

A Representação nos “Princípios e Normas para a Matemática Escolar”

O livro “Princípios e Normas para a Matemática Escolar” (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2007) apresenta um conjunto de recomendações fundamentadas na crença de que todos os alunos podem e devem aprender matemática com compreensão. Os capítulos que incidem nas normas para a matemática escolar (com um capítulo geral e com quatro capítulos mais específicos para cada um dos grupos de anos de escolaridade do sistema educativo referido: anos pré-escolar-2.º, anos 3.º-5.º, anos 6.º-8.º, anos 9.º-12.º) incluem uma secção denominada “Representação”, um dos cinco “processos matemáticos” (ou capacidades matemáticas) considerados, “sendo-lhe dedicada uma Norma por inteiro, o que não acontecia anteriormente” (p. x).

A sistematização que aqui expomos incide, principalmente, no capítulo “Normas para a matemática escolar: do pré-escolar ao 12.º ano”.

Começamos por indicar as três ideias-chave destacadas na introdução das normas estabelecidas pelo NCTM para a Representação (p. 75):

1. Quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente.
2. O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado — por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma. O termo é também aplicável tanto aos processos e resultados observáveis externamente, como aos que ocorrem “internamente”, nas mentes dos indivíduos quando fazem matemática.
3. As representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da matemática a problemas realistas, através da modelação. Assinala-se, ainda, que novas formas de representação, associadas às tecnologias, vieram criar uma necessidade ainda maior de enfatizar esta capacidade matemática, no ensino.

Especificamente, são também três as “Normas para a Representação” (p. 75) que os programas de ensino do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos, a saber:

- Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;
- Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- Usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos.

Passamos, de seguida, a destacar ideias desenvolvidas no documento e associadas a cada um destes três objetivos, que consideramos relevantes e representativas da compreensão que, na altura, havia sobre esta capacidade matemática.

1. Criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas (pp. 75-77)

Nesta norma, sobressai a importância de os alunos compreenderem que “as representações escritas das ideias matemáticas constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção de matemática”. Qual deverá ser o papel do professor para que tal se realize? É, pois, assinalado ser determinante que o professor encoraje os alunos a representar as suas ideias utilizando as formas de representação que lhes fazem sentido. Estas são representações não convencionais. Não se pretende desta forma desvalorizar as convencionais, dado que estas representações irão facilitar a aprendizagem da matemática pelos alunos e a comunicação das suas ideias matemáticas com outros. É essencial não esquecer que as representações são ferramentas eficazes, relevando desta feita o trabalho que é necessário fazer para as desenvolver e compreender. Neste âmbito, um exemplo adiantado incide na notação no sistema decimal. É assumido ser este um assunto difícil para as crianças mais novas, pelo que “o currículo deverá proporcionar várias oportunidades para o estabelecimento de conexões entre a compreensão emergente dos números que os alunos utilizam na contagem e a estrutura da sua representação no sistema decimal”. É a este respeito assinalado que “à medida que os alunos avançam no currículo, a ênfase tende a mudar, progressivamente, para as formas de apresentação da própria matemática”. Este facto talvez seja baseado, segundo o documento em análise, no pressuposto que os alunos com idade para pensarem em termos formais já não necessitam de “negociar entre as suas concepções ingénuas e os formalismos matemáticos”.

De qualquer forma, é visível um alerta para a necessidade de os alunos de todos os níveis de educação e ensino “desenvolver a sua compreensão das ideias mais complexas apreendidas nas representações convencionais”, como, por exemplo, a da variável x que, parecendo tão clara, é uma “noção de difícil compreensão para os alunos”. Assim, é colocada a tónica na importância das “representações idiossincráticas construídas

pelos alunos”, quando envolvidos na resolução de problemas ou em investigações matemáticas, ajudando-os na compreensão das ideias matemáticas, mas também em formas significativas de registo de um método de resolução e na sua descrição aos outros. Quando o professor observa representações dos seus alunos pode aceder “aos modos de interpretação e de raciocínio dos alunos”, assim como pode “estabelecer ligações entre as representações pessoais dos seus alunos e representações mais convencionais”. Neste documento, é reforçada a ideia de proporcionar aos alunos oportunidades para “aprender formas de representação convencionais” e igualmente para “criar, aperfeiçoar e utilizar as suas próprias representações”. Qualquer uma destas formas funciona como uma ferramenta importante de suporte à aprendizagem e à produção de matemática.

A especificidade feita por ciclos de escolaridade é sobretudo colocada na utilização de objetos a nível do 1.º ciclo, podendo servir para representar “o número de rodas de quatro bicicletas ou o número de pirilampos de uma história”, exemplos dados neste documento. O recurso a grelhas de valor de posição, ou a materiais manipuláveis, como “os ábacos ou material multibásico de base dez”, são também apontados para a representação de um número maior de objetos. Já no respeitante aos 2.º e 3.º ciclos, é adiantado que as representações matemáticas são muito mais direcionadas para objetos e ações diretamente relacionados com a sua experiência. Nestes ciclos de ensino, os alunos poderão “começar a criar e a usar representações matemáticas de “entes” mais abstratos”, como os números racionais. Quanto aos alunos do ensino secundário é explicitada a utilização das representações convencionais como “uma forma privilegiada para expressar e compreender conceitos matemáticos mais abstratos”, sendo referido que, através das suas representações, os alunos “deverão ser capazes de ver uma estrutura comum nos fenómenos matemáticos provenientes de uma variedade de contextos”.

Outra ideia de destaque prende-se com a constatação que “as representações matemáticas ajudam o aluno a organizar o seu raciocínio”, pois permitem “tornar as ideias matemáticas mais concretas” e também mais “acessíveis à reflexão”. Se no pré-escolar e 1.º ciclo, a utilização das representações pelos alunos pode fornecer aos professores e aos colegas “um registo dos seus esforços para compreenderem a matemática”, nos ciclos seguintes o seu uso terá uma maior relevância na resolução de problemas ou “para enquadrar, esclarecer ou expandir uma ideia matemática”. Sobre este aspeto, expomos alguns dos exemplos adiantados: (i) “recolha de uma grande quantidade de dados, no decurso de uma atividade experimental sobre as condições atmosféricas, durante um largo período de tempo”, com a utilização de “uma folha de cálculo e gráficos para organizarem e representarem esses dados”; (ii) “utilização dos computadores e das calculadoras”, mudando “o que os alunos podem realizar com representações convencionais” e ampliando “o conjunto de representações com as quais podem trabalhar”. Por exemplo, a utilização de programas de geometria dinâmica ou de gráficos, permite-lhes “rodar, inverter, esticar e ampliar os seus gráficos”,

o recurso a sistemas algébricos computacionais possibilita-lhes “manipular expressões”, e o uso de folhas de cálculo pode levá-los a “investigar conjuntos complexos de dados”. A reflexão sobre a utilização das tecnologias é também um meio de reflexão sobre as diferenças entre as representações que estas possibilitam e as representações convencionais.

2. Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas (pp. 77-79)

Uma ideia forte nesta norma é a valorização da diversidade de representações, realçando que “representações distintas focam, geralmente, aspetos diferentes de relações ou conceitos complexos”. Atenda-se, por exemplo, ao conceito de fração. Os alunos podem aprender a representar frações como “setores de um círculo ou como partes de um retângulo ou de outras figuras” ou através de “representações físicas como placas divididas em partes, barras fracionadas e outros materiais”, reforçando a interpretação de fração como relação parte-todo. Embora útil, este tipo de representação não realça outras interpretações ou significados do conceito de fração, “como razão, divisão indicada, ou a fração enquanto representação de um número”. Outras representações associadas às frações, tais como “pontos numa reta numérica ou razões entre elementos discretos num conjunto”, fazem sobressair outros aspetos relativos ao complexo conceito de fração. Por isso, para que desenvolvam conhecimentos aprofundados sobre frações, os alunos necessitam de recorrer a “uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão”.

A importância da utilização de múltiplas representações deverá, então, ser privilegiada ao longo da escolaridade. Alunos do 1.º ciclo deverão saber como “representar três grupos de quatro através da adição repetida, da contagem por intervalos ou de uma disposição de objetos”, começando a entender que algumas representações tornam “mais fácil a compreensão de algumas propriedades”. Por exemplo, utilizando a disposição retangular “o professor pode tornar visível a propriedade comutativa” da multiplicação. Nos 2.º e 3.º ciclos, os alunos vão ampliando o conjunto de representações que possuem, incluindo “figuras, tabelas, gráficos e palavras mais complexas para modelar problemas e situações”, e desenvolvem “um repertório cada vez mais alargado de representações matemáticas, bem como um conhecimento de como as utilizar de forma eficiente” no sentido de saber escolher e justificar o tipo de representação mais apropriada à situação.

Nesta perspetiva, é essencial que os alunos de todos os níveis de educação e ensino “reflitam sobre o uso que fazem de representações, de modo a desenvolverem uma compreensão dos pontos fortes e fracos de várias representações com objetivos diferentes”. Por exemplo, ao aprender sobre diferentes formas de representação de dados estatísticos, os alunos precisam de “oportunidades para identificar o tipo de dados e questões” em que o recurso a um gráfico circular é mais adequado do que a um gráfico de linhas”, ou que o uso de um diagrama de extremos e quartis se revela mais apropriado do que um histograma.

3. Usar as representações para modelar e interpretar fenômenos físicos, sociais e matemáticos (pp. 79-80)

O documento discute diferentes significados do termo “modelo”, associando-o a “modelos manipuláveis”, a exemplificação ou simulação, e, ainda, a “um [termo] sinónimo aproximado de representação”. Assume o termo “modelo matemático” como “uma representação matemática dos elementos e relações presentes numa versão idealizada de um fenómeno complexo”, podendo ser utilizado para “esclarecer e interpretar fenómenos e para resolver problemas” e permitindo “uma visualização de um fenómeno real”. Como uma ilustração de os modelos proporcionarem uma visualização de um fenómeno real é referido o caso de um estudo sobre o “fluxo do tráfego”. “Por quanto tempo deverá um semáforo manter-se verde, de modo a permitir que uma quantidade razoável de automóveis atravesse o cruzamento?” pode ser uma questão a explorar pelos alunos. Poderão fazer uma recolha de dados na realidade sobre “o tempo (médio) que o primeiro carro demora a atravessar o cruzamento, o segundo carro, etc.”. Poderão elaborar uma representação estatística desses dados ou estabelecer “funções analíticas para abordarem o problema no abstrato”, tendo em conta o tempo de espera de um carro para avançar, o tempo de demora de um carro “a atingir a velocidade média dos restantes carros em andamento”, etc.

O uso apropriado pelos alunos dos diversos tipos de representações, para “modelar fenómenos físicos, sociais e matemáticos”, deverá reforçar-se à medida que a sua escolaridade avança. O documento vai apresentando algumas situações que exemplificam este reforço. Por exemplo, os alunos mais novos podem “modelar a distribuição de 24 bolachas por 8 crianças, utilizando sólidos ou blocos organizados de formas diversas”, fazendo apelo ao uso de materiais concretos e manipuláveis. Depois os alunos utilizam as representações para “modelarem fenómenos do mundo circundante e para identificarem padrões quantitativos” e, em continuidade, para modelarem e resolverem “problemas inseridos em contextos quer do mundo real, quer puramente matemáticos”, evoluindo para a utilização de “variáveis na representação de valores desconhecidos” e de “equações, tabelas e gráficos na representação e análise de relações”. Já os alunos do secundário podem criar e interpretar “modelos de fenómenos delineados a partir de uma maior diversidade de contextos — incluindo os ambientes físico e social”, identificando “elementos essenciais dos contextos” e recorrendo a “representações que captem as relações matemáticas existentes entre esses elementos”. Nestes casos, o aproveitamento das “tecnologias eletrónicas” disponíveis é fundamental por possibilitarem aos alunos o “acesso a modelos, que podem ser utilizados na análise de uma vasta gama de situações realistas e interessantes”, tornando-as mais significativas para todos. Por exemplo, os métodos numéricos iterativos “podem ser usados para desenvolver um conceito intuitivo de limite e das suas aplicações” ou o comportamento assintótico das funções pode ser “apreendido mais facilmente por meio de gráficos, assim como os efeitos das transformações nas funções”.

A concluir, apresentamos uma panorâmica sucinta e global dos quatro capítulos mais específicos de cada um dos grupos do sistema educativo considerado, mencionando aspetos relacionados quer com o desenvolvimento da representação ao longo da escolaridade na perspetiva dos alunos quer com ações genéricas do professor para potenciar esse desenvolvimento.

Os alunos mais novos “representam os seus pensamentos e os seus conhecimentos sobre ideias matemáticas através da linguagem verbal oral e escrita, através de gestos, desenhos e de símbolos inventados e convencionais” (p. 160). Avançando na sua escolaridade básica, e para modelar situações problemáticas, os alunos utilizam “quer modelos externos — modelos que eles possam construir, modificar e analisar — quer imagens mentais”. Recorrem a “representações informais, tais como desenhos, para realçar as diversas características dos problemas”, e utilizam “modelos físicos para representar e compreender noções, tais como a multiplicação e o valor posicional” da numeração. Na resolução dos problemas aprendem, igualmente, a “usar equações, tabelas e gráficos” (p. 240). Próximo do final da escolaridade básica, os alunos desenvolvem e aprofundam conceitos e relações matemáticas com recurso a representações múltiplas e diversificadas, como “objetos físicos, desenhos, tabelas, gráficos e símbolos”. Identificam e usam diferentes formas de representação para “frações, números decimais, percentagens e números inteiros” e usam uma “variedade de ferramentas gráficas para representação e análise de conjuntos de dados” (p. 332). Já no secundário, mais competentes matematicamente, os alunos desenvolvem um “repertório cada vez maior de representações matemáticas e o de como as usar de forma produtiva” (p. 422), reconhecendo melhor “que diferentes representações sustentam diferentes formas de pensar e manipular os objetos matemáticos” (p. 423).

Nesta perspetiva, especialmente nos anos iniciais, uma das principais responsabilidades do professor na abordagem da representação consiste na criação de “um ambiente de aprendizagem no qual a utilização, por parte dos alunos, de diversas representações seja encorajada, apoiada e aceite pelos seus colegas e pelos adultos” (p. 163). Para isso, deve estimular “os alunos a utilizarem uma multiplicidade de representações”, ajudá-los a “associar as suas linguagens à linguagem convencional da matemática” (p. 160) e a atribuir “significado a formas de representação importantes” (p. 337).

Referência:

National Council of Teachers of Mathematics. (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Associação de Professores de Matemática. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

CRISTINA MARTINS

MANUEL VARA PIRES

CENTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO BÁSICA, INSTITUTO POLITÉCNICO DE BRAGANÇA