Aprofundando o conhecimento matemático para ensinar: algumas situações no âmbito de um programa de formação contínua

CRISTINA MARTINS
Instituto Politécnico de Bragança
mcesm@ipb.pt

CARLOS MIGUEL RIBEIRO
Universidade do Algarve

Resumo

A prática lectiva é condicionada e potenciada pelo conhecimento profissional dos professores. Um dos objectivos do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos é o de aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores, sendo este texto o resultado da realização de duas tarefas propostas nesse âmbito e com esse intuito. Ao longo do texto, abordamos alguns aspectos do conhecimento profissional dos professores que consideramos fundamentais, discutindo as características das tarefas a propor aos alunos e a relação entre estas e o conhecimento profissional do professor.

Palavras-chave: Conhecimento Profissional, Matemática, Tarefas.

INTRODUÇÃO

Aos professores compete possuírem um tipo de conhecimento matemático muito próprio e específico – distinto do utilizado noutras profissões que encaram a matemática como uma ferramenta e meio auxiliar de cálculo – que se poderá denominar por conhecimento matemático para o ensino. Enquanto formadores de professores – de formação inicial ou contínua – uma das nossas principais funções é a de contribuir para uma melhoria do conhecimento profissional dos formandos/alunos, especificamente desse tipo de conhecimento especializado para a profissão docente.

O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico (PFCM), apresenta como objectivos, entre outros, o aprofundar o conhecimento matemático, didáctico e curricular dos professores e fomentar uma atitude positiva destes relativamente à disciplina de Matemática e às capacidades dos alunos. No sentido de ir ao encontro dos objectivos preconizados pelo PFCM (em particular dos dois anteriores), nas sessões de formação em grupo, a exploração e discussão de tarefas baseou-se na reflexão e consciencialização, por parte dos formandos, da existência/necessidade do referido tipo de conhecimento, de modo a poderem tornar compreensível aos seus alunos os conceitos abordados, identificar a fonte do erro, conhecerem processos alternativos de apresentação dos conteúdos, bem como as relações existentes entre os diversos tópicos matemáticos, e de que forma as aprendizagens de um mesmo tópico vão evoluindo ao longo da escolaridade.

Neste texto discutimos algumas situações vivenciadas nos nossos grupos de formação no âmbito do PFCM, sendo essa discussão fundamentada com comentários dos formandos. Consideramos que as situações discutidas reflectem o aprofundamento do conhecimento matemático para ensinar dos professores.

TAREFAS E CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA ENSINAR

Uma componente importante do processo de ensino reporta-se ao tipo de tarefas que os professores propõem aos seus alunos. Estas, para além de preparadas de modo a permitirem aceder explicitamente ao seu processo de pensamento, devem também ter em conta a diversidade de cada um, de modo a propiciarem actividades que potenciam aprendizagens efectivas. Para poderem ser encaradas como potenciadoras de construção de conhecimentos, para além do tipo de exploração que se lhe encontra associado, devem ainda: envolver situações problemáticas com significado para os alunos; ser a base para uma exploração e aplicação de modelos; encorajar à realização de múltiplas abordagens e interpretações; dar prioridade à comunicação matemática; tornar necessária uma documentação dos resultados finais e fazer da auto-avaliação uma componente inerente à tarefa (Lesh, Hoover, Kelly & Post, 2000). Para a preparação de tarefas com estas características, é necessário que o professor seja possuir de um rico e bem fundamentado conhecimento profissional. Este pode ser encarado sob diversas perspectivas, existindo, portanto, diversas abordagens que permitem identificar os domínios que um professor deve possuir de forma a exercer convenientemente a sua acção docente (e.g. Ball, 2002; Ball, Hill & Bass, 2005; Ball, 2000; Elbaz, 1981, 1983; Leinhardt & Smith, 1985; Ponte, 1999; Schön, 1983; Shulman, 1986).

Os professores precisam não só de ser conhecedores dos conteúdos matemáticos que vão ensinar, mas também de distintas formas de os tornar compreensíveis para os seus alunos e de relacionar os conteúdos que estão a ser abordados com os que podem vir a ser ou já o foram, explorando possíveis conexões. Neste contexto, consideramos a noção de conhecimento matemático para o ensino introduzido por Ball (2003) e Ball, Thames, & Phelps (2008) que, baseados nas componentes do conhecimento profissional de Shulman (1986) apresentam uma proposta, ainda em construção, onde consideram que o conhecimento do conteúdo é formado pelo conhecimento propedêutico, pelo conhecimento comum do conteúdo e pelo conhecimento especializado do conteúdo. O conhecimento didáctico do conteúdo (que contém o conhecimento curricular de Shulman) é também composto por três componentes que dizem respeito ao conhecimento do conteúdo e do ensino, do conteúdo e dos alunos, e conhecimento do currículo.

O conhecimento propedêutico relaciona-se com o conhecimento das relações existentes entre os distintos tópicos matemáticos e de que forma as aprendizagens de um mesmo tópico vão evoluindo ao longo da escolaridade; o conhecimento comum do conteúdo corresponde ao conhecimento que qualquer pessoa escolarizada em matemática possui. O conhecimento especializado do conteúdo relaciona-se com a necessidade do professor possuir um conhecimento que lhe permita facilmente perceber e identificar não apenas o erro mas essencialmente a sua fonte, bem como conhecer processos alternativos de apresentação dos conteúdos para que, sem dificuldade possa colmatar as lacunas dos seus alunos. Não é portanto suficiente, por exemplo, que o professor saiba que o sistema de numeração indo-árabe é um sistema posicional e de base 10 nem, noutro contexto, saber calcular o produto entre dois números decimais (considerado conhecimento comum). É necessário que saiba o que isso significa e como representar esse significado na sala de aula, para que os alunos compreendam o funcionamento deste sistema e não mecanizem apenas a escrita dos números e, no caso da segunda situação, compete-lhes conhecer os motivos porque o fazem (o produto de dois números), ou seja, exige-se, mais do que saber apenas determinar o resultado, ou explicar, de forma directa, como o fizeram, exige-se que possuam um conhecimento sobre o algoritmo que ensinam, e outros alternativos, possíveis abordagens – numéricas, geométricas, pictóricas,... – de modo a tornarem compreensível para os seus alunos a operação a realizar, para que estes a possam concretizar com sentido e não somente aplicando um conjunto de regras memorizadas sem compreensão.

Ball *et al.* (2008), consideram ainda que, incluído no conhecimento didáctico do conteúdo, os professores devem possuir um conhecimento combinado sobre o ensino e o conteúdo específico, nomeadamente um conhecimento a que recorrem mesmo em situações em que não se explora especificamente conteúdos mas que estão relacionadas com os mesmos (por exemplo, decidir com que exemplo iniciar, escolher apropriadamente as representações mais adequadas a cada situação). No que se refere ao conhecimento do conteúdo e dos alunos, relacionam-no com a necessidade dos professores anteciparem o que os alunos pensam, suas dificuldades, facilidades e motivações, bem como ouvir e interpretar os seus comentários. Aos professores compete ainda possuírem um conhecimento do currículo que têm de ensinar, da forma como os diversos conteúdos se relacionam e evoluem ao longo do ano e dos anos seguintes.

PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA: CONHECIMENTO MATEMÁTICO SUBJACENTE ÀS TAREFAS

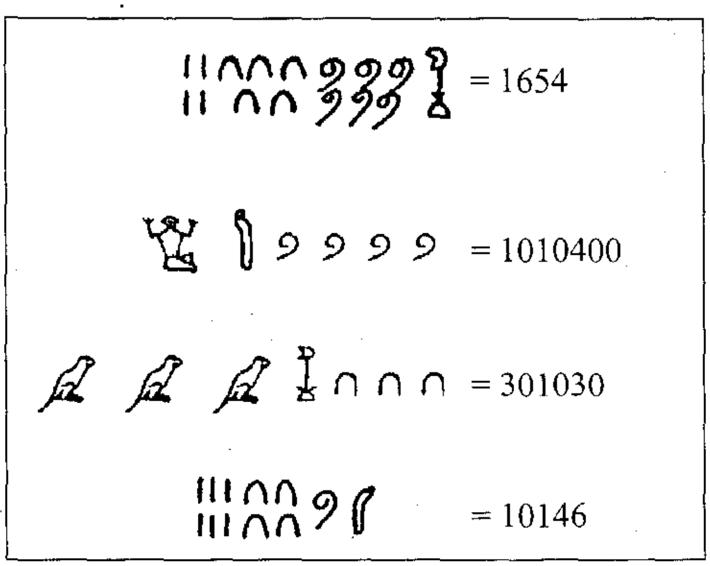
Com o intuito de ilustrar a importância das tarefas como promotoras de discussões e reflexões conducentes a um aprofundamento do conhecimento profissional dos professores, apresentamos duas tarefas discutidas com professores do 1.º Ciclo no âmbito do PFCM.

A descrição e análise destas tarefas baseiam-se nos debates e registos realizados nas sessões de formação em grupo; na observação participante; e consequentes notas de campo, realizada por nós, formadores, nas sessões de acompanhamento em sala de aula; e nas reflexões escritas pelos professores e incluídas nos seus portefólios de desempenho. Algumas das sessões conjuntas foram também gravadas em áudio, o que permitiu que alguns professores incluíssem algumas das situações discutidas no seu portefólio (Rochelle, 2000; Santagata, Zannoni & Stigler, 2007; Star & Strickland, 2008), reflectindo sobre algumas das componentes do seu conhecimento profissional e valorizando o tipo de actividades como promotoras do seu desenvolvimento profissional.

A primeira tarefa que apresentamos diz respeito ao estudo das características do sistema de numeração indo-árabe (base 10, posicional), através da comparação com outros sistemas. A necessidade de melhor conhecer o sistema de numeração com o qual trabalham no dia-a-dia e a forma de o trabalhar com os seus alunos, foi o motivo apresentado pelos formandos e motivador da realização de uma sessão de formação dedicada ao assunto.

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

1. Os números apresentados na figura seguinte estão escritos em egípcio e o respectivo valor no sistema de numeração indo-árabe:



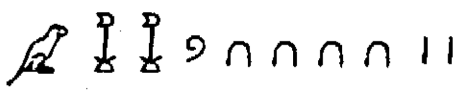
1.1. Descubra o valor de cada símbolo do sistema de numeração egípcio.
1.2. Indique as principais características deste sistema de numeração (tipo de sistema, base, escrita de números,...).

2. Os antigos egípcios, para escrever os números, utilizavam um sistema de numeração chamado hieroglífico. Os símbolos utilizados, o seu valor e o seu nome estão apresentados na figura seguinte.

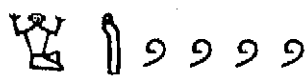
Número	1	10	100	1000	10000	100000	1000000
Símbolo egípcio							
Nome	Traço	Arco	Rolo	Flor de lotus	Dedo	Girino	Homem

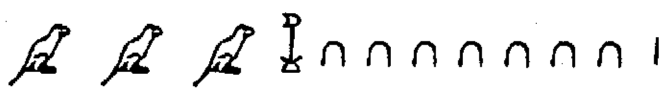
Para representar um número, os símbolos repetem-se o número de vezes necessário, por exemplo:

Às vezes inverte-se a ordem dos símbolos e a sua representação é vertical em vez de horizontal.

102143 = 

2.1. Descubra o valor de cada número representado:

2.1.1. 

2.1.2. 

2.2. Escreva, como teria feito um egípcio, os seguintes números:

2.2.1. 2312

2.2.2. 24050

a.3. Os egípcios não podiam escrever qualquer número. Cite um número natural que os egípcios não podiam escrever.
a.4. Os egípcios não tinham necessidade de utilizar um símbolo para o zero. Justifique a afirmação.

3. O sistema de numeração que adoptamos é chamado indo-árabe porque foi iniciado pelos Hindus e transmitido à Europa pelos Árabes. É um sistema posicional de base dez usando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Num número há a considerar a ordem, posição de cada algarismo no número e as

classes, associações de três ordens. Para a compreensão do sistema de numeração indo-árabe, utilize alguns materiais manipuláveis: palhinhas, peças multibásicas e ábacos e apresente exemplos que justifiquem o valor de posição, a base dez e a escrita dos números.

4. Invente um novo sistema de numeração. Caracterize-o.

5. Organize uma sequência de actividades para a introdução do sistema indo-árabe na sala de aula.

No início da tarefa efectuou-se a análise de alguns números escritos em numeração hieroglífica egípcia. Os professores descobriram o valor de cada símbolo e as principais características deste sistema (tipo de sistema, base e escrita de números). De seguida descobriram o valor de cada número representado, escreveram números em egípcio, verificaram que os egípcios não podiam escrever qualquer número. Por exemplo, foi com entusiasmo que se procedeu à descoberta do maior número que os egípcios podiam escrever (9 999 999). Verificaram também que os egípcios não tinham necessidade de utilizar um símbolo para o zero, pois aquando da escrita dos números bastava omitirem o símbolo correspondente à ordem em falta (por exemplo, na escrita do número 1604 omitiam o símbolo correspondente à ordem das dezenas, o arco). Da discussão das várias características deste sistema e para melhor entendimento do significado de base, surgiu a oportunidade de trabalhar em bases diferentes da base 10, nomeadamente a base 2, o que foi feito com a ajuda das peças multibásicas.

No ponto 2 da tarefa proposta e, por comparação com o sistema egípcio, abordaram-se as características do sistema de numeração indo-árabe e foram discutidas as potencialidades de alguns materiais manipuláveis: palitos, peças multibásicas e ábacos para a compreensão deste sistema (valor de posição, base dez e escrita dos números). Falou-se, também, sobre a escrita do que se denomina frequentemente por números grandes.

Uma vez que os professores manifestaram curiosidade no trabalho com diferentes bases, por nunca antes o terem feito, retomou-se a escrita de números em bases diferentes da base 10, novamente com o auxílio das peças multibásicas. Uma formanda conjecturou, ainda, a existência de alguma regularidade na escrita dos números por ordem crescente na base 3. Através da escrita, nessa base, de alguns dos primeiros números naturais foi possível discutir essa conjectura e apontar indícios de que ela efectivamente se verifica.

Nas reflexões dos professores sobre esta tarefa, incluída no portefólio da Formação, foi possível ler:

> *"Foi-nos proposto trabalhar sobre os sistemas de numeração indo-árabe e egípcio, com recurso a materiais manipuláveis. Analisámos vários números escritos em numeração egípcia, descodificámos o valor dos símbolos e escrevemos vários números.*

Foi curioso verificar que os egípcios não podiam escrever, com os seus símbolos, alguns números e que não usavam um símbolo para zero. Trabalhámos de seguida na base 2, utilizando peças multibásicas. Esta sessão permitiu-me desenvolver conhecimento matemático nomeadamente trabalhar em bases diferentes da base 10. Fiquei a conhecer melhor o sistema de numeração egípcio. Do ponto de vista didáctico, foi-me possível trabalhar com materiais diversificados: palitos, peças multibásicas e ábacos. Com eles, pude verificar o valor de posição dos números, treinar a base 10 e a escrita e leitura de números."

"Decidi fazer a síntese desta sessão [2.ª sessão], porque, para além de ser uma das primeiras, o conteúdo foi para mim bastante interessante, pois apesar de já ter ouvido falar de numeração egípcia nunca tinha sido abordado com esta profundidade. Foi interessante constatar que os egípcios não podiam escrever alguns números com os seus símbolos e que não usavam um símbolo para zero."

A segunda tarefa que apresentamos refere-se à multiplicação de números decimais. A discussão deste assunto numa sessão de formação em grupo surgiu pelo facto de, numa das aulas acompanhadas, uma das grandes dificuldades dos alunos (do 4.º ano de escolaridade) ter sido a de compreenderem o motivo pelo qual, ao multiplicarem duas determinadas quantidades expressas em décimas obterem uma determinada quantidade expressa em centésimas, ou seja, por que motivo, ao multiplicarem dois números expressos em décimas, utilizando o algoritmo, têm de considerar, no produto, duas e não apenas uma casa decimal (como aconteceria se estivessem a efectuar uma adição ou subtracção).

A tarefa proposta aos professores relacionava-se com a preparação de uma tarefa a propor aos alunos, partindo do seu contexto, envolvendo a resolução de problemas, e de modo a que os alunos pudessem, por via das suas discussões e argumentações, construir (irem construindo) os conceitos relacionados com a multiplicação de números decimais. Uma das formandas seleccionou o produto 0,4 por 0,4 a partir do qual o formador iniciou a discussão, como se pode ver na transcrição seguinte:

Formador: *Que tipo de tarefas dão aos alunos para lhes explicar como fazer $0{,}4 \times 0{,}4$?*
Ana: *Então... multiplicas como se não tivesse vírgulas e depois contas as casas decimais...*
Manuela: *O problema é depois tirar as vírgulas...*
Rosa: *Faço $4 \times 4 = 16$ e no fim conto as casas decimais.*
Formador: *E porque é que se contam as casas decimais?*

> Ana: *Porque tens ali duas... é só contar...*
> Manuela: *Pois... aí eles ficam sem perceber... mas fazem na mesma! Ou seja, fazemos como nos ensinaram...*

É de salientar que este não é certamente o melhor exemplo para iniciar este tipo de tarefas. Foram escolhidos dois valores iguais o que poderá tornar, só por si, mais complexo o processo que se quer evidenciar, pois não existe diferenciação objectiva de que valor se estará a falar (se do multiplicando ou do multiplicador).

As professoras reconheceram que ensinam este conteúdo como lhes foi ensinado, nunca tendo tido oportunidade de tomarem contacto com as justificações e processos matemáticos envolvidos. Assumiram que, o facto de não conhecerem, e não saberem explicar, os passos intermédios do algoritmo da multiplicação, faz com que lhes seja impossível explicá-los aos seus alunos de modo a que estes o compreendam.

Explicitamente as professoras referiram que *desconhecem a justificação para que na multiplicação seja diferente da adição ou subtracção, em que não é necessário contar as casas decimais enquanto na multiplicação o é.*

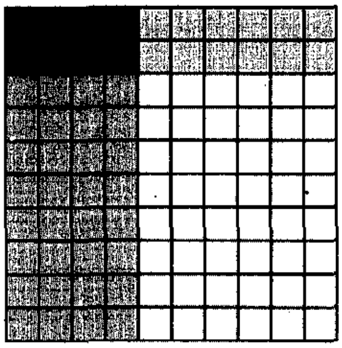
De modo a contextualizar o processo de visualização, discutiu-se como representar a multiplicação utilizando o modelo rectangular com números inteiros e posteriormente esta discussão foi estendida à situação em que as medidas dos lados são números decimais (0,2 e 0,4) e para tal foi desenhado numa folha um rectângulo (no caso, quadrado) sem qualquer tipo de divisão:

> Formador (indica o rectângulo): *Como é que represento aqui a multiplicação de $0,2 \times 0,4$?*
> Rita (indica um dos lados do rectângulo): *Tens de dividir isso em dez partes iguais e escolher apenas duas... e fazer o mesmo do outro lado...*

Nesta situação, a professora Rita efectuou a correspondência entre a representação da multiplicação de números inteiros utilizando o modelo rectangular e a sua representação para números decimais. Ainda que de forma intuitiva esta professora focou um ponto fundamental relativo à multiplicação de números decimais com a qual os alunos deverão tomar contacto de forma integrada e não somente como uma regra que devem decorar e saber aplicar: multiplicar por uma décima é o mesmo que dividir por 10.

Seguindo as opções da professora obteve-se o resultado da multiplicação, que corresponde à superfície que foi duplamente pintada. Este facto surpreendeu os professores, tanto pela simplicidade da elaboração como pela clareza de visualização.

FIGURA 1: Modelo rectangular da multiplicação utilizado para efectuar $0{,}2 \times 0{,}4$



Após a descoberta desta "nova" forma de considerar a multiplicação, foi ainda necessária uma discussão mais profunda sobre a validade de considerar apenas a parte que ficava duplamente pintada. Aceitarem e apropriarem-se desta nova situação implicava uma alteração do seu próprio modelo mental de multiplicação, pois consideravam que apenas se poderia aplicar o modelo rectangular quando estavam envolvidas quantidades inteiras.

> Formador: *Então agora, em quantas partes está a unidade dividida?*
> Formandas: *Em 100! Então aqui são 8 das cem partes, 8 centésimas!*
> Manuela: *Nunca eu tinha visto nada disto assim. Assim realmente é mais fácil de os alunos entenderem, eu também entendi!*

Após estas discussões e reflexões sobre este tipo de representação gráfica e das suas potencialidades para uma primeira abordagem ao conteúdo, foi ainda discutido um processo, envolvendo a relação de equivalência entre multiplicar por uma décima e dividir por 10, para que os alunos, e neste caso também os professores, pudessem efectuar as operações com compreensão, e também de modo a permitir-lhes a passagem de uma rede conceptual a outra, relacionando assim, efectivamente a divisão e multiplicação como operações inversas.

Mais tarde, em algumas das aulas acompanhadas (no âmbito do PFCM), foram propostas aos alunos as tarefas preparadas naquela sessão explorando este tipo de actividades possibilitando-lhes assim a oportunidade de efectuarem as operações com compreensão e não somente aplicando uma regra.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como formadores reconhecemos que quer numa situação quer noutra os professores tendem a ensinar os conteúdos tal como lhes foram ensinados (Mellado, Ruiz, & Blanco, 1997) e admitem que nunca lhes foi facultada a oportunidade de tomarem contacto com as justificações e processos matemáticos que lhes permitiriam criar uma compreensão e ideia própria do processo matemático utilizado. Possuem assim um conhecimento comum do que pretendem ensinar (pois sabem que o sistema de numeração indo-árabe é de base 10 e posicional e sabem determinar o resultado de uma operação), mas não possuem "ainda" um conhecimento especializado para o seu ensino. O facto de não conhecerem, e não saberem explicar, por exemplo, como efectuar a multiplicação de dois números decimais, faz com que lhes seja impossível explicá-los aos seus alunos de modo a que estes o compreendam.

A exploração da tarefa relacionando a equivalência entre multiplicar por uma décima e dividir por 10, foi também explorada pois, apesar de não ser parte explícita do programa do 1.º Ciclo, ao conhecerem-no e ao saberem que esse será um conteúdo abordado nos anos seguintes, os professores desenvolvem o seu conhecimento propedêutico (Ball *et al.*, 2008) potenciando o facto de os alunos alicerçarem de forma sólida os seus conhecimentos.

As lacunas aqui evidenciadas apenas puderam ser colmatadas (ou, pelo menos, facultou-se a oportunidade para a sua consciencialização por parte dos formandos), pois a ênfase nas sessões de formação não foi colocada unicamente nos conhecimentos dos professores relativos aos conteúdos científicos, ou na apresentação de "boas" tarefas a serem aplicadas com os seus alunos, ocorreu também uma ênfase na adequação das tarefas propostas ao contexto de sala de aula de cada professor e nas discussões subjacentes. Este tipo de exploração, em que se envolve efectivamente as práticas dos professores, tal como consideramos que deva ocorrer neste tipo de formação, possibilita-lhes adquirirem um conhecimento matemático que permita um ensino eficaz (Ball, 2003).

Referências

BALL, D. (2000). "Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach". *Journal of Teacher Education*, 51(3): 241-247.

BALL, D. (2002). "Knowing Mathematics for Teaching: Relations between Research and Practice". *Mathematics and Education Reform Newsletter*, 14(3): 1-5.

BALL, D. (2003). *What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics (Adobe PDF)*. Paper presented at the U.S. Department of Education, Secretary's Mathematics Summit, Washington, DC, February 6, 2003, http://www.personal.umich.edu/~dball/presentations/index.html (10 de Maio de 2008).

BALL, D.; HILL, H. & BASS, H. (2005). "Knowing Mathematics for Teaching. Who knows Mathematics Well Enough to Teach Third Grade, and How Can We Decide?" *American Educator, Fall 2005*, 14-46.

BALL, D.; THAMES, M. H. & PHELPS, G. (2008). "Content knowledge for teaching: what makes it special?". *Journal of Teacher Education*, 59 (5): 389-407.

ELBAZ, F. (1981). "The teachers' «practical knowledge»: Report of a case study". *Curriculum Inquiry*, 11: 43-71.

ELBAZ, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

LEINHARDT, G. & SMITH, D. A. (1985). "Expertise in mathematics instruction: subject matter knowledge". *Journal of Educational Psychology*, 77: 247-271.

LESH, R.; HOOVER, M. B.; KELLY, A. & POST, T. (2000). "Principles for developing thoughts-revealing activities for students and teachers". In R. A. Lesh & A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591-646). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MELLADO, V. J.; RUIZ, C. M. & BLANCO, J. L. (1997). «Aprender a enseñar Ciencias Experimentales en la formacion inicial de maestros". *Bórdon*, 49(3): 275-288.

PONTE, J. P. (1999). "Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional". In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro & H. A. Sá (Eds.), *Investigar e Formar em Educação: Actas do IV Congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.

ROCHELLE, J. (2000). "Choosing and using video equipment for data collection". In A. Kelly & R. Lech (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

SANTAGATA, R.; ZANNONI, C. & Stigler, J. W. (2007). "The role of lesson analysis in pre-service teacher education: an empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(2): 123-140.

SCHÖN, D. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Nova York: Basic Books, Inc., Publishers.

SHULMAN, L. (1986). "Those who understand: Knowledge growth in teaching". *Educational Researcher*, 15(2): 4-14.

STAR, J. R. & STRICKLAND, S. K. (2008). "Learning to observe: using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 107-125.