

# INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: “UM TESTE À SUA EFICÁCIA”

Cristina Martins<sup>1</sup>, Leonor Santos<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Bragança

<sup>2</sup> Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

[mcesm@ipb.pt](mailto:mcesm@ipb.pt), [leonordsantos@sapo.pt](mailto:leonordsantos@sapo.pt)

## Resumo

Todos os alunos devem ter oportunidade de se envolver em diversos tipos de aprendizagem ao longo da educação básica, sendo a realização de investigações matemáticas um deles. No Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo, a natureza das tarefas é indicada como um dos domínios a contemplar na formação, salientando-se que, no caso, das investigações matemáticas é exigido o envolvimento activo do aluno numa actividade semelhante à dos matemáticos profissionais, adquirindo uma melhor compreensão da natureza da Matemática e da própria actividade matemática.

Tendo em conta estes aspectos, uma professora participante neste programa de formação decidiu experimentar uma investigação matemática na sala de aula. Este texto é baseado na “experiência” realizada, incluindo a selecção da tarefa, a sua preparação e exploração e a posterior reflexão.

Este trabalho aponta, essencialmente, para a “eficácia deste tipo de aulas” e consequentemente para o aprofundamento do conhecimento profissional do professor.

**Palavras-chave:** Investigações matemáticas, conhecimento profissional do professor, 1.º Ciclo do Ensino Básico, formação contínua.

## Introdução

O conhecimento profissional do professor, ainda que ligado ao senso comum e sustentado pelo conhecimento teórico, tem uma natureza genuína – é ancorado na prática (Clandinin; 1986). É, pois, na prática de sala de aula que o professor é confrontado com situações específicas em que é obrigado a tomar decisões e a resolver problemas.

As investigações matemáticas são um exemplo rico de tarefas a desenvolver na sala de aula. No documento *Currículo Nacional do Ensino Básico: Competências Essenciais* (Departamento de Educação Básica, 2001) é assinalado que todos os alunos devem ter oportunidades de se envolver em diversos tipos de aprendizagem ao longo da educação básica. Concretamente, nas investigações matemáticas, os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente e por escrito.

Em sintonia com esta orientação, o Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º Ciclo (PFCM), indica a natureza das tarefas, incluindo a realização de investigações matemáticas, como um dos domínios a contemplar. No documento orientador deste programa é referido que nas actividades de investigação é exigido o envolvimento activo do aluno numa actividade semelhante à dos matemáticos profissionais, adquirindo uma melhor compreensão da natureza da Matemática e da própria actividade matemática (Serrazina *et al.*, 2005).

Neste texto pretendemos analisar o conhecimento didáctico de Aida, professora do 1.º Ciclo participante no PFCM, na aplicação de uma tarefa de investigação matemática – *Investigando as tabuadas*, partindo da preparação da aula de investigação, da sua concretização e da reflexão efectuada.

### **O conhecimento profissional do professor e as investigações matemáticas**

O estudo do conhecimento profissional, nomeadamente a compreensão da sua natureza, estrutura e conteúdo, quer durante a formação inicial quer durante a carreira, é fundamental para o reconhecimento da sua importância na prática do professor. Uma compreensão do conhecimento do professor é, precisamente, realçada pela exploração mais aprofundada da questão de como esse conhecimento é obtido ou muda ao longo do tempo (Carter, 1990).

Vários contributos importantes se destacam no estudo do conhecimento profissional do professor. Salientamos a contribuição dada por Elbaz (1983) que acentua a natureza essencialmente prática do conhecimento profissional dos professores, sendo construído a partir do conhecimento teórico e do conhecimento resultante da experiência. A integração dos novos saberes é realizada em interacção com os valores e crenças pessoais do professor. Também Schön (1983) partindo do desacordo com os métodos e as concepções epistemológicas da racionalidade técnica procurou compreender a forma como os profissionais aprendem na prática, caracterizando o conhecimento profissional como um conhecimento em acção. Os conceitos de conhecimento-na-acção, reflexão-na-acção, reflexão-na-prática, e construção e reconstrução fazem parte da “epistemologia da prática” por ele defendida. Como refere Fenstermacher (1994, p. 12), “esta noção pretende separar o conceito do conhecimento teórico, formal, do conhecimento prático”.

Um outro contributo importante no estudo do conhecimento profissional é devido a Shulman (1986) para quem a componente principal do conhecimento profissional é o conteúdo do ensino. Salientou, especificamente, a importância do conhecimento didáctico do conteúdo, conhecimento que ultrapassa o conhecimento do conteúdo *per se* para a dimensão do conhecimento do conteúdo para *ensinar*. Como referem Ball, Lubienski e Mewborn (2001), este conceito sugere que os professores não devem apenas conhecer profundamente o conteúdo, conhecê-lo conceptualmente e conhecer as conexões entre as ideias, mas devem também conhecer as representações para e as dificuldades comuns dos alunos com ideias particulares.

Santos (2000) indica quatro categorias do conhecimento didáctico do professor: *conhecimento sobre a Matemática; conhecimento sobre a aprendizagem; conhecimento do currículo; e conhecimento do processo de instrução*. Assinala que concretamente a quarta componente está presente nas três fases da prática lectiva: a pré-acção, a acção e a pós-acção. Pode ser analisada através de exemplos e ilustrações; das tarefas; do discurso; da estrutura da aula; e de formas de trabalho dos alunos.

A realização de trabalho de cunho investigativo, “constitui uma experiência tão fundamental para a aprendizagem matemática do aluno como para o desenvolvimento profissional do professor” (Fonseca, Brunheira & Ponte, 1999, p. 100) e requer do professor, “agilidade” matemática, uma boa noção dos conhecimentos, potencialidades e interesses dos seus alunos, bem como um bom domínio dos materiais e recursos que podem ser usados como apoio a esta actividade. Também a selecção de tarefas requer conhecimentos e capacidades importantes, como ser capaz de reconhecer os processos e os conceitos a que uma tarefa conduz e reflectir sobre a sua adequação aos alunos que a irão trabalhar. (Oliveira, Ponte, Santos & Brunheira, 1999).

Fonseca *et al.* (1999) referem que, na preparação de aulas de investigação, a atitude por parte do professor deve ser, também ela, de carácter investigativo e de reflexão. Indicam que uma aula com investigações deve atender à estrutura: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão. Na fase de introdução é determinante o modo de apresentação da proposta de trabalho à turma. Na fase de desenvolvimento do trabalho pretende-se que os alunos adquiram uma atitude investigativa, devendo por isso haver a preocupação em centrar a aula na actividade dos alunos, nas suas ideias e na sua pesquisa, tendo o professor um papel de orientador da actividade. Durante a fase de discussão os alunos são confrontados com hipóteses,

estratégias e justificações diferentes das que tinham pensado, são estimulados a explicitar as suas ideias, a argumentar em defesa das suas afirmações e a questionar os colegas.

Os mesmos autores assinalam a importância de reflectir sobre o trabalho realizado, de forma a avaliar como decorreram as aulas e o trabalho e a aprendizagem dos alunos. Esta reflexão informa o professor sobre o trabalho futuro e é um momento de aprendizagem sobre o conhecimento que vai construindo sobre os seus alunos, sobre as actividades de investigação e sobre a relação destas com a aprendizagem dos alunos.

### **Uma investigação matemática com as tabuadas**

#### **(a) Contextualização**

O assunto deste texto insere-se num trabalho de investigação iniciado no ano lectivo 2006/2007 que apresenta como principal finalidade estudar o contributo da participação no PFCM no desenvolvimento profissional do professor.

Aida, um dos três casos em estudo, é uma professora do 1.º ciclo que se inscreveu voluntariamente no PFCM. Tem mais de vinte e cinco anos de serviço, aproximadamente quarenta e cinco anos de idade e, além de possuir o Bacharelato em 1.º Ciclo, possui um Curso de Estudos Superiores Especializados na área do Ensino do Francês. Passado pouco tempo após o início do programa de formação, defendeu uma dissertação de mestrado.

Acerca do PFCM, contexto do estudo, convém salientar que, a sua concretização, considera a realização quinzenal de sessões de formação em grupo e a realização de sessões de acompanhamento na sala de aula, ao longo do ano lectivo.

Tendo por base as notas de campo obtidas pela investigadora, primeira autora do texto, a reflexão pós-observação, a planificação da actividade e a documentação contida no portefólio (elemento de avaliação), apresentamos a preparação da aula de investigação, a sua concretização e reflexão. De seguida, identificamos os aspectos que caracterizam o conhecimento didáctico da professora.

#### **(b) A preparação da aula**

Aida experimentou a tarefa *Investigando as tabuadas* numa turma do 4.º ano, constituída por 10 alunos. É “um grupo bastante disciplinado e empenhado nas actividades escolares” e que “corresponde com interesse a actividades matemáticas,

especialmente quando apresentam um carácter inovador, embora esta não seja a área preferida da maioria”. A realização desta investigação matemática tinha como objectivo, por um lado, “testar a eficácia”, ao nível do 1.º ciclo, deste tipo de actividade e, por outro lado, investigar as regularidades nas tabuadas, “dado que [o estudo das tabuadas] é um conteúdo que as crianças dominam e, como tal, poderiam reflectir sobre elas de maneira a proceder a descobertas”.

Aida dedicou “especial” atenção à fase de preparação, tendo tido o contributo da formadora na sugestão de referências bibliográficas e a colaboração desta e dos colegas de grupo para a planificação da tarefa. Aida previu o trabalho que desenvolveria caso a tarefa planificada não resultasse como pretendido. Teve inclusivamente o cuidado de construir material, “duas tarefas que utilizaria no caso de subsistirem dificuldades acrescidas”.

A experimentação em sala de aula com alunos do 1.º Ciclo deixou Aida um pouco apreensiva, pois o nível etário, e consequentemente, a sua receptividade a este tipo de tarefa preocupava-a.

### **(c) A aula de investigação**

Aida seguiu a sequência de uma aula de investigação: introdução da tarefa, desenvolvimento e discussão final/reflexão.

*Introdução da tarefa.* Aida iniciou a aula com um diálogo sobre o Carnaval de forma a “envolvê-los [aos alunos] num ambiente propício”.

Optou por apresentar a tarefa no quadro, numa cartolina. Esta continha uma tabela de dupla entrada onde faltavam alguns produtos da multiplicação, que estavam cobertos com cartões na forma de palhaços e outros motivos alusivos ao Carnaval. Estando na presença de alunos sem experiência na realização de investigações matemáticas, começou por pedir aos alunos para observarem a tabela exposta no quadro e pensarem nos números a colocar nos lugares dos cartões. Foram convidados, um a um, a retirarem os cartões e a preencherem os espaços vazios com um marcador. Os alunos participaram com entusiasmo e confiança nesta fase inicial.

De seguida, Aida deu início ao trabalho de investigação propriamente dito – procurar regularidades nas tabuadas. Os alunos foram solicitados a observarem a tabela das tabuadas totalmente preenchida e desafiados a adoptarem uma atitude de investigadores, tentando descobrir as regularidades nas tabuadas.

Como metodologia de trabalho, a professora optou pelo trabalho em pares, tendo tido o cuidado de verificar se era necessário mudar os alunos dos seus lugares habituais “de maneira que o trabalho resultasse produtivo”. Distribuiu, então, a cada aluno uma ficha de trabalho com o enunciado da tarefa, que continha uma tabela da multiplicação também incompleta e linhas para as crianças registarem as descobertas. Explicou o significado da palavra *regularidades* (*o que acontecesse sempre*).

*Desenvolvimento do trabalho.* Depois de desafiar os alunos a descobrirem os produtos em falta, pediu-lhes que descobrissem as regularidades nas tabuadas. Procurou verificar se os alunos tinham dificuldades e interagiu com eles de forma a incentivá-los. Alertou-os, por exemplo, que tinham de fazer descobertas, observando com atenção os resultados das tabuadas e verificando o que se passava. Formulou algumas questões, tais como: *O que acontecesse quando multiplicamos por 2? Os números como é que são? E por três? Como são? Quais serão as relações entre eles? Vamos olhar para a tabuada do 5, o que acontecesse ao algarismo das unidades?*. Não deu demasiada informação, mas tentou que os alunos entendessem o que se pretendia.

Passado algum tempo, foi evidente que os alunos perceberam o objectivo da tarefa, pois começaram a identificar algumas regularidades.

*Discussão final/Reflexão.* Quando se apercebeu que os alunos já tinham conseguido descobrir várias regularidades, Aida pediu a cada grupo para as apresentarem aos restantes elementos da turma. Um aluno de cada grupo foi ao quadro apresentar uma regularidade e justificar a sua veracidade. Os alunos participaram com entusiasmo no relato das conclusões e estiveram atentos às descobertas dos colegas. Todos os alunos participaram e registaram as novas descobertas feitas pelos colegas.

Foram apresentadas diversas regularidades, como sejam:

- *Quando se multiplica um número por 1 obtém-se esse mesmo número;*
- *Na tabuada do 4, o algarismo das unidades obedece à sequência: 4, 8, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 0;*
- *Em cada tabuada, o número seguinte obtém-se adicionando a mesma quantidade ao anterior;*
- *Na tabuada do 9, existe uma sequência crescente no algarismo das dezenas, e a correspondente sequência decrescente no algarismo das unidades.*

A professora teve o cuidado de verificar se os alunos entendiam e se concordavam com as opiniões dos colegas. Após todos os grupos terem participado, continuou a incentivar os alunos nas suas descobertas, nomeadamente na procura de outras regularidades na tabuada dos nove.

No final da aula, Aida optou por pedir aos alunos para efectuarem a avaliação escrita do trabalho realizado. Os alunos responderam às questões: *O que fiz?*; *O que aprendi?*; *Do que gostei mais?*; e *Que dificuldades encontrei na resolução da tarefa de hoje?*.

#### **(d) Reflexão sobre o trabalho realizado**

Aida, na reflexão que apresenta no portefólio, expõe os seguintes pontos: planeamento da aula, avaliação do professor sobre as aprendizagens dos alunos, importância que a tarefa teve para o professor, e balanço final/perspectivas futuras de trabalho.

*Planeamento da aula.* Quando Aida justifica a inclusão no seu portefólio da reflexão sobre a aula com investigações matemáticas refere que sendo este “um tipo de tarefa pouco experimentado surgiu a expectativa acerca do seu grau de eficácia, no que diz respeito ao conhecimento matemático dos alunos e, também, ao seu grau de adesão”. Salientou que a realização desta tarefa “teve um duplo carácter investigativo. Por um lado, no que diz respeito ao próprio conteúdo da aula, enquanto tarefa desenvolvida pelos alunos e, por outro lado, como teste à sua eficácia, numa análise efectuada pelos professores”.

A opção pelo trabalho em pares é fundamentada na possibilidade de “provocar as interacções e a comunicação”, ou seja, “para que houvesse entreajuda, possibilidade de discussão entre as crianças uma vez que se tratava de uma actividade de investigação e, ao mesmo tempo, para potenciar a interacção porque eles são um bocadinho inibidos”. Salientou que os alunos com mais dificuldades beneficiaram com esta forma de trabalho, “em que a ajuda dos colegas ou da professora permitiu um melhor desempenho na tarefa por parte destas crianças”. Antecipou o que faria no caso de se tratar de uma turma com mais alunos, assinalando que “talvez optasse por constituir grupos maiores com o objectivo de potenciar a comunicação entre eles”.

*Avaliação do professor sobre as aprendizagens dos alunos.* Refere que os alunos desenvolveram a “capacidade de aprender a pensar e usar os conhecimentos e relacioná-los”, salientando que, “ao longo da aula foi possível identificar os progressos feitos pelas crianças”, “conseguiram realizar algumas descobertas, aplicar conhecimentos já

adquiridos a situações novas ao mesmo tempo que aprenderam a fazer conjecturas e a validá-las”. Reflecte, particularmente, sobre as dificuldades sentidas pelos alunos no que respeita ao registo das regularidades:

As dificuldades sentidas pelos outros alunos prendem-se não com a actividade em si mas com a comunicação escrita das conjecturas que fizeram e da sua validação. A Carolina dizia mais ou menos o seguinte: “o que difícil é escrever o que descobrimos”. [2.ª Reflexão, Portefólio de Aida]

*Importância que a tarefa teve para o professor.* Relaciona a importância que a tarefa teve para si com o resultado positivo do “teste” feito à realização de investigações matemáticas na sala de aula (fala 1), não deixando, todavia, de assinalar a perplexidade sentida acerca da sua “eficácia” (fala 2):

(1) Esta aula teve o mérito de me fazer crescer como professora, uma vez que tive a possibilidade de testar um tipo de aula diferente e de constatar o efeito positivo que produz nas aprendizagens dos alunos.

(2) É claro que quando se experimenta algo de novo surge, inicialmente, a dúvida acerca do êxito da sua aplicabilidade em contexto da sala de aula, perante os nossos alunos. [2.ª Reflexão, Portefólio de Aida]

*Balanco final e perspectivas futuras.* Em jeito de balanço final, efectua a avaliação da tarefa desenvolvida, tendo em conta que o “entusiasmo e a produção matemática dos alunos” lhes permitiram fazer “uma avaliação positiva da aula” e concluir que é uma actividade “perfeitamente exequível no 1.º Ciclo” e que “o desenvolvimento deste tipo de tarefas com os alunos potencia a aquisição de competências, nesta área e o gosto pela disciplina”. Utiliza os dados da avaliação feita pelos alunos para fundamentar a sua opinião:

Utilizaram correctamente e com frequência a palavra “regularidades” o que indicia que compreenderam o objectivo que se pretendia alcançar. Manifestaram, também, claramente, o agrado que esta actividade lhes proporcionou e revelaram que não lhes suscitou grandes problemas. No entanto, a Filipa mencionou que apenas no início encontrou alguma dificuldade. [2.ª Reflexão, Portefólio de Aida]

Salienta, também, que “ [no PFCM] a reflexão individual e em grupo e a interacção com os colegas que experimentaram o mesmo tipo de aula, comprovam a utilidade pedagógica desta actividade matemática, e conclui que está convicta “da eficácia deste tipo de aulas e da sua importância para o conhecimento matemático dos alunos”, pelo que “actividades deste género irão fazer parte, sem margem para dúvidas, das minhas práticas futuras”.

## **Visão sobre conhecimento didáctico do professor**

Na preparação da aula, Aida antecipou cenários possíveis tendo inclusivamente previsto o que fazer no caso do insucesso da tarefa planificada. Selecionou e construiu a tarefa (teve em conta as fases de aula com investigações) e atendeu à importância da motivação dos alunos (contextualizou-a). Previu a organização dos alunos em pares, opção sustentada pela importância das interações entre os alunos e como salvaguarda à actividade/aprendizagem dos alunos que revelam mais dificuldades, o que se tornou, de facto, um contributo importante para a eficácia da realização da tarefa. Evidenciou, assim, conhecimento sobre as aprendizagens dos alunos.

Na condução da aula, a professora tomou várias opções. Na introdução da tarefa, teve o cuidado de a apresentar de uma forma motivadora, contribuindo para um ensino por compreensão. No desenvolvimento da aula assumiu o papel de orientadora, interagiu com os alunos, apoiou o seu trabalho, questionou as suas afirmações e incentivou o trabalho de descoberta, o que conduziu à criação de um ambiente de trabalho activo, envolvendo os alunos e fomentando a sua motivação e interesse. Concretamente, na apresentação das descobertas, teve o cuidado de gerir a contribuição de cada grupo, tendo possibilitado a participação de todos os alunos. Incentivou o registo escrito das ideias, denotando conhecimento do processo de instrução.

Na reflexão sobre a aula com investigações justificou as decisões tomadas no planeamento da actividade, por exemplo o critério de selecção da actividade (conhecimento do currículo) e a opção pelo trabalho em pares. Avaliou as aprendizagens dos alunos, salientando as descobertas efectuadas e particularizando as dificuldades sentidas. Ancorou a importância que a tarefa teve para o professor no resultado positivo da experimentação efectuada e, conseqüentemente, no seu crescimento profissional. Salientou, como balanço da actividade realizada, a exequibilidade da tarefa no 1.º ciclo, pois permitiu a aquisição de competências matemáticas e o gosto pela disciplina.

Do trabalho realizado sobressai a ideia que o conhecimento didáctico do professor nas investigações matemáticas surge associado quer à acção (condução da aula), quer à pré-acção (preparação de aulas) e à pós-acção (reflexão sobre a tarefa) (Santos, 2000).

Além disso, a eficácia das tarefas de investigação na prática lectiva impõe por parte do professor uma postura, também ela, de carácter investigativo (Brunheira, 2000), pressupondo “uma boa relação com este tipo de trabalho matemático” (Oliveira *et al.*, 1999, p. 97) e a vivência de experiências matemáticas na sua formação profissional (Oliveira *et al.*, 1999), neste caso concreto o PFCM.

### Referências bibliográficas

- Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richarson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. In W. R. Houston (Ed.), *Handbook of research on teacher education* (pp. 291-310). New York: Macmillan.
- Clandinin; D. J. (1986). *Classroom practice: Teacher images in action*. London: The Falmer Press.
- Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. London: Croom Helm.
- Fenstermacher, G. (1994). The knower and the known: The nature of knowledge. *Research on Teaching, Review of Research in Education*, 20, 3-56.
- Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999) As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: APM.
- Oliveira, H., Ponte, J. P., Santos, L., & Brunheira, L. (1999). Os professores e as actividades de investigação. In P. Abrantes, J. P. Ponte, H. Fonseca, & L. Brunheira (Eds.), *Investigações matemáticas na aula e no currículo* (pp. 97-110). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Schön, D. (1983). *The reflective practioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.
- Serrazina, L., Canavarro, A., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J., & Saramago, M. J. (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo*. (documento não publicado)
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.