



RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA RECORRENDO A TEORIA DE GRAFOS



Inês Barbedo

Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Mirandela – Instituto Politécnico de Bragança
inesb@ipb.pt

Maria de Fátima Pacheco

Escola Superior de Tecnologia e Gestão – Instituto Politécnico de Bragança
pacheco@ipb.pt

MOTIVAÇÃO

Uma etapa fulcral da resolução de um problema é a sua representação por um diagrama. Um grafo pode ser a ferramenta ideal para a esquematização de uma situação, podendo representar redes físicas (redes viárias, circuitos eléctricos) assim como as interações que ocorrem entre indivíduos num ecossistema ou numa teia de relações sociais. Sendo os conceitos introdutórios da Teoria de Grafos de fácil compreensão mesmo por alunos numa fase inicial da sua formação, ela é um tópico motivador e um auxiliar precioso na compreensão, modelação e resolução de problemas em que exista um conjunto de objectos de algum modo relacionados.

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Pretende-se abastecer três casas de electricidade, gás e água de modo a que nenhuma das nove ligações se cruze com outra. Será possível representar no papel tal situação?



DEFINIÇÕES



Grafo: conjunto de pontos (vértices) unidos por linhas (arestas); cada aresta une exactamente dois vértices.



Subgrafo de um grafo G: novo grafo cujos vértices e arestas são vértices e arestas de G.



Grafo conexo: existe ligação entre quaisquer dois vértices.



Grafo completo (K_n): n vértices; cada vértice ligado a todos os outros.



Grafo bipartido: é possível dividir o conjuntos dos vértices em dois subconjuntos disjuntos (não vazios); todas as arestas ligam algum vértice de um conjunto a um vértice do outro (não há arestas entre vértices do mesmo conjunto).



Grafo bipartido completo ($K_{m,n}$): $m+n$ vértices; é possível dividir o conjunto dos vértices em dois conjuntos disjuntos, um com m elementos, o outro com n elementos; cada vértice de um conjunto está ligado a todos os vértices do outro.



Grafo plano: representado no plano sem que duas arestas se cruzem; divide o plano em regiões conexas limitadas por arestas (faces) e numa região ilimitada (face exterior).



Grafo planar: pode ser desenhado no plano sem cruzamento de arestas.

Ciclo: percurso que começa e acaba no mesmo vértice.

Comprimento de um ciclo: número de arestas que o compõem.



Grafo homeomorfo a um grafo G: obtém-se acrescentando um vértice a uma aresta de G.

RESULTADOS

Fórmula de Euler: $|V| - |A| + |F| = 2$

(relaciona o o número de vértices, faces e arestas de um grafo conexo planar)

Demonstração: por indução sobre o número de arestas $|A|$.

$|A| = 0 \Rightarrow |V| = |F| = 1$ (o grafo é conexo).

Suponhamos que a propriedade se verifica para G' , grafo conexo plano com $|A| - 1$ arestas ($|A| \geq 1$). Quer-se provar que G (conexo plano com mais uma aresta) verifica a fórmula de Euler.

Distinguem-se dois casos:

- a aresta une dois vértices já existentes; o número de vértices $|V|$ mantém-se mas o número de faces aumenta uma unidade; como se tinha $|V| - |A'| + |F'| = 2$ (considerando no grafo G' , $|V|$ vértices, $|A'|$ arestas e $|F'|$ faces) e $|V| = |V|$, $|A| = |A'| + 1$ e $|F| = |F'| + 1$, o resultado verifica-se;
- a aresta une um vértice existente a outro que se acrescenta: $|V| = |V'| + 1$, $|A| = |A'| + 1$ e $|F| = |F'|$; também se verifica o resultado.

Lema 1: G grafo conexo planar $\Rightarrow |A| \leq 3|V| - 6$.

Demonstração: cada face de G é limitada por, no mínimo, 3 arestas. Se S = soma do número de arestas que limitam todas as faces, então $S \geq 3|F|$.

Cada aresta limita duas faces (ou não limita nenhuma) $\Rightarrow 2|A| \geq 3|F|$.

$$\begin{aligned} \text{Fórmula de Euler} &\Rightarrow 3|F| = 3(|A| - |V| + 2) \\ &\Rightarrow 2|A| \geq 3|A| - 3|V| + 6 \\ &\Leftrightarrow |A| \leq 3|V| - 6. \end{aligned}$$

Lema 2: G conexo, bipartido e planar $\Rightarrow |A| \leq 2|V| - 4$.

Demonstração: nenhum grafo bipartido tem ciclos de comprimento ímpar.

Cada face é limitada por um ciclo \Rightarrow cada face tem pelo menos 4 arestas a limitá-la.

$$\begin{aligned} 2|A| \geq 4|F| + \text{fórmula de Euler} &\Rightarrow 4|F| = 4(|A| - |V| + 2) \\ &\Rightarrow |A| \leq 2|V| - 4. \end{aligned}$$

Teorema (Kuratowski): Grafo planar \Leftrightarrow não contém nenhum subgrafo homeomorfo a K_5 e $K_{3,3}$.

CONCLUSÃO

A representação do problema proposto é feita através de um grafo com seis vértices, correspondendo às três casas e aos três serviços a ligar, água, electricidade e gás. Tal grafo é bipartido e do tipo $K_{3,3}$, que não é planar. Como tal, não é possível abastecer cada uma das três casas de água, electricidade e gás sem que haja cruzamento de ligações.



BIBLIOGRAFIA

- J. M. Aldous, R. J. Wilson, *Graphs and Applications*, The Open University, 2000
- I. Barbedo, *Notas de Matemática Discreta*, 2004
- E. G. Goodaire, M. M. Parmenter, *Discrete Mathematics with Graph Theory*, Prentice Hall, 1998
- J. Gross, J. Yellen, *Graph Theory and Its Applications*, CRC Press, 1990