W^u(p, f^m)$  e conseqüentemente  $z$  é um ponto homoclínico de  $f$ .  $\square$

**Lema 3.3** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $p_1$  e  $p_2$  pontos fixos de  $f$  tais que  $p_1 < p_2$ . Se  $f$  não admite pontos fixos em  $(p_1, p_2)$ , então  $(p_1, p_2) \subseteq W^u(p_1, f, +)$  ou  $(p_1, p_2) \subseteq W^u(p_2, f, -)$ .*

**Demonstração:** Por hipótese,  $f$  não admite pontos fixos em  $(p_1, p_2)$ , pelo que

$$\forall x \in (p_1, p_2), f(x) > x \quad \text{ou} \quad \forall x \in (p_1, p_2), f(x) < x.$$

Admita-se, sem perda de generalidade, que  $\forall x \in (p_1, p_2), f(x) > x$ .

Seja  $y \in (p_1, p_2)$ . Considerando o intervalo  $[p_1, z]$ , com  $p_1 < z < y$ , afirma-se que

$$\exists n \in \mathbb{N} : y \in f^n([p_1, z]),$$

donde  $y \in W^u(p_1, f, +)$ .

A afirmação é trivial se

$$\exists n \in \mathbb{N} : f^n(z) \geq p_2.$$

Se

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^n(z) < p_2,$$

então a sucessão  $(f^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  é crescente e majorada, logo convergente para  $z_0 \in (z, p_2]$  e  $f(z_0) = z_0$ . Como, por hipótese,  $f$  não admite pontos fixos em  $(p_1, p_2)$ , tem-se  $z_0 = p_2$ , donde existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $f^m(z) > y$  e conseqüentemente  $y \in f^m([p_1, z])$ .  $\square$

**Teorema 3.4** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Se  $f$  admite um ponto periódico de período 3, então existem  $p$  ponto fixo de  $f^2$  e  $z \in W^u(p, f^2)$  tais que  $z \neq p$  e  $f^2(z) = p$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{x, f(x), f^2(x)\}$  uma órbita periódica de período 3 de  $f$  e denote-se  $x_0 = \min\{x, f(x), f^2(x)\}$  e  $x_i = f^i(x_0), i \in \{1, 2\}$ . Admitindo, sem perda de generalidade, que  $x_0 < x_1 < x_2$ , tem-se  $f([x_0, x_1]) \supseteq [x_1, x_2]$  e  $f([x_1, x_2]) \supseteq [x_0, x_2]$ .

Denotando  $f^2$  por  $g$  tem-se  $g([x_0, x_1]) \supseteq [x_0, x_1]$  e conseqüentemente  $g$  admite um ponto fixo em  $[x_0, x_1]$ . De forma análoga,  $g$  admite um ponto fixo em  $[x_1, x_2]$ .

Definindo  $p_1 = \sup\{x \in [x_0, x_1] : g(x) = x\}$  e  $p_2 = \inf\{x \in [x_1, x_2] : g(x) = x\}$ ,  $p_1$  e  $p_2$  são pontos fixos de  $g$ , verificando  $x_0 < p_1 < x_1 < p_2$ , e não existem pontos fixos de  $g$  em  $(p_1, p_2)$ , donde, pelo Lema 3.3,  $x_1 \in W^u(p_1, g, +)$  ou  $x_1 \in W^u(p_2, g, -)$ . Supondo que  $x_1 \in W^u(p_1, g, +) \subseteq W^u(p_1, g)$  (o caso  $x_1 \in W^u(p_2, g, -)$  é similar), tem-se  $\{x_1, g(x_1), g^2(x_1)\} \subseteq W^u(p_1, g)$  e conseqüentemente  $[x_0, x_2] \subseteq W^u(p_1, g)$ , pois, pelo Lema 1.8,  $W^u(p_1, g)$  é um conjunto conexo. Por outro lado,  $g([x_1, x_2]) \supseteq [x_0, x_1]$ , pelo que existe um ponto  $z \in [x_1, x_2]$  tal que  $g(z) = p_1$  e assim  $p_1$  é um ponto fixo de  $f^2$ ,  $z \in W^u(p_1, f^2)$  com  $p_1 \neq z$  e  $f^2(z) = p_1$ .  $\square$

**Lema 3.5** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $p$  um ponto fixo de  $f$ . Se  $y \in W^u(p, f)$  ( $y \neq p$ ), então, para qualquer vizinhança  $V$  de  $p$ , existem  $y_1 \in V \cap W^u(p, f)$  e  $r \in \mathbb{N}$  tais que  $f^r(y_1) = y$ .*

**Demonstração:** Admita-se que a tese é falsa. Então, existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  tal que

$$y \notin f^n(V \cap W^u(p, f)), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Suponha-se, sem perda de generalidade, que  $y > p$ . Assim, o conjunto  $V$  contém um intervalo aberto  $(a, b)$  tal que  $a < p < b < y$ . Como  $y \in W^u(p, f)$ , por (3.1) tem-se que  $V \cap W^u(p, f)$  não é uma vizinhança de  $p$ , donde  $(a, p) \cap W^u(p, f) = \emptyset$  e  $[p, b) \subseteq W^u(p, f)$ , pois  $W^u(p_1, g)$  é um conjunto conexo. Pela continuidade de  $f$ , existe  $c \in (a, p)$  tal que

$$f(x) < b < y, \forall x \in (c, p). \quad (3.2)$$

Mas  $c \notin W^u(p, f) \supseteq W^u(p, f, -)$ , donde existe  $d \in (c, p)$  tal que

$$c \notin f^n((d, p)), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $f^n(V \cap W^u(p, f)) \supseteq f^n([p, b))$ , por (3.1) tem-se  $y \notin f^n([p, b))$ . Assim, por (3.2) e (3.3),  $y \notin f^n((d, p))$ , pelo que  $y \notin f^n((d, b))$  e conseqüentemente a

hipótese do lema é falsa. □

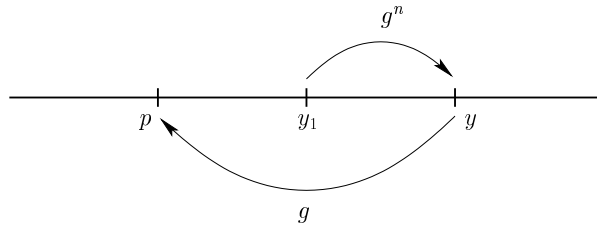
**Demonstração do Teorema 3.1** Tendo  $f$  entropia positiva,  $f$  tem um ponto periódico cujo período não é uma potência de 2 e, pelo Teorema de Sarkovskii existe  $r \in \mathbb{N}$  tal que  $f^r$  admite uma órbita periódica de período 3. Seja  $n = 2r$ . Pelo Teorema 3.4, aplicado a  $f^r$ , existem  $p$  ponto fixo de  $f^n$  e  $z \in W^u(p, f^n)$  tais que  $z \neq p$  e  $f^n(z) = p$ , donde, pelo Lema 3.2, se conclui que  $f$  admite um ponto homoclínico.

Reciprocamente, suponha-se que  $f$  admite um ponto homoclínico. Pelo Lema 3.2, para algum  $s \in \mathbb{N}$ , existem  $p$  ponto fixo de  $f^s$  e  $y \in W^u(p, f^s)$  tais que  $y \neq p$  e  $f^s(y) = p$ . Suponha-se que  $y > p$  (o outro caso é análogo). Considerando  $g = f^s$ , basta provar o resultado para a aplicação  $g$ , pois  $h(f) = \frac{h(g)}{s}$ .

Seja  $0 < \delta < y - p$ . Pelo Lema 3.5, aplicado a  $g$ , existem  $y_1 \in B_\delta(p) \cap W^u(p, g)$  e  $n \in \mathbb{N}$  tais que  $g^n(y_1) = y$ .

Considere-se dois casos:  $p < y_1 < y$  e  $y_1 < p < y$ .

Caso 1:  $p < y_1 < y$ .

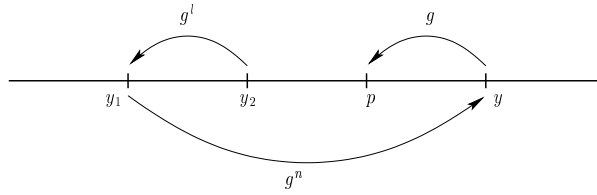


**Figura 3.1**

Neste caso  $g^n([p, y_1]) \cap g^n([y_1, y]) \supseteq [p, y]$  (ver Figura 3.1), donde, pela Proposição 1.4,  $g^n$  admite um ponto periódico de período 3 e portanto, pela Proposição 2.1,  $h(g) = \frac{h(g^n)}{n} > 0$ .

Caso 2:  $y_1 < p < y$ .

Aplicando novamente o Lema 3.5, conclui-se que existem  $y_2 \in (y_1, y) \cap W^u(p, g)$  e  $l > n$  tais que  $g^l(y_2) = y_1$ . Se  $y_1 < y_2 < p < y$ , então  $g^l([y_1, y_2]) \cap g^l([y_2, p]) \supseteq [y_1, p]$  (ver Figura 3.2), donde se conclui que  $h(g) > 0$ .



**Figura 3.2**

Caso contrário,  $y_1 < p < y_2 < y$ , tem-se  $g^{l+n}([p, y_2]) \cap g^{l+n}([y_2, y]) \supseteq [p, y]$ , pelo que  $h(g) > 0$ . □

Em [6], A. Katok generaliza o Teorema 3.1 para  $C^{1+\alpha}$ -difeomorfismos de uma variedade compacta com dimensão 2,  $M$ , nela própria. Com efeito, sendo  $f : M \rightarrow M$  um  $C^{1+\alpha}$ -difeomorfismo, tem-se  $f$  caótica se e só se existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n$  possui um ponto cêntrico hiperbólico cujas variedades instável e estável se intersectam transversalmente, ou seja,  $f^n$  possui pontos homoclínicos transversais .



# Capítulo 4

## Bifurcação de Órbitas periódicas

No presente capítulo considera-se o espaço  $C^1(I, I)$ , onde  $I$  é um intervalo compacto de  $\mathbb{R}$ , munido da métrica  $C^1$ .

O principal objectivo deste capítulo é mostrar que o subconjunto de  $C^1(I, I)$  formado pelas aplicações com entropia positiva é aberto para a métrica  $C^1$  (Teorema 4.6) e que a sua fronteira é constituída por aplicações  $f \in C^1(I, I)$  tais que  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$  (Teorema 4.10).

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , considere-se  $F(n) = \{f \in C^1(I, I) : n \in P(f)\}$ . Note-se que se  $n \triangleleft m$ , então  $F(n) \subseteq F(m)$ . O Conjunto  $F(2^\infty)$  denota o conjunto das aplicações  $f \in C^1(I, I)$  em que  $P(f) \supseteq \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . Defina-se ainda,

$$G(n) = \{f \in F(n) : f \notin F(m) \text{ se } m \triangleleft n\}$$

e

$$G(2^\infty) = \{f \in F(2^\infty) : f \notin F(n) \text{ se } n \triangleleft 2^\infty\}.$$

O artigo [5] constituiu a principal referência bibliográfica no estudo dos primeiros resultados deste capítulo, Lemas 4.1 e 4.2, Teorema 4.3 e Corolário 4.4.

**Lema 4.1** *Seja  $f \in C^1(I, I)$ . Se  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  é uma órbita periódica de  $f$  de período  $n$ , onde  $n > 2$  e  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ , então existem pontos  $y$  e  $z$  no intervalo  $[p_1, p_n]$  tais que  $f'(y) > 0$  e  $f'(z) \leq -1$ .*

**Demonstração:** Existe  $1 < m < n$  tal que  $f(p_m) = p_1$  ou  $f(p_m) = p_n$ . Se  $f(p_m) = p_1$ , então, pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe  $y \in [p_m, p_{m+1}]$  tal que  $f'(y) > 0$ . Se  $f(p_m) = p_n$ , então existe  $y \in [p_{m-1}, p_m]$  tal que  $f'(y) > 0$ .

Seja  $p_i = P_D(f)$ . Como  $f(p_i) \leq p_{i-1}$  e  $f(p_{i-1}) \geq p_i$ , pelo Teorema do Valor Médio de Lagrange, existe  $z \in (p_{i-1}, p_i)$  tal que  $f'(z) \leq -1$ .  $\square$

**Lema 4.2** *Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão em  $C^1(I, I)$  e  $x_n$  um ponto periódico de  $f_n$  de período  $s$ , onde  $s > 2$ . Se  $x_n \rightarrow x$  e  $f_n \rightarrow f$ , na métrica  $C^1$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , então  $x$  é um ponto fixo de  $f^s$  mas não de  $f$ .*

**Demonstração:** Por passagem ao limite,  $x$  é um ponto fixo de  $f^s$ , pelo que é suficiente provar que  $x$  não é ponto fixo de  $f$ .

Sejam  $p_n$  e  $q_n$ , respectivamente, o menor e o maior elemento da órbita de  $x_n$ . Considerando subsucessões pode assumir-se que  $p_n \rightarrow p$  e  $q_n \rightarrow q$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , com  $p, q \in I$ . Pelo Lema 4.1

$$\exists y_n, z_n \in [p_n, q_n] \text{ tais que } f'(y_n) > 0 \text{ e } f'(z_n) \leq -1,$$

donde, tomando subsucessões, podemos também assumir que  $y_n \rightarrow y$ ,  $z_n \rightarrow z$  e que existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que

$$f_n^i(x_n) = p_n \text{ e } f_n^j(x_n) = q_n.$$

Assim, por passagem ao limite, obtêm-se

$$f^i(x) = p \text{ e } f^j(x) = q.$$

Consequentemente  $y, z \in [p, q]$  verificam  $f'(y) \geq 0$  e  $f'(z) \leq -1$ , logo  $p \neq q$  e  $x$  não é ponto fixo de  $f$ .  $\square$

**Teorema 4.3** *Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão em  $C^1(I, I)$  tal que  $f_n \rightarrow f$  e  $x_n$  um ponto periódico de período  $s$ . Admita-se que alguma subsucessão de  $x_n$  converge para  $x$ . Se  $s$  é ímpar, então  $x$  é um ponto periódico de  $f$  de período  $s$ . Caso contrário,  $x$  é um ponto periódico de período  $s$  ou  $\frac{s}{2}$ .*

**Demonstração:** Considere-se três casos distintos:  $s \geq 3$  ímpar ;  $s = 2^t, t \geq 0$ ;  $s = 2^t m$ , com  $t \geq 1$  e  $m \geq 3$  ímpar

Caso 1:  $s \geq 3$  ímpar.

Se  $s = 3$  a conclusão segue do Lema 4.2. Provando por indução, admita-se que a tese é verdadeira para todos os naturais ímpares menores que  $s$ . Pelo Lema 4.2,  $x$  é um ponto periódico de  $f$  com período  $r$ , onde  $1 < r \leq s$  e  $s$  é um múltiplo de  $r$ , donde  $s = rt$ , com  $t$  um número ímpar. Considerando  $g_n = f_n^r$  e  $g = f^r$ , tem-se  $g_n \rightarrow g$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n$  é um ponto periódico de  $g_n$  com período  $t$ . Donde, como  $x$  é um ponto fixo de  $g$ , se conclui que  $t = 1$ , logo  $s = r$ .

Caso 2:  $s = 2^t, t \geq 0$ .

Se  $s = 1$  ou  $s = 2$  a conclusão é imediata. Supõe-se então que  $s \geq 4$ . Considerando  $g_n = (f_n)^{\frac{1}{4}s}$ , tem-se  $g_n \rightarrow f^{\frac{1}{4}s}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n$  é um ponto periódico de  $g_n$  de período 4, donde, pelo Lema 4.2,  $x$  é um ponto periódico de  $f^{\frac{1}{4}s}$  com período 2 ou 4. Consequentemente,  $x$  é um ponto periódico de  $f$  com período  $s$  ou  $\frac{s}{2}$ .

Caso 3:  $s = 2^t m$ , com  $t \geq 1$  e  $m \geq 3$  ímpar.

Por um lado  $f_n^{2^t} \rightarrow f^{2^t}$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , e  $x_n$  é um ponto periódico de  $f_n^{2^t}$  de período  $m$ , donde, atendendo ao caso 1,  $x$  é um ponto periódico de  $f^{2^t}$  de período  $m$ . Por outro  $f_n^m \rightarrow f^m$ , quando  $n \rightarrow +\infty$ , pelo que  $x$  é um ponto periódico de  $f^m$  com período  $2^t$  ou  $2^{t-1}$ . Seja  $s^*$  o período de  $x$  como ponto periódico de  $f$ . Como  $\text{m.d.c.}(2^{t-1}, m) = 1$ , conclui-se que  $2^{t-1}, m$  e  $2^{t-1}m$  dividem  $s^*$  e  $s^*$  divide  $s$  e portanto  $s^* \in \{s, \frac{s}{2}\}$ . □

Do Teorema de Sarkovskii e do teorema anterior deduz-se o corolário que se segue.

**Corolário 4.4** *Se  $n$  não é uma potência de 2,  $F(n)$  é um conjunto fechado. Se  $n$  é uma potência de 2, então  $ad(F(n)) \subseteq F(\frac{n}{2})$ .*

Definindo

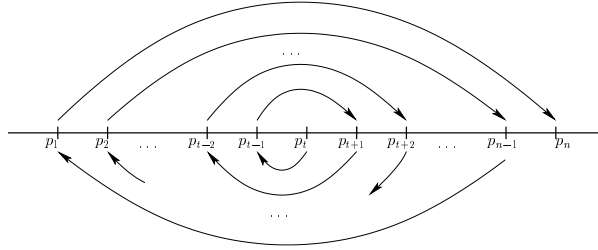
$$H_1 = \{f \in C^1(I, I) : h(f) > 0\},$$

provar-se-á de seguida que  $H_1$  é aberto e  $fr(H_1) \subseteq G(2^\infty)$ . Para tal utiliza-se o

teorema que a seguir se apresenta (a demonstração pode ser vista, por exemplo, em [12]).

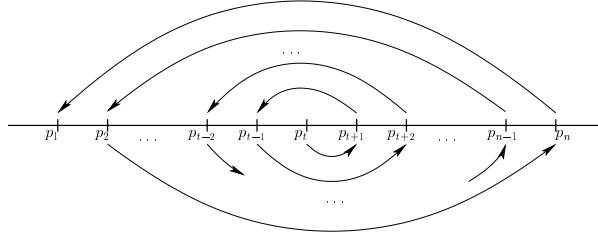
**Teorema 4.5 (Teorema de Stefan)** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$ ,  $n > 1$  um inteiro ímpar e  $\{p_1, \dots, p_n\}$  uma órbita periódica de período  $n$ , com  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ , e seja  $t = \frac{n+1}{2}$ . Se  $f \in G(n)$ , então 1. ou 2. acontece.*

1.  $f(p_{t-i}) = p_{t+i}$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ,  $f(p_{t+i}) = p_{t-i-1}$ , para  $i \in \{0, \dots, n-2\}$  e  $f(p_n) = p_t$ .



**Figura 4.1**

2.  $f(p_{t-i}) = p_{t+i+1}$ , para  $i \in \{0, \dots, n-2\}$ ,  $f(p_{t+i}) = p_{t-i}$ , para  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  e  $f(p_1) = p_t$ .



**Figura 4.2**

**Teorema 4.6** *O conjunto  $H_1$  é aberto.*

A demonstração deste resultado segue do Lema 4.9 que se apresenta à frente, cuja demonstração decorre dos nos lemas que se seguem ([4]).

**Lema 4.7** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $l \geq 3$  um inteiro ímpar. Se existe  $y$  tal que*

1.  $f^{l-2}(y) < f^{l-4}(y) < f^{l-6}(y) < \dots < f^3(y) < f(y) < y$ ,

$$2. y < f^2(y) < f^4(y) < f^6(y) < \dots < f^{l-1}(y),$$

$$3. y < f^l(y),$$

então  $f \in F(l)$ .

**Demonstração:** Como  $f(y) < y$  e  $f(f(y)) > f(y)$ , então  $f$  tem um ponto fixo  $p \in (f(y), y)$ . Sejam  $M_1 = [p, y]$ ,  $M_3 = [y, f^2(y)]$ ,  $\dots$ ,  $M_l = [f^{l-3}(y), f^{l-1}(y)]$ . Definindo ainda  $M_2 = [f(y), p]$ ,  $M_4 = [f^3(y), f(y)]$ ,  $M_{l-1}(y) = [f^{l-2}(y), f^{l-4}(y)]$ , tem-se

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow \dots \rightarrow M_{l-1} \rightarrow M_l \rightarrow M_1,$$

pelo que existe  $z \in M_1$  tal que  $f^i(z) \in M_{i+1}$  e  $f^l(z) = z$ . Se  $f^j(z) = z$ , para  $j \in \{1, \dots, l-1\}$ , então  $j = 1$  e  $z = p$ , ou  $j = 2$  e  $z = y$ . Mas  $f^2(z) \in M_3$ , pelo que  $z \neq p$  e  $f^2(y) < y$ , donde  $z \neq y$ . Portanto  $z$  é um ponto periódico de  $f$  com período  $l$  e conseqüentemente  $f \in F(l)$ .  $\square$

**Lema 4.8** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $n \geq 3$  um inteiro ímpar. Se  $f \in F(n)$ , então existe uma vizinhança de  $f$ ,  $U_f$ , tal que*

$$g \in U_f \Rightarrow g \in F(n+2).$$

**Demonstração:** Pelo Teorema de Sarkovskii é suficiente provar este lema no caso em que  $f \in G(n)$ , donde se admite essa situação.

Por hipótese,  $f$  admite uma órbita periódica  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$  de período  $n$  com  $p_1 < p_2 < \dots < p_n$ . Sejam  $t = \frac{n+1}{2}$  e  $z = p_t$ . Pelo Teorema de Stefan a órbita admite duas ordenações possíveis. Dado que uma se obtém da outra invertendo a ordenação dos reais, pode assumir-se que

$$1. f^{n-2}(z) < f^{n-4}(z) < f^{n-6}(z) < \dots < f^3(z) < f(z) < z,$$

$$2. z < f^2(z) < f^4(z) < f^6(z) < \dots < f^{n-1}(z),$$

$$3. z = f^n(z),$$

donde, como  $f(f(z)) > z$  e  $f(z) < z$ , existe um ponto  $b \in (f(z), z)$  tal que  $f(b) = z$ . Assim  $f(b) > b$  e  $f(z) < b$ , pelo que existe um ponto  $y \in (b, z)$  tal que  $f(y) = b < y$  e portanto  $f^2(y) = z$ . Logo  $y$  satisfaz as condições do Lema 4.7 com  $l = n + 2$  e conseqüentemente existe uma vizinhança  $U_f \subseteq C^0(I, I)$  de  $f$ , tal que  $y$  satisfaz as condições do Lema 4.7, com  $l = n + 2$ , para cada  $g \in U_f$ . Portanto  $g \in F(n + 2)$ , para cada  $g \in U_f$ .  $\square$

**Lema 4.9** *Sejam  $f \in C^0(I, I)$  e  $n = rs$ , onde  $r = 2^t$ , com  $t \geq 1$ , e  $s \geq 3$  um inteiro ímpar. Se  $f \in F(n)$ , então existe uma vizinhança de  $f$ ,  $U_f$ , em  $C^0(I, I)$  tal que*

$$g \in U_f \wedge n \triangleleft m \Rightarrow g \in F(m).$$

**Demonstração:** Admitindo que  $n \in P(f)$ , tem-se que  $f^r \in F(s)$ , donde, pelo Lema 4.8, existe uma vizinhança  $U'_{f^r}$  tal que se  $h \in U'_{f^r}$ , então  $h \in F(s + 2)$ .

Como a aplicação  $g \mapsto g^r$  é contínua, existe uma vizinhança  $U_f \subseteq C^0(I, I)$  tal que se  $g \in U_f$ , então  $g^r \in U'_{f^r}$ .

Dado  $g \in U_f$ ,  $g^r \in U'_{f^r}$ , pelo que  $g^r \in F(s + 2)$ , donde  $g \in F((s + 2)j)$ , onde  $j = 2^i$ ,  $i \in \{0, \dots, t\}$ . Assim, pelo Teorema de Sarkovskii, se  $n \triangleleft m$ , então  $g \in F(m)$ .  $\square$

**Demonstração do Teorema 4.6:** Seja  $f \in H_1$ . Por definição,  $h(f) > 0$ , logo  $f$  admite um ponto periódico de período  $n$ , onde  $n$  não é uma potência de 2. Sejam  $m \in \mathbb{N} \setminus \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$  tal que  $n \triangleleft m$  e  $U_f \subseteq C^0(I, I)$  uma vizinhança de  $f$  nas condições do Lema 4.9. Naturalmente tem-se uma vizinhança  $V_f$  de  $f$  em  $C^1$  contida em  $U_f$ . Assim,

$$\begin{aligned} g \in V_f &\Rightarrow g \in F(m) \\ &\Rightarrow h(g) > 0 \\ &\Rightarrow g \in H_1, \end{aligned}$$

donde  $V_f \subseteq H_1$  e portanto  $H_1$  é um conjunto aberto.  $\square$

Em [7], J.Hu e C. Tresser demonstraram o Teorema que se segue.

**Teorema 4.10** *Se  $f \in fr(H_1)$ , então  $f \in G(2^\infty)$ .*

**Demonstração:** Seja  $f \in fr(H_1)$ . Por definição, existe  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , em  $H_1$ , tal que  $f_n \rightarrow f$ . Como  $f_n \in F(2^i)$ , para todo  $i, n \in \mathbb{N}$ , então, pelo Corolário 4.4,  $f \in ad(F(2^i)) \subseteq F(2^{i-1})$ , logo  $P(f) \supseteq \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ .

Como  $H_1$  é aberto se  $f \in fr(H_1)$ , então  $f \notin H_1$  (isto é  $h(f) = 0$ ) e portanto  $P(f) \subseteq \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . Decorre que  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ .  $\square$

Em [8], V. Jiménez López demonstrou a implicação recíproca. Com efeito, V. J. López mostrou que para  $f \in C^1(I, I)$  tal que  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , existem aplicações  $g_1, g_2 \in C^1(I, I)$ , arbitrariamente perto de  $f$ , tais que  $h(g_1) > 0$  e  $P(g_2)$  é um conjunto finito.

Para finalizar, note-se que facilmente se conclui que os teoremas (????) e (????) são válidos ....



# Capítulo 5

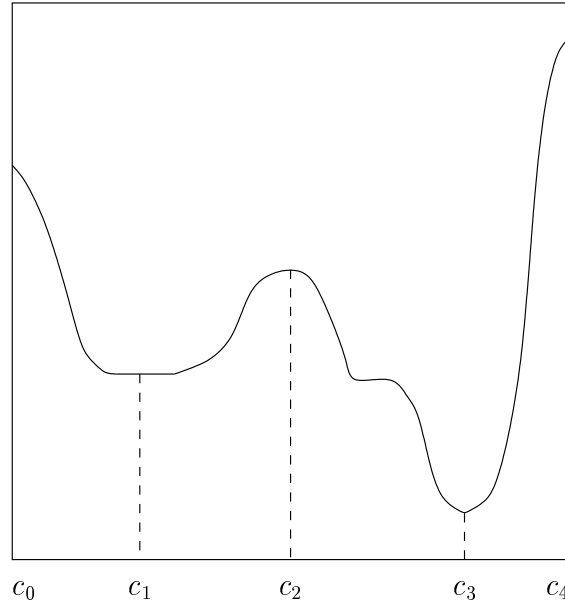
## Entropia e aplicações afins com patamares

No capítulo 4 provou-se que a fronteira do conjunto formado pelas aplicações de classe  $C^1$  com entropia positiva é composto por aplicações  $f \in C^1(I, I)$  tais que  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . No presente capítulo demonstra-se a implicação recíproca para uma classe especial de aplicações: *aplicações afins com patamares* (Teorema 5.3). Assim, o interior do conjunto formado pelas aplicações afins com patamares, cujo conjunto dos períodos das órbitas periódicas é constituído pelas potências de 2, é vazio (Corolário 5.13).

**Definição 5.1** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ , onde  $I = [a, b]$ . A aplicação diz-se multimodal se existem  $d \in \mathbb{N}_0$  e pontos  $c_i \in I$ ,  $0 \leq i \leq d + 1$ , com  $c_i < c_{i+1}$ ,  $c_0 = a$  e  $c_{d+1} = b$ , tais que, para  $0 \leq j \leq d$ ,  $f$  é monótona em  $[c_j, c_{j+1}]$  e não monótona em  $[c_j, c_{j+2}]$ .*

A Figura 5.1 mostra o gráfico de uma aplicação multimodal com  $d = 3$ .

Chama-se *intervalo de viragem* ao maior intervalo  $[a_i, b_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, d\}$ , contendo  $c_i$  e no qual  $f$  é constante. Este diz-se um *patamar* quando  $a_i < b_i$ , considerando-se neste caso  $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$  e diz-se um *ponto de viragem* quando  $a_i = b_i$ .



**Figura 5.1**

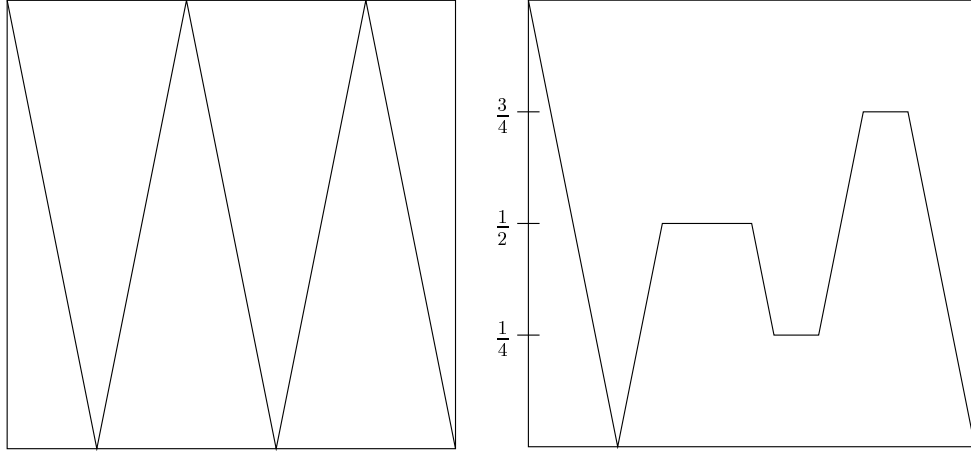
**Definição 5.2** Seja  $s = (s_1, \dots, s_{d+1})$  uma sequência alternada definida recursivamente por  $s_1 = \pm 1$  e  $s_j = (-1)^{j+1} s_1$ . A aplicação  $S_d : I \rightarrow I$  diz-se afim por bocados do tipo  $s$  se é afim por bocados com declive  $s_1(d+1), s_2(d+1), \dots, s_d(d+1)$  e  $|c_{j+1} - c_j| = \frac{1}{d+1}$ , para cada  $j \in \{0, \dots, d\}$ .

Note-se que, para cada  $d \in \mathbb{N}$ ,  $S_d$  é uma aplicação monótona por bocados, donde, pela Proposição 1.19,  $h(S_d) = \log(d+1)$ .

Dados  $w = (w_1, \dots, w_d) \in I^d$  e  $s \in \{-1, +1\}^{d+1}$  tais que, para cada  $j \in \{1, \dots, d-1\}$ ,  $(w_j - w_{j+1}) \cdot s_{j+1} < 0$ , constrói-se uma aplicação afim com patamares da seguinte forma: nos intervalos de monotonia de  $S_d$  separados por  $c_j$ , para  $j \in \{1, \dots, d\}$ , se  $c_j$  é um maximizante de  $S_d$ , então  $S_w = \min(S_d, w_j)$ , caso contrário  $S_w = \max(S_d, w_j)$ . Assim, cada ponto de viragem de  $S_w$  é também um ponto de viragem de  $S_d$  e as duas aplicações coincidem nesses pontos. Note-se que os extremos de  $I$  são pontos periódicos ou pré-periódicos de  $S_d$  e  $S_w$ , donde qualquer ponto de viragem de  $S_d$  e  $S_w$  é pré-periódico.

**Exemplo 5.1** Considerando  $I = [0, 1]$ ,  $d = 4$ ,  $s = (-1, +1, -1, +1, -1)$  e  $w = (0, \frac{5}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ , a Figura 5.2 apresenta o gráficos das aplicações  $S_4$  (à esquerda) e  $S_w$  (à

direita).



**Figura 5.2**

Dado  $\epsilon > 0$  e  $w = (w_1, \dots, w_d) \in I^d$ , tem-se

$$B_\epsilon(w) = \{w' = (w'_1, \dots, w'_d) \in I^d : \max_{1 \leq i \leq d} |w_i - w'_i| < \epsilon\}.$$

**Teorema 5.3** *Seja  $S_w$  uma aplicação afim com patamares tal que  $P(S_w) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . Então, dado  $\epsilon > 0$ , existem  $w', w'' \in B_\epsilon(w)$  tais que  $h(S_{w'}) > 0$  e  $P(S_{w''})$  é um conjunto finito.*

A demonstração do Teorema 5.3 baseia-se na referência [7]. Inicialmente apresenta-se um resultado auxiliar.

Sejam  $f \in C^0(I, I)$  tal que  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$  e  $j \in \mathbb{N}$ . Denotar-se-á por  $\Delta_j(f)$  o conjunto formado pelos pontos de acumulação do conjunto dos pontos periódicos de  $f$  com período maior ou igual a  $2^j$  e  $\Delta(f) = \bigcap_{j=0}^{\infty} \Delta_j(f)$ . Como, para cada  $j \in \mathbb{N}$ ,

$\Delta_j(f) \neq \emptyset$  e  $\left( \bigcap_{j=0}^k \Delta_j(f) \right)_{k \in \mathbb{N}}$  é uma sucessão decrescente (para a inclusão de conjuntos) de compactos, tem-se  $\Delta(f) \neq \emptyset$ . Claramente  $\Delta(f) \subseteq f^{-1}(\Delta(f))$ .

Seja  $S_w$  uma aplicação afim com patamares tal que  $P(S_w) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . O Lema 5.12 que segue adiante permite concluir que, se não existem extremos de patamares em  $\Delta(S_w)$ , então  $S_w$  admite um ponto homoclínico e portanto, pelo Teorema 3.1,  $h(S_w) > 0$  o que é uma contradição. Na demonstração do referido lema usa-se o facto de existir ponto recorrente em  $\Delta(S_w)$ , algo que se prova recorrendo à existência de uma

medida ergódica relativamente a  $f|_{\Delta(f)}$  (5.7 a 5.11). Perturbando convenientemente  $S_w$ , obtém-se  $S_{w'}$  e  $S_{w''}$  arbitrariamente perto de  $S_w$  tais que  $h(S_{w'}) > 0$  e  $P(S_{w''}) \subsetneq \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ .

**Lema 5.4** *Seja  $f \in C^0(I, I)$  uma aplicação multimodal tal que  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . Então qualquer ponto de  $\Delta(f)$  é não periódico e conseqüentemente  $\Delta(f)$  é um conjunto infinito.*

**Demonstração:** Seja  $p$  um ponto periódico de  $f$  com período  $2^n$ . Considerando  $g = f^{2^n}$ , tem-se  $g(p) = p$ . Dado que  $f$  admite intervalos de viragem isolados, o mesmo sucede com a aplicação  $g$ , pelo que existem apenas três tipos de comportamento possíveis para  $g$  numa vizinhança de  $p$ :

1. a aplicação  $g$  é monótona numa vizinhança de  $p$ ; se  $g$  é monótona decrescente, então existe uma vizinhança de  $p$  na qual  $g^2$  é monótona crescente e nesta situação substitui-se  $g$  por  $g^2$ ;
2. o ponto  $p$  pertence ao interior de um dos patamares de  $g$  ou é um dos seus extremos;
3. o ponto  $p$  é um ponto de viragem de  $g$ .

Para  $x \neq p$  suficientemente próximo de  $p$ , tem-se  $g(x) = x$  ou  $g^n(x) = p$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , ou, para algum  $y \in \mathcal{O}(x)$ ,  $g(y)$  pertence ao intervalo aberto limitado por  $y$  e  $g^2(y)$ , donde, pela Nota 1.1,  $\mathcal{O}(x)$  não pode ser uma órbita periódica de  $f$  simples com período superior a  $2^n$ . Mas  $h(g) = 0$ , pelo que todas as suas órbitas periódicas são simples e portanto  $p \notin \Delta(f)$ .  $\square$

O próximo objectivo é encontrar uma medida ergódica  $\mu$ , relativamente a  $f$ , definida na  $\sigma$ -álgebra dos borelianos tal que  $\mu(\Delta(f)) = 1$ , pelo que é importante estabelecer a seguinte terminologia.

**Definição 5.5** *Seja  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de medida e  $f \in C^0(X, X)$  uma aplicação mensurável. Diz-se que  $f$  preserva  $\mu$  (ou  $\mu$  é  $f$ -invariante) se  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .*

Um espaço de medida  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  diz-se um *espaço de probabilidade* quando  $\mu(X) = 1$ .

**Definição 5.6** *Sejam  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  um espaço de probabilidade e  $f : X \rightarrow X$  uma aplicação que preserva  $\mu$ . Diz-se que  $\mu$  é ergódica (com respeito a  $f$ ) se*

$$\forall A \in \mathcal{A}, f^{-1}(A) \supseteq A \Rightarrow \mu(A) = 0 \vee \mu(A) = 1.$$

**Proposição 5.7** *Seja  $f \in C^0(I, I)$  uma aplicação multimodal. Se  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então existe uma medida  $\mu$  ergódica (relativamente a  $f$ ) tal que  $\mu(\Delta(f)) = 1$ .*

**Demonstração:** Sendo  $f|_{\Delta(f)} : \Delta(f) \rightarrow \Delta(f)$  uma aplicação contínua, então existe uma medida ergódica  $\mu_1$  relativamente a  $f|_{\Delta(f)}$  definida na  $\sigma$ -álgebra dos borelianos ([14], p.152-153).

Considerando a medida

$$\mu(A) = \mu_1(A \cap \Delta(f)), \forall A \text{ aberto em } I$$

é fácil ver que  $\mu$  é ergódica, relativamente a  $f$ , e  $\mu(\Delta(f)) = \mu_1(\Delta(f)) = 1$ . □

Definindo

$$K = \text{supp } \mu = \{x \in I : \forall V \in \mathcal{V}_x, \mu(V) > 0\}, \quad (5.1)$$

$K_1 = \{x \in K : f(x) > x\}$  e  $K_2 = \{x \in K : f(x) < x\}$ , tem-se  $K = K_1 \cup K_2$ , pois  $K \subseteq \Delta(f)$  e  $\Delta(f)$  não contém órbitas periódicas (em particular não contém pontos fixos).

A proposição que se segue, cuja demonstração se encontra no final do capítulo, apresenta algumas propriedades do conjunto  $K$ .

**Proposição 5.8** *O Conjunto  $K$  possui as seguintes propriedades:*

1.  $K$  é um conjunto fechado;
2.  $\mu(K) = 1$ ;

3.  $K$  não é finito;
4.  $f(K) = K$ ;
5.  $f|_K$  é topologicamente transitivo, isto é, dados  $U, V$  com interiores não vazios em  $K$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \cap K \neq \emptyset$ ;
6.  $K_1$  e  $K_2$  são não vazios.

Dado  $A \subseteq I$ , denotar-se-á por  $[A]$  o menor intervalo que contém  $A$ . A seguir prova-se que os intervalos  $[K_1]$  e  $[K_2]$  são disjuntos,  $f(K_1) = K_2$  e  $f(K_2) = K_1$ . As demonstrações apoiam-se em [11].

**Lema 5.9** *Tem-se  $\sup(K_1) \leq \inf(K_2)$ .*

**Demonstração:** Seja  $p$  o ínfimo de  $K_2$  e suponha-se que existe  $q \in K_1$  tal que  $q > p$ . Definindo

$$A = \{x \in K_1 : x \geq p\},$$

e considerando  $r \in A$  tal que  $f(r)$  é máximo, tem-se claramente  $r > p$  e  $r \in K_1$  donde, uma vez que  $f(p) < p$  e  $f(r) > r$ , existe  $s \in [p, r]$  tal que  $f(s) = s$ . Sejam  $t = \sup\{x < r : f(x) = x\}$  e  $B = K \cap [t, f(r)]$ . Se existe  $x \in B$  tal que  $f(x) > f(r)$ , então  $x < f(x)$ , logo  $x \in K_1$  e conseqüentemente  $f(x) \leq f(r)$  para todo  $x \in B$ . Os conjuntos  $B$  e  $K \setminus B$  têm interiores não vazios em  $K$ , donde, pela transitividade de  $f|_K$ , existem  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in B$  tais que  $f^n(x) \notin B$ . Considerando então  $n_0$  o menor natural tal que  $f^{n_0}(x) \notin B$  e  $u = f^{n_0-1}(x)$ , tem-se  $u \in B$  e  $f(u) \notin B$  e conseqüentemente  $f(u) \leq t$ . Assim, dado que, pela definição de  $t$ ,  $u \in [r, f(r)]$ ,  $f([t, r]) \cap f([r, u]) \supseteq [t, u]$ , donde, pela Proposição 1.4,  $f$  admite um ponto periódico de período 3, o que contradiz  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ .  $\square$

Mais, como a aplicação  $f$  é contínua e  $K$  é um conjunto fechado,  $\sup K_1 \in K_1$  e  $\inf K_2 \in K_2$ , donde  $\sup K_1 < \inf K_2$ .

**Lema 5.10** *Tem-se  $f(K_1) = K_2$  e  $f(K_2) = K_1$ .*

**Demonstração:** Suponha-se que existe  $p \in K_1$  tal que  $f(p) \in K_1$ . Considerando  $q = \sup\{x \in K_1 : f(x) \in K_1\}$ , tem-se  $q \in K_1$ .

Comece-se por provar que existe  $r \in K_2$  tal que  $f(r) \leq q$ . Se  $q = \min K$ , então, dado que  $f(K) = K$ , existe  $r$  tal que  $f(r) = q$ , tendo-se  $r \in K_2$ . Caso contrário, pela transitividade de  $f|_K$ , tomando  $U = K_2$  e  $V = [\min(K), q)$ , tem-se que

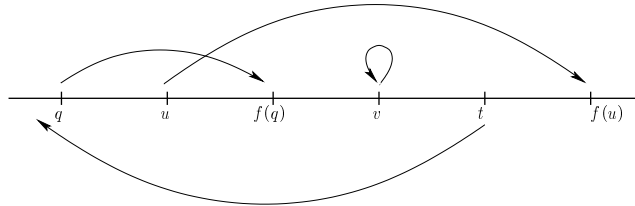
$$\exists n \in \mathbb{N}, \exists a \in K_2 : f^n(a) < q.$$

Considerando  $n_0 \in \{1, \dots, n-1\}$  o maior natural tal que  $f^{n_0}(a) \in K_2$ , tem-se  $f^{n_0+1}(a) < \dots < f^n(a) < q$ , pelo que basta tomar  $r = f^{n_0}(a)$ .

Definindo  $t = \inf\{x \in K_2 : f(x) \leq q\} \in K_2$ , o próximo passo é encontrar  $u \in [q, t] \cap K$  tal que  $f(u) \geq t$ . Supondo que  $t = \max K$ , se  $f(t) < q$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(t) \cap K = \{t\}$ , pelo que o conjunto  $\{t\}$  é aberto em  $K$ , caso contrário  $f(t) = q = \min K$  e neste caso basta tomar  $u$  tal que  $f(u) = \max K$ . Com efeito, dados  $U = [q, t] \cap K$  e  $V = [t, \max K] \cap K$  tem-se que

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists b \in [q, t] \cap K : f^m(a) \geq t.$$

Note-se que para  $x \in [q, t] \cap K$ , se  $x \in K_1$ , então  $f(x) > x \geq q$ , caso contrário, atendendo à definição de  $t$ ,  $f(x) > q$ . Sendo  $m_0 \in \{1, \dots, m-1\}$  o maior natural verificando  $f^{m_0}(a) < t$ , basta considerar  $u = f^{m_0}(a)$ , tendo-se claramente  $u \in K_1$ . Mais, existe  $v$  tal que  $\sup K_1 \leq v \leq \inf K_2$  e  $f(v) = v$ .



**Figura 5.3**

Assim,  $f([q, u]) \supseteq [v, t]$ ,  $f([u, v]) \supseteq [v, t]$  e  $f([v, t]) \supseteq [q, v]$ , donde  $f^2([q, u]) \cap f^2([u, v]) \supseteq [q, v]$ , pelo que  $f^2$  admite um ponto periódico de período 3 e portanto, do Teorema 2.1 e da Proposição 1.15, vem  $h(f) = \frac{1}{2}h(f^2) > 0$ , o que é uma contradição. Desta forma tem-se  $f(K_1) \subseteq K_2$ .

Utilizando argumentos análogos prova-se que  $f(K_2) \subseteq K_1$ . Finalmente as igualdades ocorrem porque

$$K_1 \cup K_2 = K = f(K) = f(K_1 \cup K_2) = f(K_1) \cup f(K_2) \subseteq K_2 \cup K_1.$$

□

**Nota 5.1** Os conjuntos  $K_1$  e  $K_2$  são fechados e invariantes pela aplicação  $f^2$  e as aplicações  $f^2|_{K_1}$  e  $f^2|_{K_2}$  são topologicamente transitivas, conseqüentemente apresentam as mesmas biseções perante  $f^2$ , donde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$K = \bigcup_{j=1}^{2^n} K_j^n,$$

sendo  $f^{2^n}(K_j^n) = K_j^n$ , para todo  $j \in \{1, \dots, 2^n\}$ .

**Proposição 5.11** *Existe  $x \in K$  tal que  $x$  é recorrente.*

**Demonstração:** Para  $n = 1$ , existe  $i_1 \in \{1, 2\}$  tal que  $[[K_{i_1}^1]] \leq \frac{[K]}{2}$ . Dado  $n > 1$  e considerando  $K_{i_n}^n$  com  $[[K_{i_n}^n]] \leq \frac{[K]}{2^n}$ , existe  $K_{i_{n+1}}^{n+1} \subseteq K_{i_n}^n$  verificando  $[[K_{i_{n+1}}^{n+1}]] \leq \frac{[[K_{i_n}^n]]}{2} \leq \frac{[K]}{2^{n+1}}$ , pelo que definindo  $K_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_{i_n}^n$  existe  $x \in K$  tal que  $K_0 = \{x\}$ .

Sejam  $\epsilon > 0$  e  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon$ . Como  $x \in K_{i_n}^n$  e  $f^{2^n}(K_{i_n}^n) = K_{i_n}^n$ , tem-se  $f^{2^n}(x) \in K_{i_n}^n \subseteq B_\epsilon(x)$ , donde  $x \in \omega(x)$  e portanto  $x$  é recorrente. □

Sendo  $S_w$  uma aplicação afim com patamares, denotar-se-á por  $E_0(S_w)$  o conjunto formado pelos extremos dos patamares e por  $E_1(S_w)$  o conjunto constituído pelos extremos de  $I$  e pelos pontos de viragem de  $S_w$ . Considere-se  $E(S_w) = E_0(S_w) \cup E_1(S_w)$ .

**Lema 5.12** *Seja  $S_w$  uma aplicação afim com patamares. Se  $P(S_w) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então  $\Delta(S_w) \cap E(S_w) = \Delta(S_w) \cap E_0(S_w) \neq \emptyset$ .*

**Demonstração:** Dado que os extremos do intervalo  $I$  são pontos periódicos, ou pré-periódicos e todos os pontos de viragem, caso existam, são pontos pré-periódicos, pelo

Lema 5.4, não pertencem a  $\Delta(S_w)$ , donde  $\Delta(S_w) \cap E_1(S_w) = \emptyset$ . Como  $h(S_w) = 0$ , tem-se  $S_w \neq S_d$  e portanto  $E_0(S_w) \neq \emptyset$ .

Admita-se que  $\Delta(S_w) \cap E(S_w) = \emptyset$ . Sejam  $0 < \epsilon < d(\Delta(S_w), E(S_w))$  e  $K$  o conjunto definido em 5.1 (de notar que  $S_w$  é uma aplicação multimodal com  $P(S_w) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_o\}$ ). Como  $K \subseteq \Delta(S_w)$ , tem-se que  $d(K, E(S_w)) > \epsilon$ . Pela Proposição 5.11, existe  $x \in K$  ponto recorrente, donde, atendendo à Nota 5.1 e à demonstração da Proposição 5.11, existe  $l = 2^k$ , com  $k \geq 1$ , tal que  $|S_w^l(x) - x| < \frac{1}{8}\epsilon$ . Novamente pela Nota 5.1 pode-se supor que  $x < S_w^{2l}(x) < S_w^l(x)$ , caso contrário substituir-se-ia  $x$  por um elemento da sua órbita. Seja  $V$  a maior vizinhança de  $x$  na qual  $S_w^l$  é monótona. Como  $(S_w^i(x) - \epsilon, S_w^i(x) + \epsilon) \cap E(S_w) = \emptyset$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ , tem-se para  $j \in \{1, \dots, l\}$ ,

$$\left(x - \frac{\epsilon}{d^j}, x + \frac{\epsilon}{d^j}\right) \cap S_w^{-j}(E(S_w)) = \emptyset,$$

donde

$$\left(x - \frac{\epsilon}{d^l}, x + \frac{\epsilon}{d^l}\right) \cap S_w^{-j}(E(S_w)) = \emptyset$$

e portanto  $V \supseteq (x - \frac{\epsilon}{d^l}, x + \frac{\epsilon}{d^l})$ .

O módulo da derivada de  $S_w^l$  em  $V$  é  $d^l$ . Admita-se inicialmente que  $S_w^l$  é monótona crescente em  $V$ . Como  $S_w^l(x) > x$  e

$$S_w^l\left(x - \frac{7\epsilon}{8d^l}\right) < S_w^l(x) - \frac{7}{8}\epsilon < x + \frac{1}{8}\epsilon - \frac{7}{8}\epsilon = x - \frac{3}{4}\epsilon < x - \frac{7}{8}\frac{\epsilon}{d^l},$$

existe um ponto  $p \in (x - \frac{7}{8}\frac{\epsilon}{d^l}, x)$  tal que  $S_w^l(p) = p$ , donde

$$W^u(p, S_w^l) \supseteq \left(x - \frac{\epsilon}{d^l}, x + \frac{\epsilon}{d^l}\right)$$

e assim, visto que  $S_w(W^u(p, S_w^l)) \subseteq W^u(p, S_w^l)$  e  $W^u(p, S_w^l)$  é um conjunto conexo, tem-se  $W^u(p, S_w^l) \supseteq (x - \frac{\epsilon}{d^l}, S_w^l(x) + \epsilon)$ . Designando por  $W$  a maior vizinhança de  $S_w^l(x)$  na qual  $S_w^l$  é monótona, tem-se  $W \supseteq (S_w^l(x) - \frac{\epsilon}{d^l}, S_w^l(x) + \frac{\epsilon}{d^l})$ , mas  $S_w^l(S_w^l(x)) < S_w^l(x)$ , portanto  $x$  não pertence a  $W$ , donde  $S_w^l(x) - \frac{\epsilon}{d^l} > x$ . Mais, um dos pontos  $S_w^l(S_w^l(x) - \frac{\epsilon}{d^l})$  e  $S_w^l(S_w^l(x) + \frac{\epsilon}{d^l})$  é igual a

$$S_w^l(S_w^l(x)) - \epsilon < S_w^l(x) - \epsilon < x + \frac{1}{8}\epsilon - \epsilon = x - \frac{7}{8}\epsilon \leq x - \frac{7}{8}\frac{\epsilon}{d^l} < p$$

e  $S_w^l(x) > x > p$ , donde existe  $y \in (x, S_w^l(x) + \frac{\epsilon}{d^l}) \subseteq W^u(p, S_w^l)$  tal que  $y \neq p$  e  $S_w^l(y) = p$ , conseqüentemente, pelo Lema 3.2,  $S_w$  admite um ponto homoclínico e portanto, pelo Teorema 3.1,  $h(S_w) > 0$ , o que é uma contradicção.

Se  $S_w^l$  é monótona decrescente em  $V$ , então existe um ponto fixo de  $S_w^l$  no intervalo  $(x, x + \frac{\epsilon}{d^l})$ . A variedade instável de  $p$  em  $S_w^l$ ,  $W^u(p, S_w^l)$ , contém  $(x - \frac{\epsilon}{d^l}, x + \frac{\epsilon}{d^l})$  e portanto também  $(S_w^l(x) - \epsilon, S_w^l(x) + \epsilon)$ . Sendo  $W$  a maior vizinhança de  $S_w^l(x)$  na qual  $S_w^l$  é monótona, tem-se  $W \supseteq (S_w^l(x) - \frac{\epsilon}{d^l}, S_w^l(x) + \frac{\epsilon}{d^l})$ . Se  $S_w^{3l}(x) > S_w^l(x)$ , então  $S_w^{2l}(x) \notin V$ , caso contrário  $S_w^{3l}(x) < S_w^l(x)$  e  $S_w^{4l}(x) < S_w^{2l}(x)$ , donde  $S_w^l(x) \notin V$ . Em ambos os casos nem  $x$ , nem  $p$  pertencem a  $W$ . Um dos pontos  $S_w^l(S_w^l(x) - \frac{\epsilon}{d^l})$  e  $S_w^l(S_w^l(x) + \frac{\epsilon}{d^l})$  é menor que  $p$  e o outro é igual a

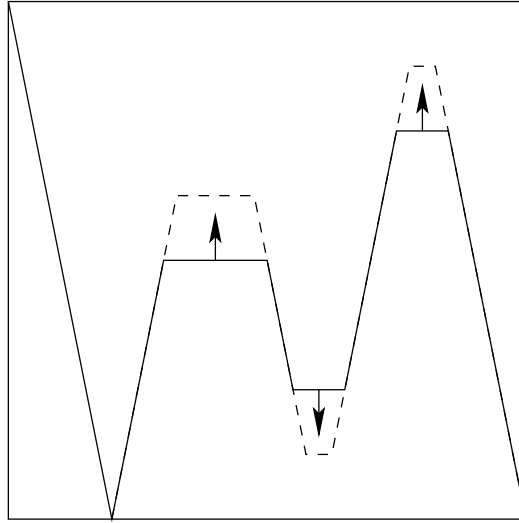
$$S_w^l(S_w^l(x)) + \epsilon > x + \epsilon > p,$$

donde existe  $y \in (S_w^l(x) - \frac{\epsilon}{d^l}, S_w^l(x) + \frac{\epsilon}{d^l})$  tal que  $S_w^l(y) = p$  e portanto  $S_w$  admite um ponto homoclínico, o que contradiz  $h(S_w) = 0$ .

Assim  $\Delta(S_w) \cap E(S_w) \neq \emptyset$ . □

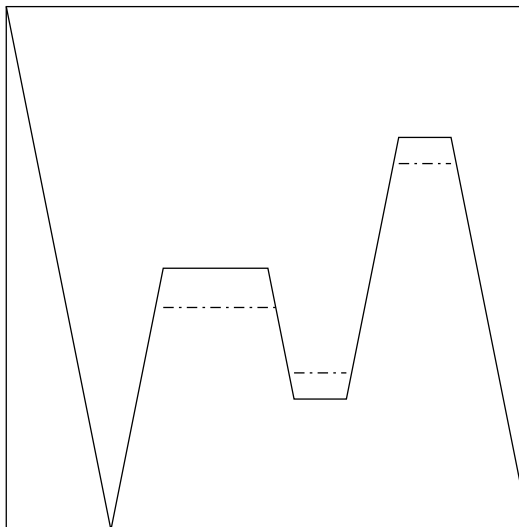
Está-se agora em condições de demonstrar o resultado principal deste capítulo.

**Demonstração do Teorema 5.3** Seja  $\epsilon > 0$ . Prolongando os ramos afins não constantes separados por um patamar do modo como é indicado pela Figura 5.4, obtém-se uma aplicação afim com patamares  $S_{w'}$ , onde  $w' \in B_\epsilon(w)$ . De notar que é suficiente mover os patamares cujos extremos pertençam a  $\Delta(S_w)$ . Denote-se por  $A$  o conjunto formado pelas órbitas periódicas em que um dos seus elementos pertence ao interior de um dos patamares de  $S_w$ . Se  $y \in \Delta(S_w)$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta(y)$  não contém qualquer elemento do conjunto  $A$ . Se assim não fosse o facto de  $S_w$  ser contínua e admitir um número finito de patamares, implicaria que  $\Delta(S_w)$  conteria um ponto periódico, o que é uma contradicção. Além disso, qualquer órbita periódica que não pertença a  $A$  é ainda uma órbita periódica de  $S_{w'}$ , donde  $K \subseteq \Delta(S_w) \subseteq \Delta(S_{w'})$ . Como  $K \cap E(S_{w'}) \subseteq \Delta(S_w) \cap E(S_{w'}) = \emptyset$  e  $S_w(y) = S_{w'}(y)$ , para todo  $y \in K$ , pela demonstração do Lema 5.12,  $S_{w'}$  tem um ponto homoclínico e portanto  $h(S_{w'}) > 0$ .



**Figura 5.4**

Por um processo inverso, ilustrado na Figura 5.5, obtém-se  $S_{w''}$  verificando  $w'' \in B_\epsilon(w)$ . Admita-se que  $h(S_{w''}) > 0$ . Assim, pelo Teorema 3.1,  $S_{w''}$  admite um ponto homoclínico e portanto, pelo Lema 3.2, para algum  $n \in \mathbb{N}$ , existe um ponto fixo  $p$  de  $S_{w''}^n$  e um ponto  $z \in W^u(p, S_{w''}^n)$  tal que  $z \neq p$  e  $S_{w''}^n(z) = p$ . De notar que  $p$  não pode pertencer ao interior de algum dos patamares de  $S_{w''}^n$ , donde  $z$  é ainda um ponto homoclínico de  $S_w$ , o que contradiz  $h(S_w) = 0$ . Por outro lado, se  $P(S_{w''}) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então usando os argumentos utilizados para comparar  $S_w$  e  $S_{w'}$ , conclui-se que  $h(S_w) > 0$ , o que é uma contradição. Logo  $P(S_{w''})$  é um conjunto finito.  $\square$



**Figura 5.5**

Como consequência directa obtém-se o seguinte resultado.

**Corolário 5.13** *O Conjunto  $\{w : P(S_w) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}\}$  tem interior vazio.*

Termina-se este capítulo apresentando a demonstração da Proposição 5.8.

**Demonstração da Proposição 5.8:**

1. Seja  $x \in \overline{K}$  e  $\delta > 0$ . Assim, existe  $y \in B_\delta(x) \cap K$ , pelo que  $B_\delta(x) \in \mathcal{V}_y$  e  $y \in K$ , donde, pela definição de  $K$ ,  $\mu(B_\delta(x)) > 0$ . Logo  $x \in K$  e portanto  $K$  é um conjunto fechado.
2. Seja  $F \subseteq \Delta(f)$  um compacto minimal tal que  $\mu(F) = 1$ . Admita-se que existem  $x \in F$  e  $\delta > 0$  tais que  $\mu(B_\delta(x)) = 0$ . Donde  $F \setminus B_\delta(x)$  é ainda um conjunto fechado,  $F \setminus B_\delta(x) \subsetneq F$  e  $\mu(F \setminus B_\delta(x)) = 1$ , o que é uma contradição. Logo  $F \subseteq K$  e portanto  $\mu(K) = 1$ .
3. Por 2.  $K \neq \emptyset$ . Utilizando a continuidade de  $f$  prova-se que  $f(K) \subseteq K$  e portanto, como  $K$  não contém órbitas periódicas,  $K$  é um conjunto infinito.
4. Para concluir que  $K = f(K)$  resta provar que  $K \subseteq f(K)$ . Por 1.  $K$  é compacto e portanto  $f(K) \subseteq I$  é ainda compacto, em particular é um conjunto fechado, pelo que  $I \setminus f(K)$  é aberto. Considerando  $x \in K$  tal que  $x \in I \setminus f(K)$ , tem-se

$$\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subseteq I \setminus f(K),$$

pelo que  $f^{-1}(B_\delta(x)) \subseteq I \setminus K$ , donde

$$0 < \mu(B_\delta(x)) = \mu(f^{-1}(B_\delta(x))) \leq \mu(I \setminus K) = 0.$$

Assim  $K \subseteq f(K)$  e portanto  $f(K) = K$ .

5. Sejam  $U$  e  $V$  conjuntos com interiores não vazios em  $K$ . Pode-se assumir sem perda de generalidade que  $U, V \subseteq K$ , tendo-se  $\mu(U) > 0$  e  $\mu(f^{-1}(V)) = \mu(V) > 0$ . Admita-se que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n(U) \cap V = \emptyset, \tag{5.2}$$

pelo que considerando  $Y = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(K \setminus V)$ , tem-se  $f^{-1}(Y) \supseteq Y$  e portanto  $\mu(Y) = 0$  ou  $\mu(K \setminus Y) = 0$ . Mas  $U \subseteq Y$ , por 5.2, e  $f^{-1}(V) \subseteq K \setminus Y$ , o que é uma contradição, donde  $f|_K$  é topologicamente transitiva.

6. Basta notar que  $\min(K) \in K_1$  e  $\max(K) \in K_2$ . □

É importante salientar que as propriedades 1, 2, 4 e 5 são ainda válidas num contexto mais geral.



# Capítulo 6

## Pontos recorrentes, entropia e renormalização

Neste capítulo, cuja Tese de Doutorado de F. J. Moreira ([10]) constitui a principal referência bibliográfica, procede-se à apresentação das noções de aplicação *renormalizável* e *infinitamente renormalizável*, de *intervalo errante* e de *ponto crítico não degenerado*. Estabelecem-se ainda relações entre entropia, pontos recorrentes e renormalização, nomeadamente, se uma aplicação  $f \in C^0(I, I)$  admite um ponto recorrente não periódico e  $h(f) = 0$ , então  $f$  é uma aplicação infinitamente renormalizável (Teorema 6.3).

**Definição 6.1** *Dado  $f \in C^0(I, I)$ , diz-se que  $f$  é renormalizável se existem um intervalo  $J \subsetneq I$  e  $p \geq 2$  tais que*

1. *os intervalos  $f^i(J)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  têm interiores disjuntos ;*
2.  *$f^p(J) = J$ .*

*A aplicação  $f^p|_J : J \rightarrow J$  diz-se uma renormalização de  $f$ , afirmando-se ainda que  $f$  é  $p$ -renormalizável.*

Se  $f^p|_J$  é renormalizável diz-se que  $f$  é *duas vezes renormalizável*, pelo que, naturalmente, surge a definição de aplicação *infinitamente renormalizável*.

**Definição 6.2** A aplicação  $f \in C^0(I, I)$  diz-se infinitamente renormalizável quando existem uma sucessão decrescente (para a inclusão de conjuntos) de intervalos  $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \cdots \supseteq J_n \supseteq \cdots$  e uma sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de inteiros maiores ou iguais a 2, tais que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

1. os intervalos  $J_n, f(J_n), \dots, f^{a_1 \cdots a_n - 1}(J_n)$  têm interiores disjuntos;
2.  $f^{a_1 \cdots a_n}(J_n) = J_n$ .

Quando tal for necessário dir-se-á que a aplicação  $f$  é  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -infinitamente renormalizável. Os intervalos  $f^i(J_n)$ , para  $0 \leq i \leq a_1 \cdots a_n - 1$ , designam-se *átomos da geração  $n$  para  $f$* .

Está-se agora em condições de cumprir o objectivo proposto na introdução do capítulo.

**Teorema 6.3** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Se  $h(f) = 0$  e a aplicação admite um ponto recorrente não periódico, então  $f$  é  $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ -infinitamente renormalizável.*

A demonstração do Teorema 6.3 será feita aplicando indutivamente o lema que se segue.

**Lema 6.4** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Se  $h(f) = 0$  e  $f$  admite um ponto recorrente não periódico  $x_0$ , então  $f$  é 2-renormalizável e os dois átomos de tal renormalização contêm a órbita de  $x_0$ .*

**Demonstração:** Definindo a classe  $\mathcal{A}$  de intervalos fechados  $J \subseteq I$  por

$$J \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \begin{cases} f(J) \subseteq J \\ x_0 \in J \end{cases}$$

e considerando

$$J_0 = \bigcap_{J \in \mathcal{A}} J,$$

tem-se  $J_0$  fechado,  $J_0 \in \mathcal{A}$  e é o menor elemento de  $\mathcal{A}$  relativamente à relação inclusão de conjuntos. Desta forma, como  $x_0$  é um ponto recorrente,  $x_0 \in \overline{f(J_0)} = f(J_0)$ , logo  $f(J_0) \in \mathcal{A}$  e conseqüentemente  $f(J_0) = J_0$ .

Sendo  $J_0 = [a_0, b_0]$ , comece-se por provar que a aplicação  $f$  admite um ponto fixo  $p_0 \in J_0$ , tal que, para algum  $n_1 \in \mathbb{N}$ ,

$$a_0 \leq x_{n_1} < p_0 < x_{n_1+1} \leq b_0.$$

A sucessão  $(x_n)_{n \geq 0}$  não pode ser monótona, pois  $O(x_0) \subseteq \omega(x_0)$ , pelo que existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $f(x_{n_1}) = x_{n_1+1} > x_{n_1}$  e  $f(x_{n_1+1}) = x_{n_1+2} < x_{n_1+1}$  e portanto existe  $p_0 \in (x_{n_1}, x_{n_1+1})$  verificando  $f(p_0) = p_0$ .

Se  $f(x) > p_0$ , para todo  $x \in (a_0, p_0)$ , e  $f(x) < p_0$ , para todo  $x \in (p_0, b_0)$ , então o lema está provado, caso contrário existe  $q_0 \in (a_0, b_0)$  tal que  $q_0 \neq p_0$  e  $f(q_0) = f(p_0) = p_0$ . Admita-se, sem perda de generalidade, que  $q_0 \in (p_0, b_0)$ . O conjunto

$$J_1 = \bigcup_{n \geq 0} f^n([p_0, q_0]),$$

é  $f$ -invariante, isto é,  $f(J_1) \subseteq J_1$  e, além disso, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , tem-se  $p_0 \in f^n([p_0, q_0])$ , donde  $J_1$  é um intervalo. Assim, o intervalo fechado  $J_2 = J_1 \cup \partial J_1$  é ainda um conjunto  $f$ -invariante, pois a aplicação  $f$  é contínua.

O próximo passo é provar que  $J_2 \subseteq [a_0, q_0]$ . Se tal não acontecesse, existiriam  $y \in (p_0, q_0)$  e  $n > 0$  tais que  $f^n(y) > q_0$ , donde  $f^n([p_0, y]) \cap f^n([y, q_0]) \supseteq [p_0, q_0]$  e portanto  $f^n$  admitiria um ponto periódico de período 3, o que contradiz o facto de  $h(f) = 0$ .

Como  $J_2 \subseteq [a_0, q_0] \subsetneq J_0$  e  $f(J_2) \subseteq J_2$ , pela minimalidade de  $J_0$  conclui-se que  $x_0 \notin J_2$ , donde, uma vez que  $J_2$  é fechado e  $f$ -invariante,  $O(x_0) \cap J_2 = \emptyset$ . Considerando a classe  $\mathcal{B}$  de intervalos definida por

$$J \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \begin{cases} J_2 \subseteq J \subseteq J_0 \\ f(J) \subseteq J \\ O(x_0) \cap J = \emptyset \end{cases}$$

e  $J_3 = \bigcup_{J \in \mathcal{B}} J$ , tem-se  $J_3 \in \mathcal{B}$  e é o maior elemento de  $\mathcal{B}$  no sentido da inclusão de conjuntos. Como  $J_0$  é fechado e a aplicação  $f$  é contínua, segue que

$$J_2 \subseteq \overline{J_3} \subseteq J_0 \text{ e } f(\overline{J_3}) \subseteq \overline{J_3}.$$

Sendo  $\partial J_3 = \{p_3, q_3\}$  ( $p_3 < q_3$ ), se  $f(p_3) \in (p_3, q_3)$  ou  $f(q_3) \in (p_3, q_3)$ , então existe um intervalo  $K \in \mathcal{B}$  tal que  $J_3 \subsetneq K$ , o que contradiz a definição de  $J_3$ . Desta forma, conclui-se que  $f(\partial J_3) \subseteq \partial J_3$ . Mas  $x_0$  é um ponto não periódico, pelo que  $O(x_0) \cap \partial J_3 = \emptyset$ , donde  $\overline{J_3} \in \mathcal{B}$  e conseqüentemente  $\overline{J_3} = J_3$ .

Note-se que, como  $x_{n_1} \in [a_0, p_3] \cap O(x_0)$  e  $x_{n_1+1} \in [q_3, b_0] \cap O(x_0)$ , então existem infinitos elementos da órbita de  $x_0$  em  $[a_0, p_3]$  e  $[q_3, b_0]$ , donde  $f([a_0, p_3]) \cap [q_3, b_0] \neq \emptyset$  e  $f([q_3, b_0]) \cap [a_0, p_3] \neq \emptyset$ .

De seguida quer-se demonstrar que  $f(p_3) = q_3$  e  $f(q_3) = p_3$ . Admita-se que  $f(q_3) = q_3$ . Sendo  $J_3$  máximo em  $\mathcal{B}$ , existe  $y \in [q_3, b_0]$  tal que  $f(y) > q_3$  (caso contrário existiria  $\epsilon$  tal que  $f([p_3, q_3 + \epsilon]) \subseteq [p_3, q_3]$ ). Assim, dado que o intervalo  $[q_3, b_0]$  não é  $f$ -invariante, existe  $q \in (q_3, b_0)$  tal que  $f(q) = q_3$ . Como  $q_3$  é um ponto fixo, o conjunto

$$L = \bigcup_{n \geq 0} f^n([q_3, q])$$

é um intervalo e está contido em  $[a_0, q]$ , pois  $h(f) = 0$ . Considerando o intervalo  $f$ -invariante  $L_1 = J_3 \cup L$ , tem-se  $f(\overline{L_1}) \subseteq \overline{L_1}$  e  $\overline{L_1} \subsetneq J_0$ , donde, pela definição de  $J_0$ ,  $x_0 \notin \overline{L_1}$  e portanto  $O(x_0) \cap L_1 \subseteq O(x_0) \cap \overline{L_1} = \emptyset$ . Assim  $L_1 \in \mathcal{B}$  e  $J_3 \subsetneq L_1$ , o que contradiz a definição de  $J_3$ , logo  $f(q_3) \neq q_3$  e portanto  $f(q_3) = p_3$ . Analogamente se conclui que  $f(p_3) = q_3$ .

Para finalizar a demonstração resta provar que  $f([a_0, p_3]) = [q_3, b_0]$  e  $f([q_3, b_0]) = [a_0, p_3]$ .

Admitindo que  $f([q_3, b_0]) \not\subseteq [a_0, p_3]$ , considere-se  $y \in [q_3, b_0]$  tal que  $f(y) > p_3$ . Uma vez que  $f([q_3, b_0]) \not\subseteq [p_3, b_0]$ , existe  $q_3 < q < b_0$  tal que  $f(q) = p_3$ . Definindo

$$L_3 = \bigcup_{n \geq 0} f^n([p_3, q]),$$

tem-se  $L_3$  é um intervalo, porque, para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $p_3 \in f^n([p_3, q])$  e  $J_3 \subseteq L_3 \subseteq [a_0, q]$ . Se tal não acontecesse, como  $f([p_3, q_3]) \subseteq [p_3, q_3]$ , existiriam  $y \in [q_3, q]$  e  $m \in \mathbb{N}$  tais que  $f^m(y) > q$ , donde  $f^m([q_3, y]) \cap f^m([y, q]) \supseteq [q_3, q]$ , o que contradizia  $P(f) \subseteq \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ . Desta forma  $\overline{L_3}$  é um intervalo  $f$ -invariante e  $\overline{L_3} \subsetneq J_0$ , donde, pela definição de  $J_0$ ,  $x_0 \notin \overline{L_3}$  e portanto  $\overline{L_3} \in \mathcal{B}$ , o que contradiz o facto de  $J_3$  ser máximo. Logo

$f([q_3, b_0]) \subseteq [a_0, p_3]$ . Analogamente se prova que  $f([a_0, p_3]) \subseteq [q_3, b_0]$ . A igualdade acontece porque  $f(J_0) = J_0$ ,  $J_0 = J_3 \cup [a_0, p_3] \cup [q_3, b_0]$  e  $f(J_3) \subseteq J_3$ .  $\square$

**Demonstração do Teorema 6.3** Pelo Lema 6.4 existem intervalos  $K_1, K_2$  tais que  $f(K_1) = K_2$ ,  $f(K_2) = K_1$  e  $O(x_0) \subseteq K_1 \cup K_2$ . Denote-se por  $I_0$  o intervalo  $K_i$  ao qual  $x_0$  pertence e  $I_1$  o outro intervalo. Assim, considerando

$$O^0(x_0) = \{f^{2n}(x_0) : n \geq 0\} \text{ e } O^1(x_0) = \{f^{2n+1}(x_0) : n \geq 0\},$$

tem-se  $O^0(x_0) \subseteq I_0$  e  $O^1(x_0) \subseteq I_1$ .

Aplicando o Lema 6.4 a  $f^2|_{I_0} : I_0 \rightarrow I_0$ , obtém-se intervalos  $I_{0,0}, I_{0,1}$  com interiores disjuntos tais que  $f^2(I_{0,0}) = I_{0,1}$  e  $f^2(I_{0,1}) = I_{0,0}$ . Tomando os intervalos  $I_{1,0} = f(I_{0,0})$  e  $I_{1,1} = f^3(I_{0,0})$ , pela demonstração do Lema 6.4 tem-se que  $I_{1,0}$  e  $I_{1,1}$  têm interiores disjuntos, donde  $I_{0,0}, I_{0,1}, I_{1,0}, I_{1,1}$  são átomos da segunda geração para uma renormalização de  $f$ .

Aplicando sucessivamente o Lema 6.4, conclui-se que  $f$  é  $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ -infinitamente renormalizável e os átomos da geração  $k$  são os intervalos

$$I_{a_1, \dots, a_k},$$

onde  $a_i \in \{0, 1\}$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ , tal que

$$I_{a_1, \dots, a_k, 0} \cup I_{a_1, \dots, a_k, 1} \subseteq I_{a_1, \dots, a_k}.$$

Dado  $k \in \mathbb{N}$  e  $n = b_0 + b_1 \cdot 2 + \dots + b_k \cdot 2^k$ , com  $(b_0, b_1, \dots, b_k) \in \{0, 1\}^{k+1}$ , tem-se  $f^n(x) \in I_{b_0, b_1, \dots, b_k}$ .  $\square$

No capítulo anterior provou-se que uma aplicação multimodal  $f \in C^0(I, I)$ , com  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , admite um ponto recorrente não periódico (Proposição 5.11). Combinando este resultado com o Teorema 6.3, obtém-se o corolário seguinte.

**Corolário 6.5** *Seja  $f \in C^0(I, I)$  uma aplicação multimodal. Se  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então  $f$  é  $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ -infinitamente renormalizável.*

O próximo objectivo é o estudo de condições suficientes para que a amplitude dos átomos da geração  $n$  convirja para 0, quando  $n \rightarrow +\infty$ , deste modo as definições que se seguem estabelecem algumas noções importantes a ter presente.

**Definição 6.6** *Seja  $f \in C^0(I, I)$ . Um intervalo aberto não vazio  $J \subseteq I$  diz-se um intervalo errante se*

1.  $f^n(J) \cap f^m(J) = \emptyset$ , para qualquer  $n \neq m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$  ;
2. o  $\omega$ -limite de  $J$ ,

$$\omega(J) = \{x \in I : \exists n_i \rightarrow +\infty \text{ e } y \in J \text{ tal que } f^{n_i}(y) \rightarrow x\},$$

*não é uma órbita periódica.*

**Definição 6.7** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação contínua com derivada em  $c \in I$ . Diz-se que  $c$  é um ponto crítico de  $f$  se  $f'(c) = 0$ .*

**Definição 6.8** *Seja  $f \in C^1(I, I)$ . Um ponto crítico  $c$  diz-se não degenerado se existem  $\alpha \geq 2$ ,  $U(c) \in \mathcal{V}_c$  e um difeomorfismo  $\phi \in C^2(U(c), (-1, 1))$  tais que  $\phi(c) = 0$  e*

$$f(x) = f(c) \pm |\phi(x)|^\alpha, \forall x \in U(c).$$

**Nota 6.1** ([9]) *Seja  $f \in C^\infty(I, I)$  e  $c$  um ponto crítico de  $f$ . Se, para algum  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(c) \neq 0$ , então  $c$  é um ponto crítico não degenerado.*

**Proposição 6.9** *Seja  $f \in C^0(I, I)$  uma aplicação infinitamente renormalizável. Se  $f$  não admite intervalos errantes, então a amplitude dos átomos da geração  $n$  convergem para zero, quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

**Demonstração:** Admita-se que existe uma sucessão decrescente de átomos  $(A_n)_{n \geq 1}$ , em que  $A_n$  pertence à geração  $n$ , tal que

$$A_\infty = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

não é reduzido a um ponto. Assim  $\overset{\circ}{A}_\infty$  é um intervalo errante, o que contradiz a hipótese.  $\square$

O Teorema que se segue estabelece uma condição suficiente para a não existência de intervalos errantes.

**Teorema 6.10** *Seja  $f \in C^2(I, I)$ . Se todos os pontos críticos são não degenerados, então  $f$  não admite intervalos errantes.*

**Demonstração:** Ver, por exemplo, em [9], p.267-325.  $\square$

**Corolário 6.11** *Seja  $f \in C^2(I, I)$  uma aplicação infinitamente renormalizável. Se  $f$  não admite pontos críticos não degenerados, então a amplitude dos átomos da geração  $n$  convergem para zero, quando  $n \rightarrow +\infty$ .*

O corolário seguinte, presente em [7], é consequência imediata dos Corolários 6.5 e 6.11 e da Nota 6.1.

**Corolário 6.12** *Seja  $f : I \rightarrow I$  uma aplicação polinomial real. Se  $P(f) = \{2^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ , então  $f$  é infinitamente renormalizável e a amplitude dos átomos da geração  $n$  convergem para zero, quando  $n \rightarrow +\infty$ .*



# Bibliografia

- [1] L. Alsedà, J. Llibre and M. Misiurewicz, **Combinatorial dynamics and entropy in Dimension one** (World Scientific, Singapore, 1993).
- [2] L. Block, “Homoclinic points of mappings of the interval,” Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978) 576-580.
- [3] L. Block, “Simple periodic orbits of mappings of the interval,” Trans. Amer. Math. Soc. **254** (1979) 391-398.
- [4] L. Block, “Stability of periodic orbits in the Theorem of Sarkovskii,” Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981) 333-336.
- [5] L. Block and D. Hart, “The bifurcation of periodic orbits of one-dimensional maps,” Ergodic Theory Dynam. Systems **2** (1982) 125-129.
- [6] A. Katok, “Lyapounov exponents entropy and periodic orbits for diffeomorphisms,” Pub. Math. I.H.E.S. **51** (1980) 134-174.
- [7] J. Hu and C. Tresser, “Period doubling, entropy and Renormalization,” Fund. Math. **155** (1998) 237-249.
- [8] V. Jiménez López, “Period Doubling is the boundary of chaos and of order in the  $C^1$ -topology of interval maps,” Nonlinearity **15** (2002) 817-839.
- [9] W. de Melo and S. van Strien, **One-Dimensional Dynamics** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Vol. 25) (Springer-Berlag, Berlin, 1993).

- [10] F. J. Moreira, “Applications du disque infiniment renormalisables”, Thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1997.
- [11] M. Misiurewicz, “Invariant measures for continuous transformations of  $[0,1]$  with zero topological entropy,” - Lectures Notes in Mathematics **729** (1979) 144-152.
- [12] J. Rocha, “Pontos periódicos de uma aplicação contínua definida num intervalo compacto,” Trabalho de síntese apresentado no âmbito das Provas de Aptidão Pedagógica e Capacidade Científica, Universidade do Porto, 1986.
- [13] P. Stefan, “A Theorem of Sarkovskii on the existence of periodic orbits of continuous endomorphisms of the real line,” *Comm. Math. Phys.* 54 (1977), 237-248.
- [14] P. Walters, **An Introduction to Ergodic Theory** (Springer-Verlag, New York, 2000).