

O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática

Cristina Martins

Escola Superior de Educação de Bragança
mcesm@ipb.pt

Ema Maia

Escola Superior de Educação de Coimbra
emaia@esec.pt

Hugo Menino

Escola Superior de Educação de Leiria
hmenino@clix.pt

Isabel Rocha

Escola Superior de Educação de Leiria
irocha@mail.telepac.pt

Manuel Vara Pires

Escola Superior de Educação de Bragança
mvp@ipb.pt

Este texto, que constituiu uma base de discussão no grupo de trabalho *Investigações matemáticas na aprendizagem na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico*, pretende fazer uma síntese e problematizar o estudo do trabalho de natureza não rotineira, em particular de natureza investigativa, nas aprendizagens iniciais da Matemática desenvolvidas por crianças do pré-escolar e do 1º ciclo do ensino básico. Inclui-se, ainda, na parte final do texto, uma síntese da discussão entretanto havida no grupo de trabalho.

Na primeira parte – (dos) problemas (às) investigações – é recordado o percurso seguido pela abordagem ao trabalho não rotineiro, referindo estudos e analisando documentos que marcaram a evolução da educação matemática nas últimas duas décadas e que foram influenciando o currículo e a vida escolar dos professores e das crianças.

Na segunda parte – estudos e experiências na sala de aula – são apresentadas e discutidas algumas investigações e reflexões resultantes de experiências da sala de aula, onde se destacam diversas características que se podem associar ao trabalho investigativo e as consequentes implicações no ambiente e na dinâmica da aula de matemática.

Na terceira parte – questões emergentes – são apresentadas algumas questões que interessa ter presentes quando se lida com formas de trabalho, do tipo associado às investigações matemáticas, que apelam a competências multidimensionais e orientadas para níveis cognitivos complexos.

(Dos) problemas (às) investigações

Na década de 80 surgem vários documentos, de que são exemplo *Uma agenda para acção* (NCTM, 1980/1985) e *Renovação do currículo de matemática* (APM, 1988), que defendem a resolução de problemas (*problem solving*) como o centro do ensino e da aprendizagem da matemática. Igualmente, autores como Baroody (1993), Fernandes *et al.* (1994), Kantowski (1977) e Schoenfeld (1980) perspectivam um ensino através da resolução de problemas e um ensino de heurísticas, retomando o modelo proposto por Pólya (1945/1975) e contrariando a visão de que só é necessário dominar algoritmos, técnicas e conhecimentos factuais para mais tarde resolver problemas.

De facto, o conhecimento matemático deve emergir dos problemas e da experiência com a resolução de problemas, experiência essa que engloba processos como a exploração do contexto, a elaboração de novos algoritmos, a criação de modelos ou a própria formulação de problemas (APM, 1988; NCTM, 1980/1985). Acerca da natureza das actividades na aula de matemática, o documento português utiliza expressões como desenvolvimento de modelos matemáticos; actividades de exploração, investigação e descoberta; formulação de conjecturas, discussão e comunicação; argumentação e prova; construção de conceitos; resolução e formulação de problemas. A este propósito, Silver (1996) caracteriza a formulação de problemas como uma actividade de ensino de cunho investigativo e, mais recentemente, Ponte e Serrazina (2000) salientam a importância da formulação de problemas por parte dos alunos considerando-a como uma componente vital da resolução de problemas, pois ao formular um problema pode-

se partir de uma questão não muito bem definida, ou conduzir a outras questões, e aí os alunos já estão a iniciar uma investigação.

Num contexto de *problem solving* e de desenvolvimento de projectos, “as actividades de exploração e descoberta surgem naturalmente” (APM, 1988, p. 47). Estas actividades de exploração são actividades abertas que implicam entrar em terreno desconhecido, recolher dados, detectar diferenças, reconhecer regularidades e padrões, estabelecer analogias, e têm um sentido de investigação e de descoberta. Esta exploração favorece a formulação de conjecturas, a argumentação e a demonstração. Os aspectos ligados à comunicação são, neste contexto, muito importantes, devendo a capacidade de argumentar de forma consistente e convincente ser desenvolvida ao longo da escolaridade, embora assumindo formas diferenciadas ao longo do tempo e em função dos alunos. Deste modo, destaque-se a valorização das actividades de exploração e de investigação no currículo como ideia central na renovação do ensino da matemática. Esta situação é ilustrada em APM (1988, p. 48) através do exemplo seguinte:

O espaço a explorar não é agora o Atlântico, mas por exemplo uma página cheia de números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
...

(...) as regularidades a detectar não são, neste caso, que a estrela Polar está fixa no céu (...) mas sim, por exemplo, que o resultado da adição de dois números da terceira coluna está sempre na primeira. Uma tabela como esta pode provocar, na sua simplicidade, explorações com diferentes alcances e níveis de profundidade. No decorrer dessas explorações, ocasiões não faltarão para pequenas descobertas que, por se tratar neste caso muito provavelmente de redescobertas, nem por isso deixarão de ser estimulantes e motivadoras.

Na mesma linha, o documento *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (NCTM, 1989/1991) refere que o raciocínio matemático, no 1.º ciclo, deve envolver a “formulação de conjecturas e justificações que ajudem as crianças a perceber que a matemática tem sentido” (p. 37). Para desenvolver este tipo de raciocínio são apresentadas actividades, tais como a exploração de regularidades numéricas, a criação de padrões com materiais manipuláveis ou o

reconhecimento de relações entre padrões. Também Lappan e Schram (1989) consideram que o desenvolvimento do poder matemático nas crianças dos primeiros anos de escolaridade passa pela criação de um ambiente em que aprendam a raciocinar e comunicar matematicamente, ou seja, a formular e validar as suas conjecturas e a ganhar confiança na discussão dos seus argumentos. Formular, testar e construir argumentos sobre a validade de uma conjectura, resolver problemas complexos que envolvam exploração, fazer tentativas, fazer erros e corrigi-los, são algumas das experiências em que os alunos devem ser implicados, para que adquiram mais poder matemático e se tornem cidadãos matematicamente alfabetizados (NCTM, 1989/1991). Este conceito tem evoluído para o de literacia matemática quando o foco se coloca não apenas na aquisição de conhecimentos, mas na capacidade de cada um mobilizar, transferir e usar esses conhecimentos quando necessários à realização de uma tarefa. Nas diferentes normas definidas para os anos de escolaridade K-4 (NCTM, 1989/1991), aparecem com frequência termos como explorar, justificar, resolver, construir, discutir, usar, investigar, descrever, prever. Por exemplo, para aprender geometria “as crianças precisam de investigar, experimentar, explorar” (p. 60) ou para estudar estatística e probabilidades é realçada a “importância de questionar, conjecturar e procurar relações, quando se formulam e resolvem problemas do mundo real. O espírito de investigação e exploração deve estar presente em todo o ensino da estatística” (p. 66). Como práticas de ensino recomendadas para este nível de ensino, surgem, entre outras, a abordagem através de situações problemáticas, a discussão de ideias, a colocação de questões e justificação de raciocínios.

Estas ideias tiveram influência nos programas oficiais portugueses da década de 90. As *Orientações curriculares para a educação pré-escolar* (DEB, 1997) destacam a importância do trabalho para além da aplicação de rotinas, nomeadamente, associando-o à resolução de problemas e à reflexão sobre situações do quotidiano ou sobre os processos utilizados. A resolução de problemas é referida como “uma situação de aprendizagem que deverá atravessar todas as áreas e domínios em que a criança será confrontada com questões que não são de resposta imediata, mas que a levam a reflectir no como e no porquê” (p. 78). Por isso, é recomendado que o educador apresente situações problemáticas, dando tempo às crianças para procurarem e debaterem as próprias soluções e apoiando a sua explicitação.

No programa de matemática do 1º ciclo do ensino básico (DGEBS, 1990) também é dada uma grande relevância ao trabalho não rotineiro a desenvolver pelos alunos nas suas experiências de aprendizagem. Parte-se do pressuposto de que as crianças aprendem melhor quando reagem dinamicamente a uma situação que lhes suscite interesse e responda à sua natural curiosidade. Embora o trabalho investigativo não seja referido explicitamente, é sugerido que “a resolução de problemas, quer na fase de exploração e descoberta, quer na fase de aplicação,

deverá constituir a actividade fundamental desta disciplina (...) e um momento especial de interacção e de diálogo” (pp. 128, 129). São dadas indicações de situações de trabalho como, por exemplo, exploração de situações; explicitação de raciocínios ou exploração, descoberta e uso de regularidades e padrões.

Estas formas de trabalho são defendidas igualmente pela APM (1998) que recomenda que “a prática pedagógica deve valorizar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos (nomeadamente, resolução de problemas e actividades de investigação) e que diversifique as formas de interacção em aula, criando oportunidades de discussão entre alunos, de trabalho de grupo e de trabalho de projecto” (recomendação 3.1, p. 44).

Recentemente, o documento *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais* (DEB, 2001) define a competência matemática a ser desenvolvida pelos alunos ao longo da educação básica. Esta competência apela fortemente ao trabalho não rotineiro, aspecto já enfatizado em Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), e exige, por exemplo, “explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações”, validar uma afirmação relacionando-a com a “consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior”, “discutir com outros e comunicar descobertas”, compreender a noção de conjectura, “entender a estrutura de um problema [e] desenvolver processos de resolução [ensaiando] estratégias alternativas” (p. 57). Neste sentido, os alunos devem ter oportunidade de se envolverem em diversos tipos de experiências de aprendizagem, nomeadamente, resolução de problemas, actividades de investigação, realização de projectos e jogos, fazendo o documento a distinção entre estes tipos de tarefas. Assim, “os problemas são situações não rotineiras que constituem desafios para os alunos e em que, frequentemente, podem ser utilizadas várias estratégias e métodos de resolução (...) a formulação de problemas deve igualmente integrar a experiência matemática dos alunos” (p. 68), sendo feito o contraponto com os exercícios de resolução mecânica, repetitiva e de aplicação directa de um algoritmo. Nas actividades de investigação, “os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões” (p. 68).

Com o mesmo sentido e como uma evolução das *Normas*, surge a publicação *Principles and standards for school mathematics* (NCTM, 2000), que inclui para todos os anos de escolaridade, a norma da “argumentação e prova”. Esta norma define objectivos escolares que enquadram as investigações matemáticas como experiências de aprendizagem a incluir no currículo desde o pré-escolar. Refere que a escola deve habilitar os estudantes a “reconhecer a argumentação e a prova como aspectos fundamentais da matemática; formular e investigar conjecturas matemáticas; desenvolver e avaliar argumentos matemáticos e provas; seleccionar

e usar vários tipos de raciocínio e métodos de prova” (p. 56). A discussão feita e os exemplos apresentados apontam para aspectos que vão para além da resolução de problemas, e que se prendem com o processo investigativo no contexto de sala de aula.

As tarefas de exploração e investigação permitem que os alunos façam pequenas cadeias de raciocínio dedutivo, que fundamentem em evidências empíricas e em factos previamente aceites. Por outro lado, permitem a elaboração sistemática de conjecturas, que podem ser discutidas com base em argumentação consistente. Esta capacidade de argumentação desenvolve-se quando os alunos são encorajados a fazer conjecturas, lhes é dado tempo para procurar evidências que as apoiem ou contestem, e lhes é exigido que expliquem e justifiquem as suas ideias. Desde o pré-escolar as crianças fazem generalizações a partir de exemplos concretos e, como tal, os professores devem levá-las a usar exemplos e contra-exemplos para testar as suas conjecturas. No final do 1º ciclo, os alunos devem consciencializar-se que vários exemplos não são suficientes para provar uma conjectura e que os contra-exemplos podem ser usados para a refutar.

Quanto à natureza das tarefas, o documento do NCTM (2000) refere que esta se deve centrar nas relações matemáticas, sendo apresentados, como exemplos, a estrutura de um padrão, as semelhanças ou diferenças entre classes de figuras, as propriedades de operações. Os alunos devem aprender a raciocinar sobre classes de objectos (todos os triângulos, por exemplo), em vez dos objectos em particular (este triângulo). Raciocinar sobre classes de objectos desenvolve capacidades de classificação e permite que os alunos se apercebam do papel da definição em matemática.

O professor desempenha um papel central no desenvolvimento deste tipo de tarefas. Deve conseguir criar um ambiente, extremamente rico em materiais que possam ser explorados, em que os alunos sintam que os conceitos podem e devem ser entendidos e possam descobrir e demonstrar verdades matemáticas gerais usando exemplos específicos.

Vejamos um exemplo apresentado em NCTM (2000, p. 189):

Num 3º ano de escolaridade, os alunos estavam a discutir como operar 4×8 . Um aluno, Matt, explicou, ‘Eu penso que 2×8 é 16, então tu simplesmente duplicas’. O professor pediu a vários alunos para pegarem na ideia e perguntou à turma: ‘Pensam que a estratégia do Matt para multiplicar por 4 – fazendo o dobro e depois o dobro de novo – resulta noutras situações além do 4×8 ?’. Quando as respostas dos alunos estavam um pouco confusas, ele pediu aos alunos para experimentarem alguns exemplos, antes de discutir o método do Matt.

Como é referido no documento, este exemplo mostra como o professor pode aproveitar alguns aspectos para fomentar a argumentação matemática. Ao colocar a questão “Pensas que a estratégia resulta sempre?”, ele desloca a discussão do problema específico, para uma questão geral da multiplicação: um factor de uma multiplicação pode ser factorizado e os novos factores podem ser multiplicado em qualquer ordem.

Continuando,

Depois dos alunos trabalharem individualmente e em pares e de terem discutido se a estratégia era ou não válida, o professor reinicia a discussão. Os alunos respondem que a estratégia é válida e apresentam vários argumentos:

Carol: Porque se tu tens 2 vezes 8 e 4 vezes 8, estás a dobrar o resultado.

Resulta sempre.

Malia: Tem de ser o dobro porque estás a repetir o processo. É como fazeres 2 vezes 8 é 16 e depois fazeres de novo 2 vezes 8 é 16, logo tem de ser 32.

Steven: O que estás a fazer é contar os oitos, logo estás a contar para a frente, estás a saltar de 8 em 8. Estás a fazer outros dois deles, por isso é como fazer o dobro.

Matt: Tentei ver se funcionava com triplos, por isso fiz 2 vezes 8 e 6 vezes 8, e funcionou. Multiplicas por 3 e o resultado é triplicado.

A exploração feita pelos alunos restringe-se a exemplos específicos, mas os argumentos apresentados podem conduzir a conclusões mais gerais. O professor deve ser sensível à riqueza matemática dos argumentos apresentados. Contudo, nenhum dos argumentos dos alunos é completo ou geral, estão ainda a começar a perceber o que significa conjecturar sobre relações matemáticas. Outro aspecto importante prende-se com a decisão sobre quais as conjecturas matematicamente significativas para os seus alunos. Para fazer isto, o professor deve ter em conta as capacidades, as necessidades e as metas que tem para aquela turma.

As tarefas mais abertas implicam que o professor faça um questionamento sistemático aos alunos, em tom de desafio, que prolongue e aprofunde as investigações e permita a formulação de conjecturas. No documento *Normas profissionais para o ensino da matemática* (NCTM, 1991/1994), no papel que é atribuído ao professor na forma de dirigir o discurso na sala de aula, é referida a prática da “argumentação”, de modo a levar os alunos a conjecturar, a explorar exemplos e contra-exemplos na investigação de uma conjectura e a justificarem as suas conjecturas apoiando-se em argumentos matemáticos. Dar um papel central à argumentação na sala de aula significa responsabilizar todos os alunos para que mostrem e expliquem os seus raciocínios, mas também para que se esforcem por compreender a argumentação dos outros.

Existe algum consenso de que os dois conceitos, resolução de problemas e investigações, estão relacionados com a inquirição matemática (Ernest, 1996), sendo o objecto da inquirição o problema em si ou o ponto de partida da investigação. As diferenças parecem estar no processo de inquirição, sendo o processo de resolução de problemas uma actividade convergente, porque se procura um caminho para a resposta, enquanto que o processo de investigação é divergente, pois a ênfase está em explorar uma questão da matemática em todas as direcções. Ou seja, o termo “resolução de problemas” refere-se a uma actividade convergente em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, recorrendo a técnicas e a estratégias adequadas, enquanto que o termo “investigação” é visto como uma actividade mais divergente em que se incentiva a ser curioso, a procurar estratégias alternativas, a considerar o que sucederia se se alterassem certas condições ou a generalizar o problema (Chamoso e Rawson, 2001). Também Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) consideram os dois conceitos muito próximos, pois ambos se referem a processos matemáticos complexos e envolvem actividade fortemente problemática. Adiantam dois aspectos que permitem distingui-los: (a) a natureza da questão a estudar, geralmente especificada pelo professor na resolução de problemas e apresentada de forma vaga, necessitando o aluno de a tornar mais precisa, nas investigações; e (b) as estratégias a seguir, mais sugeridas pelas heurísticas na resolução de problemas e muito mais amplas nas investigações. Do mesmo modo, Ponte e Serrazina (2000) consideram que uma investigação matemática, tal como um problema, começa com uma questão, sendo esta algo imprecisa no caso da investigação. Formular e testar conjecturas (com possível rejeição e formulação de outras) serão as etapas seguintes de uma investigação matemática, concluindo com a validação e a comunicação de resultados.

Estudos e experiências na sala de aula

Nesta secção são abordados estudos e reflexões resultantes de experiências desenvolvidas na sala de aula, destacando características associadas ao trabalho investigativo. Embora a ênfase seja colocada em estudos com alunos mais novos (até 10 ou 11 anos), também aparecem algumas referências a trabalhos realizados com alunos de outras idades.

Tomando como ponto de partida algumas questões ontológicas e epistemológicas da Matemática, Mendes (1998) procura discutir e fundamentar a utilização das actividades de investigação na actividade matemática dos alunos. Do trabalho que desenvolveu concluiu que, quando se dá maior relevo ao envolvimento dos alunos com o trabalho matemático que estão a efectuar em vez

do conteúdo ou tema matemático, o professor coloca a tônica essencial num processo activo e aglutinador que faz emergir uma noção de actividade matemática totalmente distinta do trabalho rotineiro desenvolvido em algumas aulas de matemática. Esta actividade matemática surge de propostas abertas em que os percursos são negociados pelos intervenientes; a definição destes percursos faz crescer, nos alunos, o espírito de iniciativa e autonomia, a persistência e a criatividade. Neste contexto, a competência de comunicação é extraordinariamente desenvolvida, o ambiente em que decorre o trabalho possibilita que os alunos levantem questões, formulem hipóteses, expressem ideias e negociem o significado das palavras. Os alunos clarificam o seu pensamento matemático, dando assim valor à Matemática e contribuindo para o desenvolvimento de saberes que permitam uma melhor compreensão conceptual da Matemática e o desenvolvimento de capacidades de ordem superior.

Uma investigação matemática é definida por Brahier e Speer (1995) como um conjunto de tarefas adequadas à resolução de um problema que: (a) tem um conteúdo de múltiplas dimensões; (b) é uma situação *open-ended* (que, segundo Pehkonen (citado por Pires, 2001), é uma situação de partida exactamente explicada, mas com objectivo final aberto), podendo admitir várias soluções; (c) é uma actividade de exploração que requer todo o tempo de uma aula ou de várias aulas para ficar completa; e (d) está centrado num tema ou acontecimento e, muitas vezes integrado numa questão focalizada. Além disso, uma investigação matemática envolve uma variedade de processos, onde se incluem: (a) procurar fontes externas para obter informação; (b) recolher dados através de diversos meios, como sondagens, observações ou medições; (c) colaborar, com cada membro do grupo, que tem tarefas específicas; e (d) usar estratégias múltiplas para alcançar as soluções e as conclusões. Os autores sugerem uma investigação para o ensino elementar (do 3º ao 6º anos de escolaridade), que começa pela descrição, feita pelo professor, da seguinte situação: “Os vizinhos partiram para férias e pediram-me para tomar conta dos seus cães”. Levantando uma lata de comida para cão, o professor coloca a questão: “Que quantidade de comida para cão vou precisar?”. E esta questão vai levantar outras, como o número de cães, o tipo de cães, o tempo que os vizinhos vão estar ausentes... Salientam, igualmente, que o essencial não é só resolver o problema, mas ajudar os alunos a tomarem consciência de que, nas situações da vida real, é importante tomar decisões sobre a informação que é relevante para se alcançar a solução do problema. Como conclusão, os autores propõem que os professores encorajem os seus alunos a trazer problemas similares para a aula.

Num outro contexto, Lubinski e Thiesen (1996) relatam outra investigação matemática que consistiu numa experiência levada a cabo por uma professora, com crianças de 6 anos, a partir do livro *How big is a foot?* (Myller, 1990). Trata-se

de uma narrativa sobre as desventuras de um aprendiz de carpinteiro, encarcerado por, supostamente, não ter cumprido as instruções do rei. Este, desejando oferecer uma cama à rainha no seu aniversário, fornecera as medidas em pés, sem especificar que se tratava dos seus próprios pés, assinalavelmente maiores que os do carpinteiro. Daí resultou o equívoco que conduziu o pobre aprendiz à prisão e, mais tarde, a um cargo honroso, pois soube justificar-se, explicando a causa da divergência entre a encomenda e a obra. A professora em causa, durante três semanas, desenvolveu actividades de descoberta sobre a medição de comprimentos, desde a construção e uso de modelos de unidades não padronizadas, passando pela construção de instrumentos de medida usando essas unidades, a necessidade da designação da unidade associada ao número para explicitar o comprimento, até ao reconhecimento e uso do centímetro como unidade e da régua como instrumento. As actividades tiveram como ligação a narrativa referida, centro de toda a exploração. As crianças, tomando consciência das dificuldades que advinham de alguns processos em situações reais, colocaram questões, procuraram resolver os problemas, desenvolveram estratégias, aperfeiçoaram em grupo técnicas e materiais, descobriram novos processos após discussão e alcançaram uma compreensão e vocabulário sobre a medição muito mais aprofundados e numa idade mais precoce do que habitualmente.

Também Oom (1997) se refere a experiências de medição realizadas no jardim de infância pelas sete crianças de 5-6 anos da sua sala. A partir de uma exploração inicial de labirintos, a questão surgiu entre as crianças quando quiseram saber qual é o “mais comprido” e ordenar os comprimentos dos percursos realizados. Para resolverem a questão, as crianças exploraram e discutiram a aplicabilidade de diversos materiais e unidades de medida (régua, fios, fita métrica, sapatos), expuseram os seus raciocínios, fizeram sugestões para ultrapassar as dificuldades, experimentaram essas sugestões e, finalmente, tiraram as suas conclusões. A autora reconhece, assim, a importância de seguir as ideias das crianças, mesmo que teoricamente não sejam as mais adequadas, pois é experimentando que elas aprendem e verificam se as suas propostas são, ou não, correctas.

Ainda com crianças do pré-escolar, Harris (1999) relata como uma educadora aproveita a história *Benny's Pennies* (Brisson, 1993) para promover uma aprendizagem investigativa. A história trata de um rapazinho, Benny, que tem cinco *pennies* para gastar e compra cinco prendas, cada uma por um *penny* — uma rosa para a mãe, um bolo para o irmão, um chapéu para a irmã, um peixe para o gato e um osso para o cão. Durante alguns dias, a educadora expôs vários objectos relacionados com a história: rosas, bolos, chapéus, ossos e peixes, de tamanhos e formas variados, assim como duas latas, cada uma com cinco *pennies*. Deixou que as crianças os observassem e colocou por baixo etiquetas com os respectivos

nomes. A fase seguinte foi de inquirição: sobre as múltiplas características dos objectos expostos, explorou características numéricas (quantos?, diferenças), medida (“mostra o tamanho com os teus dedos”, estimação), geometria (formas, posições), incluindo questões abertas e fechadas, estimulando as crianças a descrever, clarificar, articular ideias e usar competências de resolução de problemas. Seguiu-se a leitura, conduzindo a novas questões e explorações. As crianças fizeram dramatizações, alterando o número de *pennies* e de objectos, descobrindo novas relações numéricas, nomeadamente através da divisão dos *pennies* em moedas menores, e cada uma fez um desenho, legendado por uma frase numérica que julgasse adequada, sobre a forma como gastaria os seus cinco *pennies*.

Aproveitando as possibilidades dos instrumentos de cálculo, Ribeiro (1997) realiza uma experiência com calculadoras numa turma do 2º ano e destaca que a utilização da calculadora permitiu aos alunos criar, de uma forma lúdica, situações de pesquisa e de descoberta e resolver problemas que envolviam situações de cálculo que, por vezes, não dominavam.

Estes aspectos são igualmente referidos por Mamede (2001) ao reflectir sobre o papel que a calculadora pode desempenhar, no 1º ciclo, em explorações numéricas e investigações matemáticas. Realiza uma investigação qualitativa tipo estudo de caso, numa turma do 4º ano, procurando responder a duas questões: como e quando é utilizada a calculadora na resolução de tarefas de estimação, de investigações numéricas e de aplicação da matemática à vida real? E como é que os alunos do estudo vêem a calculadora na sala de aula? É feito um balanço positivo da utilização da calculadora, na medida em que: (a) permitiu a determinação correcta dos cálculos, tornando possível a identificação de propriedades numéricas, o estabelecimento de generalizações e a determinação de padrões numéricos; (b) permitiu desenvolver o raciocínio dedutivo dos alunos, bem como a capacidade de generalização, independentemente destes possuírem, ou não, limitações no cálculo; (c) possibilitou a focalização da atenção dos alunos nas actividades desenvolvidas, sem se preocuparem com os cálculos, o que torna possível a existência de um trabalho interactivo produtivo; (d) permitiu o trabalho com números grandes, operando-os e descobrindo propriedades, sem que isso provocasse um desgaste significativo e desmotivador.

Nestes níveis etários, o recurso a materiais manipulativos é indispensável para uma abordagem com significado dos conceitos matemáticos. Neste sentido, Ferreira (1996) recorreu a jogos de dominó no tratamento de tópicos do programa oficial com o objectivo de ajudar crianças dos 3º e 4º anos a serem bons resolvedores de problemas. Verificou que os alunos com mais dificuldades de aprendizagem revelaram maior insegurança nas conclusões a que iam chegando e recorreram mais a estratégias do tipo tentativa e erro do que de dedução lógica.

Adiantou ainda que materiais como os dominós constituem uma fonte de motivação para as crianças e bons auxiliares para a resolução dos problemas.

Recorrendo ao geoplano, Araújo (1998) refere experiências de trabalho com tarefas geométricas realizadas por alunos dos 2º e 3º anos com alguns problemas de aprendizagem. Os alunos trabalharam aos pares para privilegiar situações de interação e diálogo, sendo envolvidos em situações activas e de descoberta do tipo: “num geoplano 3x3, constrói todos os triângulos possíveis, com um dos vértice no prego do centro”. Durante o desenrolar das actividades, a professora observou e registou o trabalho dos alunos, encorajou a experimentação, incentivou o confronto de experiências e opiniões e pediu aos alunos para explicitarem raciocínios, sensibilizando-os à demonstração e argumentação. Das experiências realizadas, registam-se algumas conclusões quer relativamente ao trabalho dos alunos quer à utilização do geoplano. Os alunos recorreram muitas vezes à estratégia da tentativa e erro, demonstraram sempre grande persistência na procura de soluções e pararam para observar e pensar, reflectindo sobre o que faziam. As tarefas desenvolveram ainda o pensamento imaginativo dos alunos e facilitaram a descoberta e análise de relações. O trabalho com o geoplano possibilitou a abordagem da Matemática pela resolução de problemas, promoveu a interação dos alunos durante as actividades de grupo e permitiu algum desenvolvimento ao nível da linguagem matemática.

Uma experiência realizada com alunos do 3º ano, em que foi tratado o conceito de simetria axial, é descrita por Peixoto (1998). A experiência consistiu na realização de uma sequência de actividades, nomeadamente, visualização de vídeos, proposta de situações problemáticas, ilustração de azulejos e manipulação de materiais – papéis lisos e quadriculados, espelhos, lápis, cores, tintas, tesouras e picos. Verificou-se que as crianças desenvolveram um bom sentido estético e artístico e conseguiram conjecturar correctamente sobre figuras simétricas fazendo a aplicação de simetrias axiais por composição e com eixos horizontais ou verticais.

Numa turma do 4º ano, Nunes (1997) construiu ambientes propícios à resolução de problemas, através do desenvolvimento de estratégias e sua implementação, pretendendo que os alunos raciocinassem e comunicassem adequadamente, sentissem o prazer da descoberta e do sucesso na aprendizagem e desenvolvessem a auto-estima e confiança enquanto aprendizes. Para isso, os alunos trabalharam diferentes contextos – Problema Semanal, dinâmica de grupos nas Oficinas de Problemas, Calendário de Problemas – com actividades desenvolvidas individualmente ou em pares e utilizaram materiais didácticos, tais como computador, calculadora, tangram, geoplano, blocos lógicos e material Cuisenaire. As actividades propostas despertaram o gosto pelos problemas e, quase todos os alunos, no final, associaram a resolução de problemas à utilização de várias estratégias e não apenas à escolha de algoritmos conhecidos como

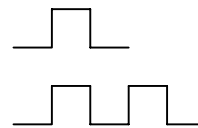
acontecia inicialmente. Em relação aos contextos de resolução, os alunos preferiram, por ordem decrescente, as Oficinas de Problemas, o Problema Semanal e o Calendário de Problemas. Nas actividades das Oficinas de Problemas essa preferência foi: problema resolvido no computador, problema resolvido com auxílio de materiais manipulativos, problema resolvido com auxílio da calculadora, problema resolvido sem qualquer material auxiliar e, por último, a formulação de um problema.

Luís, Bártolo e Serrazina (1996) relatam actividades de exploração de regularidades e padrões que desenvolveram com os seus alunos do 1º ciclo. Consideram que este tipo de tarefas, permitindo observar, descobrir e comunicar matematicamente, ajudou as crianças a desenvolver capacidades de resolução de problemas e a utilizar significativamente vocabulário apropriado. Estas situações de trabalho mais abertas e de exploração estimularam os alunos com mais dificuldades, aumentando a sua confiança e auto-estima.

Também sobre regularidades, Correia (1996) reflecte sobre um trabalho efectuado por uma equipa de professoras com alunos do 3º ano. Aplicando ideias renovadoras dos programas, prepararam tarefas que constituíssem situações abertas, desafiadoras e com significado para as crianças e cuja resolução não dependesse unicamente da utilização de um processo rotineiro. Para além da importância da natureza das tarefas propostas, deram igual relevância ao modo de conduzir a sua resolução, valorizando o ambiente de aula onde os alunos puderam participar activamente, experimentando, explorando e interagindo. No desenvolvimento das tarefas, as professoras tiveram a preocupação de respeitar o ponto de vista dos alunos e de os ajudar na verbalização dos seus raciocínios. Verificou-se um grande interesse dos alunos em querer descobrir cada vez mais “coisas” e, curiosamente, a maior parte das descobertas foi feita pelos alunos considerados mais fracos.

Num estudo sobre actividades não rotineiras, Chamoso e Rawson (2001) debruçaram-se sobre o desenvolvimento de resolução de problemas e de actividades de investigação por alunos de 10-11 anos de idade. Para isso, observaram e gravaram em vídeo aulas de matemática em que os alunos resolveram tarefas do tipo:

Pretende-se construir portas com palitos.
É possível construir uma porta com 5 palitos,
duas com 9, três com 13 e assim sucessivamente.
Quantos palitos são necessários para construir dez
portas? E em geral? (p. 36)



Posteriormente, a mesma tarefa foi resolvida e discutida por futuros professores e por professores em exercício. Durante o período de reflexão, foram

também visionadas as imagens-vídeo gravadas na aula. Os autores verificaram que os alunos trabalharam de forma similar ao de um matemático ou investigador quando confrontado com uma situação – primeiro observaram, explicaram o que observaram e conjecturaram uma fórmula geral que depois comprovaram. Assim, os alunos resolveram as tarefas recorrendo a processos próprios de uma investigação, ou seja, foram construindo, experimentando, apoiando afirmações, divergindo, perguntando, deduzindo, corrigindo, comprovando, explicando, dirigindo a acção para outros, respondendo de forma crítica, justificando as afirmações produzidas, fazendo suposições, formulando hipóteses e conjecturas, generalizando... Os autores registaram ainda outras particularidades que podem ajudar a perceber melhor um ambiente de aula em que se trabalham investigações. Por exemplo, a professora da turma apresentava as tarefas e fazia comentários muito breves, deixando o trabalho e a iniciativa para os alunos. Quando solicitada para esclarecer dúvidas ou ajudar a ultrapassar uma dificuldade, geralmente “devolvia” a questão para ser vista de uma outra perspectiva, estimulando a comunicação e fomentando a qualidade dos registos escritos e orais. É reconhecido que a gestão do tempo pode ser problemática, pois o estudo de uma investigação pode demorar muito tempo, e que o trabalho de grupo e o recurso a materiais concretos constituem uma boa ajuda no processo. Outro aspecto muito interessante refere-se à importância dada pelos alunos à “superação de etapas”, mesmo quando conseguiam pequenos êxitos, proporcionando-lhes alegria e confiança na resolução das tarefas.

Como se pode desenvolver, numa sala de aula do 1º ciclo, a capacidade de formulação e resolução de problemas foi objecto de estudo por Ferreira e Rocha (1993). Apresentam, como exemplo, uma actividade efectuada com alunos do 4º ano que consistiu na recolha, tratamento estatístico e reflexão sobre dados obtidos numa visita de estudo a uma feira de actividades económicas. Os alunos construíram e interpretaram gráficos de barras, fizeram estimativas, justificaram as estratégias utilizadas, recorreram a algoritmos e técnicas de cálculo mental e utilizaram a calculadora. As autoras concluíram que a resolução de problemas surgiu como um elemento integrador das diversas áreas do currículo, ajudando as crianças a compreender e interpretar o meio envolvente.

Igualmente num contexto de estatística, Cardoso, Manicas, Ferreira, Calaxa, Cunha e Machado (1999) relatam uma experiência de ensino-aprendizagem com actividades abertas, que surgiu num grupo de trabalho de professoras do 1º ciclo, com base na discussão do texto *Actividades do dia-a-dia para a análise de dados*. O tipo de tarefas apresentadas proporcionaram aos alunos: o desenvolvimento do pensamento crítico; um incremento do poder de comunicação; o desenvolvimento de conceitos matemáticos; a valorização da Matemática na realidade; e uma compreensão da importância de resolver e formular problemas em contexto vivido.

As autoras reflectem também acerca das implicações que este tipo de dinâmicas tem no papel do professor, referindo a necessidade de professores mais reflexivos, mais flexíveis e menos dominadores, de uma melhor preparação de aulas, e de prestar mais atenção às estratégias cognitivas dos alunos; salientam ainda a importância do trabalho de grupo entre professores.

Steele (2001) apresenta vários episódios de aulas de uma professora em que se realizaram investigações matemáticas essencialmente envolvendo conceitos geométricos. Das evidências recolhidas, refere a importância da professora no discurso da sala de aula, quer pelo tipo de investigações que sugeriu, quer pelo tipo de questionamento (*inquiry*) que fez. As actividades promoveram a interacção e o diálogo, desafiaram os alunos a raciocinarem e forneceram um contexto para que fossem recriados os conceitos matemáticos. As actividades eram não rotineiras e abertas, ou seja, os passos para a solução não eram evidentes nem havia utilização directa de algoritmos. Relativamente a este aspecto, cita Lappan (1993), afirmando que nenhuma outra decisão tem tanto impacto nas oportunidades de os alunos aprenderem e na sua percepção acerca do que é a Matemática como a selecção ou criação de tarefas com que o professor envolve os alunos. As actividades (e a exploração feita pela professora) ajudaram os alunos a pensar como matemáticos quando redescobriram, clarificaram e compreenderam definições e conceitos através de múltiplas representações; estabeleceram e defenderam conjecturas; reflectiram sobre a Matemática, expandindo o seu pensamento; e estiveram curiosos e animados com as suas descobertas.

A propósito do questionamento, Veia (1996) descreve uma experiência de observação de aulas numa turma do 1º ciclo em que a professora e os alunos revelavam concepções e atitudes bastante positivas relativamente à Matemática, valorizando a resolução de problemas. Na aula, habitualmente, havia o momento “Qual é o problema?” em que os alunos faziam propostas de situações a tratar e era escolhida uma delas para resolver. Seguiu-se a fase da “entrevista” ao apresentador da tarefa seleccionada, em que os restantes alunos colocavam perguntas, procurando encontrar dados que lhes permitissem formular questões sobre a situação e os conduzissem à sua resolução. Esta fase da entrevista era o aspecto mais valorizado pela professora, pelo que “mais correcto do que afirmar que na turma se vivia uma atmosfera de resolução de problemas, será dizer que se vivia um ambiente de ‘inquirição’, pois que a procura de informação era no fundo a actividade fundamental na sala de aula” (p. 24).

Um estudo de Ponte e Segurado (1998), desenvolvido no âmbito do projecto *Matemática para todos: Investigações na sala de aula*, contribui para a compreensão das dificuldades que os alunos podem ter na realização de uma tarefa de natureza investigativa, a nível da compreensão da mesma e das estratégias a usar na sua resolução. Seguindo uma abordagem qualitativa, este estudo incidiu sobre um

único aluno do 6.º ano, a quem foram propostas cinco tarefas de exploração e investigação nas suas aulas de matemática. Tratando-se de um aluno com uma “inclinação” natural para a matemática, este trabalho mostrou que é possível, pelo menos a alunos com estas características, proporcionar uma experiência matemática que inclua tarefas de natureza exploratória e investigativa, envolvendo a formulação e testagem de conjecturas e a elaboração de justificações dos resultados encontrados. Mostrou ainda que, com este tipo de tarefas, as concepções dos alunos relativamente à Matemática podem sair enriquecidas. O estudo aponta para a necessidade de estudar o modo como alunos com outras características e de outros níveis de escolaridade se envolvem neste tipo de tarefas.

Um estudo de caso de uma aluna do 3º ciclo realizado por Brocardo (2001) também apresenta indicações relevantes para o trabalho de cunho investigativo. A autora concebe a Matemática como uma ciência em que as investigações são uma componente importante e considera que se aprende Matemática, fazendo Matemática. O currículo foi organizado em torno destas duas concepções, procurando-se que a construção de conceitos e a aquisição de conhecimentos e técnicas se fizesse a partir da experiência matemática dos alunos, estabelecendo um paralelo com a actividade dos matemáticos. Tendo por base o estudo de caso efectuado, a autora alerta para alguns aspectos: (a) o sucesso e receptividade deste tipo de prática junto dos alunos é um processo que sofre recuos e avanços e que está intimamente relacionado com a organização de ensino adoptada e com o ambiente de aprendizagem gerado na turma; (b) a confiança na capacidade de fazer matemática é uma atitude que evolui no sentido positivo quando se realizam actividades de investigação; (c) a visão acerca do que é a Matemática evolui, salientando o gosto da aluna por um processo de aprendizagem em que tem um papel activo e em que pode trabalhar em pequenos grupos, questionando, conjecturando e testando.

Questões emergentes

O trabalho de natureza não rotineiro, particularmente as investigações matemáticas, pode permitir, entre outros aspectos, (a) o desenvolvimento de uma competência matemática, integrando atitudes, capacidades e conhecimentos; (b) a oportunidade de abordar e relacionar dinamicamente conteúdos matemáticos, valorizando as suas conexões; (c) a realização de situações de trabalho diferenciado, atendendo às características individuais dos alunos, às suas competências e aos diferentes percursos escolares; e (d) uma compreensão global da natureza da actividade matemática, nomeadamente, dos processos de fazer matemática característicos das crianças mais novas como, por exemplo,

representar, relacionar e operar (classificar, ordenar, calcular, estabelecer relações, interpretar), experimentar, explorar, identificar padrões e regularidades, formular, testar e validar conjecturas, generalizar ou comunicar. Deste modo, é importante estudar, reflectir e problematizar algumas dimensões – currículo, alunos (onde se incluem crianças do pré-escolar), professores (onde se incluem educadores), sala de aula – envolvidas e relacionadas com o trabalho não rotineiro, particularmente, com as investigações matemáticas, e que podem orientar o estudo, as práticas educativas e a investigação sobre o tema.

Currículo

- Qual a relevância destas actividades na educação pré-escolar? Qual a relevância destas actividades no 1º ciclo? Devem ser mais ou menos estruturadas?
- Que processos matemáticos estão envolvidos? Como avaliar esses processos?
- Que tipo de sugestões devem fornecer os normativos legais para a concretização deste tipo de experiência de aprendizagem?

Alunos

- Que influências exerce este tipo de actividades nas concepções desenvolvidas pelos alunos sobre a matemática escolar?
- Que relevância assume no trabalho matemático dos alunos?
- Como lidam com processos avançados do raciocínio matemático? Que dificuldades se podem identificar?
- De que forma os conhecimentos e a experiência dos alunos condicionam a realização destas actividades?

Professores

- Que implicações, exigências e rotinas produzem no trabalho dos professores?
- Como integrar este tipo de actividades na aula? Como convive com os outros tipos de actividades?
- Como integrar a participação dos alunos no desenvolvimento das actividades de investigação (apresentação, discussão, comunicação dos resultados)? Que ajudas se devem dar?
- De que forma os professores devem gerir o tempo dedicado às investigações? Que constrangimentos levanta esta gestão do tempo?

Sala de aula

- Que interacções se produzem quando os alunos realizam investigações matemáticas?

- Que influências tem a forma de organização dos alunos? Que vantagens apresenta o trabalho individual, aos pares, em grupo?
- Como devem os alunos fazer a apresentação e a discussão das conclusões das actividades? Que importância deve ser atribuída à comunicação?

Síntese da discussão do grupo de trabalho

O grupo de trabalho teve como principais objectivos problematizar, debater e aprofundar o papel das investigações matemáticas na aprendizagem na educação pré-escolar e no 1º ciclo do ensino básico, tendo como base de trabalho o presente texto — onde, para além de uma síntese de estudos e experiências na sala de aula, foram apresentadas algumas questões emergentes distribuídas por quatro categorias principais: currículo, alunos, professores e sala de aula.

O debate foi enriquecido com a contribuição de seis comunicações orais, duas mais focadas na educação pré-escolar e quatro no 1º ciclo, que permitiram destacar o carácter multidimensional do trabalho de natureza exploratória e não rotineira, no qual as investigações se incluem. Alice Tinoco relatou uma sessão realizada num jardim de infância em que vinte e duas crianças de quatro ou cinco anos pretendiam organizar uma festa no baptizado das bonecas e responder à questão “quantas garrafas de sumo serão necessárias?”, tendo destacado as interações estabelecidas, a explicitação e comunicação dos raciocínios produzidos e o processo dos registos (cada vez mais rigorosos) efectuados pelas crianças. Célia Serra apresentou algumas situações desenvolvidas por cinco crianças surdas, com idades compreendidas entre os oito e doze anos e com algum atraso mental, na realização de tarefas de natureza exploratória que abordavam conceitos numéricos e geométricos, realçando a importância da utilização do computador (permitindo níveis de maior autonomia), da comunicação (gestual) das ideias e dos registos escritos dessas situações. Elda Tramm relatou experiências realizadas por duas turmas do 3º ano de escolaridade no desenvolvimento de um projecto utilizando a bola de futebol no estudo dos poliedros platónicos, destacando os caminhos e estratégias, por vezes surpreendentes, seguidas pelos alunos, a descoberta pessoal de propriedades de sólidos e o crescente aperfeiçoamento do vocabulário utilizado. Isabel Vizinho e Isabel Cabrita referiram um estudo sobre o desenvolvimento da unidade dos numerais decimais em que alunos do 4º ano de escolaridade resolveram problemas apoiados na exploração de materiais diversificados, verificando-se uma maior segurança e confiança na abordagem dos temas estudados e no estabelecimento e comunicação das conclusões a que chegavam. Graça Cebola apresentou uma revisão de literatura sobre a construção e desenvolvimento do número (natural) através do sentido de número, realçando a

necessidade de valorizar as estratégias pessoais dos alunos e a importância de trabalhar frequentemente tarefas de natureza não rotineira. Ema Mamede apresentou um estudo sobre a utilização da calculadora por alunos do 4º ano de escolaridade num contexto numérico de resolução de situações exploratórias que conduziu a uma maior necessidade de verbalização e justificação dos raciocínios e processos seguidos e ao desenvolvimento de visões mais favoráveis à integração continuada da calculadora na aula de matemática.

Igualmente, muito importantes para a reflexão sobre o tema foram as múltiplas opiniões dos participantes, cerca de trinta e cinco educadores, professores ou investigadores, que, partilhando os seus estudos e as suas experiências pessoais, proporcionaram perspectivas de abordagem e reflexão bastante diversificadas.

Nos pontos seguintes, registam-se algumas ideias que atravessaram o debate no grupo de trabalho e que tentam reflectir as opiniões e comentários produzidos, bem como o ambiente de trabalho extremamente agradável e estimulante das sessões.

Ponto 1. É importante que os alunos, quando trabalham conceitos matemáticos, sejam confrontados com diferentes tipos de tarefas, quer sejam exercícios mais orientados para aspectos rotineiros, quer sejam problemas ou investigações apelando mais ao trabalho exploratório e não rotineiro. Por outro lado, também é importante a “qualidade” da tarefa, mas recorde-se que uma boa tarefa pode ser completamente desaproveitada por uma deficiente exploração ou que uma tarefa do tipo exercício pode, através de uma orientação ou exploração adequadas, conduzir a um trabalho investigativo. Embora os problemas e as investigações sejam conceitos próximos, pois ambos se referem a processos matemáticos complexos, é possível identificar alguns aspectos que os distinguem. De entre eles, destaque-se o carácter convergente da resolução de problemas — em que se tenta conseguir uma solução para um determinado problema, sugerido pelo professor, seguindo estratégias adequadas — e o carácter divergente do processo de investigação — em que se parte de uma questão formulada de forma vaga, permitindo aos alunos a sua precisão, podendo ser seguidos diferentes caminhos de exploração e obter diferentes soluções.

Ponto 2. As investigações matemáticas permitem estabelecer ligações, no duplo sentido, entre a matemática e outras áreas, nomeadamente, outros saberes e a vida diária das crianças. Particularmente, na educação pré-escolar, as formas de trabalho mais exploratórias e de descoberta estão muito associadas à natural curiosidade e vontade das crianças em conhecer e compreender tudo o que as rodeia. Neste sentido, as investigações matemáticas estão muito ligadas às suas vivências e podem ajudá-las a promover interações com os outros, a questionar, a

sugerir, a aceitar (ou rebater) outros pontos de vista, a explicar o que pensam ou a ter mais confiança no trabalho que desenvolvem e nas descobertas que fazem.

Ponto 3. A dimensão exploratória das tarefas tem reflexo(s) no tipo de trabalho que se pode desenvolver na sala de aula. Com efeito, aulas em que a resolução de tarefas mais abertas é vivida como uma actividade regular podem conduzir a experiências mais significativas para os alunos, por exemplo, quando chegam ao mesmo resultado através de processos alternativos ou quando a mesma questão pode apresentar soluções diversificadas conforme as abordagens seguidas ou quando uma resposta não se reduz ao “certo ou errado”. Podem, então, ser criadas e desenvolvidas novas dinâmicas na sala de aula em que as experiências e processos pessoais também sejam valorizados. As investigações podem proporcionar um maior envolvimento afectivo dos alunos resultante da sua maior confiança no trabalho matemático e promover, assim, concepções e ideias mais positivas sobre a matemática e sobre a sua aprendizagem.

Ponto 4. Numa investigação identificam-se várias etapas características: (a) formulação da questão a investigar; (b) formulação de conjecturas relativas a essa questão; (c) testagem das conjecturas e eventual reformulação; e (d) validação e comunicação de resultados. Todas estas etapas são igualmente importantes, exigem tempo e não faz sentido tentar eliminar ou esquecer qualquer uma delas. O tempo para a tarefa, e a sua gestão, é um aspecto muito determinante que é fortemente condicionado pela estrutura curricular (refira-se, a propósito, que esta situação pode ser atenuada na educação pré-escolar devido à inexistência de um currículo formal e nacional). Pode acontecer que, devido à pressão do tempo, haja a tentação de apressar, por exemplo, a etapa da comunicação de resultados. Deve ter-se presente que a discussão colectiva daí decorrente é fundamental, e onde o papel do professor é decisivo, para a “construção de significados” e integração dos novos conhecimentos por parte das crianças.

Ponto 5. A calculadora e o computador podem ajudar e ser instrumentos úteis para o trabalho investigativo, nomeadamente, na simulação de situações ou na testagem e verificação de conjecturas e hipóteses alternativas. Inversamente, o trabalho com questões mais abertas pode proporcionar aos alunos, em particular àqueles com mais dificuldades ou portadores de alguma deficiência, uma maior autonomia e desenvolver atitudes mais positivas relativamente à tecnologia, pois a relevância da sua utilização ultrapassa a tradicional obtenção ou verificação de resultados.

Ponto 6. Finalmente, e já visível em pontos anteriores, refira-se que o desenvolvimento da capacidade de comunicação é claramente o aspecto que envolve um maior consenso e uma maior evidência da relevância educativa das investigações matemáticas. De facto, no desenvolvimento de uma investigação, a actividade matemática surge de propostas abertas em que os possíveis percursos

são negociados pelos intervenientes, possibilitando, por exemplo, que as crianças levantem questões, façam sugestões, formulem hipóteses, expressem ideias, expliquem o que pensam, verbalizem processos, validem conclusões, registem descobertas, negociem o significado das palavras, refinam o vocabulário formal ou informal e, portanto, clarifiquem e potenciem o seu pensamento matemático.

Referências

- Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A matemática na educação básica*. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério da Educação.
- Araújo, N. (1998). Resolução de problemas com o geoplano. *Educação e Matemática*, 47, 37-40.
- Associação de Professores de Matemática (1988). *Renovação do currículo de matemática*. Lisboa: APM.
- Associação de Professores de Matemática (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática*. Lisboa: APM e IIE.
- Baroody, A. (1993). *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8*. New York, NY: Macmillan.
- Brahier, J., & Speer, W. (1995). Nuts about mathematics. *Teaching Children Mathematics*, 2(4), 228-230.
- Brocardo, J. (2001). Investigações na aula de matemática: A história da Rita. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 155-161). Vila Real: APM.
- Cardoso, A., Manicas, A., Ferreira, E., Calaxa, H., Cunha, F., & Machado, R. (1999). Uma questão de iogurtes. *Educação e Matemática*, 52, 17-19.
- Chamoso, J., & Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *SUMA*, 36, 33-41.
- Correia, G. (1996). Trabalhar regularidades com alunos do 3º ano de escolaridade: Reflexos de uma experiência. *Educação e Matemática*, 40, 53-56.
- Departamento da Educação Básica (1997). *Orientações curriculares para a educação pré-escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Departamento da Educação Básica (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário (1990). *Ensino básico: Programa do 1º ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Ernest, P. (1996). Investigações, resolução de problemas e pedagogia. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 25-48). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.

- Fernandes, D., Borralho, A., & Amaro, G. (Orgs.) (1994). *Resolução de problemas: Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Lisboa: IIE.
- Ferreira, E., & Rocha, I. (1993). A resolução de problemas como elemento integrador das áreas do 1º ciclo. *Educação e Matemática*, 28, 9-10.
- Ferreira, M. D. (1996). Resolver problemas com o dominó. *Educação e Matemática*, 40, 8-10.
- Harris, J. (1999). Interweaving language and mathematics literacy through a story. *Teaching Children Mathematics*, 5(9), 520- 524.
- Kantowski, M. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180.
- Lappan, G., & Schram, P. (1989). Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in mathematics. In P. Trafton, & A. Shulte (Orgs.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 14-30). Reston, VA: NCTM.
- Lubinski, C., & Thiensen, D. (1996). Exploring measure through literature. *Teaching Children Mathematics*, 2(5), 260-263.
- Lúis, A., Bártolo, F., & Serrazina, N. (1996). Padrões no 1º ciclo... Para quê?. *Educação e Matemática*, 40, 44-46.
- Mamede, E. (2001). A calculadora e o currículo de matemática para o 1º ciclo: Uma experiência de sala de aula. In I. Lopes, J. Silva, & P. Figueiredo (Orgs.), *Actas do ProfMat 2001* (pp. 221-225). Vila Real: APM.
- Mendes, E. (1998). A actividade matemática dos alunos em contexto de actividades de investigação matemática. In *Actas do ProfMat 98* (pp. 135-147). Guimarães: APM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1985). *Uma agenda para acção* (tradução do original de 1980) Lisboa: APM.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar* (tradução do original de 1989) Lisboa: APM e IIE.
- National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da matemática* (tradução do original de 1991). Lisboa: APM e IIE.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Nunes, V. (1997). Construção de ambientes propícios à resolução de problemas no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, 43, 29-34.
- Oom, T. (1997). Uma actividade matemática numa sala de jardim de infância. *Cadernos de Educação de Infância*, 41, 19-21.
- Peixoto, A. (1998). Simetrias axiais no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, 49, 34-36.
- Pires, M. (2001). *A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: Um projecto de investigação-acção* (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Pólya, G. (1945/1975). *A arte de resolver problemas*. São Paulo: Interciência.

- Ponte, J. P., & Segurado, I. (1998). Concepções sobre a matemática e trabalho investigativo. *Quadrante*, 7(2), 5-40.
- Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.
- Ribeiro, R. (1997). Algumas reflexões sobre a utilização da calculadora no 1º ciclo. *Educação e Matemática*, 45, pp. 23-25.
- Schoenfeld, A. (1980). Heuristics in the classroom. In S. Krulik (Org.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 9-21). Reston, VA: NCTM.
- Steele, D. (2001). Vozes entusiastas de jovens matemáticos. *Educação e Matemática*, 62, 39-42.
- Silver, E. (1996). Acerca da formulação de problemas de matemática. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 139-162). Lisboa: Projecto Matemática Para Todos e APM.
- Veia, L. (1996). Qual é o problema? *Educação e Matemática*, 40, 20-24.