

**Simulação do comportamento dinâmico de sistemas mecânicos
vibratórios amortecidos pelo comportamento pseudo-elástico de ligas
com memória de forma**

Michel Antônio da Silva

Dissertação apresentada à

Escola Superior de Tecnologia e Gestão
Instituto Politécnico de Bragança
para obtenção do grau de Mestre em
Engenharia Industrial

Este trabalho foi efetuado sob orientação de:

Professor Doutor Carlos Alberto Rodrigues Andrade

Professor Doutor Vinícius Piccirillo

Maio de 2018

Agradecimentos

Me surpreendo com o quão maravilhosas foram as pessoas que conheci nos últimos anos. Se por um lado é de grande felicidade possuir uma sessão deste trabalho para agradecer aqueles que, de alguma forma, contribuíram para concretização desta etapa em minha vida, por outro, tenho clareza do quão limitado seria tentar expressar textualmente toda minha gratidão. Assim, utilizando-me de breves parágrafos espero abordar um pouco de meu agradecimento a todos.

Primeiramente, agradeço à minha família por todo o suporte prestado. Em especial, sou eternamente grato pelo esforço de meus pais para fornecerem-me todas as oportunidades que precisei.

Prosseguindo, agradeço aos amigos que tive o prazer de fazer durante os últimos anos. Cada um prestou imensa contribuição para meu desenvolvimento não apenas acadêmico, mas pessoal acima de tudo.

Na sequência, agradeço à boa parte dos professores e funcionários das instituições por onde passei. Seja na UTFPR, na Universidade de Utah, no ITA ou no IPB, fui privilegiado por ter as ferramentas necessárias para desenvolver um ótimo trabalho. Dentre estes, devo destacar minha gratidão à paciência e ao auxílio prestados pelo Professor Dr. Vinícius Piccirillo, ao suporte e confiança em mim depositada pelo Professor Dr. Thiago Antonini Alves, ao apoio didático fornecido pelo Professor Dr. Reginaldo de Oliveira e, finalmente, ao professor Dr. Carlos Andrade pela prontidão em ajudar-me a dar sequência em meus trabalhos.

Resumo

Desde a observação do efeito de memória de forma (EMF) nas ligas Níquel-Titânio (NiTi) em 1962, a utilização das ligas com memória de forma (LMFs) aumentou consideravelmente; utilização esta que permeia aplicações tão diversas como a indústria automóvel, biomédica e civil com mais de 10 mil patentes emitidas apenas nos Estados Unidos da América envolvendo diretamente estas ligas (MOHD JANI, LEARY, SUBIC, & GIBSON, 2014). Entre os motivos desse vasto uso é que, além do EMF, estas ligas também apresentam o efeito de pseudo-elasticidade, caracterizado por um ciclo de histerese na curva tensão-deformação do material. Uma vez que este ciclo é definido pela diferença energética entre as transformações direta (de austenite para martensite) e inversa (de martensite para austenite), este fenômeno torna as LMFs propensas a serem utilizadas para dissipação de energia em carregamento cíclicos (HASEGAWA & MAJIMA, 1998; SUN *et al.*, 2012; PINTO, 2011). Ao passo que as aplicações de LMFs expandem-se, os modelos matemáticos que descrevem seus comportamentos ímpares também se aprimoraram ao longo dos anos, como o modelo de Brinson (1993). Este modelo destacou-se por oferecer resultados compatíveis com aqueles obtidos experimentalmente (PAIVA & SAVI, 1999). No entanto, por apresentarem características não lineares, a adequada descrição do comportamento destas ligas sob carregamentos dinâmicos enfrenta desafios a serem vencidos. Isto é, a imprevisibilidade da carga que o material experimenta durante a sua aplicação faz com que soluções fechadas (isto é, soluções na forma de uma função) não possam ser escritas com o intuito de descrever o comportamento do material (HILBORN, 1994). Assim, pretende-se com este trabalho estudar teoricamente o comportamento dinâmico de sistemas mecânicos vibratórios (SMVs) amortecidos por LMFs. Neste sentido, o estudo propõem algoritmos em linguagem Matlab que, juntos, fornecem as respostas necessárias para a análise proposta. Para tal, propriedades do sistema, do material e do perfil de carga externa foram utilizadas como entrada nos códigos enquanto suas características físicas e dinâmicas foram monitorizadas. Após os resultados obtidos para diferentes características observadas

condizerem com o que é proposto por vários autores, as respostas para efeitos mais abrangentes foram também propostas. Mais especificamente, aqui é apresentado o comportamento do material para *subloops* incompletos no ciclo de histerese além de expor fenômenos abordados em outros trabalhos.

Abstract

From the observation of the shape memory effect (SME) on NiTi alloys in 1962, the shape memory alloys (SMAs) employability has increased considerably. In applications including the automotive, biomedical and structural industries, more than 10,000 patents, which directly relates to these alloys, have already been issued only in the United States (MOHD JANI, LEARY, SUBIC, & GIBSON, 2014). Among the causes for this wide use, additionally to the SME, these alloys also present the Pseudoelasticity effect that is characterized by a hysteresis loop in the material stress-strain curve. Since this loop is defined by an energy difference between the direct (from austenite to martensite) and reverse (from martensite to austenite) transformations, this phenomenon makes the LMFs prone to be used for energy dissipation in cyclic loading (HASEGAWA & MAJIMA, 1998; SUN *et al.*, 2012; PINTO, 2011). As SMAs applications expand, mathematical models that describe their odd behavior also improve over the years, such as the Brinson (1993) model, which stands out because it offers results compatible with those obtained experimentally (PAIVA & SAVI, 1999). However, because these alloys have nonlinear properties, the proper description of their behavior under dynamic loads faces challenges to be overcome. That is, the load unpredictability that the material will experience during its dynamic applications implies that closed solutions cannot be written in order to describe this material behavior (HILBORN, 1994). Thus, aiming the dynamic behavior theoretical study of vibrating systems damped by SMAs, the present work proposes Matlab language algorithms that provide the necessary outputs for the proposed study. In order to do so, system and material properties and the external load profile were used as input to the codes and their physical and dynamic characteristics were monitored. After the obtained results for different features had corresponded to what is proposed by several authors, responses to the more comprehensive effects were proposed. More specifically, in addition to exposing phenomena addressed in other works, the material behavior under incomplete subloops for the hysteresis loop is presented here.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract.....	iv
Conteúdo.....	v
Lista de símbolos	vii
Letras Latinas.....	vii
Letras gregas	ix
Subscritos e sobrescritos	x
Lista de tabelas	xi
Lista de figuras	xii
1. Introdução.....	1
1.1- Contextualização.....	1
1.2- Motivação	2
1.3- Objetivos	3
1.3-1. Objetivo Geral	3
1.3-2. Objetivos Específicos	3
1.4- Descrição do trabalho	4
2. Referencial teórico	5
2.1- Ligas com memória de forma	5
2.1-1. Aplicações das ligas com memória de forma.....	11
2.2- Modelos matemáticos	12
2.2-1. Modelo de Brinson	13
2.2-2. Modelo de Lagoudas baseado em dados empíricos	17
2.3- Fundamentos de vibrações mecânicas	20
2.3-1. Modelação de SMVs	24
2.4- Adimensionalização de equações diferenciais.....	26
2.5- Solução de equações diferenciais não lineares	26
3. Metodologia	34
3.1- Abordagem inicial.....	34
3.2- Equacionar	35

3.3- Simulação.....	41
3.4- Comparação entre resultados obtidos e sugeridos	41
3.5- Uso do algoritmo	43
4. Resultados e discussão	45
5. Conclusão e trabalhos futuros	58
Referencias bibliográficas	59
Apêndice A.....	65
Apêndice B	66

Lista de símbolos

Aqui são apresentados em ordem alfabética, os símbolos utilizados no decorrer deste trabalho juntamente com suas respectivas grandezas.

Letras Latinas

a_A	Constante do material [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]
A_F	Temperatura final de transformação inversa [$^{\circ}\text{C}$]
A_F^{σ}	Temperatura final de transformação inversa em função de σ [$^{\circ}\text{C}$]
A_{LMF}	Área do elemento de LMF normal a tensão axial [m^2]
A_S	Temperatura inicial de transformação inversa [$^{\circ}\text{C}$]
A_S^{σ}	Temperatura inicial de transformação inversa em função de σ [$^{\circ}\text{C}$]
c	Coefficiente de amortecimento viscoso [N.s/m]
C_A	Coefficiente de influência da tensão nas temperaturas de transformação associada austenite [$\text{Pa}/^{\circ}\text{C}$]
C_M	Coefficiente de influência da tensão nas temperaturas de transformação associada a martensite [$\text{Pa}/^{\circ}\text{C}$]
E	Módulo de elasticidade [Pa]
E_A	Módulo de elasticidade da austenite [Pa]
E_M	Módulo de elasticidade da martensite [Pa]
$F_{m\acute{a}x}$	Amplitude de força [N]
F	Amplitude de força [N]
f	Força [N] ou representação de função para utilização do método de Runge-Kutta

f_e	Força externa [N]
f_i	Força de pré tensão [N]
f_{LMF}	Força exercida pelo elemento de LMF [N]
f_{LMF_e}	Força exercida pelo elemento de LMF em resposta ao carregamento dinâmico [N]
f_{LMF_i}	Força exercida pelo elemento de LMF em resposta ao pré- carregamento [N]
$f_{LMF_{ei}}$	Soma entre f_{LMF_e} e f_{LMF_i} [N]
f_p	Força dissipativa [N]
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]
h	Passo de iteração [Pa ou s]
H^{max}	Máxima deformação de transformação
H_σ^{cur}	Deformação de transformação instantânea
k	Rigidez do sistema [N/m] ou inclinação de retas utilizado no método de Runge-Kutta
m	Massa [Kg]
M_F	Temperatura final de transformação direta [$^{\circ}C$]
M_F^σ	Temperatura final de transformação direta em função de σ [$^{\circ}C$]
M_S	Temperatura inicial de transformação direta [$^{\circ}C$]
M_S^σ	Temperatura inicial de transformação direta em função de σ [$^{\circ}C$]
T	Temperatura [$^{\circ}C$]
T_0	Temperatura inicial [$^{\circ}C$]
t	Tempo [s]
X	Amplitude de deslocamento [m]
x	Deslocamento [m]
x'	Velocidade [m/s]
x''	Aceleração [m/s^2]

x_i	Deslocamento devido aplicação de pré carga [m]
y	“Posição” adimensional
\dot{y}	“Velocidade” adimensional
\ddot{y}	“Aceleração” adimensional
z	Número de pontos na malha acrescido de uma unidade

Letras gregas

σ_F^{crit}	Tensão crítica final de transformação [Pa]
σ_S^{crit}	Tensão crítica inicial de transformação [Pa]
δ_0	Fração volumétrica martensítica inicial
δ_S	Fração volumétrica martensítica desenvolvida por tensão
δ_{S0}	Fração volumétrica martensítica inicial desenvolvida por tensão
δ_T	Fração volumétrica martensítica desenvolvida por temperatura
δ_{T0}	Fração volumétrica martensítica inicial desenvolvida por temperatura
ε_0	Deformação inicial
ε_{LMF}	Deformação do elemento de LMF
ε_r	Máxima deformação residual
ε^t	Deformação de transformação
ε^{ter}	Deformação térmica
σ_{LMF_e}	Tensão exercida pelo elemento de LMF em resposta à tensão dinâmica [Pa]
σ_{LMF_i}	Tensão sobre elemento de LMF em resposta à pré- tensão [Pa]
σ_0	Tensão mecânica inicial [Pa]
σ_{LMF}	Tensão exercida pelo elemento de LMF
σ_e	Tensão externa [Pa]
σ_i	Pré tensão [Pa]

ζ	Fator de amortecimento
Θ	Constante relacionada ao coeficiente de expansão térmica do material [Pa/°C]
τ	“Tempo” adimensional
Ω	Tensor térmico [Pa]
δ	Fração volumétrica martensítica
ε	Deformação
σ	Tensão mecânica [Pa]
ω	Frequência angular [rad/s]
ϕ	Ângulo de fase [°]

Subscritos e sobrescritos

$\dot{}$	Derivada em relação a τ
\prime	Derivada em relação a t
0	(<i>zero</i>) inicial
A	Austenite [] ou área da seção transversal do elemento de LMF [m ²]
LMF	Liga com memória de forma
M	Martensite
P	Perdas distintas
S	Inicial (<i>start</i>) ou tensão (stress)
$crit$	Crítico
f	Final
i	Pré
r	Residual
t	Transformação ou tempo
ter	Térmico
x	

Lista de tabelas

Tabela 1- Adimensionalização	37
Tabela 2 - Propriedades do Nitinol. Fonte: Paiva & Savi (1999).....	42
Tabela 3 - Propriedades utilizadas por Leo (2007) e Pinto (2011) para simulação dinâmica de sistemas amortecidos por LMF	42
Tabela 4 - Propriedades do Nitinol. Fonte: Paula, M. et al. (2015)	43
Tabela 5 - Dados de entrada para simulação dinâmica	43

Lista de figuras

Figura 1- Transformação entre martensite maclada e austenite	7
Figura 2- Transformação entre martensite maclada e não maclada	8
Figura 3- Efeito de memória de forma	8
Figura 4- Pseudo- elasticidade.....	9
Figura 5-Pseudo- elasticidade e histerese. Fonte: Lagoudas (2008)	10
Figura 6- Efeito de memória de forma. Fonte: Lagoudas (2008).....	10
Figura 7- Elemento deformável contínuo com infinitos graus de liberdade. Fonte: Rao (2011)	20
Figura 8- Análise de problemas envolvendo vibrações mecânicas. Fonte: Adaptado de Rao (2011).....	22
Figura 9- Loop de histerese. Fonte: Adaptado de Rao (2011).....	24
Figura 10- Modelação de SMV linear. Fonte: Adaptado de Thomson & Dahleh (1998)	25
Figura 11- Método de Euler para solução numérica de equações diferenciais ordinárias	27
Figura 12- Malha	31
Figura 13- SMV abordado (diagrama físico à esquerda e diagrama de corpo livre à direita).....	35
Figura 14 – Comparação entre laço de histerese completo obtido para $T=60$ [°C] (à esquerda) e resultados sugeridos por Brinson (1993).....	45
Figura 15 - Histórico de tensão aplicada para caracterizar <i>subloops</i> completos (à esquerda) e tensão utilizada por Paiva & Savi (1999) (à direita).	46
Figura 16 - Curva tensão por deformação para <i>subloops</i> completos (à esquerda) e resultados obtidos por Paiva & Savi (1999) (à direita).	46
Figura 17- Histórico de carga aplicada e Curva tensão por deformação para caracterizar <i>subloops</i> incompletos.	47
Figura 18- Histórico de carga aplicada e curva tensão-deformação para caracterizar <i>subloops</i>	48
Figura 19- Comparação entre resultados obtidos (à esquerda) e sugeridos por Leo (2007) (à direita) do comportamento SMV sob tração e amortecido por LMF.....	48
Figura 20 - Histórico de carga do SMV simulado e aquele sugerido por Leo (2007) ...	49

Figura 21- Comparação entre deformação sofrida por LMF e materiais elástico-lineares. À esquerda, resultados obtidos e à direita, resultados sugeridos por Pinto (2011)	50
Figura 22- Curva tensão-deformação da aplicação de LMF em SMV para 9 [Hz]. À esquerda, resultados obtidos e à direita, resultados sugeridos por Leo (2007)	51
Figura 23- Histórico de carga aplicada para caracterizar <i>subloops</i> completos. À direita, dados utilizados e à esquerda, dados sugeridos por Paula, M. <i>et al.</i> (2015)	51
Figura 24- Curva carga- deformação para <i>subloops</i> completos. À esquerda, resultados obtidos e à direita, resultados sugeridos por Paula, M. <i>et al.</i> (2015).....	52
Figura 25- Histórico de carga e curva carga- deformação para <i>subloops</i>	53
Figura 26- Histórico de carga para simulação equacionada	53
Figura 27- Histórico de deformação da LMF para simulação equacionada.....	54
Figura 28- Carga por deformação para simulação equacionada.....	55
Figura 29- Comparação entre deformação sofrida pela LMF e material elástico linear	56
Figura 30- Carga por deformação considerando-se a gravidade e pré- carga de compressão	57

1. Introdução

1.1- Contextualização

Ligas com memória de forma (LMFs) possuem propriedades que permitem ampla aplicação em diversas áreas do conhecimento, das quais destacam-se a indústria automóvel, biomédica e aeroespacial (PAIVA & SAVI, 1999). Essas propriedades podem ser exploradas basicamente através de dois fenômenos característicos. O primeiro deles, conhecido como pseudo-elasticidade, é caracterizado por um laço de histerese na curva tensão-deformação do material. O segundo fenômeno, chamado de efeito de memória de forma (EMF), representa a capacidade do material em recuperar sua forma original através do aumento de temperatura, após o mesmo ter sido deformado decorrente da aplicação de uma tensão mecânica apresentando uma deformação residual após retirada da carga (BRINSON, 1993).

A fim de conseguir modelos matemáticos que representam os dois efeitos citados acima, a comunidade científica vem adotando duas abordagens. Na primeira, busca-se a formulação de novas teorias constitutivas. Já na segunda, o principal objetivo é melhorar os modelos matemáticos já existentes (PAULA, M. *et al.*, 2015). Com relação à segunda abordagem, os modelos tentam descrever aspectos termomecânicos microscópicos (a níveis moleculares ou de parâmetro de rede cristalina) ou macroscopicamente (relacionados a características fenomenológicas do material) (PAIVA & SAVI, 2006). Para a descrição macroscópica, os modelos são classificados como polinomiais, baseados na plasticidade, com restrições internas ou com cinética de transformação de fase assumida (PAIVA, SAVI & PACHECO, 2003).

Inicialmente, como apresentado por Tanaka & Nagaki (1982) para materiais generalizados e utilizado por Kikuaki Tanaka, Kobayashi, & Sato (1986) na descrição termomecânica de LMFs, os modelos com cinética de transformação de fase assumida, utilizam-se de funções exponenciais ou cossenoidais e de variáveis de estado como

temperatura (T), tensão (σ) e fração volumétrica martensítica (δ) para descrever as transições de fases do material (PAIVA *et al.*, 2003).

Este modelo inicial, apresentado por Kikuaki Tanaka, Kobayashi, & Sato (1986), é unidimensional e adota funções exponenciais baseadas apenas em tensão e temperatura para descrever as transformações cinéticas. Posteriormente, Liang & Rogers (1990) adotaram funções cossenoidais e as três variáveis de estado já citadas para as transformações cinéticas. Mais tarde, baseando-se nas funções propostas por Liang & Rogers (1990), Brinson (1993) propôs dividir a fração volumétrica em duas variáveis distintas, uma desenvolvida por tensão (δ_s) e outra por temperatura (δ_T) (PICCIRILLO, 2007).

Além da busca de modelos matemáticos que representem de forma mais precisa o comportamento da LMF, há também a necessidade tecnológica em desenvolver-se técnicas que minimizem os efeitos provocados por fenômenos vibratórios. De entre essas técnicas, segundo Silva (2009), as de isolamento passivo particulariza-se pelo prévio conhecimento da frequência de excitação e dos parâmetros de rigidez, de amortecimento e de massa do sistema. Adicionalmente, como apresentado por Rao (2011), o laço de histerese em curvas tensão-deformação é uma das possíveis formas de amortecimento de sistemas vibratórios. Contudo, devido ao comportamento não-linear das LMFs em regiões de transformação, seu uso para o controle de vibrações torna-se um desafio como foi mostrado por Pinto (2011) ao implementar o modelo de Liang & Rogers (1990) em suas simulações.

1.2- Motivação

Limitações para descrever todos os comportamentos possíveis da LMF geram a necessidade de estudos de casos específicos. Assim, o objetivo deste trabalho está no estudo dinâmico de um sistema mecânico vibratório amortecido por LMF e sujeito a uma excitação externa. Foi utilizado o modelo de Brinson (1993) para descrever o comportamento da LMF, cuja escolha é justificada no fato de ser um modelo amplamente utilizado e apresentar boas corroborações experimentais (PAIVA & SAVI, 1999). Além disso, o uso de modelos matemáticos para simular cenários esperados na aplicação de sistemas reais tende a reduzir o tempo e custos de implementação, e pode ainda aprimorar

sistemas já em uso. Dando sequência, apesar de grandes desafios para a implementação de um algoritmo capaz de representar o sistema descrito, os frutos consequentes de seu sucesso são promissores; notoriamente, haverá expansão no (na):

- Conhecimento da utilização de LMF na UTFPR- Ponta Grossa e no IPB- Bragança;
- Exibição de aspectos dinâmicos relacionados a vibrações;
- Conexão entre modelo constitutivos e aspectos dinâmicos;

Prosseguindo, esperava-se que, pela aplicação de conhecimentos em ciência dos materiais e equações de dinâmica clássica, o algoritmo desenvolvido fosse capaz de gerar gráficos de tensão-deformação assim como o histórico temporal para o problema abordado.

1.3- Objetivos

1.3-1. Objetivo Geral

Implementar o modelo de cinética de transformação de fases assumida proposto por Brinson (1993) em um sistema mecânico vibratório amortecido por LMF. Para isso, o problema será tratado como um sistema massa mola de um grau de liberdade.

1.3-2. Objetivos Específicos

De entre os objetivos específicos deste estão:

- Entender melhor os fenômenos de pseudo- elasticidade e EMF;
- Compreender melhor a interface entre dinâmica clássica e ciência dos materiais;
- Criar algoritmos através do programa MATLAB®;
- Comparar resultados obtidos com algoritmos anteriormente propostos na literatura;
- Verificar a eficiência da LMF como reforço e também como um dissipador de energia do sistema;

- Dar início a um estudo mais aprofundado sobre o tema, que é um ramo emergente na engenharia mecânica;

1.4- Descrição do trabalho

O presente trabalho de conclusão do curso de mestrado em engenharia industrial foi subdividido em 5 capítulos e 2 apêndices.

No Capítulo 1, foram expostos a contextualização dos tópicos objetos de estudo, bem como a motivação e os objetivos gerais e específicos deste trabalho.

No Capítulo 2 serão apresentados conceitos básicos relacionados às ligas com memória de forma e às vibrações mecânicas. Prosseguindo com a introdução de modelos matemáticos que descrevem o comportamento dessas ligas. Para finalizar, serão expostos métodos para solução de equações diferenciais não lineares.

No Capítulo 3 será apresentada a metodologia utilizada para atingir os objetivos deste trabalho. De forma mais específica, a abordagem adotada para análise, as hipóteses simplificativas e as condições utilizadas como entradas do processo iterativo serão explanados. Além disso, serão exibidas as formas de realizar a alimentação deste processo.

No Capítulo 4, serão expostos os resultados da implementação numérica, assim como as respectivas análises. Para tanto, os resultados de simulações disponíveis na literatura serão utilizados para comparação e validação do modelo obtido.

No Capítulo 5, serão descritas as conclusões deste trabalho juntamente com as sugestões para futuros trabalhos.

Por último, os apêndices A e B apresentarão simplificações matemáticas omitidas no texto principal bem como o código em linguagem Matlab[®], respectivamente.

2. Referencial teórico

Neste capítulo serão descritos os fundamentos relacionados com as ligas com memória de forma e as vibrações mecânicas, abrangendo principalmente, as características do efeito de memória de forma e do efeito pseudoelástico na curva tensão-deformação-temperatura do material em análise. Complementarmente, são retratados exemplos de aplicação deste material, modelos matemáticos que descrevem os efeitos mencionados e métodos para solução de equações diferenciais não lineares.

2.1- Ligas com memória de forma

A demanda por materiais cada vez mais resistentes, leves e com aplicações adicionais às suas fundamentais ocasionou o surgimento de um novo ramo de materiais, denominados de multifuncionais (*multifunctional materials*). Neste novo ramo, um conjunto de materiais, chamados de ativos (*active materials*), notabilizaram-se por serem capazes de trabalharem como sensores e/ou atuadores em seus sistemas de inserção. Exemplos de materiais ativos são os piezemagnéticos, piezoelétricos, e aqueles com memória de forma (MMF) (LAGOUDAS, 2008).

Devido às suas características, os materiais com memória de forma podem ainda ser chamados de materiais inteligentes (*smart materials*); ou melhor, materiais que apresentam acoplamento de múltiplos domínios físicos. Por outras palavras, quando expostos a variações de propriedades não mecânicas, estes materiais podem manifestar mudanças em propriedades mecânicas; adicionalmente, a variação apresenta pelo menos uma ordem de grandeza superior àquelas exibidas por materiais comuns (LAGOUDAS, 2008; LEO, 2007).

Estritamente escrevendo, materiais com memória de forma são caracterizados pela habilidade de, após terem sido submetidos a uma deformação aparentemente plástica, recuperam a sua forma original através de um estímulo apropriado, o que caracteriza o chamado efeito de memória de forma (EMF). Entre os MMF, as ligas com memória de forma (LMF) possuem ampla aplicação em diferentes áreas do conhecimento, de entre as quais destacam-se a indústria aeroespacial, biomédica e automóvel (HUANG *et al.*, 2010; PAIVA & SAVI, 1999).

Historicamente, o EMF já era encontrado desde 1932 em ligas de Ouro e Cádmio, mas apenas na segunda metade do século passado, por estudos realizados com ligas de Níquel e Titânio nos laboratórios navais de Ordnance (*Naval Ordnance Laboratories- USA*), a recuperação de deformações consideráveis foi observada. Posteriormente, em homenagem a estes laboratórios, as ligas NiTi com percentuais atômicos iguais foram comercialmente denominadas Nitinol. Finalmente, devido à sua alta capacidade em recuperar forma e boa biocompatibilidade, as ligas NiTi ganharam grande importância e destacam-se no cenário mundial juntamente com as ligas de Ferro e ligas de Cobre (HUANG *et al.*, 2010).

Originalmente, os termos martensite e austenite faziam menção a fenômenos relacionados a arranjos atômicos presentes em aços comuns. De forma mais específica, martensite descrevia uma fase metaestável resultante de transformações adifusionais decorrentes do rápido arrefecimento de ligas Fe-C austenitizada. No entanto, investigações posteriores relataram a ocorrência do fenômeno em outros materiais, desta forma, os termos estenderam-se para outras ligas (SANTOS, 2008; CALLISTER, 2007).

Dentro da variação de temperatura comumente utilizada, as ligas com memória de forma exibem as duas fases mencionadas; austenite é a fase presente para altas temperaturas enquanto martensite é a fase vigente para baixas temperaturas. Para melhor descrever as transformações entre austenite e martensite, adota-se o termo transformação direta (*forward transformation*) para aquela que parte da fase austenítica, chamada de fase principal (*parent phase*), e transformação inversa (*reverse transformation*) para aquela partindo da martensite. Além disso, cristais martensíticos podem exibir distintas condições de orientação, chamadas variantes; utiliza-se o termo martensite maclada (*twinned martensite*) quando várias variantes martensíticas estão auto acomodadas e martensite não maclada (*detwinned martensite*) quando há a presença de uma variante dominante (LAGOUDAS, 2008).

Quando a martensite maclada se transforma em austenite (ou vice versa) (sem a adição de força externa) não há mudança macroscópica significativa na forma do material, pois a transformação evolui por auto acomodação como descreve a Figura 1. Na figura as siglas M_s e M_f representam a temperatura inicial e final da transformação direta; da

mesma forma, A_S e A_F representam a temperatura inicial e final da transformação inversa (PAULA, A. 2006).

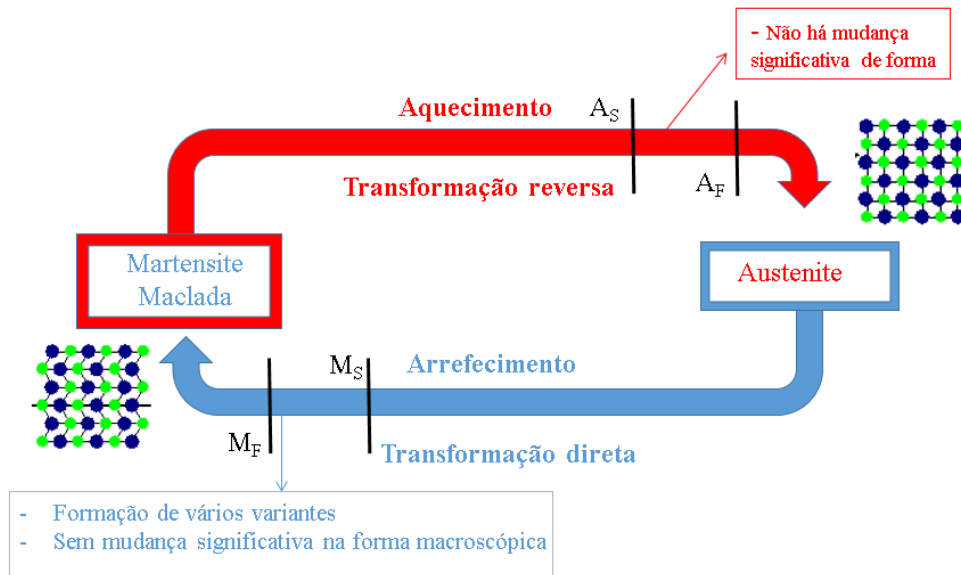


Figura 1- Transformação entre martensite maclada e austenite

Porém, a partir da martensite maclada, e com a aplicação e remoção de uma tensão mecânica maior que a tensão crítica inicial, σ_S^{crit} , haverá a evolução de martensite não maclada e presença de deformação residual macroscópica. Esta evolução ocorre devido ao deslocamento de fronteiras de macla que acomodam a tensão e, na condição de tensão aplicada maior que a tensão crítica final de transformação, σ_F^{crit} , a fase resultante pode conter uma única variante como exibido na Figura 2 (PAULA, A. 2006). De forma mais clara, para transformações completas (sem adição de força externa), a transformação entre martensite maclada e austenite não exibe mudança na forma macroscópica; contudo, para a transformação entre martensite maclada e martensite não maclada (com a presença de força externa), essas mudanças existem.

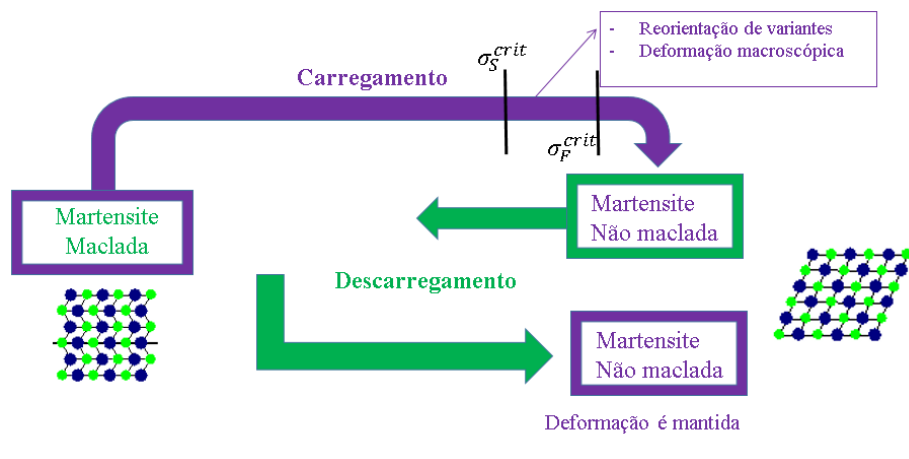


Figura 2- Transformação entre martensite maclada e não maclada

Adicionalmente, uma vez que a deformação sofrida pela liga é aparentemente permanente, o fenômeno descrito na Figura 2 é chamado de pseudoplasticidade (*pseudoplasticity*). Caso a liga na fase martensítica não maclada (deformada) seja submetida a temperaturas maiores que A_F , o efeito de memória de forma ocorrerá e a liga retornará a sua forma original como ilustrado na Figura 3. É necessário ressaltar que esta temperatura aumenta com a tensão mecânica aplicada na liga e que algumas ligas são capazes de recuperar deformações de até 8% (MONTEIRO, 2007).

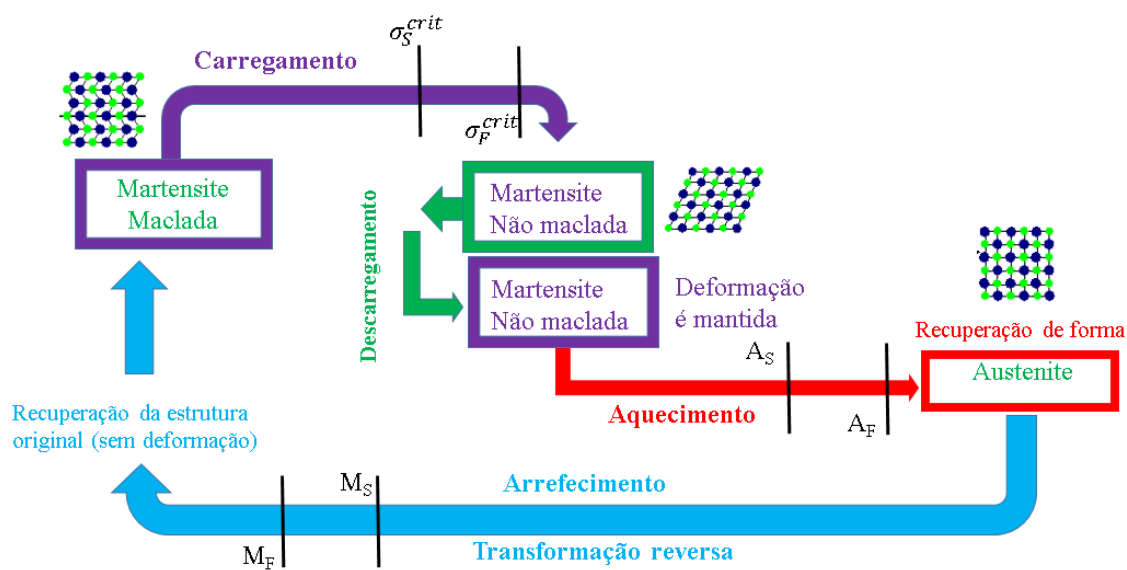


Figura 3- Efeito de memória de forma

Uma vez na fase martensítica não maclada, o material apenas retornará à sua fase maclada se for primeiramente transformado em austenite. Além do mais, estando o material a uma temperatura T , constante e maior que A_F (na fase austenítica), caso uma tensão mecânica seja aplicada e seja grande o suficiente, o material poderá ser levado à fase martensítica não maclada. Durante o progresso até o ponto de máxima tensão, o material deformar-se-á, mas em seu retorno ao ponto de mínima tensão, a forma original será recuperada. Este processo denomina-se pseudo-elasticidade (*pseudoelasticity* ou *superelasticity effect*) e é representado na Figura 4 pelo percurso 1-2-1. Observe-se que para temperaturas à esquerda da linha inclinada que cruza M_F , apenas existe martensite; analogamente, para temperaturas à direita da linha inclinada que cruza A_F , apenas existe austenite. Além disso, para tensões mecânicas acima de σ_s^{crit} não existe martensite maclada. Por último, a relação entre tensão crítica e temperatura (representada pelas linhas inclinadas) foi considerada linear, iguais para o final e início de transformação e com coeficientes angulares C_M e C_A para martensite e austenite, respectivamente (LAGOUDAS, 2008).

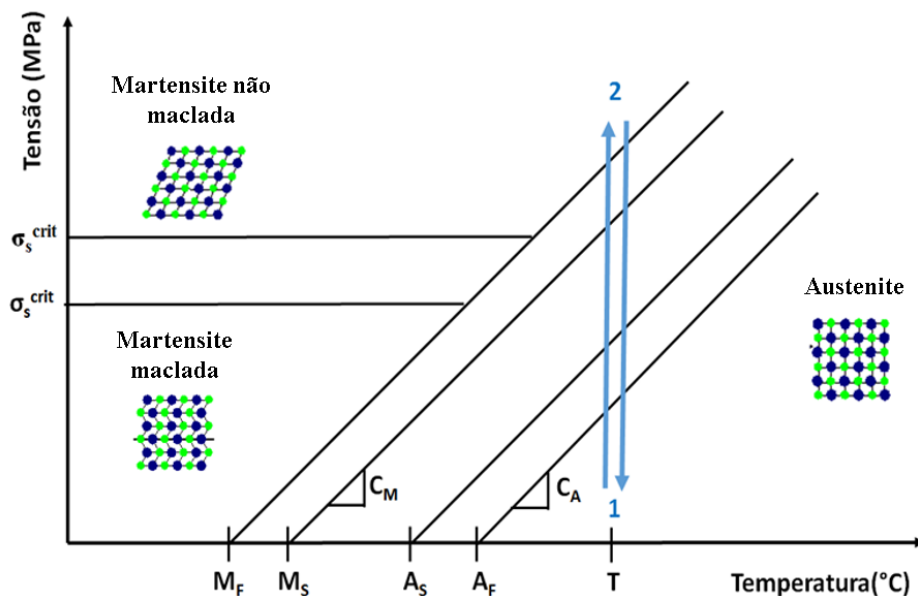


Figura 4- Pseudo- elasticidade

O comportamento pseudoelástico e o efeito de memória de forma também podem ser representados por curvas tensão-deformação (Figura 5 e Figura 6,

respetivamente). Na Figura 5, note-se que a resposta do material durante a aplicação da carga é diferente daquele após a remoção, o que representa um comportamento histerético. Na sequência, a Figura 6 exhibe a presença de deformação residual após aplicação e remoção de carga à baixa temperatura (pontos B, C e D) seguido de recuperação de forma pelo aquecimento do material (pontos D, E e F) (CISMASIU, 2010; LAGOUDAS, 2008).

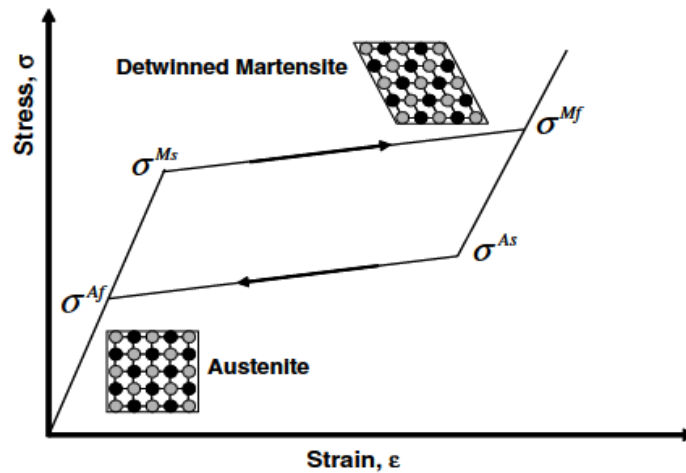


Figura 5-Pseudo- elasticidade e histerese. Fonte: Lagoudas (2008)

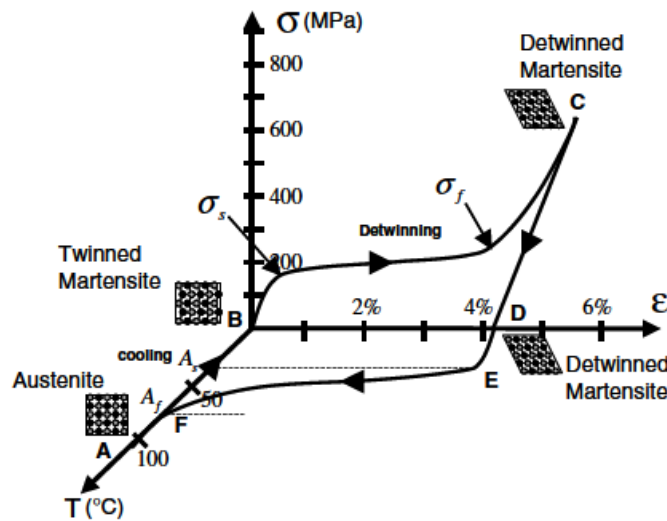


Figura 6- Efeito de memória de forma. Fonte: Lagoudas (2008)

Resumidamente, as LMF podem apresentar três comportamentos atípicos quando comparadas a ligas comuns. O primeiro, já introduzido, a pseudo-elasticidade é caracterizada por um laço de histerese na curva tensão-deformação, ocorre parcialmente quando a carga mecânica é aplicada e removida enquanto a temperatura é mantida acima de A_S e integralmente para o mesmo processo sob temperaturas superiores a A_F . O segundo, também já introduzido, EMF, singulariza-se por apresentar-se em baixas temperaturas e por sua irreversibilidade; em outras palavras, ele ocorrerá integralmente apenas se a liga for deformada a temperaturas abaixo de A_S e, uma vez aquecido acima de A_F , o material irá recuperar a sua forma original. Contudo, após o arrefecimento a transformação direta ocorrerá e a liga não retornará à forma deformada. Por outro lado, existe ainda o comportamento denominado de efeito de memória de forma duplo (*two-way shape memory effect*) que é o mecanismo pelo qual um ciclo térmico causa a deformação e recuperação de forma do material; isto é, após deformado, se o material for aquecido, haverá recuperação de forma, mas caso haja arrefecimento, o mesmo retornará à forma deformada; contudo, este efeito só se torna aplicável após o processo de preparação (*training*) da liga, que consiste em ciclos termomecânicos com finalidade de estabilizar a resposta do material (BRINSON, 1993; ZHANG, ROGERS, & LIANG, 1997; LAHOZ & PUÉRTOLAS, 2004).

2.1-1. Aplicações das ligas com memória de forma

Entre a infinidade de aplicações existentes para as ligas com memória de forma, destaca-se aqui quatro destas para a exibição da serventia da transformação de fases do material, do comportamento pseudoelástico e dos efeitos de memória de forma (simples e duplo).

Uma maneira de absorver-se vibrações é através de absorvedores dinâmicos de vibração (ADV), onde um sistema oscilatório secundário é acoplado a um primário a fim de reduzir a vibração deste último. De forma geral, deseja-se que a frequência natural do sistema secundário seja ajustada ao primário. No caso de absorvedores adaptativos contendo LMF, uma grande vantagem se destaca. Nomeadamente, controlando-se a temperatura da liga, controla-se seu módulo de elasticidade e conseqüentemente, a frequência natural do dispositivo. Essa versatilidade torna-se muito adequada para

sistemas primários sob frequências desconhecidas ou variáveis como demonstrado por *Tiseo et al.* (2010) .

Visando reduzir a amplitude de vibração de estruturas sob excitação de base, o fenômeno de pseudo- elasticidade foi abordado experimentalmente por *Xiang et al.* (2008), que testaram a capacidade das LMFs em atuarem como amortecedores durante eventos sísmicos. Ademais, além da capacidade de amortecer vibrações, este fenômeno foi utilizado para criar linhas de pescas a prova de choques mecânicos como mostrado por *Ziolkowski* (2015).

Adicionalmente a capacidade de absorver impactos e vibrações, através do efeito de memória de forma, as LMFs podem ser empregadas de formas mais complexas. Neste âmbito, as endopróteses expansíveis (do inglês, *stents*), espécie de rede metálica em formato tubular utilizadas na restauração da corrente sanguínea, são inseridas em cateteres e introduzidas no vaso sanguíneo (obstruído por depósitos ateroscleróticos) em sua fase de martensite. Posteriormente, fora do cateter, quando o objeto tende a possuir a temperatura corporal, a transformação de martensite em austenite ocorre, fazendo com que a recuperação de forma aconteça. Esta recuperação desobstrui a vaso em tratamento, como exibem *Petrini & Migliavacca* (2011) e *Duerig, Pelton, & Stöckel* (1999).

Por fim, visando diminuir os ruídos de turbinas enquanto uma aeronave está em solo e não prejudicar sua performance em voo, *chevrons* são utilizados para controlar a influência da turbina sobre seus gases de saída. Para tal, o efeito de memória de forma duplo é empregado a fim de fazer com que os elementos LMF atuem sobre o formato externo das turbinas. Isto é, para baixas altitudes, onde a temperatura da turbina elevasse e o ruído deve ser abafado, a turbina tende a obstruir a passagem dos gases. Por outro lado, em elevadas altitudes, onde há maior preocupação em relação ao desempenho das aeronaves, a turbina assume uma forma mais propícia ao escoamento dos gases, como expresso por *Hartl & Lagoudas* (2007)

2.2- Modelos matemáticos

O comportamento distinto das LMF deve-se às transformações de fases que ocorrem no material; em outras palavras, em fases distintas, a liga responde de forma diferente ao ser exposta ao mesmo estímulo. No entanto, rastrear e descrever

precisamente como ocorre essa transição acarreta alguns desafios. Por exemplo, ao analisar o ciclo de histerese de finas folhas de NiTi, Daly, Ravichandran, & Bhattacharya (2007) concluíram que é razoável considerar uma transformação homoganeamente por todo o material apenas no início da transição; contudo, o seu desenvolvimento ocorre em localizações concentradas com altos níveis de deformação. Como consequência dessa complexidade do fenômeno, o preciso dimensionamento de propriedades do material durante as transformações de fases é restrito a casos específicos como sugerido por Auricchio & Sacco (1997) que apresentam uma comparação entre quatro métodos distintos para a determinação do módulo de elasticidade da liga.

Os modelos com cinética de transformação de fase assumida, por exemplo, como citados na introdução, apresentam bons resultados, porém dependendo dos objetivos de seu uso e das condições de aplicação, pode - se citar dois tipos de problemas que podem aparecer, a saber: o custo computacional e a dificuldade de implementação. Assim, modelos mais simplificados podem ser utilizados. Um exemplo desta simplificação é o modelo empírico proposto por Lagoudas (2008), que é um modelo unidimensional baseado em propriedades obtidas empiricamente para o comportamento pseudoelástico da LMF. Este modelo pode ser aplicado apenas para temperaturas constantes, partindo-se de um material sem deformação inicial. Além disso, parte-se do princípio que a deformação elástica do material dá-se pela diferença entre a deformação total (ε) diminuída da soma entre a térmica (ε^{ter}) e a de transformação (ε^t). (LAGOUDAS, MAYES, & KHAN, 2001; LAGOUDAS, 2008).

2.2-1. Modelo de Brinson

A equação constitutiva do modelo de Brinson, apresentado por Brinson (1993), é dada por

$$\sigma - \sigma_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0) + \Omega(\delta - \delta_0) + \theta (T - T_0) \quad (1)$$

onde,

$$E = E_A + \delta (E_M - E_A) \quad (2)$$

adicionalmente

$$\Omega = -\varepsilon_r E \quad (3)$$

Nas equações (1), (2) e (3), E , σ , ε , ε_r , δ , Θ e T representam o módulo de elasticidade, a tensão mecânica aplicada pela liga, a deformação, a máxima deformação residual, a fração volumétrica martensítica, uma constante relacionada ao coeficiente de expansão térmica e a temperatura da liga, respetivamente. Além disso, o subíndice “0” representa o estado inicial do material em determinada condição (explicada mais abaixo), o subíndice “M” faz menção à fase martensítica, e o subíndice “A”, à fase austenítica.

Como σ , σ_0 , ε_0 , T , T_0 são os dados de entrada (*input*) do modelo e ε , a resposta (*output*), o desafio torna - se o cálculo de δ . Complementarmente, como já dito, δ é definida pela soma de duas parcelas. A primeira representa a fração volumétrica martensítica transformada por tensão (com única variante) e a segunda, a fração volumétrica martensítica induzida por temperatura (com múltiplas variantes), como ilustra a equação (4).

$$\delta = \delta_S + \delta_T \quad (4)$$

onde o subíndice “S” indica tensão mecânica (*stress*) e o subíndice “T” representa temperatura.

Para o cálculo de cada parcela, o modelo divide o comportamento do material a depender da temperatura e tensão mecânica adotadas; em outras palavras, há dois grupos de condições e equações dependentes de propriedades de cada fase do material. Nos dois grupos, o campo temperatura (T) e tensão (σ) devem satisfazer determinadas condições, onde o comportamento do material será modelado por uma equação específica.

O primeiro grupo engloba transformações diretas onde T deve ser maior que M_S ; isto é, $T > M_S$. Atendida esta condição, o campo temperatura e tensão é verificado através de

$$\sigma_S^{crit} + C_M(T - M_S) < \sigma < \sigma_F^{crit} + C_M(T - M_S) \quad (5)$$

Note-se que σ_S^{crit} , C_M , M_S e σ_F^{crit} são parâmetros do material. Satisfeita esta condição, as parcelas da equação 4 são descritas pelas Equações (6) e (7).

$$\delta_S = \frac{1 - \delta_{S0}}{2} \cos \left\{ \frac{\pi}{\sigma_S^{crit} - \sigma_F^{crit}} [\sigma - \sigma_F^{crit} - C_M(T - M_S)] \right\} + \frac{1 + \delta_{S0}}{2} \quad (6)$$

e

$$\delta_T = \delta_{T0} - \left(\frac{\delta_{T0}}{1 - \delta_{T0}} \right) (\delta_S - \delta_{S0}) \quad (7)$$

Não satisfeita a exigência (5) e sendo $T < M_S$, tem-se que a condição de tensão é verificada através de (8).

$$\sigma_S^{crit} < \sigma < \sigma_F^{crit} \quad (8)$$

Sequencialmente, as frações volumétricas de martensite desenvolvidas por tensão e por temperatura são retratadas como:

$$\delta_S = \left(\frac{1 - \delta_{S0}}{2} \right) \cos \left[\left(\frac{\pi}{\sigma_S^{crit} - \sigma_f^{crit}} \right) (\sigma - \sigma_F^{crit}) \right] + \frac{1 + \delta_{S0}}{2} \quad (9)$$

e

$$\delta_T = \delta_{T0} - \left(\frac{\delta_{T0}}{1 - \delta_{T0}} \right) (\delta_S - \delta_{S0}) \quad (10)$$

O segundo grupo de condições e equações abrange transformações inversas. Nele, a temperatura deve ser superior à A_S ; isto é, $T > A_S$. Respeitada esta condição, o campo temperatura e tensão é verificado através da condição (11).

$$C_A(T - A_F) < \sigma < C_A(T - A_S) \quad (11)$$

Repare-se que C_A e A_F , assim como C_M e M_S , são parâmetros do material. Prosseguindo, a fração volumétrica de martensite é obtida pela equação (12).

$$\delta = \frac{\delta_0}{2} \left\{ \cos \left[a_A \left(T - A_S - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (12)$$

As suas parcelas são calculados como:

$$\delta_S = \delta_{S0} - \frac{\delta_{S0}}{\delta_0} (\delta_0 - \delta) \quad (13)$$

e

$$\delta_T = \delta_{T0} - \frac{\delta_{T0}}{\delta_0} (\delta_0 - \delta) \quad (14)$$

onde a_A é processado por (15).

$$a_A = \frac{\pi}{A_F - A_S} \quad (15)$$

2.2-2. Modelo de Lagoudas baseado em dados empíricos

Para este modelo, apresentado por Lagoudas (2008), a tensão é inicialmente descrita pela lei de Hooke, onde a deformação elástica é tida como a deformação total, ε , descontada a deformação de transformação, ε^t , e a térmica, ε^{ter} .

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^t - \varepsilon^{ter}) \quad (16)$$

Para temperatura constante, ε^{ter} é desprezível. Além disso, o módulo de elasticidade, E , é calculado da seguinte forma

$$E = E_A + \delta(E_M - E_A) \quad (17)$$

e a deformação de transformação é dada por

$$\varepsilon^t = \delta H_{(\sigma)}^{cur} \quad (18)$$

Note-se que δ faz referência a fração volumétrica de martensite como no modelo anterior e $H_{(\sigma)}^{cur}$ é uma função que descreve a deformação máxima recuperada após deformar e aquecer o material através de um ciclo do efeito de memória de forma. Complementarmente, para aplicação em regime pseudoelástico, sendo o material preparado, assume-se que:

$$H_{(\sigma)}^{cur} = H^{\max} \quad (19)$$

Observe que H^{\max} é um valor constante (obtido empiricamente). Dando sequência, a fração volumétrica martensítica na região de transformação pode ser calculada de duas formas a depender da natureza da transformação. Especificamente, a equação (20) caracteriza a transformação direta enquanto a equação (21) descreve a transformação inversa.

$$\delta = \frac{(M_S^\sigma - T)}{(M_S - M_F)} \quad (20)$$

e

$$\delta = \frac{(A_F^\sigma - T)}{(A_F - A_S)} \quad (21)$$

Aqui, M_S^σ , M_S , M_F , A_F^σ , A_F e A_S são propriedades do material, onde o sobrescrito “ σ ” indica uma função que depende da tensão mecânica, como mostrado nas Equações (22) e (23).

$$M_S^\sigma = M_S + \frac{\sigma}{C_M} \quad (22)$$

e

$$A_F^\sigma = A_F + \frac{\sigma}{C_A} \quad (23)$$

Analogamente, descreve-se

$$M_F^\sigma = M_F + \frac{\sigma}{C_M} \quad (24)$$

e

$$A_S^\sigma = M_S + \frac{\sigma}{C_M} \quad (25)$$

Prosseguindo, de forma resumida, para a transformação direta, a fração volumétrica de martensite é zero caso a condição (26) seja respeitada, ou é calculada pela equação (20) caso a condição (27) seja atendida, ou é igual à 1 (100%) para a condição (28).

$$T \geq M_S^\sigma \quad (26)$$

$$M_F^\sigma < T < M_S^\sigma \quad (27)$$

$$T \leq M_F^\sigma \quad (28)$$

Similarmente, a fração volumétrica durante a transformação inversa é 1 (100%) caso a condição (29) seja respeitada, ou calculada pela equação (21) caso a condição (30) seja atendida, ou é igual a 0 para a condição (31).

$$T \leq A_S^\sigma \quad (29)$$

$$A_S^\sigma < T < A_F^\sigma \quad (30)$$

$$T \geq A_F^\sigma \quad (31)$$

2.3- Fundamentos de vibrações mecânicas

Qualquer movimento repetitivo de corpos que possuem massa e rigidez finita em torno de uma posição de equilíbrio é denominado vibração (ou oscilação). Apesar de algumas vibrações serem desejáveis, como alarmes silenciosos (*silent ring*) de *smartphones*, as aplicações na engenharia requerem que esse fenômeno seja controlado ou minimizado, como o que ocorre em projetos de máquinas centrífugas. Parte desta preocupação dá-se pelo fato de que caso a frequência de excitação externa seja igual a frequência natural do corpo excitado, ocorrerá o fenômeno chamado ressonância, onde grandes amplitudes de vibração ocorrem causando a falha do corpo devido à fadiga. (RAO, 2011; SCHMITZ & SMITH, 2012).

Ao princípio, o estudo de sistemas mecânicos vibratórios (SMVs) com elementos deformáveis contínuos (isto é, que apresente infinitos pontos de massa com movimento relativo entre si), como a viga em balanço mostrada na Figura 7, exigiria uma análise contínua do problema. Contudo, para obter soluções mais simples, esta análise, como será mostrada na Figura 8, pode ser realizada pela discretização do problema; neste caso, um número finito de pontos de massa é analisado (RAO, 2011; SCHMITZ & SMITH, 2012).

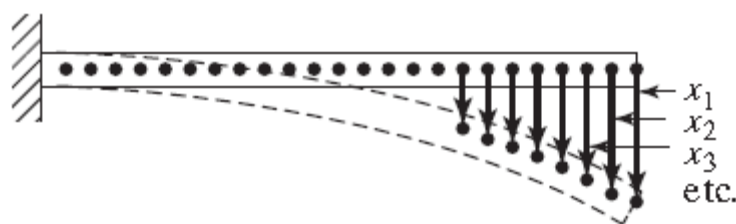
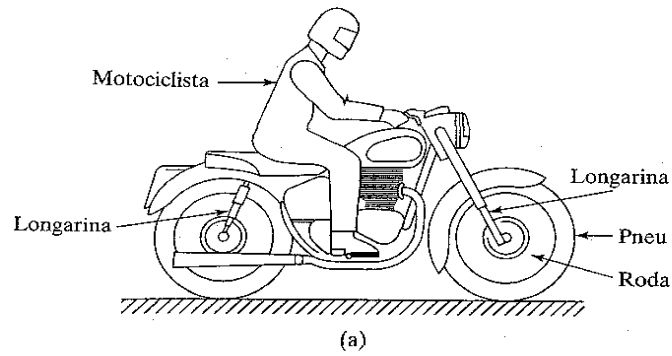


Figura 7- Elemento deformável contínuo com infinitos graus de liberdade. Fonte: Rao (2011)

Primordialmente, os estudos de SMV devem abranger três formas de energia que podem ser armazenadas ou perdidas pelo sistema; a primeira forma, singularizada pela energia cinética, é representada por um elemento de inércia (equivalente a uma massa); a segunda forma representa a energia potencial e é caracterizada pela rigidez do sistema

(equivalente a uma mola); por último, retrata-se a energia dissipada no processo por um elemento amortecedor. Em casos onde a energia dissipada for relevante à dinâmica do fenômeno, diz-se que o sistema é amortecido; caso contrário, quando aquela for desprezível em relação às outras energias envolvidas, diz-se que o sistema é não amortecido (RAO, 2011; KELLY, 2012).

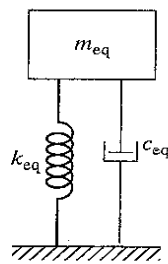
Dando continuidade, sistemas que apresentam número finito de elementos de massa podem ser classificados de acordo com o número de conjuntos massa-mola-amortecedores necessários para descrever satisfatoriamente o fenômeno em questão. Por exemplo, a Figura 8 exibe duas formas diferentes de desenvolver uma análise sobre o sistema apresentado na Figura 8a. Na Figura 8b, toda a massa do sistema é aproximada por um elemento de massa equivalente, toda sua rigidez é tida como uma rigidez equivalente e todos os tipos de perdas energéticas, por um elemento amortecedor equivalente; isto é, a análise aborda apenas um grau de liberdade (GDL). Já para a segunda abordagem, Figura 8c, as massas do motociclo e do motociclista são analisadas em conjunto, enquanto a massa de cada roda, a rigidez de cada pneu, bem como a rigidez e amortecimento de cada longarina são separados para a investigação; assim sendo, a análise possui três GDLs ou três conjuntos massa-mola-amortecedores (dois inferiores paralelos entre si com amortecimento nulo e um superior com duas fontes de dissipação, dois elementos de rigidez e uma massa). De forma geral, os GDLs representam movimentos relativos entre massas do sistema; em outras palavras, afirmar que toda a massa pode ser representada apenas por um elemento é o mesmo que dizer que as massas não possuem movimento relativo entre si (SCHMITZ & SMITH, 2012; RAO, 2011).



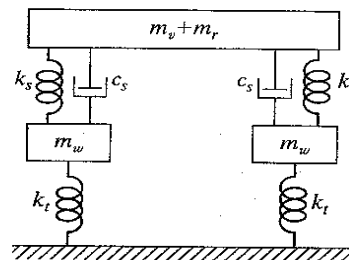
(a)

Índices

t : pneu v : veículo
 w : roda r : motociclista
 s : longarina eq : equivalente



(b)



(c)

Figura 8- Análise de problemas envolvendo vibrações mecânicas. Fonte: Adaptado de Rao (2011)

Para o estudo de SMVs, deve-se ter a clareza que o caráter da fonte de excitação e dos elementos do sistema não são únicos; melhor dizendo, há diversas formas de excitar o mesmo sistema bem como diversas formas de seus componentes responderem a esse estímulo. Nomeadamente, caso o sistema seja excitado por uma força de magnitude conhecida em todo o intervalo de tempo, diz-se que a excitação é determinística; caso contrário, diz-se que a mesma é aleatória. Adicionalmente, sendo o sistema excitado de forma periódica, a vibração é denominada harmônica; de outra forma, a mesma é classificada como transiente. Além disso, se todos os elementos do sistema comportarem-se de forma linear, as equações que descrevem a dinâmica do fenômeno são lineares e técnicas matemáticas são utilizadas para resolvê-las, senão, outros tipos de abordagem devem ser empregadas e a vibração é dita não linear (RAO, 2011; KELLY, 2012).

O amortecimento sempre se opõe ao movimento do sistema e depende dos elementos do mesmo, o que faz com que diversas formas de amortecimento sejam possíveis. Entre as formas mais comuns, destacam-se o amortecimento por atrito viscoso,

por atrito seco (ou amortecimento de Coulomb) e por histerese. Primeiramente, a força não conservativa decorrente do atrito viscoso aumenta linearmente com a velocidade (primeira derivada da posição em relação ao tempo) da massa em análise; esta força depende da frequência e é equacionada através do coeficiente de amortecimento, c ; devido à sua simplicidade, outras formas de amortecimento são geralmente aproximadas por um amortecimento viscoso equivalente. A segunda forma de perda energética, é decorrente do atrito seco, que se origina de movimentos relativos entre elementos do sistema, sua força não depende da frequência ou amplitude de vibração, e em primeira instância é tida como constante. Por último, o amortecimento histerético ocorre em materiais sólidos; alguns modelos sugerem que a energia dissipada por ciclo através deste tipo de amortecimento é quase independente da frequência de excitação e é proporcional ao quadrado da amplitude; contudo, outros modelos estabelecem relações para a taxa de amortecimento dependes da frequência de excitação (BEARDS, 1995; GENTA & AMATI, 2010).

No caso de sistemas amortecidos por ligas com memória de forma, o amortecimento histerético torna-se mais relevante aos estudos. Assim, maior atenção deve ser dada a esse fenômeno. De forma resumida, pode-se afirmar que não existe um valor único para o amortecimento de um determinado material e que a energia dissipada é equivalente a área do ciclo de histerese do mesmo, como mostrado na Figura 9 (nela, tensão mecânica é aplicada e removida do material, que responde diferentemente durante sua aplicação e remoção); como esta área depende de diversos fatores, como frequência de excitação, é de esperar que o amortecimento também dependa (VAN HUMBEECK, 2003).

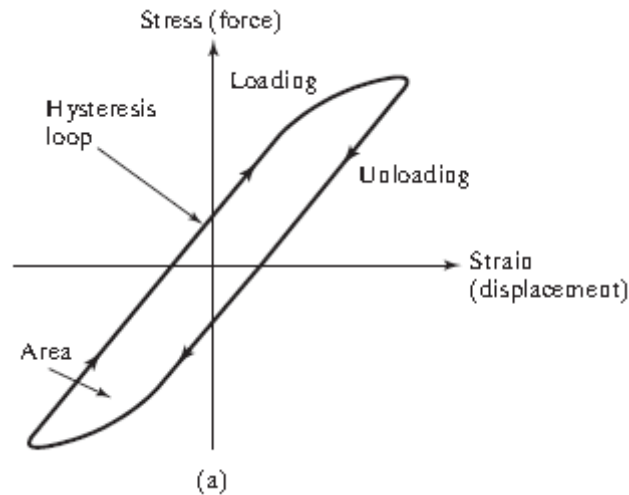


Figura 9- Loop de histerese. Fonte: Adaptado de Rao (2011)

Igualmente ao GDL e ao amortecimento, a natureza de excitação do sistema também é utilizada para sua classificação. Especificamente, vibração livre é o termo utilizado quando, após ser removido de sua posição de equilíbrio, o sistema não sofre interferência de nenhuma força externa; ou seja, apenas forças inerentes ao sistema interferem na dinâmica do processo. Por outro lado, quando forças externas atuam no sistema após este ter sido removido de sua posição de equilíbrio, o termo vibração forçada é utilizado (THOMSON & DAHLEH, 1998).

2.3-1. Modelação de SMVs

Sistemas mecânicos vibratórios podem ser simplesmente modelados por somatório de forças, como apresentado na Figura 10. Nela, o diagrama físico de um sistema com um grau de liberdade é apresentado à esquerda e o seu respectivo diagrama de corpo livre à direita. Note-se que enquanto a força harmônica f atua no sentido do movimento, a força proveniente da dissipação de energia e a força de restituição (elástica) do sistema atuam no sentido contrário. Além disso, a força elástica varia com a posição ao passo que a de amortecimento (neste caso, viscoso) varia com a velocidade da massa m (THOMSON & DAHLEH, 1998).

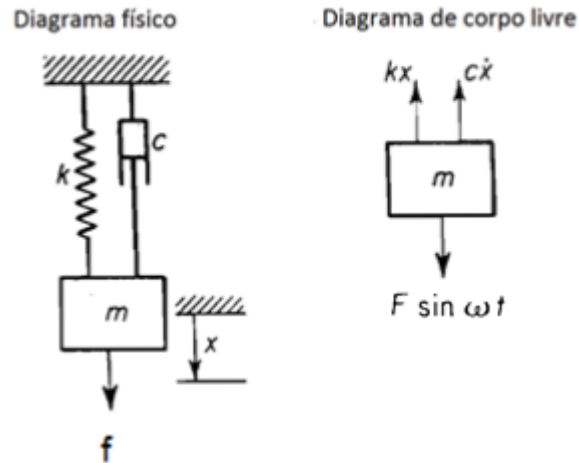


Figura 10- Modelação de SMV linear. Fonte: Adaptado de Thomson & Dahleh (1998)

Para o caso da vibração linear harmônica com um GDL apresentado na Figura 10, o somatório de forças fornece a equação (32).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \sin \omega t \quad (32)$$

Note-se que F representa a amplitude da força harmônica f e que, por se tratar de uma equação diferencial linear, a solução a equação (32) pode ser obtida de forma algébrica e é representada pela equação (33)

$$x = X \sin(\omega t - \phi) \quad (33)$$

onde a amplitude de movimento, X , é expressa como

$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad (34)$$

e o ângulo de fase, ϕ (que representa um atraso entre sinal de entrada, f , e resposta, x), é calculado como

$$\phi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (35)$$

A modelação anterior é simples e teoricamente forneceria a solução exata do sistema. Contudo, em problemas envolvendo vibrações não lineares, poucas soluções exatas existem; para os casos onde os elementos de LMF são utilizados, a resolução explícita do problema não é possível e métodos numéricos devem ser utilizados (KELLY, 2012; LEO, 2007).

2.4- Adimensionalização de equações diferenciais

Como pode ser observado na equação 32, as equações dinâmicas apresentam parâmetros (neste caso, m , c , k , F e ω) e variáveis (aqui, \ddot{x} , \dot{x} , x e t). Adicionalmente, por vezes, torna-se conveniente (ou necessário) o uso de números adimensionais para análise e comparação de equações e seus respectivos resultados. Estes números tendem a simplificar o entendimento físico da formulação matemática por dois motivos. Primeiramente, reduzem o número de parâmetros utilizado para representar o sistema (estes não são eliminados, mas são agrupados para formar novos parâmetros); além disso, trabalham de forma a negligenciar termos “pequenos” em relação a termos mais significativos (FOX, PRITCHARD, & MCDONALD, 2010; RUZICKA, 2008).

2.5- Solução de equações diferenciais não lineares

Uma forma simples de interpretar a solução numérica de equações diferenciais pode ser ilustrada pelo método de Euler para equações de primeira ordem. Para este método, as equações devem apresentar solução única e não podem exibir mudanças abruptas no intervalo analisado. Satisfeitas essas duas condições, torna-se ainda necessário conhecer-se um valor inicial do problema, isto é, para um valor de domínio predeterminado, um valor de imagem deve ser conhecido. Assim, como representado na Figura 11, conhecendo-se a expressão para a primeira derivada da equação (\dot{x}) bem como o par imagem e domínio (x_0 e t_0) num determinado ponto dito inicial (neste caso, ponto

“0”), pode-se aproximar a curva real da função, $x = f(t)$, por uma reta de inclinação \dot{x}_0 de um ponto conhecido até outro desejado (x_0 e x_1 , respectivamente). A partir de então, de ponto a ponto, é possível utilizar um método iterativo para aproximações sucessivas do valor de x (CONTE & BOOR, 1980).

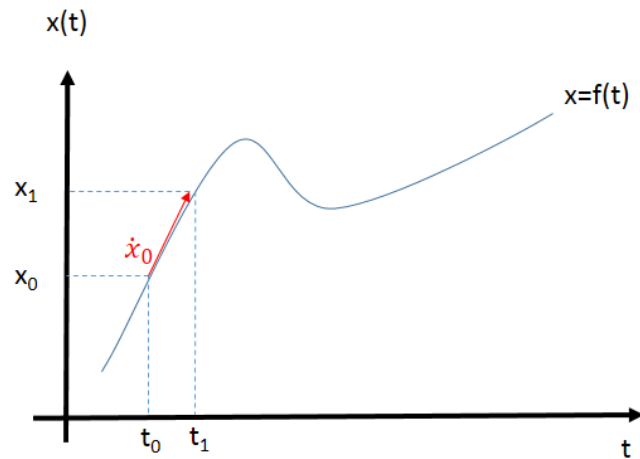


Figura 11- Método de Euler para solução numérica de equações diferenciais ordinárias

Quando o método descrito anteriormente é utilizado para obter soluções aproximadas de equações de primeira ordem, ele é caracterizado pelas equações (36) e (73) (CONTE & BOOR, 1980). Como o método de Euler para o presente trabalho tem cunho apenas ilustrativo, sua aplicação em equações de ordem superior é omitida.

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (36)$$

onde Δt , que representa a diferença entre dois pontos do domínio, é denominado passo

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i \quad (37)$$

onde i é um número natural e seu maior valor, z , é dado pelo número de pontos aproximados decrescido de uma unidade (o valor inicial conhecido)

Prosseguindo, o método de Euler é derivado do teorema de Taylor (que permite realizar aproximações de funções deriváveis em torno de um ponto escolhido) e utiliza-se apenas da primeira ordem deste teorema. Assim, uma forma de aumentar propriedades de convergência do método seria utilizar-se de mais ordens do Teorema. Contudo, esse aumento de propriedades seria acompanhado de um aumento no custo computacional (devido a necessidade de cálculo e avaliação de derivadas). Uma forma de contornar esse problema é pelo uso de métodos Runge- kutta, que extingue este custo e trunca os erros na mesma ordem daqueles que seriam obtidos pela aplicação de métodos provenientes de ordens superiores do Teorema de Taylor (BURDEN & FAIRES, 2011).

Com lógica apresentada para o método de Euler, mas utilizando-se da ponderação entre 4 inclinações para reta a ser utilizada, o método de Runge- Kutta de ordem quatro (onde o número da ordem refere-se ao número de inclinações a serem calculadas) para aproximação de equações de primeira ordem resume-se ao uso das Equações (38), (39), (40), (41), (42), (43) e (44)

$$f(t_i, x_i) = \dot{x}_i \quad (38)$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, z$;

$$k_{1i} = \Delta t f(t_i, x_i) \quad (39)$$

$$k_{2i} = \Delta t f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_{1i}}{2}\right) \quad (40)$$

$$k_{3i} = \Delta t f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_{2i}}{2}\right) \quad (41)$$

$$k_{4i} = \Delta t f(t_i + \Delta t, x_i + k_{3i}) \quad (42)$$

$$k_i = \frac{(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i})}{6} \quad (43)$$

$$x_{i+1} = x_i + k_i \quad (44)$$

onde k_1, k_2, k_3 e k_4 são as diferentes inclinações utilizadas para a obtenção de uma inclinação ponderada, k , da reta. Para o cálculo do valor aproximado da função no ponto $i+1$ (equação (44)) a parcela k_i não é multiplicada pelo passo, pois essa operação já realizada no cálculo de cada uma das inclinações, equações (39), (40), (41) e (42).

Quando este método é utilizado para a solução de equações de ordem superior, n , faz-se necessário reduzir a ordem da equação através de uma troca de variáveis e solucionar um sistema de equações diferenciais de ordem $n-1$. As equações utilizadas neste método são similares aquelas para ordem 1; no entanto, as funções f , equação (38), são definidas com $n+1$ variáveis e não somente uma. Em outras palavras, para casos onde exista uma equação diferencial de ordem 2, um sistema de duas equações de ordem 1, equação (45), deve ser resolvido e são necessários 2 valores iniciais do problema. Dessa forma, as equações (45) a (54) são resolvidas em cada passo de iteração

$$\begin{cases} f_1(t_i, x_i, y_i) = \dot{x}_i \\ f_2(t_i, x_i, y_i) = \dot{y}_i \end{cases} \quad (45)$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, z$. Onde as variáveis y e \dot{y}_i são obtidas da troca de variáveis

$$k_{1ij} = \Delta t f_j(t_i, x_i, y_i) \quad (46)$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, z$. Onde j relaciona a inclinação k a ser calculada com sua respectiva equação f_j

$$k_{2i_1} = \Delta t f_1 \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_{1i_1}}{2}, y_i + \frac{k_{1i_2}}{2} \right) \quad (47)$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, z$;

$$k_{2i_2} = \Delta t f_2 \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_{1i_1}}{2}, y_i + \frac{k_{1i_2}}{2} \right) \quad (48)$$

$$k_{3i_1} = \Delta t f_1 \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_{2i_1}}{2}, y_i + \frac{k_{2i_2}}{2} \right) \quad (49)$$

$$k_{3i_2} = \Delta t f_2 \left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, x_i + \frac{k_{2i_1}}{2}, y_i + \frac{k_{2i_2}}{2} \right) \quad (50)$$

$$k_{4i_1} = \Delta t f_1(t_i + \Delta t, x_i + k_{3i_1}, y_i + k_{3i_2}) \quad (51)$$

$$k_{4i_2} = \Delta t f_2(t_i + \Delta t, x_i + k_{3i_1}, y_i + k_{3i_2}) \quad (52)$$

$$k_{ij} = \frac{(k_{1ij} + 2k_{2ij} + 2k_{3ij} + k_{4ij})}{6} \quad (53)$$

para $j = 1$ e 2 ;

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta t (k_{i1}) \\ y_{i+1} = y_i + \Delta t (k_{i2}) \end{cases} \quad (54)$$

Outro forma numérica de obter soluções aproximadas para equações diferenciais não lineares é o denominado método das diferenças finitas. Este método é utilizado para solucionar problemas com valores de contorno (isto é, onde distintos valores de imagem

são conhecidos para seu respectivo domínio, que por sua vez são diferentes) e aproxima derivadas por expressões algébricas. Basicamente, há três formas de utilizar este método: diferença em avanço, diferença em atraso e diferença central (*Forward, backward, and central differences*). Além disso, como no método anterior, este método discretiza o intervalo de análise em N subintervalos de comprimento Δt desde o primeiro valor de domínio, t_0 , até um valor t_n desejado. Por outras palavras, novamente tem-se $i = 1, 2, 3, \dots, z$. O conjunto de pontos formados por esse processo é denominado malha (ou grade de pontos); a Figura 12 exhibe essa discretização (JACQUES & JUDD, 1987; RAO, 2011).

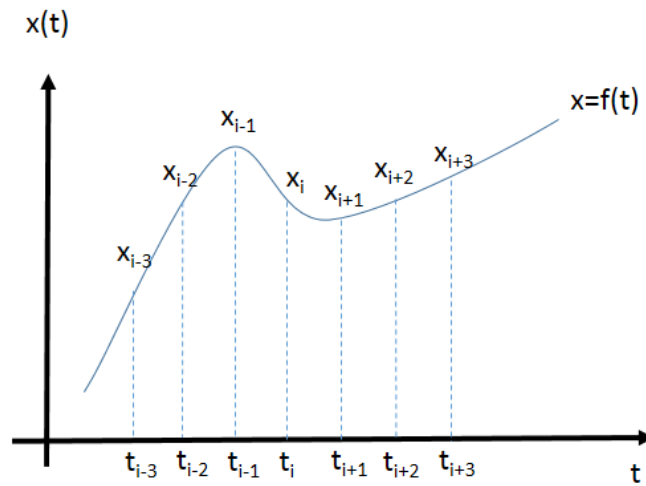


Figura 12- Malha

Na Figura 12, os valores de x_{i+1} , x_{i-1} , x_{i+2} e x_{i-2} (equivalentes a $x_{t+\Delta t}$, $x_{t-\Delta t}$, $x_{t+2\Delta t}$ e $x_{t-2\Delta t}$) podem ser escritos a partir do valor de x_i (ou x_t) com o auxílio de expansões em séries de Taylor como demonstrado nas equações (55), (56), (57) e (58) (JAAN KIUSALAAS, 2005).

$$x_{i+1} = x_{t+\Delta t} = x_t + \Delta t \dot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{x}_t + \frac{\Delta t^4}{24} x_t^{(4)} \dots \quad (55)$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, z$;

$$x_{i-1} = x_{t-\Delta t} = x_t - \Delta t \dot{x}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{x}_t - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{x}_t + \frac{\Delta t^4}{24} x_t^{(4)} \dots \quad (56)$$

$$x_{i+2} = x_{t+2\Delta t} = x_t + 2 \Delta t \dot{x}_t + \frac{(2 \Delta t)^2}{2} \ddot{x}_t + \frac{(2 \Delta t)^3}{6} \dddot{x}_t + \frac{(2 \Delta t)^4}{24} x_t^{(4)} \dots \quad (57)$$

$$x_{i-2} = x_{t-2\Delta t} = x_t - 2\Delta t \dot{x}_t + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \ddot{x}_t - \frac{(2\Delta t)^3}{6} \dddot{x}_t + \frac{(2\Delta t)^4}{24} x_t^{(4)} \dots \quad (58)$$

Pela realização de manipulações algébricas e pela desconsideração de termos a partir da terceira ordem (que teriam magnitude desprezíveis), as equações (59) e (60) são obtidas para aproximar os valores da primeira e segunda derivada nos ponto de análise. Observe-se que subíndice do ponto a ser aproximado, t , fica entre os pontos de expansão, $t + \Delta t$ e $t - \Delta t$, o que caracteriza o método de diferença centrada. Da mesma forma, as Equações (61) e (62) aproximam os valores da primeira e segunda derivada no ponto de interesse para o método de diferença em avanço e equações (63) e (64) fazem o mesmo para o método de diferença em atraso (JAAN KIUSALAAS, 2005; JACQUES & JUDD, 1987; LEO, 2007).

$$\dot{x}_i \approx \dot{x}_t \approx \frac{1}{2\Delta t} (x_{t+\Delta t} - x_{t-\Delta t}) \quad (59)$$

para cada $i = 1, 2, 3, \dots, z$;

$$\ddot{x}_i \approx \ddot{x}_t \approx \frac{1}{\Delta t^2} (x_{t+\Delta t} - 2x_t + x_{t-\Delta t}) \quad (60)$$

$$\dot{x}_t \approx \frac{1}{\Delta t} (x_{t+\Delta t} - x_t) \quad (61)$$

$$\ddot{x}_t \approx \frac{1}{\Delta t^2} (x_{t+2\Delta t} - 2x_{t+\Delta t} + x_t) \quad (62)$$

$$\dot{x}_t \approx \frac{1}{\Delta t} (x_t - x_{t-\Delta t}) \quad (63)$$

$$\ddot{x}_t \approx \frac{1}{\Delta t^2} (x_{t-2\Delta t} - 2x_{t-\Delta t} + x_t) \quad (64)$$

No caso de problemas de valores de contorno, a metodologia descrita acima seria suficiente para solucionar problemas envolvendo equações diferenciais. Detalhes específicos para a utilização do método de diferenças finitas em problemas que abrangem o comportamento pseudoelástico de ligas com memória de forma, o que representa um problema de valor inicial, são demonstrados por Pinto (2011).

3. Metodologia

Neste capítulo, são apresentadas as características da abordagem utilizada para o modelamento dos SMVs utilizados. Neste sentido, são apontadas hipóteses simplificadoras e características do material de LMF, bem como a conexão entre o modelo de Brinson (1993) e os fenômenos relacionados a dinâmica do sistema. Adicionalmente, as simplificações das equações utilizadas no modelo obtido são descritas e as condições de simulação através do programa MATLAB[®] são retratadas.

3.1- Abordagem inicial

De forma teórica, foram analisados os efeitos da utilização da LMF como componentes de sistemas mecânicos vibratórios sob a ação de excitação harmônica. Especialmente, o sistema em questão será avaliado como sendo um sistema de um grau de liberdade.

Esse estudo teve auxílio computacional para simulação do comportamento dos fenômenos envolvidos; mais especificamente, as equações obtidas foram implementadas no programa MATLAB[®] (R2013b). Além disso, o modelo com cinética de transformação de fase de Brinson (1993) foi utilizado para caracterizar o comportamento do material.

Para o início do processo, foi utilizada a simplificação de um SMV como exibida na Figura 13. Nela, à esquerda, o diagrama físico apresenta a barra (ou haste) de LMF abaixo da massa em análise (observa-se que para a análise proposta, este elemento não apresenta curvatura) sendo tracionado por uma força inicial, f_i . Já, no diagrama de corpo livre (à direita), além da força inicial há uma força harmônica, $f_e(t)$, atuando no sentido do deslocamento $x(t)$ enquanto a força exercida pela presença da LMF, $f_{LMF}(t)$, atua no sentido contrário do mesmo. Ademais, uma força dissipativa, $f_p(t)$, agindo no mesmo sentido à $f_{LMF}(t)$ representará mecanismos de dissipação não relacionados a LMF presentes na estrutura e L.E.E representa a linha de equilíbrio estático do sistema.

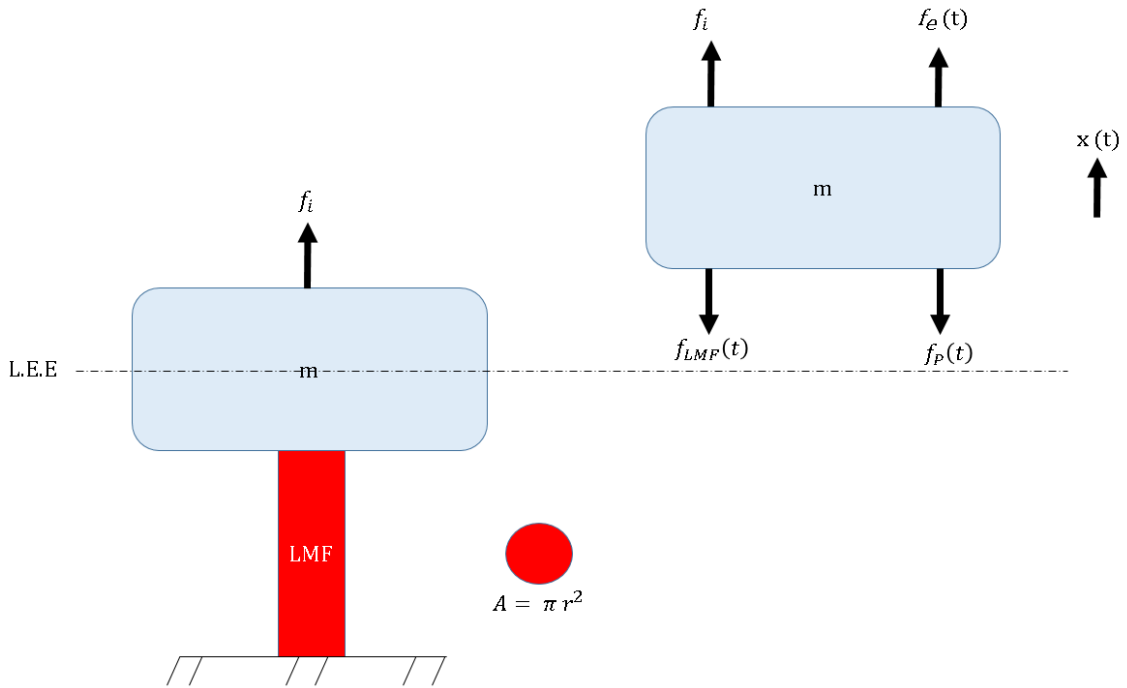


Figura 13- SMV abordado (diagrama físico à esquerda e diagrama de corpo livre à direita)

3.2- Equacionar

Pelo mesmo tratamento utilizado para estabelecer a equação (32), através do somatório de forças que atuam sobre a massa, a equação (65) foi obtida como se segue.

$$m x''(t) = f_e(t) + f_i - f_{LMF}(t) - f_P(t) \quad (65)$$

A força dissipativa de mecanismos não concernentes aos fenômenos característicos das LMF, $f_P(t)$, foi aproximada por uma força de amortecimento viscosa, como exibido na equação (66)

$$f_P(t) = c x'(t) \quad (66)$$

Além disso, a força decorrente da presença do LMF foi escrita como a soma entre duas parcelas: uma estática (reação à força inicial f_i) e uma dinâmica (reação à força externa $f_e(t)$).

$$f_{LMF}(t) = f_{LMF_i} + f_{LMF_e}(t) \quad (67)$$

Desta forma, o somatório de forças pôde ser descrito pela equação (68)

$$m x''(t) = f_e(t) + f_i - (f_{LMF_i} + f_{LMF_e}(t)) - c x'(t) \quad (68)$$

Apesar de a pré- carga, f_i , ser equilibrada pela parcela f_{LMF_i} antes da imposição da força dinâmica externa (como representa o diagrama físico da Figura 13), o que, para molas lineares, não alteraria a dinâmica do sistema, aqui, torna-se mais conveniente não cancelar estes termos para que a resposta não linear do material possa ser corretamente descrito na presença de pré-cargas. Desta forma, simplificou-se a equação (68), como exibido na equação (69).

$$m x''(t) = f_{ei}(t) - f_{LMF_{ei}}(t) - c x'(t) \quad (69)$$

onde $f_{ei}(t)$ representa a soma de f_i e $f_e(t)$ (forças estática e dinâmica aplicada sobre a liga) e $f_{LMF_{ei}}(t)$, a soma de f_{LMF_i} e $f_{LMF_e}(t)$ (reação da liga às forças estáticas e dinâmicas).

Dando continuidade, a força $f_{LMF_{ei}}(t)$ foi reescrita a partir da tensão mecânica, $\sigma_{LMF}(t)$, que a mesma exercia sobre a área, A , do elemento de LMF

$$f_{LMF_{ei}}(t) = \sigma_{LMF_{ei}}(t) A \quad (70)$$

Complementarmente, a força externa, $f_e(t)$, foi estabelecida como se segue

$$f_e(t) = F_{max} \text{sen}(w_e t) \quad (71)$$

onde F_{max} representa a amplitude e w_e a frequência de excitação, respectivamente.

Como consequência, a equação dinâmica do problema foi reestabelecida como

$$m x''(t) + c x'(t) + \sigma_{LMF_{ei}}(t)A = F_{max} \text{sen}(w_e t) + f_i \quad (72)$$

Para resolução da equação diferencial, como sugerido por Boyce & Diprima (2006), inicialmente removeu-se a dependência da variável independente definindo-se $x := x(t)$, $x' := x'(t)$, $x'' := x''(t)$. Desta forma, reescreveu-se a equação 72 como

$$m x'' + c x' + \sigma_{LMF_{ei}}(t)A = F_{max} \text{sen}(w_e t) + f_i \quad (73)$$

Na sequência, a fim de aprimorar a implementação do modelo proposto, variáveis adimensionais foram utilizadas para simplificar a equação (73). A Tabela 1 demonstra-as na segunda coluna; já a primeira e terceira coluna exibem seu significado físico e sua relação com as variáveis dimensionais. Nela, L corresponde ao comprimento da barra e \hat{w} , à frequência natural do sistema no estado de referência (isto é, para a barra na fase austenítica). Detalhes das operações matemáticas envolvidas são exibidas no Apêndice A

Tabela 1- Adimensionalização

Variável adimensional	Símbolo	Relação
Tempo	τ	$\tau = \hat{w} t$
Posição	y	$y = \frac{x}{L}$
Velocidade	\dot{y}	$\dot{y} = \frac{x'}{\hat{w}L}$
Aceleração	\ddot{y}	$\ddot{y} = \frac{x''}{\hat{w}^2 L}$

Após a parametrização das variáveis citadas, realizaram-se ainda outras simplificações. Primeiramente, o fator de amortecimento de referência, $\hat{\zeta}$, foi obtido pela equação (74) (KELLY, 2012).

$$\hat{\zeta} = \frac{c}{\sqrt{\hat{k} m}} \quad (74)$$

posteriormente, a rigidez à tração para o estado de referência da barra foi determinada pela equação (75) (BALACHANDRAN & MARGRAB, 2011).

$$\hat{k} = \frac{A\hat{E}}{L} \quad (75)$$

onde \hat{E} é o módulo de elasticidade deste estado.

Além disso, a razão de frequências foi processada pela equação (76)

$$\hat{\phi} = \frac{w_e}{\hat{w}} \quad (76)$$

Desta forma, o modelo dinâmico do sistema foi reescrito de acordo com a equação (77)

$$\ddot{y} + 2\hat{\zeta}\dot{y} + \frac{\sigma_{LMF_{ei}}(t)}{\hat{E}} = \frac{F_{max}sen(\hat{\phi}\tau) + f_i}{\hat{E}A} \quad (77)$$

Note-se que, apesar da simplificação adotada, o termo referente à tensão dinâmica da barra ainda depende da variável t . Adicionalmente, ainda não seria possível resolver a equação (77) com a implementação da equação termomecânica constitutiva, equação (1), uma vez que $\sigma_{LMF_{ei}}$ depende da fração martensítica, e isotermicamente, por

sua vez a fração martensítica depende da tensão (equação (6) ou equação (12)). Desta forma, como apresentado por Elahinia & Ahmadian (2005), a equação (1) foi modificada e adaptada como a seguinte expressão,

$$\sigma'_{LMF_{ei}}(t) = E\varepsilon'(t) - \varepsilon_r E \delta'(t) \Rightarrow \sigma'_{LMF_{ei}} = E\varepsilon' - \varepsilon_r E \delta' \quad (78)$$

assim, na forma adimensional, temos que:

$$\dot{\sigma}_{LMF_{ei}} = E\dot{\varepsilon} - \varepsilon_r E \dot{\delta} \quad (79)$$

onde a taxa de deformação foi escrita como:

$$\varepsilon' = \frac{x'}{L} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{x}}{L} = \dot{y} \quad (80)$$

Complementarmente, a taxa de transformação martensítica, foi obtida das derivadas da equação (6) ou da equação (12) a depender das condições de temperatura e carga aplicada. Isto é, para transformação direta

$$\dot{\delta} = -\frac{(1 - \delta_{S0}) \pi \dot{\sigma}_{LMF_{ei}}}{2 (\sigma_S^{crit} - \sigma_F^{crit})} \text{sen} \left\{ \frac{\pi}{\sigma_S^{crit} - \sigma_F^{crit}} [\sigma_{LMF_{ei}} - \sigma_F^{crit} - C_M(T - M_S)] \right\} \quad (81)$$

Já para a transformação inversa

$$\dot{\delta} = \frac{\delta_0 a_A \dot{\sigma}_{LMF_{ei}}}{2 C_A} \left\{ \text{sen} \left[a_A \left(T - A_S - \frac{\sigma_{LMF_{ei}}}{C_A} \right) \right] \right\} \quad (82)$$

Além disso, para regiões lineares do campo carga e deformação, $\dot{\delta} = 0$. Desta forma, pôde-se reescrever a equação (78)

$$\dot{\sigma}_{LMF_{ei}} = E\dot{y} - \varepsilon_r E \dot{\delta} \quad (83)$$

Conseqüentemente, a equação (77) pôde ser reescrita como

$$\ddot{y} + 2\hat{\zeta}\dot{y} + \frac{\sigma_{LMF_{ei}}}{\hat{E}} = \frac{F_{max} \text{sen}(\hat{\phi}\tau) + f_i}{\hat{E}A} \quad (84)$$

Assim, a resposta dinâmica do sistema foi obtida pela resolução simultânea das equações (84), (83) e (82) ou (81) para regiões de transformação de fase; ao passo que, para regiões sem transformação, a resolução de (84) e (83), assumindo $\dot{\delta} = 0$, solucionaria o problema em questão. Note-se que a equação (84) era uma equação diferencial não linear devido à presença do termo $\sigma_{LMF_{ei}}$; portanto, o método de Runge-Kutta precisou ser utilizado para obtenção de sua solução.

É necessário destacar que a tensão proveniente de f_i (equação (68)) não era necessariamente igual à σ_0 (equação (1)). Isto é, enquanto σ_0 tem origem no modelo de Brinson (1993) e depende da região de análise na curva tensão-deformação do material, σ_i tem origem na dinâmica do sistema e representa a pré carga à qual este foi submetido. O mesmo era válido para ε_r e ε , que também não eram necessariamente iguais; ou seja, ao passo que o primeiro representa uma característica do material, o segundo é tido como sua deformação decorrente de esforços mecânicos. Complementarmente, como exibido na equação (80), foi assumido que haveria apenas deformação axial (unidimensional) e que esta poderia ser equacionada como a razão entre o deslocamento do sistema (devido à pré carga e à tensão externa) e o comprimento inicial, L, do elemento de LMF.

A partir de então, foi iniciado um processo iterativo para resolver a equação em cada ponto de interesse.

3.3- Simulação

Após a implementação do modelo de Brinson (1993), o mesmo foi adaptado para descrever o comportamento de LMF sobre compressão; resumidamente, o modelo foi ajustado para descrever o comportamento do material para $-1 \leq \delta \leq 1$, diferentemente do que ocorre no modelo original, cujo domínio resume-se a $0 \leq \delta \leq 1$.

Assim, foram criados algoritmos contento o modelo adaptado, as equações da dinâmica do problema, equações do Runge Kutta de 4ª ordem, e propriedades referentes tanto ao material quanto ao sistema. Desta forma, a variável independente do modelo foi o tempo adimensional, τ , e as dependentes foram a aceleração, a velocidade e deslocamentos adimensionais (isto é $\ddot{y}(\tau)$, $\dot{y}(\tau)$, $y(\tau)$). Assim, a equação adimensional do problema foi solucionada e as conversões necessárias feitas para obtenção da resposta em termos de variáveis dimensionais (como t e x) foram realizadas ao final de acordo com a Tabela 1. Com isso, gráficos da resposta do sistema puderam ser gerados para posterior comparação com trabalhos consultados.

3.4- Comparação entre resultados obtidos e sugeridos

Após a conceção de um modelo que contemplava os algoritmos citados, os resultados obtidos foram comparados com aqueles sugeridos por Brinson (1993), Paiva & Savi (1999), Leo (2007), Pinto (2011) e por Paula, M. *et al.* (2015) a fim de verificar a validade do mesmo. De forma geral, cada um dos trabalhos utilizados para comparações possuíam singularidades importantes para validação do algoritmo proposto. Mais especificamente, Brinson (1993) mostrou o comportamento do material sob cargas de tração sob um carregamento a partir de uma carga nula seguido de um descarregamento retornando ao ponto inicial. Na sequência, Paiva & Savi (1999) realizaram simulações referentes a possíveis *subloops* que o material poderia estar sujeito sob cargas de tração. Posteriormente, Leo (2007) abordou o comportamento de sistemas dinâmicos expostos a cargas de tração e amortecidos por LMFs, o que também foi alvo de estudos em Pinto (2011). Finalmente, Paula, M. *et al.* (2015) apresentam o resultado de simulações envolvendo *subloops* para esforços de tração e compressão baseados no modelo de Brinson (1993). Basicamente, todas as comparações foram realizadas de forma gráfica e são baseadas em resultados numéricos dos trabalhos em questão.

Desde modo, a Tabela 2 apresenta as propriedades da liga utilizadas para a comparação com os resultados apresentados por Brinson (1993) e por Paiva & Savi (1999). Complementarmente, a temperatura de simulação foi fixada como 60 [°C] para ambos os casos.

Tabela 2 - Propriedades do Nitinol. Fonte: Paiva & Savi (1999)

Módulo de elasticidade (GPa)	Temperaturas finais de transformação (°C)	Constantes de transformação (MPa/°C)	Tensões de transformação (MPa)	Deformação residual máxima
$D_A = 67$	$M_F = 9$ $M_S = 18.4$	$C_M = 8$	$\sigma_s^{crit} = 100$	$\varepsilon_r = 0.067$
$D_M = 26.3$	$A_S = 34.5$ $A_F = 49$	$C_A = 13.8$	$\sigma_f^{crit} = 170$	

Leo (2007) e Pinto (2011) utilizaram o modelo de Brinson (1993); no entanto, de forma diferente do trabalho atual, os autores fizeram uma abordagem baseada no método de diferenças finitas e no equacionamento do zero de funções. Além disso, os dados presentes na Tabela 3 foram empregados para simular duas condições de carregamento harmônico variando-se a frequência da carga externa (a oitava e nona linha). Note-se que nesta tabela, as propriedades referentes à liga foram exibidas na primeira coluna enquanto as propriedades referentes às condições de simulação e temperatura foram mostradas na segunda coluna.

Tabela 3 - Propriedades utilizadas por Leo (2007) e Pinto (2011) para simulação dinâmica de sistemas amortecidos por LMF

Material	Dinâmica e simulação
$C_M = C_A = 11 \text{ MPa/}^\circ\text{C}$	$m = 25 \text{ Kg}$
$M_F = 8^\circ\text{C}$	$L = 50 \text{ cm}$
$A_S = 15^\circ\text{C}$	$c = 40.8 \text{ N.s/m}$
$M_S = 13^\circ\text{C}$	$A = 3.14 \text{ mm}^2$
$A_F = 17^\circ\text{C}$	$T = 27^\circ\text{C}$
$\varepsilon_r = 0.07$	$\sigma_i = 110 \text{ MPa}$ ($f_i = 345.4 \text{ N}$)
$E_M = E_A = 13 \text{ GPa}$	$w_{e1} = 10\pi$ (5Hz)
$\sigma_s^{crit} = 0$	$w_{e2} = 18\pi$ (9Hz)
$\sigma_f^{crit} = 55 \text{ MPa}$	$F_{max} = 20 \text{ N}$

Dando continuidade, apesar de também implementar o modelo proposto por Brinson (1993) nas suas simulações, Paula, M. *et al.* (2015) utilizaram-se de propriedades com valores diferentes, que por sua vez são retratadas na Tabela 4. Além disso, os autores trabalharam as propriedades térmicas em relação à temperatura medida em [K], ao invés de [°C]; contudo, no presente trabalho, estas propriedades foram convenientemente convertidas para sanar as relações em [°C].

Tabela 4 - Propriedades do Nitinol. Fonte: Paula, M. *et al.* (2015)

Módulo de elasticidade (GPa)	Temperaturas finais de transformação (°C)	Constantes de transformação (MPa/°C)	Tensões de transformação (MPa)	Deformação residual máxima
$D_A = 57$	$M_F = 12$ $M_S = 22$	$C_M = 9$	$\sigma_s^{crit} = 90$	$\varepsilon_r = 0.0555$
$D_M = 42$	$A_S = 47$ $A_F = 60$	$C_A = 8.5$	$\sigma_f^{crit} = 170$	

3.5- Uso do algoritmo

Com demonstrações suficientes de que o algoritmo poderia modelar sistemas mecânicos vibratórios perante hipótese de comportamento simétrico do material sob tensão ou compressão, foi realizada uma simulação baseada nas propriedades da Tabela 2 e nos parâmetros da Tabela 5. Note-se que a frequência de excitação utilizada foi bem próxima da frequência natural do material na fase de referência (austenite); mais especificamente, a frequência natural para esta fase nas condições apresentadas seria cerca de $41,3 \pi$ [rad/s] (20,65 [Hz]); contudo, como mostrado por Lagoudas (2008), a máxima frequência de atuação para aplicação de LMFs é de aproximadamente 40π [rad/s] (20 [Hz]).

Tabela 5 - Dados de entrada para simulação dinâmica

$m = 25$ Kg
$L = 50$ cm

$$c = 40.8 \text{ N.s/m}$$

$$A = 3.14 \text{ mm}^2$$

$$T = 60^\circ\text{C}$$

$$\sigma_i = 30 \text{ Mpa } (f_i = 94.2 \text{ N})$$

$$w_e = 40\pi \text{ (20Hz)}$$

$$F_{\max} = 1000 \text{ N}$$

$$\tau_{\max} = 649$$

4. Resultados e discussão

Todos os resultados calculados, bem como aqueles consultados, foram obtidos numericamente. A Figura 14 exibe a comparação entre os resultados obtidos pelo algoritmo proposto e aqueles apresentados por Brinson (1993). À direita, é demonstrado o laço de histerese para temperatura de 60 [°C] enquanto à esquerda, além desta curva, outros comportamentos são expostos (para 40, 20 e 12 [°C], respetivamente); no entanto, estes não são de interesse do presente trabalho pois, aqui, apenas o laço completo será avaliado, isto é, em todas as simulações realizadas, a temperatura adotada foi assumida ser maior que A_F .

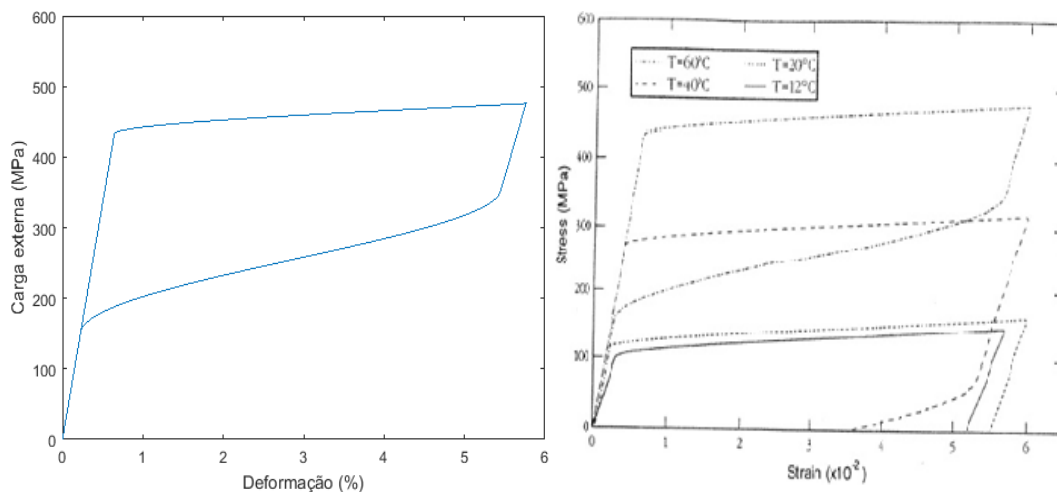


Figura 14 – Comparação entre laço de histerese completo obtido para $T=60$ [°C] (à esquerda) e resultados sugeridos por Brinson (1993).

Com a imagem, é razoável afirmar que o algoritmo proposto se comportou de forma adequada e que, se houve alguma discrepância entre as curvas, para $T=60$ [°C], estas podem ter ocorrido como uma consequência da falta de informação relativa a tensão máxima aplicada sob a liga. Em outras palavras, na simulação, assumiu-se que a tensão máxima foi de 476 [Mpa], mas essa informação foi obtida apenas pela observação da imagem à direita, uma vez que não havia o valor exato em Brinson (1993).

A Figura 15 e Figura 16 expõem a comparação entre as respostas do material para *subloops* (transformações incompletas) entre o conjunto de código proposto aqui e aqueles apontados por Paiva & Savi (1999). A imagem superior representa o histórico da

carga aplicada sobre o material; à esquerda, Figura 15, encontra-se o histórico utilizado ao passo que, à direita, se tem o histórico apontado. A imagem inferior representa a curva de tensão por deformação do material sob as condições já mencionadas; como anteriormente, à esquerda da Figura 16 demonstra-se os resultados obtidos enquanto que à direita, os resultados consultados.

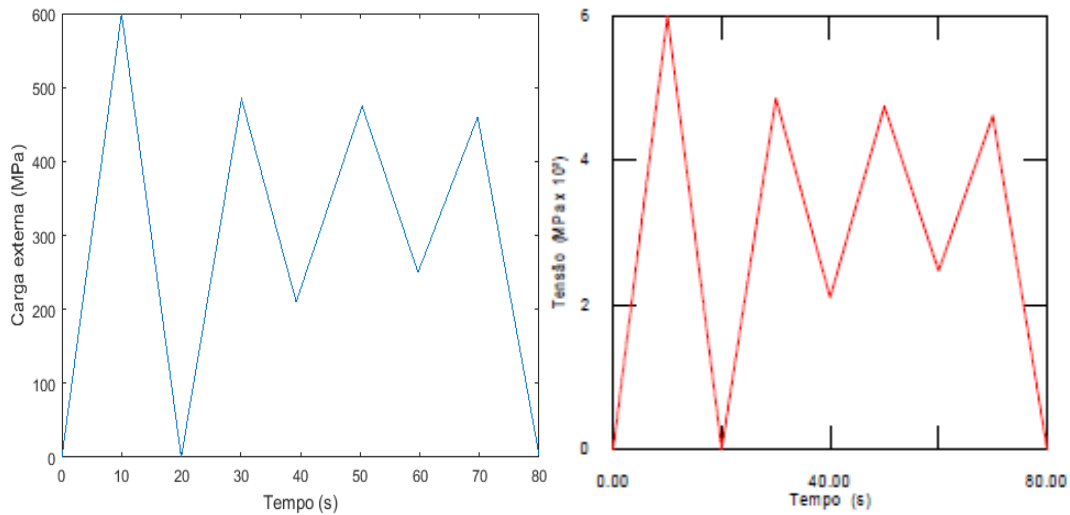


Figura 15 - Histórico de tensão aplicada para caracterizar *subloops* completos (à esquerda) e tensão utilizada por Paiva & Savi (1999) (à direita).

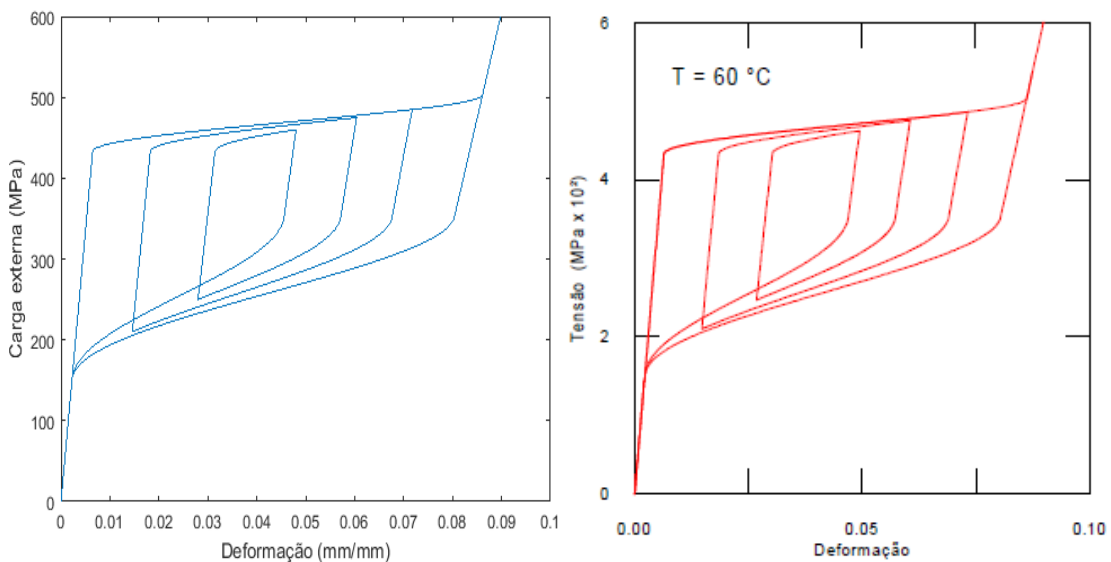


Figura 16 - Curva tensão por deformação para *subloops* completos (à esquerda) e resultados obtidos por Paiva & Savi (1999) (à direita).

Através da análise gráfica das figuras, pode constatar-se que o comportamento obtido condiz com o que foi proposto por Paiva & Savi (1999). Isto é, mesmo sem saber exatamente o valor das tensões utilizadas, uma aproximação satisfatória do histórico de tensão foi aplicada ao algoritmo que, por sua vez, também respondeu de forma convincente.

Contudo, apesar da capacidade em capturar o comportamento das LMFs em *subloops* de tensão, Paiva & Savi (1999) apenas descreveram as curvas de tensão por deformação para *subloops* completos. Em outras palavras, através das respostas propostas não se pôde inferir qual seria o comportamento do material se, após iniciar um *subloop* (região linear da Figura 16), a tensão fosse reduzida antes de alcançar uma região de transformação (descendo pela mesma região linear), como demonstra a Figura 17. Nela, quatro *subloops* incompletos puderam ser observados; dois para regiões de transformação direta e dois para a indireta.

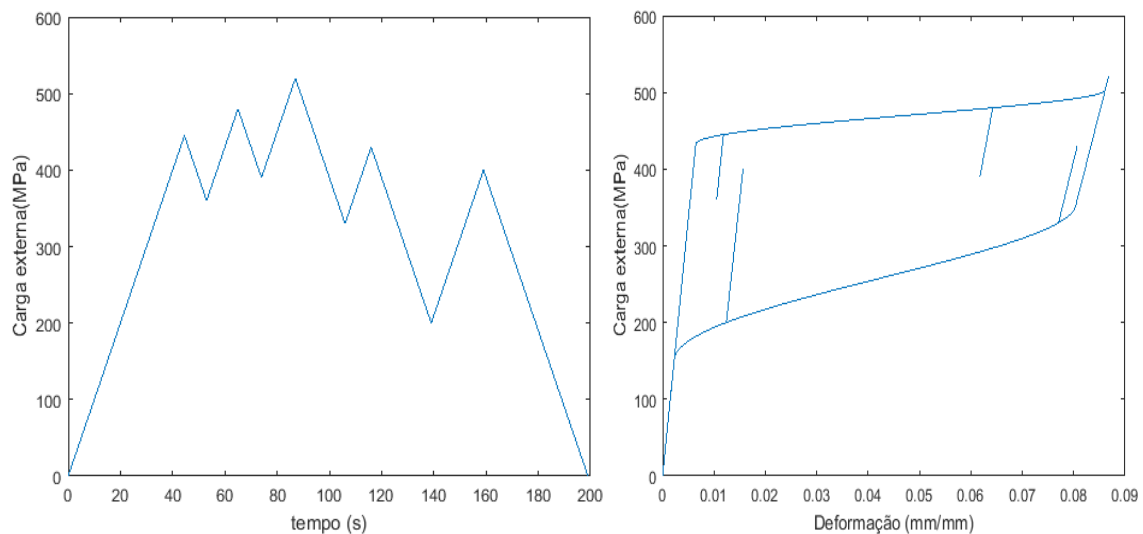


Figura 17- Histórico de carga aplicada e Curva tensão por deformação para caracterizar *subloops* incompletos.

A necessidade de corretamente capturar tais fenômenos é explicada pela imprevisibilidade da carga aplicada, as quais poderiam assumir perfis diferentes, tais como aquele da Figura 18. Nela, além de *subloops* completos como aqueles apresentados por Paiva & Savi (1999), há *subloops* incompletos como aqueles representados à direita

da Figura 17. Desta forma, o algoritmo desenvolvido aqui pode representar qualquer comportamento apresentado pela carga externa de tração aplicada.

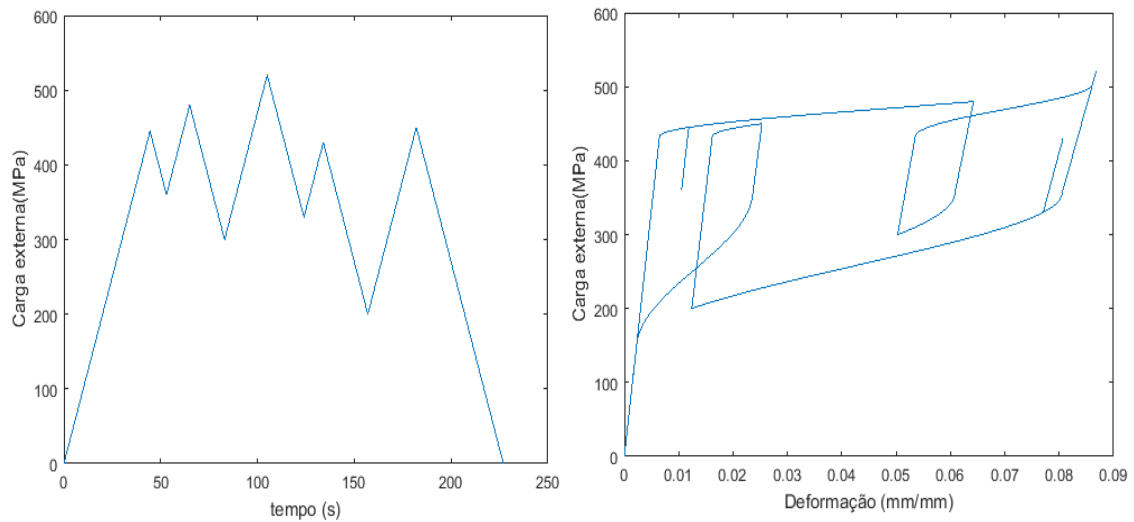


Figura 18- Histórico de carga aplicada e curva tensão-deformação para caracterizar *subloops*

A comparação com os resultados relatados por Leo (2007) para w_{e1} (Tabela 3) são expostos na Figura 19. A imagem da esquerda representa os resultados obtidos enquanto que a da direita expõem os resultados consultados.

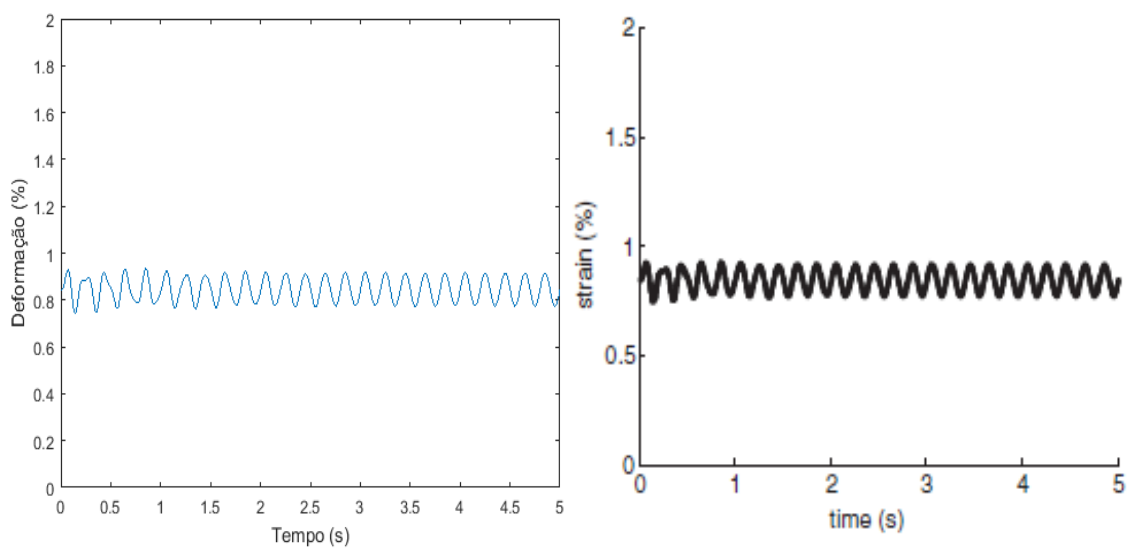


Figura 19- Comparação entre resultados obtidos (à esquerda) e sugeridos por Leo (2007) (à direita) do comportamento SMV sob tração e amortecido por LMF.

Analisando graficamente a Figura 19, foi admissível afirmar que, mesmo apesar das diferenças na abordagem adotada, as respostas dinâmicas do sistema foram precisas, podendo, com pequena discrepância, se sobrepor. No entanto, verificou-se que o comportamento abordado ficou restrito à região linear (sem transformação de fase) da liga, como pode ser observado pela Figura 20. Note-se que as linhas horizontais presentes na imagem da direita são as tensões de transformação para a temperatura de análise. Mais especificamente, os valores de 110, 132, 154 e 209 [Mpa] correspondem as restrições impostas pelas equações (11) e (5), respetivamente.

Da mesma forma que ocorreu com as curvas deformação pelo tempo, os históricos da carga exercida pelo material puderam, com certa precisão, se sobrepor.

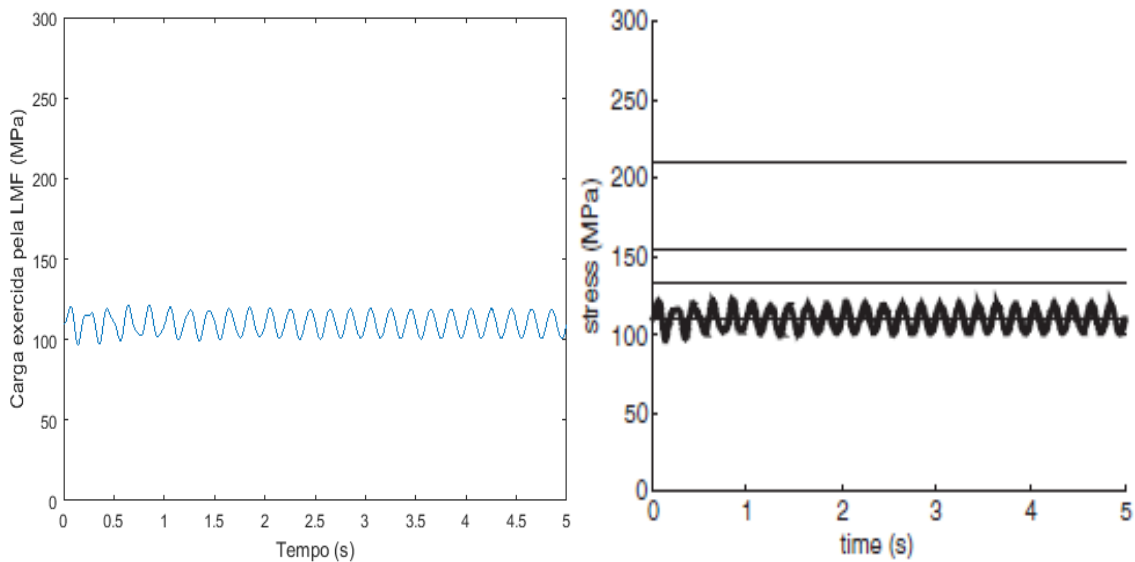


Figura 20 - Histórico de carga do SMV simulado e aquele sugerido por Leo (2007)

A Figura 21 demonstra a confrontação entre resultados obtidos com aqueles propostos por Pinto (2011) para w_{e2} (Tabela 3). Em ambos há dois comportamentos sobre cada gráfico: a deformação de sistemas elástico-lineares (em vermelho na primeira imagem) e em contraste as deformações simuladas para sistemas amortecidos por LMF. Seguindo a tendência dos resultados obtidos anteriormente, houve evidências gráficas suficientes para afirmar que o conjunto de códigos adotados respondeu de maneira adequada.

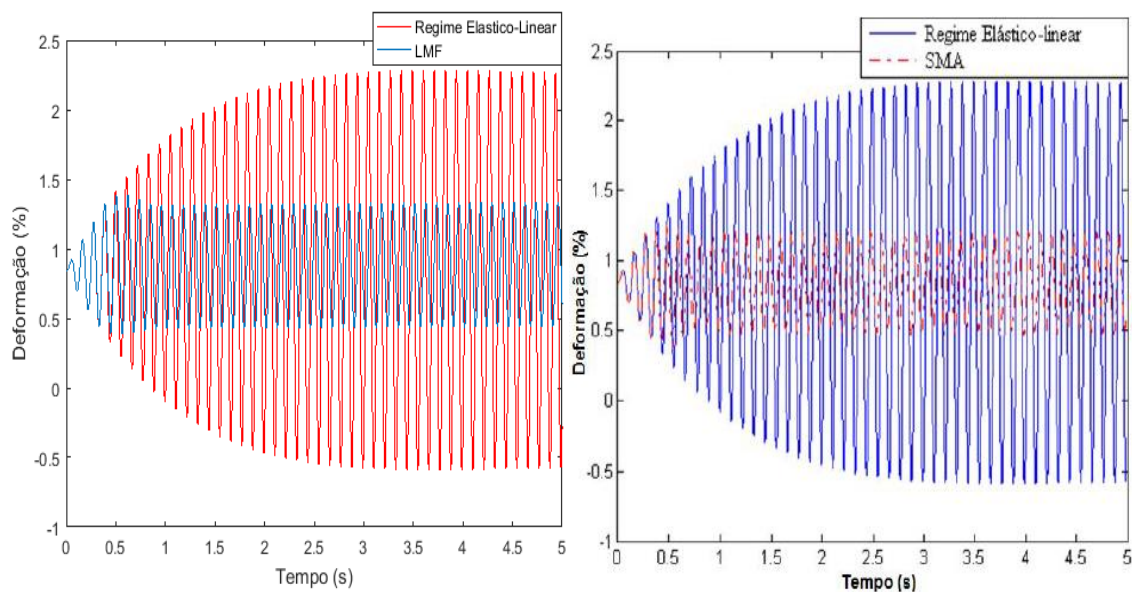


Figura 21- Comparação entre deformação sofrida por LMF e materiais elástico-lineares. À esquerda, resultados obtidos e à direita, resultados sugeridos por Pinto (2011)

Por meio da Figura 21, percebeu-se a grande capacidade dissipativa que LMF podem apresentar ao serem corretamente utilizadas. Isto é, neste caso, para o regime permanente, o uso desse material diminuiu a amplitude de vibração em pelo menos 30% (de 3% para 2% de deformação, aproximadamente).

Outra forma de observar este comportamento dissipativo e verificar a validade do algoritmo proposto foi pela representação das curvas de tensão por deformação do material; para a situação tratada e exibida na Figura 19, estas curvas são expostas na Figura 22, respetivamente, onde a resposta obtida foi comparada com os resultados sugeridos por Leo (2007).

Não distante do que ocorreu nas comparações anteriores, houve confirmações gráficas consideráveis para declarar que a implementação das equações propostas foi realizada de forma aceitável. Melhor dizendo, se houve diferenças, estas estão mais relacionadas as características de impressão (como extensão do domínio de tempo, por exemplo) do que às respostas atingidas.

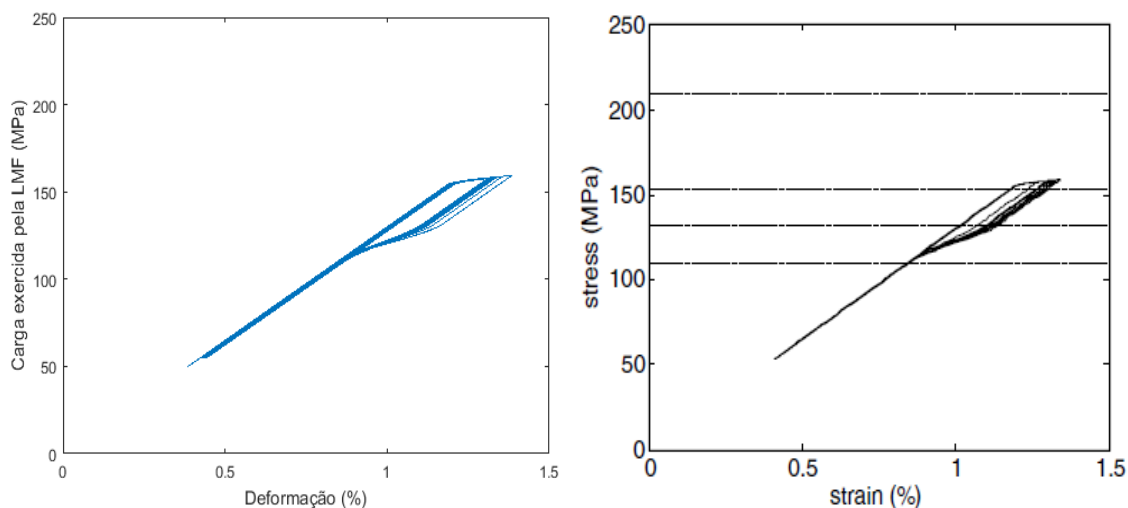


Figura 22- Curva tensão-deformação da aplicação de LMF em SMV para 9 [Hz]. À esquerda, resultados obtidos e à direita, resultados sugeridos por Leo (2007)

Na sequência, para validar o algoritmo não apenas na parte positiva (tensão) do gráfico de carga por deformação, mas também na parte negativa (compressão), a conferência de características gráficas foi realizada com auxílios dos resultados apresentados por Paula, M. *et al.* (2015), como pode ser observado na Figura 23 e Figura 24. Nas imagens superiores estão os históricos de carga aplicada no decorrer do tempo, já nas inferiores, são demonstrados os gráficos de carga por deformação do material. Além disso, para os dados de Paula, M. *et al.* (2015), as curvas mais grossas e de coloração mais claras correspondem aos dados do Modelo de Brinson (1993).

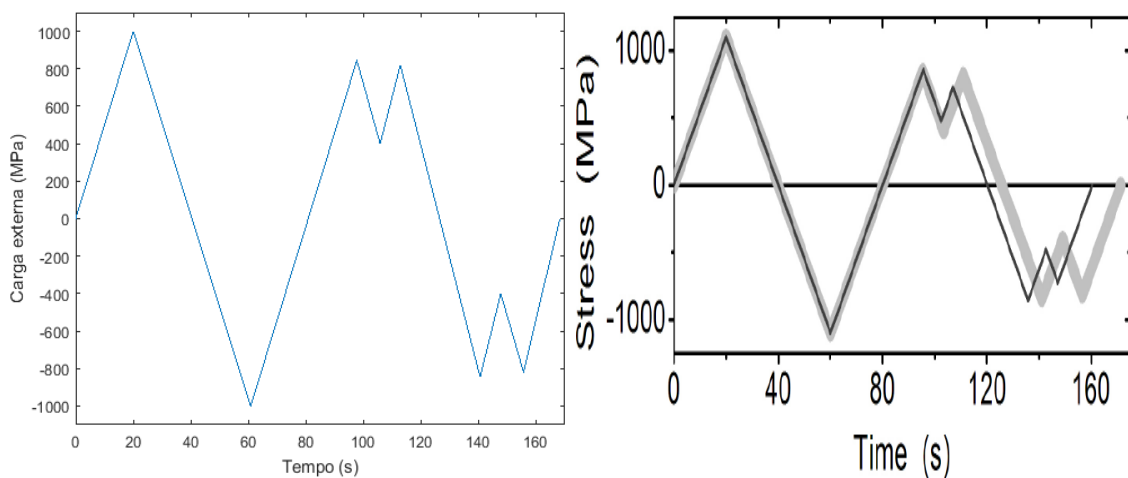


Figura 23- Histórico de carga aplicada para caracterizar *subloops* completos. À direita, dados utilizados e à esquerda, dados sugeridos por Paula, M. *et al.* (2015)

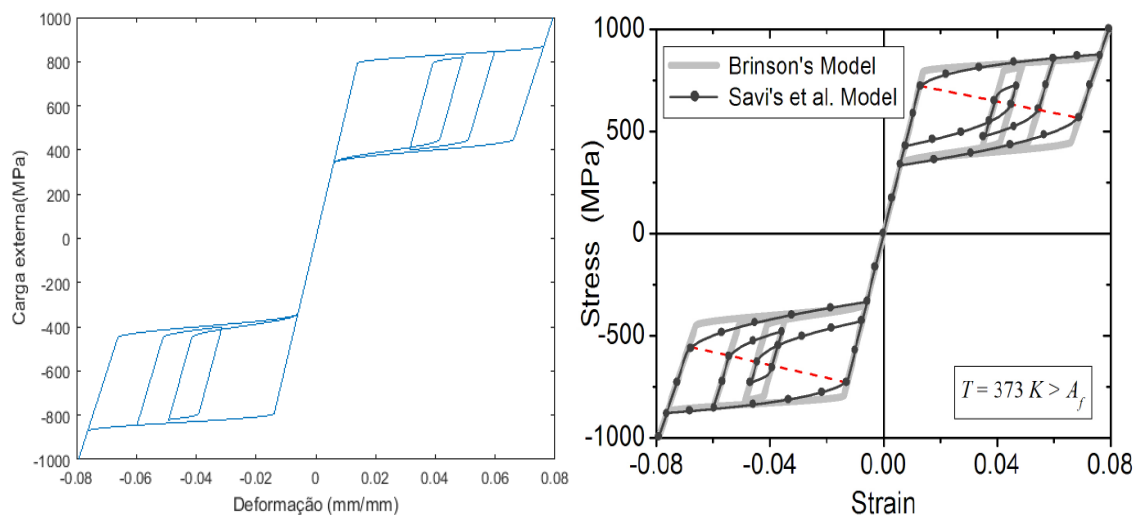


Figura 24- Curva carga- deformação para *subloops* completos. À esquerda, resultados obtidos e à direita, resultados sugeridos por Paula, M. *et al.* (2015)

Como pode ser observado, as figuras forneceram evidências gráficas suficientes para afirmar que o algoritmo proposto foi apto em capturar o comportamento do material não somente sob tensão, mas também sob compressão como um todo. Mais uma vez, se houve discrepâncias nas respostas obtidas, estas tendem mais a ser resultado de dados referentes a impressão do que incompatibilidade dos códigos.

No entanto, da mesma forma que ocorreu para os resultados fornecidos por Paiva e Savi (1999), através dos comportamentos exibidos por Paula, M. *et al.* (2015) não seria possível inferir qual seria o comportamento do material sob *subloops* incompletos. O que, como demonstrado pela Figura 25, poderia ser remediado pelos códigos deste trabalho. Nestas figuras, o histórico de carga (tensão e compressão) são apresentados à esquerda enquanto o comportamento do material sob estas cargas estão expostos à direita.

De forma geral, diante das comparações realizadas, houve evidências gráficas suficientes para afirmar que o algoritmo deste trabalho poderia remediar, dentro das hipóteses assumidas, as exigências existentes na aplicação de códigos numéricos na solução das equações que descrevem sistemas mecânicos vibratórios amortecidos por LMF. Logo, os resultados obtidos da simulação realizada para este trabalho podem ser observados nas figuras: Figura 26, Figura 27, Figura 28, Figura 29 e Figura 30.

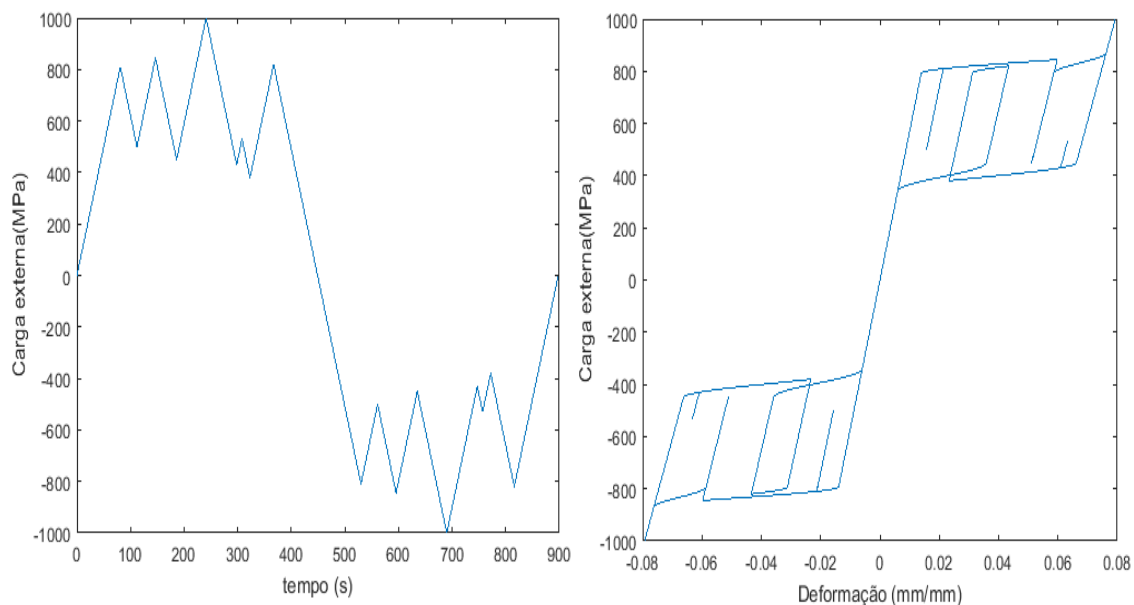


Figura 25- Histórico de carga e curva carga- deformação para *subloops*

A Figura 26 exibe o histórico da carga aplicada sobre o sistema pela LMF. Com ela, percebeu-se que o regime permanente do sistema foi rapidamente atingido e que os valores absolutos da carga imposta não ultrapassaram os 500 [MPa].

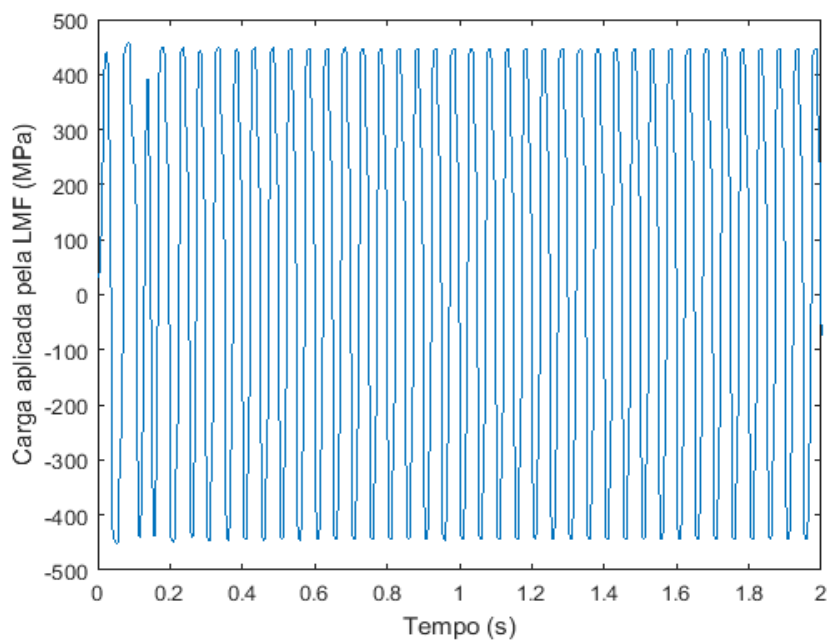


Figura 26- Histórico de carga para simulação equacionada

Na Figura 27 é exposto o histórico da deformação sofrida pela LMF. Nela pode-se visualizar melhor o regime transiente da simulação. Adicionalmente, constatou-se que a máxima deformação sofrida teve valor absoluto menor que 3%. Além disso, em regime permanente, o material sofreu uma deformação máxima média (em módulo) de aproximadamente 1,4%.

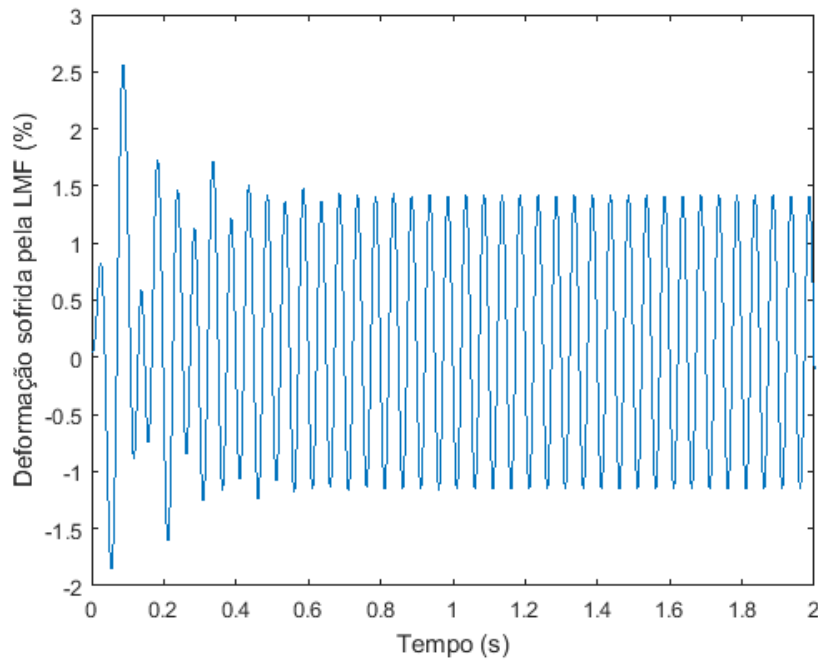


Figura 27- Histórico de deformação da LMF para simulação equacionada

Como a frequência de aplicação da força externa foi muito elevada, para a Figura 26 e Figura 27, a fim de obter uma melhor visualização, mostrou-se a força exercida pela LMF e sua deformação apenas até 2 segundos. Observa-se que, como o regime permanente do sistema é alcançado por volta do primeiro segundo, essa restrição no tempo utilizado como domínio no gráfico não causou problemas de interpretação dos fenômenos abordados.

Já a Figura 28 exibe a curva de carga por deformação do material. Com ela, a partir das características gráficas (largura de linha) pode-se perceber que, na maior parte do tempo, o material trabalhou dentro do laço de histerese em um ciclo (*loop*) compreendido entre -1,2 à 1,4% de deformação aproximadamente. Além disso, percebeu-se que a região positiva (tensão) do gráfico foi consideravelmente maior que a região

negativa (compressão), o que deve ter sido consequência da aplicação da pré-carga de tensão.

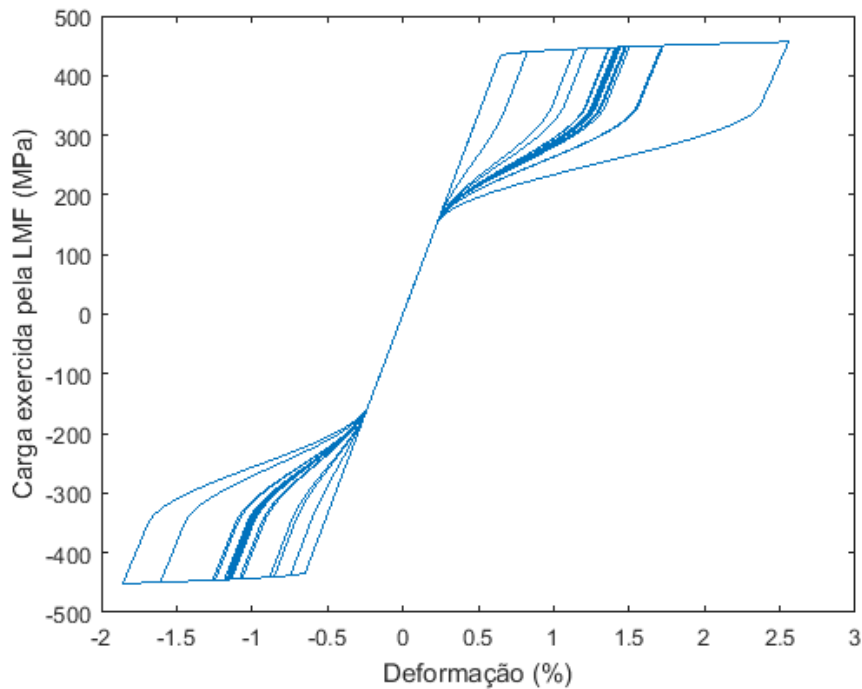


Figura 28- Carga por deformação para simulação equacionada

Na sequência, uma comparação entre a deformação sofrida pela LMF e o que seria esperado de um material elástico-linear, com propriedades da austenite, é exibida na Figura 29. Com ela, tornou-se visível a estabilidade fornecida ao sistema devido a presença do elemento de LMF; isto é, enquanto após os 5 segundos o sistema linear elástico não entraria em regime permanente, para aplicação da LMF, este regime seria alcançado em menos de 1 segundo. Ademais, a capacidade em dissipar energia das LMF fica evidente ao comparar-se os níveis de deformação apresentados pelos dois sistemas; por outras palavras, enquanto a deformação máxima média para o sistema elástico linear estaria em torno de 6%, para o sistema amortecido pela LMF, esse valor seria reduzido para aproximadamente 1,4% (como explicado anteriormente).

Deve-se observar que os resultados obtidos anteriormente (Figura 26, Figura 27, Figura 28 e Figura 29) estão condizentes com o que foi realizado em outros trabalhos, mas não possuem considerações especiais quanto à força gravitacional, que teria o mesmo efeito da pré carga (f_i), mas atuando no sentido contrário a esta. Por outras palavras, nos fenômenos simulados, considerou-se que da pré carga já teria sido reduzido o valor

correspondente à força gravitacional, o que nem sempre pode acontecer. Desta forma, a mesma abordagem poderia ser realizada considerando-se que a pré-carga fosse resultado apenas da gravidade (com resultante para baixo) ou que uma combinação entre uma carga exercida para cima e gravidade agissem sobre o corpo (Figura 13).

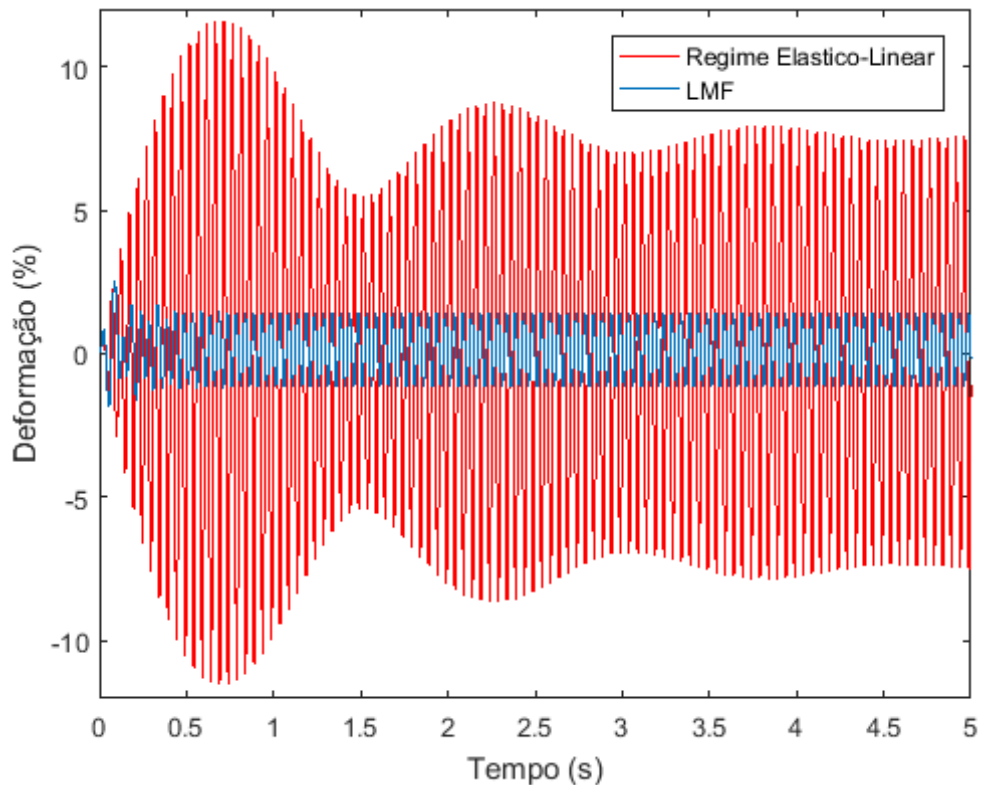


Figura 29- Comparação entre deformação sofrida pela LMF e material elástico linear

Apenas como demonstração da abrangência do código, considerando-se a aceleração da gravidade como $9,81 \text{ [ms}^{-2}\text{]}$ e uma pré-carga equivalente a 100 [N] atuando no mesmo sentido da gravidade, a Figura 30 exibe a nova curva de carga por deformação do material.

Com ela, percebeu que, na maior parte do tempo, o material trabalhou dentro do laço de histerese em um ciclo (*loop*) compreendido entre $-1,6$ à $0,6\%$ de deformação aproximadamente. Ademais, notou-se que a região de tensão (porção superior) do gráfico foi razoavelmente menor que a região compressão (porção inferior), o que deve ter sido consequência da aplicação da força gravitacional e da pré-carga de compressão (os resultados para velocidades iniciais não nulas não são apresentados neste trabalho).

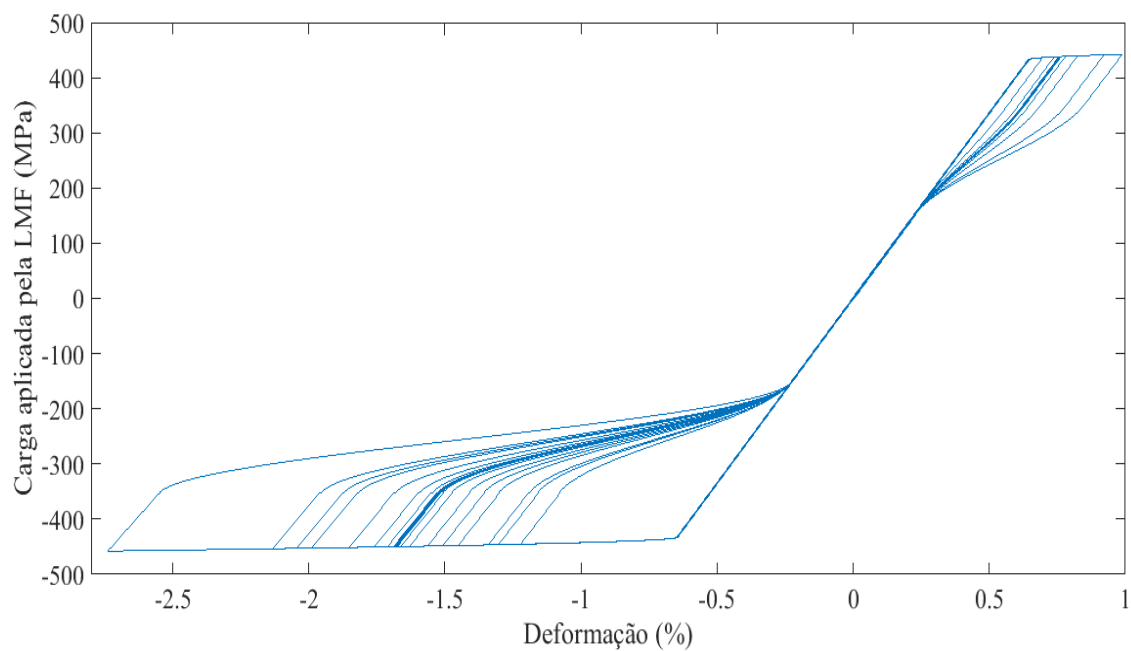


Figura 30- Carga por deformação considerando-se a gravidade e pré- carga de compressão

Por fim, apesar da grande flexibilidade apontada obtida pelo algoritmo, houve alguns parâmetros que causaram uma necessidade de grande refinamento da malha, o que para algumas aplicações pode limitar seu uso. Neste sentido, destaca-se que uma malha mais refinada foi necessária quando aumentou-se a frequência de excitação externa ou a velocidade inicial do sistema

5. Conclusão e trabalhos futuros

De forma geral, dois pontos principais do trabalho devem ser destacados. Primeiramente, houve evidências gráficas suficientes para afirmar que os códigos utilizados foram compatíveis com o que foi sugerido por vários outros autores. Além disso, através destes códigos pôde-se notar a grande capacidade dissipativa apresentada pela pseudo-elasticidade das ligas com memória de forma. Neste âmbito, observou-se que, mesmo em situações críticas, onde o sistema entraria em regime de ressonância, o material estabilizou a sua resposta dinâmica.

No entanto, este trabalho pode ainda ser melhorado. Isto é, uma vez que o modelo de Brinson (1993) é capaz de capturar o comportamento do material decorrente da variação de temperatura, o algoritmo apresentado aqui pode ser modificado para abranger, além de ciclos dinâmicos, ciclos térmicos. Além disso, ainda se pode utilizar de outros modelos a adaptação do algoritmo visando uma melhor representação do comportamento do material sob compressão, visto que, por vezes, este comportamento difere daquele sob tração. Por fim, uma análise dinâmica experimental mais detalhada torna-se necessária, pois o modelo utilizado, tanto no presente trabalho como em suas referências, não leva em consideração os efeitos causados pela variação de parâmetros dinâmicos, como por exemplo a frequência de excitação externa.

Referências bibliográficas

- Auricchio, F., & Sacco, E. (1997). A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32(6), 1101–1114.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(96\)00130-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(96)00130-8)
- Balachandran, B., & Margrab, E. B. (2011). *Vibrações mecânicas*. São Paulo: Cengage Learning.
- Beards, C. F. (1995). *Engineering Vibration Analysis with Application to Control Systems*. Londres: Edward Arnold.
- Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2006). *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno* (8th ed.). LTC.
- Brinson, L. C. (1993). One-Dimensional Constitutive Behavior of Shape Memory Alloys: Thermomechanical Derivation with Non-Constant Material Functions and Redefined Martensite Internal Variable. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 4(2), 229–242. <https://doi.org/10.1177/1045389X9300400213>
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Boston, MA: Richard Stratton Senior.
- Cismasiu, C. (Ed.). (2010). *Shape Memory Alloys*. Rijeka: Sciyo.
<https://doi.org/10.5772/280>
- Conte, S. D., & Boor, C. de. (1980). *Elementary Numerical Analysis- An Algorithmic Approach* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill.
- Daly, S., Ravichandran, G., & Bhattacharya, K. (2007). Stress-induced martensitic phase transformation in thin sheets of Nitinol. *Acta Materialia*, 55(10), 3593–3600.
<https://doi.org/10.1016/j.actamat.2007.02.011>

- Duerig, T., Pelton, A., & Stöckel, D. (1999). An overview of nitinol medical applications. *Materials Science and Engineering: A*, 273–275, 149–160.
[https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(99\)00294-4](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(99)00294-4)
- Elahinia, M. H., & Ahmadian, M. (2005). An enhanced SMA phenomenological model: I. The shortcomings of the existing models. *Smart Materials and Structures*, 14(6), 1297–1308. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/6/022>
- Fox, R. W., Pritchard, P. J., & McDonald, A. T. (2010). *Introdução à Mecânica dos Fluidos* (7th ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- Genta, G., & Amati, N. (2010). Hysteretic damping in rotordynamics: An equivalent formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 329(22), 4772–4784.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.04.036>
- Hartl, D. J., & Lagoudas, D. C. (2007). Aerospace applications of shape memory alloys. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, 221(4), 535–552.
<https://doi.org/10.1243/09544100JAERO211>
- Hasegawa, T., & Majima, S. (1998). A control system to compensate the hysteresis by Preisach Model on SMA actuator. In *International Symposium On Micromechatronics And Human Science* (pp. 171–176).
- Hilborn, R. C. (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*. American Journal of Physics (2nd ed., Vol. 62). New York: Oxford University Press. Retrieved from <http://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.17477>
- Huang, W. M., Ding, Z., Wang, C. C., Wei, J., Zhao, Y., & Purnawali, H. (2010). Shape memory materials. *Materials Today*, 13(7–8), 54–61.
[https://doi.org/10.1016/S1369-7021\(10\)70128-0](https://doi.org/10.1016/S1369-7021(10)70128-0)
- Jaan Kiusalaas. (2005). *Numerical Methods in Engineering with MATLAB*. New York:

Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511812200>

Jacques, I., & Judd, C. (1987). *Numerical Analysis* (1st ed.). London: Chapman & Hall.

Jr., W. D. C. (2007). *Materials science and engineering: An introduction. Materials Science and Engineering* (7th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
[https://doi.org/10.1016/0025-5416\(87\)90343-0](https://doi.org/10.1016/0025-5416(87)90343-0)

Junior, P. C. da C. M. (2007). *Análise do acoplamento termomecânico em ligas com memória de forma (tese de doutoramento, UFRJ)*. UFRJ.

Kelly, S. G. (2012). *Mechanical Vibrations: Theory and Applications* (SI). Stamford: Cengage Learning.

Lagoudas, D. C. (2008). *ShapeMemory Alloys- Modeling and Engineering Applications*. (D. C. Lagoudas, Ed.). New York: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47685-8>

Lagoudas, D. C., Mayes, J. J., & Khan, M. M. (2001). Simplified shape memory alloy (SMA) material model for vibration isolation. In V. S. Rao (Ed.), *Smart Structures and Materials 2001 Modeling Signal Processing and Control in Smart Structures* (Vol. 4326, pp. 452–461). <https://doi.org/10.1117/12.436514>

Lahoz, R., & Puértolas, J. A. (2004). Training and two-way shape memory in NiTi alloys: influence on thermal parameters. *Journal of Alloys and Compounds*, 381(1–2), 130–136. <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2004.03.080>

Leo, D. J. (2007). *Engineering Analysis of Smart Material Systems*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc. <https://doi.org/10.1002/9780470209721>

Liang, C., & Rogers, C. A. (1990). One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 1(2), 207–234. <https://doi.org/10.1177/1045389X9000100205>

- Mohd Jani, J., Leary, M., Subic, A., & Gibson, M. A. (2014). A review of shape memory alloy research, applications and opportunities. *Materials & Design (1980-2015)*, 56, 1078–1113. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2013.11.084>
- Paiva, A., & Savi, M. A. (1999). Sobre os Modelos Constitutivos Com Cinética de Transformação Assumida para Ligas com Memória de Forma. In *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*. Águas de Lindóia: UNICAMP.
- Paiva, A., & Savi, M. A. (2006). An overview of constitutive models for shape memory alloys. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006(October 2005), 1–30. <https://doi.org/10.1155/MPE/2006/56876>
- Paiva, A., Savi, M. A., & Pacheco, P. M. C. L. (2003). Modelos Constitutivos para Ligas com Memória de Forma. In M. T. J. M. Balthazar, G. N. da Silva & L. S. G. e J. D. S. S. M. Boaventura (Eds.), *DINCON*. São José dos Campos: Unesp.
- Paula, A. D. S. (2006). *Tratamentos Termomecânicos De Ligas Do Sistema Ni-Ti (Dissertação de mestrado, Universidade Nova de Lisboa)*. Universidade nova de Lisboa.
- Paula, M. A. de, Paiva, A., Almeida, D. S. da S., & Costa, D. J. R. da. (2015). Numerical Comparison Between Two Different Constitutive Models for Shape Memory Alloys. In *International Congress of Mechanical Engineering*. Rio de Janeiro. <https://doi.org/10.20906/CPS/COB-2015-2464>
- Petrini, L., & Migliavacca, F. (2011). Biomedical Applications of Shape Memory Alloys. *Journal of Metallurgy*, 2011(Figure 1), 1–15. <https://doi.org/10.1155/2011/501483>
- Piccirillo, V. (2007). *Dinâmica Não Linear e Controle de um Sistema Vibratório Modelado com Memória de Forma e, Excitado por Fontes de Energia do Tipo Ideal e Não Ideal (Dissertação de mestrado, Unesp)*. UNESP.

- Pinto, A. alves. (2011). *Estudo teórico e numérico de modelos constitutivos de ligas com memória de forma e associação com sistemas vibratórios (master's thesis, UFU)*. Universidade Federal De Uberlândia.
- Rao, S. S. (2011). *Mechanical Vibrations* (5th ed.). New Jersey: Prentice Hall.
- Ruzicka, M. C. (2008). On dimensionless numbers. *Chemical Engineering Research and Design*, 86(8), 835–868. <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2008.03.007>
- Santos, C. N. Dos. (2008). *Aspectos Cristalográficos Da Transformação Martensítica De Uma Liga Fe-27%Ni (tese de doutoramento, IME)*. Instituto Militar de Engenharia.
- Schmitz, T. L., & Smith, K. S. (2012). *Mechanical Vibrations*. Boston, MA: Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0460-6>
- Silva, J. A. B. da. (2009). *Análise de Sistemas de Controle de Vibração em Máquinas Rotativas Utilizando Atuadores Formados por Ligas com Memória de Forma*. *Análise de Sistemas de Controle de Vibração em Máquinas Rotativas Utilizando Atuadores Formados por Ligas com Memória de Forma* (. Universidade Federal do Pará.
- Sun, L., Huang, W. M., Ding, Z., Zhao, Y., Wang, C. C., Purnawali, H., & Tang, C. (2012). Stimulus-responsive shape memory materials: A review. *Materials & Design*, 33(1), 577–640. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.04.065>
- Tanaka, K., Kobayashi, S., & Sato, Y. (1986). Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effect in alloys. *International Journal of Plasticity*, 2(1), 59–72. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(86\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0749-6419(86)90016-1)
- Tanaka, K., & Nagaki, S. (1982). A thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions. *Ingenieur-Archiv*, 51(5), 287–299. <https://doi.org/10.1007/BF00536655>

- Thomson, W. T., & Dahleh, M. D. (1998). *Theory of vibration with applications* (5th ed.). Pearson Education Asia.
- Tiseo, B., Concilio, A., Ameduri, S., & Gianvito, A. (2010). A shape memory alloys based tuneable dynamic vibration absorber for vibration tonal control. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 48, 135–153.
- Van Humbeeck, J. (2003). Damping capacity of thermoelastic martensite in shape memory alloys. *Journal of Alloys and Compounds*, 355(1–2), 58–64.
[https://doi.org/10.1016/S0925-8388\(03\)00268-8](https://doi.org/10.1016/S0925-8388(03)00268-8)
- Xiang, Z., Sheliang, W., Fulin, Z., & Xiangyun, H. (2008). The application of SMA dampers in passive control of ancient tower structures. In *World Conference on Earthquake Engineering*. Beijing.
- Zhang, X. D., Rogers, C. A., & Liang, C. (1997). Modelling of the Two-Way Shape Memory Effect. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 8(4), 353–362. <https://doi.org/10.1177/1045389X9700800408>
- Ziolkowski, A. (2015). Shape memory effects in metallic alloys. In *Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys* (pp. 11–53). Waltham: Elsevier.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-801697-8.00002-8>

Apêndice A

Para a realização das adimensionalizações utilizadas, as operações abaixo foram realizadas mas omitidas do texto para obter-se melhor organização do mesmo.

$$y = \frac{x}{L} \Rightarrow x = y L$$

$$\tau = w_0 t \Rightarrow d\tau = w_0 dt \Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = w_0$$

$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ (derivada dimensional) e } \dot{x} = \frac{dx}{d\tau} \text{ (derivada adimensional)}$$

$$\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d(yL)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = L \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = L w_0 \frac{dy}{d\tau} = L w_0 \dot{y} \\ &\Rightarrow x' = L w_0 \dot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{d(L w_0 \dot{y})}{dt} = L w_0 \frac{d\dot{y}}{dt} = L w_0 \left(\frac{d\dot{y}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \right) = L w_0 (\ddot{y} w_0) = L w_0^2 \ddot{y} \\ &\Rightarrow x'' = L w_0^2 \ddot{y} \end{aligned}$$

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{dx}{d\tau} w_0 = w_0 \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{x'}{w_0}$$

$$\varepsilon' = \frac{x'}{L} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{x}}{L} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{x'}{w_0 L} \Rightarrow \dot{\varepsilon} = \dot{y}$$

Apêndice B

Os códigos utilizados para obtenção do comportamento linear da Figura 29 e das informações presentes na Figura 30 são apresentados na sequência. Ressalta-se que, com alterações convenientes, estes dois códigos são suficientes para obtenção dos outros resultados.

CÓDIGO PARA OBTENÇÃO DA REGIÃO LINEAR DA FIGURA 29

Script

```
clear
close all
clc

% Variáveis diversas
initialTal = 0;
finalTal = 649;
deltaTal = 0.001;
pointNumber = ((finalTal - initialTal)/deltaTal) + 1;

% declarando vetores
talDomain(pointNumber) = 0;
yDomain(pointNumber) = 0;
zDomain(pointNumber) = 0;
vDomain(pointNumber) = 0;
Kc(pointNumber) = 0;
tDomain(pointNumber) = 0;
xDomain(pointNumber) = 0;
xLinhaDomain(pointNumber) = 0;

% Constantes do material
Da = 67e9; %[Pa]
Dm = 26.3e9; %[Pa]

% Parametros do constantes sistema
g = 0; %m/s^2
we = 40*pi; % rad/s
```

```

ForExtMax = 1000; % em N
A = 3.14e-6; % em m^2
c = 40.8; % em N*s/m
m = 25; % em Kg
L = 0.50; % em m
Dref = Da; % em Pa
T = 60; % °C
Kref = Dref*A/L;
wref = (Kref/m)^(0.5);
QsiRef = we/wref;
zetaRef = c/(2*(Kref*m)^(0.5));
fM(1) = 0;
vDomainDif(1) = 1; % deve apenas ser maior que 0. Deixado 1 por
escolha
fi = 94.2;
PreCarga = fi - m*g; % [N]
Kc(1) = 1; % deve apenas ser maior que 0. Deixado 1 por escolha

% Condições de contorno
talDomain(1) = 0;
vDomain(1) = PreCarga/A; % pré-carga
yDomain(1) = vDomain(1)/(Da); % deslocamento inicial devido pré-carga
zDomain(1) = 0;
tDomain(1) = talDomain(1) / wref;
xDomain(1) = yDomain(1)*L;
xLinhaDomain(1) = zDomain(1)*L*wref;

for i=2:pointNumber

[ D(i) ] = modElast( Dm, Da, fM(1));

regionF = 1;

[ talDomain(i), yDomain(i), zDomain(i), vDomain(i), Kc(i) ] = RK43(
talDomain(i-1), yDomain(i-1), zDomain(i-1), vDomain(i-1), deltaTal,
ForExtMax, Dref, A, QsiRef, D(i), zetaRef, regionF,PreCarga );

%Retornando as variáveis dimensionais

```

```

tDomain(i) = talDomain(i) / wref;
xDomain(i) = yDomain(i)*L;
xLinhaDomain(i) = zDomain(i)*L*wref;

progresso = 100*(i/pointNumber);
fprintf('\n progresso = %.0f por cento \n', progresso);

end

eLinearMichel = yDomain;

save eLinearMichel

figure
plot (tDomain, 100*yDomain);
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Deformação sofrida pelo material (%)')

```

Função para o cálculo módulo de elasticidade

```

function [ D ] = modElast( Dm, Da, fM )

D = Da + fM*(Dm - Da);

End

```

Função para cálculo do tensor de transformação

```

function [ omega ] = tensorTransf( el, D )

omega = -el*D;

end

```

Função para Runge-Kutta de 4 ordem

```

function [ talDomain, yDomain, zDomain, vDomain, Kc ] = RK43(
talDomain, yDomain, zDomain,vDomain, deltaTal, Fmax, Dref, A, QsiRef,

```

```
D, zetaRef, regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el,  
AS, CA, PreCarga)
```

```
% Primeira inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain, yDomain, zDomain,  
vDomain, Fmax, Dref, A, QsiRef, D, zetaRef, regionF, sCritFinal,  
sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS, CA, PreCarga );
```

```
Ka1 = deltaTal * Fa;
```

```
Kb1 = deltaTal * Fb;
```

```
Kc1 = deltaTal * Fc;
```

```
% Segunda inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain + deltaTal/2, yDomain +  
Ka1/2, zDomain + Kb1/2, vDomain + Kc1/2, Fmax, Dref, A, QsiRef, D,  
zetaRef, regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS,  
CA, PreCarga );
```

```
Ka2 = deltaTal * Fa;
```

```
Kb2 = deltaTal * Fb;
```

```
Kc2 = deltaTal * Fc;
```

```
% Terceira inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain + deltaTal/2, yDomain +  
Ka2/2, zDomain + Kb2/2, vDomain + Kc2/2, Fmax, Dref, A, QsiRef, D,  
zetaRef, regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS,  
CA, PreCarga );
```

```
Ka3 = deltaTal * Fa;
```

```
Kb3 = deltaTal * Fb;
```

```
Kc3 = deltaTal * Fc;
```

```
% Quarta inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain + deltaTal, yDomain +  
Ka3, zDomain + Kb3, vDomain + Kc3, Fmax, Dref, A, QsiRef, D, zetaRef,  
regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS, CA,  
PreCarga);
```

```
Ka4 = deltaTal * Fa;
```

```

    Kb4 = deltaTal * Fb;
    Kc4 = deltaTal * Fc;

% Inclinação ponderada

    Ka = (1/6)*(Ka1 + 2*Ka2 + 2*Ka3 + Ka4);
    Kb = (1/6)*(Kb1 + 2*Kb2 + 2*Kb3 + Kb4);
    Kc = (1/6)*(Kc1 + 2*Kc2 + 2*Kc3 + Kc4);

% Novos valores de dominio e imagem

    talDomain = talDomain + deltaTal;
    yDomain = yDomain + (Ka);
    zDomain = zDomain + (Kb);
    vDomain = vDomain + (Kc);

end

```

Função para definir troca de variáveis do método de Runge-Kutta

```

function [Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain, yDomain, zDomain,
vDomain, Fmax, Dref, A, QsiRef, D, zetaRef, regionF, PreCarga)
% Declare any funtion here to use the rotinaParaRK4 the one

Fa = zDomain;
Fb = ((Fmax)*sin(QsiRef*talDomain)+ PreCarga)/(Dref*A) -
vDomain/(Dref) - 2*zetaRef*(zDomain);

if regionF == 1 || regionF == -1

    Fc = D*zDomain; % linear (sem transformação)

end

if regionF == 2 || regionF == -2

    Fc = D*zDomain;

end

```

```

if regionF == 3 || regionF == -3

    Fc = D*zDomain; % linear (sem transformação)

end

if regionF == 4 || regionF == -4

    Fc = D*zDomain;

end

end

```

CÓDIGO PARA OBTENÇÃO DA FIGURA 30

Script

```

clear
close all
clc

% Variáveis diversas
initialTal = 0;
finalTal = 649;
deltaTal = 0.001;
pointNumber = logical(((finalTal - initialTal)/deltaTal) + 1);
pointNumberNumerico = (((finalTal - initialTal)/deltaTal) + 1);

% declarando vetores
talDomain = initialTal:deltaTal:finalTal;
vDomain(pointNumber) = 0;
contador(pointNumber) = -1;
region(pointNumber) = 0;
fM(pointNumber) = 0;
vDomainDif(pointNumber) = 0;
omega(pointNumber) = 0;

```

```

e(pointNumber) = 0;
s0(pointNumber) = 0;
ForExt(pointNumber) = 0;
tDomain(pointNumber) = 0;
xDomain(pointNumber) = 0;
xLinhaDomain(pointNumber) = 0;

% Constantes do material
Da = 67e9;
Dm = 26.3e9;
teta = 0.55e6;
MF = 9;
MS = 18.4;
AS = 34.5;
AF = 49;
CM = 8e6;
CA = 13.8e6;
sCritStart = 100e6;
sCritFinal = 170e6;
el = 0.067;
fM0(1) = 0;
fMT0 = 0;

%constantes definidas por equações
aM = pi/(MS - MF);
aA = pi/(AF - AS);

% Parametros constantes sistema
g = 9.81; %m/s^2
we = 40*pi; % rad/s
ForExtMax = 1000; % em N
A = 3.14e-6; % em m^2
c = 40.8; % em N*s/m
m = 25; % em Kg
L = 0.50; % em m
Dref = Da; % em Pa
T = 60; % °C
Kref = Dref*A/L;
wref = (Kref/m)^(0.5);

```

```

QsiRef = we/wref;
zetaRef = c/(2*(Kref*m)^(0.5));
fM(1) = 0;
vDomainDif(1) = 1; % deve apenas ser maior que 0. Deixado 1 por escolha
fi = -100;
PreCarga = fi - m*g;
Kc(1) = 1; % deve apenas ser maior que 0. Deixado 1 por escolha

% Condições de contorno
zDomain(1) = 0; % velocidade inicial (m/s)
regionF = 1; % apenas para iniciar a identificação da região em que se encontra
contador(1) = 0;
D0(1) = Da;
fM(1) = 0;
T0 = T;
omega(1) = -el*Da;
PreTensao = PreCarga/A;
ForExt(1) = ForExtMax*sin(talDomain(1)*QsiRef);
vDomain(1) = (ForExt(1)+ PreCarga)/A; % pré-carga (compressão, tensão [Pa])
yDomain(1) = vDomain(1)/(Da); % deslocamento adimensional inicial devido pré-carga
D(1) = Da;
e(1) = yDomain(1); % deformação inicial devido pré-carga;
e0(1) = e(1); % deformação inicial devido pré-carga;
s0(1) = vDomain(1);
D0(1) = Da;
omega0(1) = tensorTransf( el, D0(1));
region0(1) = 0;
DF = Da;
fMF = 0;
ef = e0(1);
sf = s0(1);
omegaf = omega0;
pare = 0;
loopConver = 0;
converg = 0;

```

```

tDomain(1) = talDomain(1) / wref;
xDomain(1) = yDomain(1)*L;
xLinhaDomain(1) = zDomain(1)*L*wref;

for i=2:1:length(talDomain)

    ForExt(i) = ForExtMax*sin(talDomain(i)*(QsiRef));
    sExt(i) = (ForExt(i))/A;

    [ D(i) ] = modElast( Dm, Da, fM(i-1));

    if regionF <0

        [ D(i) ] = modElast( Dm, Da, -fM(i-1));

    end

    region (i) = 0;
    contador(i) = 0;

    if (((regionF == 1) || (regionF == 2)) && (sCritStart + CM*(T-MS)
> vDomain(i-1)) || ((regionF == 4) && (vDomainDif(i-1) < 0) &&
(vDomain(i-1) < CA*(T-AF))) || (regionF == - 1) && (vDomainDif(i-1) >
0)) && contador(i) == 0 && vDomain(i-1) >= 0 ;

        fM(i) = 0;
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = 1;
        regionF = 1;

    end

    if (((regionF == 1) || (regionF == 2)||regionF == 4.5)) &&
(sCritStart + CM*(T-MS) <= vDomain(i-1)) && (vDomain(i-1) <=
sCritFinal + CM*(T-MS)) && vDomainDif(i-1)>0) && contador(i) == 0 &&
vDomain(i-1) > 0;

```

```

        fM(i) = (((1-fM0(i-1))/2)*cos((pi/(sCritStart -
sCritFinal))*(vDomain(i-1) - sCritFinal - CM*(T - MS)))) + ((1+fM0(i-
1))/2));
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = 2;
        regionF = 2;

```

end

```

        if (((regionF == 2) || (regionF == 3)) && ((vDomain(i-1) <=
sCritFinal + CM*(T-MS)) && (vDomain(i-1) >= CA*(T-AS))) &&
vDomainDif(i-1)<=0) || (((regionF == 2) || (regionF == 3)) &&
(vDomain(i-1) >= sCritFinal + CM*(T-MS))) || ((regionF == 3) &&
(vDomainDif(i-1) > 0))) && contador(i) == 0 && vDomain(i-1) > 0 &&
fM(i-1)>=0.99;

```

```

        fM(i) = 1;
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = 3;
        regionF = 3;

```

end

```

        if (((regionF == 3)|| (regionF == 4)|| (regionF == 4.5)|| (regionF ==
2.5)) && (vDomain(i-1) >= CA*(T-AF)) && (vDomain(i-1) <= CA*(T-AS)) &&
vDomainDif(i-1) <= 0) && contador(i) == 0 && vDomain(i-1) > 0 &&
region0(i-1)~=4

```

```

        fM(i) = (fM0(i-1)/2)*(cos(aA*(T-AS-(vDomain(i-1)/CA)))+1);
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = 4;
        regionF = 4;

```

end

```

        if (((regionF == -1) || (regionF == 1)) && (- sCritStart - CM*(T-
MS) < vDomain(i-1)) && (vDomain(i-1) < 0)) || (regionF == -4) &&
(vDomain(i-1) < 0) && vDomainDif(i-1) > 0 && (- vDomain(i-1)) < CA*(T-
AF) ) && contador(i) == 0;

```

```

    fM(i) = 0;
    contador(i) = contador(i) + 1;
    region (i) = -1;
    regionF = -1 ;

end

    if (((regionF == -1) || (regionF == -2) || (regionF == -4.5)) && (
-vDomain(i-1) <= sCritFinal + CM*(T-MS)) && ( sCritStart + CM*(T-MS)
<= - vDomain(i-1)) && vDomainDif(i-1) < 0) && contador(i) == 0 &&
(vDomain(i-1) < 0) ;

        fM(i) = -((((1+fM0(i-1))/2)*cos((pi/(sCritStart -
sCritFinal))*(-(vDomain(i-1)) - sCritFinal - CM*(T - MS)))) + ((1-
fM0(i-1))/2));
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = -2;
        regionF = -2;

end

    if (((regionF == -2) || (regionF == -3)) && (( - vDomain(i-1) <=
sCritFinal + CM*(T-MS)) && ( - vDomain(i-1) >= CA*(T-AS))) &&
vDomainDif(i-1) >= 0) || (((regionF == -2) || (regionF == -3)) && ( -
vDomain(i-1) >= sCritFinal + CM*(T-MS)) || ((regionF == - 3) &&
(vDoma-inDif(i-1) < 0))) && contador(i) == 0 && vDomain(i-1) < 0 &&
fM(i-1)<=-0.99;
        fM(i) = -1;
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = -3;
        regionF = -3;

end

    if (((regionF == -3) || (regionF == -4) || (regionF == -4.5) || (regionF
== - 2.5)) && ( - vDomain(i-1) >= CA*(T-AF)) && ( - vDomain(i-1) <=

```

```

CA*(T-AS)) && vDomainDif(i-1) >= 0) && contador(i) == 0 && contador(i)
== 0 && vDomain(i-1) < 0 && region0(i-1)~=-4;

```

```

    fM(i) = ((fM0(i-1)/2)*(cos(aA*(T-AS-((-vDomain(i-
1)/CA))+1)));

```

```

    contador(i) = contador(i) + 1;

```

```

    region (i) = -4;

```

```

    regionF = -4;

```

```

end

```

```

if (((regionF == -4) || (regionF == -4.5)) && (vDomainDif(i-1) <=
0)) || ((regionF == -4.5) && (vDomainDif(i-1) >= 0)) && contador(i) ==
0 ;

```

```

    fM(i) = fMF;

```

```

    contador(i) = contador(i) + 1;

```

```

    region (i) = -4.5;

```

```

    regionF = -4.5;

```

```

    if vDomainDif(i-1)>0 && (abs(abs(vDomain(i-1))-abs(s0(i-1))) <
abs(vDomainDif(i-1))/2)

```

```

        region(i) = -4;

```

```

        region0(i) = -4.5;

```

```

        regionF = -4;

```

```

        fMF = martensitaFinal;

```

```

        fM0(i)=fMF;

```

```

        ef = deformacaoFinal;

```

```

        e0(i) = ef;

```

```

        sf = tensaoFinal;

```

```

        s0(i) = sf;

```

```

        converg = 1;

```

```

    end

```

```

end

```

```

        if (((regionF == 4) || (regionF == 4.5)) && (vDomainDif(i-1) >= 0))
|| ((regionF == 4.5) && (vDomainDif(i-1) <= 0))) && contador(i) == 0;

        fM(i) = fMF;
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = 4.5;
        regionF = 4.5;

        if vDomainDif(i-1)<0 && (abs(abs(vDomain(i-1))-abs(s0(i-1))) <
abs(vDomainDif(i-1))/2)

                region(i) = 4;
                region0(i) = 4.5;
                regionF = 4;
                fMF = martensitaFinal;
                fM0(i)=fMF;
                ef = deformacaoFinal;
                e0(i) = ef;
                sf = tensaoFinal;
                s0(i) = sf;
                converg = 1;

        end

end

        if (((regionF == 2) || (regionF == 2.5)) && (vDomainDif(i-1) <= 0))
|| ((regionF == 2.5) && (vDomainDif(i-1) >= 0))) && contador(i) == 0;

        fM(i) = fMF;
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = 2.5;
        regionF = 2.5;

        if vDomainDif(i-1)>0 && (abs(abs(vDomain(i-1))-abs(s0(i-1))) <
abs(vDomainDif(i-1))/2)

                region(i) = 2;
                region0(i) = 2.5;

```

```

        regionF = 2;
        fMF = martensitaFinal;
        fM0(i)=fMF;
        ef = deformacaoFinal;
        e0(i) = ef;
        sf = tensaoFinal;
        s0(i) = sf;
        converg = 1;

    end

end

        if (((regionF == -2)|| (regionF == -2.5)) && (vDomainDif(i-1)
>= 0)) || ((regionF == -2.5) && (vDomainDif(i-1) <= 0))) &&
contador(i) == 0;

        fM(i) = fMF;
        contador(i) = contador(i) + 1;
        region (i) = -2.5;
        regionF = -2.5;

        if vDomainDif(i-1)<0 && (abs(abs(vDomain(i-1))-abs(s0(i-
1)))) < abs(vDomainDif(i-1))/2)

            region(i) = -2;
            region0(i) = -2.5;
            regionF = -2;
            fMF = martensitaFinal;
            fM0(i)=fMF;
            ef = deformacaoFinal;
            e0(i) = ef;
            sf = tensaoFinal;
            s0(i) = sf;
            converg = 1;

        end

    end
end

```

```

if region(i)==0 || contador(i) > 1

    fprintf('\n\n REGIAO 0. Não foi possível encontrar a solução
desejada. Tente diminuir a frequência externa de excitação, diminuir a
velocidade inicial do sistema ou aumentar o numero de pontos da malha
\n\n');
    regionF = 0;
    pause

end

if regionF ~= region(i-1) && converg == 0;

    D0(i) = DF;
    fM0 (i) = fMF;
    e0(i) = ef;
    s0(i) = sf;
    region0(i) = region(i-1);

elseif regionF ~= region(i-1) && converg == 1

    D0(i) = DFinal;
    fM0 (i) = martensitaFinal;
    s0(i) = tensaoFinal;
    omega0(i) = omegaFinal;

    if region(i)== 4 || region(i)== 4.5

        region0(i) = 4.5;

    elseif region(i)== 2 || region(i)== 2.5

        region0(i) = 2.5;

    elseif region(i)== -4 || region(i)== -4.5

```

```

        region0(i) = -4.5;

elseif region(i)== -2 || region(i)== -2.5

        region0(i) = -2.5;

end

else

        D0(i) = D0(i-1);
        fM0 (i) = fM0(i-1);
        region0(i) = region0(i-1);
        e0 (i) = e0 (i-1);
        s0(i) = s0 (i-1);

end

omega(i) = tensorTransf( el, D(i-1) );

if converg == 0

        omega0(i) = tensorTransf( el, D0(i-1) );

end

if regionF ~= region(i-1) && converg == 0;

        omega0(i)= omegaf;

elseif converg == 0

        omega0(i) = omega0(i-1);

end

```

```
e(i)= deform( D0 (i), e0(i), omega(i), fM(i), omega0(i), fM0(i),
teta, T, T0, vDomain(i-1), s0(i), D(i));
```

```
if (region(i-1) == 3 && region(i) == 4) || (region(i-1) == 1
&& region(i) == 2) || (region(i-1) == 2.5 && region(i) == 4) ||
(region(i-1) == -3 && region(i) == -4) || (region(i-1) == -1 &&
region(i) == -2)|| (region(i-1) == -2.5 && region(i) == -4)
```

```
deformacaoFinal = e(i);
tensaoFinal = vDomain(i-1);
martensitaFinal = fM(i);
DFinal = modElast( Dm, Da, martensitaFinal);
omegaFinal= omega(i);
```

```
if region(i) < 0
```

```
DFinal = modElast( Dm, Da, -martensitaFinal);
```

```
end
```

```
end
```

```
if (region(i) < 0) && region(i)<0
```

```
e(i)= deform( D0 (i), e0(i), omega(i), -fM(i), omega0(i),
fM0(i), teta, T, T0, -vDomain(i-1), s0(i), D(i));
e(i) = - e(i);
```

```
end
```

```
[ talDomain(i), yDomain(i), zDomain(i), vDomain(i), vDomainDif(i)]
= RK43( talDomain(i-1), e(i-1), zDomain(i-1), vDomain(i-1), deltaTal,
ForExtMax, Dref, A, QsiRef, D(i), zetaRef, regionF, sCritFinal,
sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0(i-1),el, AS, CA, PreCarga );
```

```

    fMF = fM(i);
    ef = e(i);
    sf = vDomain(i);
    DF = D(i);
    omegaf = omega(i);
    loopConver = 0;
    converg = 0;

    %Retornando as variáveis dimensionais
    tDomain(i) = talDomain(i) / wref;
    xDomain(i) = yDomain(i)*L;
    xLinhaDomain(i) = zDomain(i)*L*wref;

    progresso = 100*(i/pointNumberNumerico);
    fprintf('\n progresso = %.0f por cento \n', progresso);

end

% Frequencias naturais
wnA = (A*Da/(m*L))^(1/2); % (rad/s)
wnM = (A*Dm/(m*L))^(1/2); % (rad/s)

%Evitando problemas com plots
eLMF = e;
vetorTensao = vDomain;

%Gráficos
figure
plot (100*eLMF,vDomain/1e6)
xlabel ('Deformação (%)')
ylabel ('Carga aplicada pela LMF (MPa)')

figure
plot(tDomain, vDomain/1e6)
xlabel ('Tempo (s)')
ylabel ('Carga aplicada pela LMF (MPa)')

```

```
hold on
```

```
figure  
plot(tDomain, eLMF*100)  
xlabel ('Tempo (s)')  
ylabel ('Deformação (%)')
```

Função para o cálculo módulo de elasticidade

```
function [ D ] = modElast( Dm, Da, fM )
```

```
D = Da + fM*(Dm - Da);
```

```
End
```

Função para cálculo do tensor de transformação

```
function [ omega ] = tensorTransf( el, D )
```

```
omega = -el*D;
```

```
end
```

Função para cálculo da deformação do material

```
function [ e ] = deform( D0, e0, omega1, fMS, omega0, fMS0, teta, T,  
T0, s, s0, D )
```

```
e= (D0*e0 - omega1*fMS + omega0*fMS0 - teta*(T-T0) + (s - s0))/D;
```

```
end
```

Função para Runge-Kutta de 4 ordem

```
function [ talDomain, yDomain, zDomain, vDomain, Kc ] = RK43(  
talDomain, yDomain, zDomain, vDomain, deltaTal, Fmax, Dref, A, QsiRef,
```

```
D, zetaRef, regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el,
AS, CA, PreCarga)
```

```
% Primeira inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain, yDomain, zDomain,
vDomain, Fmax, Dref, A, QsiRef, D, zetaRef, regionF, sCritFinal,
sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS, CA, PreCarga );
```

```
Ka1 = deltaTal * Fa;
```

```
Kb1 = deltaTal * Fb;
```

```
Kc1 = deltaTal * Fc;
```

```
% Segunda inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain + deltaTal/2, yDomain +
Ka1/2, zDomain + Kb1/2, vDomain + Kc1/2, Fmax, Dref, A, QsiRef, D,
zetaRef, regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS,
CA, PreCarga );
```

```
Ka2 = deltaTal * Fa;
```

```
Kb2 = deltaTal * Fb;
```

```
Kc2 = deltaTal * Fc;
```

```
% Terceira inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain + deltaTal/2, yDomain +
Ka2/2, zDomain + Kb2/2, vDomain + Kc2/2, Fmax, Dref, A, QsiRef, D,
zetaRef, regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS,
CA, PreCarga );
```

```
Ka3 = deltaTal * Fa;
```

```
Kb3 = deltaTal * Fb;
```

```
Kc3 = deltaTal * Fc;
```

```
% Quarta inclinação
```

```
[Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain + deltaTal, yDomain +
Ka3, zDomain + Kb3, vDomain + Kc3, Fmax, Dref, A, QsiRef, D, zetaRef,
regionF, sCritFinal, sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS, CA,
PreCarga);
```

```
Ka4 = deltaTal * Fa;
```

```

    Kb4 = deltaTal * Fb;
    Kc4 = deltaTal * Fc;

% Inclinação ponderada

    Ka = (1/6)*(Ka1 + 2*Ka2 + 2*Ka3 + Ka4);
    Kb = (1/6)*(Kb1 + 2*Kb2 + 2*Kb3 + Kb4);
    Kc = (1/6)*(Kc1 + 2*Kc2 + 2*Kc3 + Kc4);

% Novos valores de dominio e imagem

    talDomain = talDomain + deltaTal;
    yDomain = yDomain + (Ka);
    zDomain = zDomain + (Kb);
    vDomain = vDomain + (Kc);

end

```

Função para definir troca de variáveis do método de Runge-Kutta

```

function [Fa, Fb, Fc] = RK4Funcitons3( talDomain, yDomain, zDomain,
vDomain, Fmax, Dref, A, QsiRef, D, zetaRef, regionF, sCritFinal,
sCritStart, CM, T, MS, aA, fM0, el, AS, CA, PreCarga)

Fa = zDomain;
Fb = ((Fmax)*sin(QsiRef*talDomain)+ PreCarga)/(Dref*A) -
vDomain/(Dref) - 2*zetaRef*(zDomain);

if regionF == 2 || regionF == -2

    if regionF == -2

        fM0= - fM0;
        vDomain = -vDomain;

    end

end

```

```

    argumSeno = pi*(vDomain - sCritFinal - CM*(T-MS))/(sCritStart -
sCritFinal);
    multiplSeno = e1*D*(1-fM0)*pi/(2*(sCritStart - sCritFinal));
    Fc = D*zDomain/(1-multiplSeno*sin(argumSeno));

    elseif regionF == 4 || regionF == -4

        if regionF == -4

            fM0= - fM0;
            vDomain = -vDomain;

        end

        argumSeno = aA*(T-AS-vDomain/CA);
        multiplSeno = e1*D*fM0*aA/(2*CA);
        Fc = D*zDomain/(1+multiplSeno*sin(argumSeno));

    else

        Fc = D*zDomain;

    end

end

```