



Inês Monteiro

Barbedo de

Magalhães

**Determinação de grafos regulares excepcionais
com recurso a (κ, τ) -extensões**

**Determination of regular exceptional graphs
by (κ, τ) -extensions**



**Inês Monteiro
Barbedo de
Magalhães**

**Determinação de grafos regulares excepcionais
com recurso a (κ, τ) -extensões**

**Determination of regular exceptional graphs
by (κ, τ) -extensions**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática e Aplicações, realizada sob a orientação científica de Domingos Moreira Cardoso, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro e co-orientação de Paula Cristina Roque da Silva Rama, Professora Auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Thesis submitted to the University of Aveiro in fulfilment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Mathematics and Applications, under the supervision of Domingos Moreira Cardoso, Full Professor at the Department of Mathematics of the University of Aveiro, and co-supervision of Paula Cristina Roque da Silva Rama, Auxiliary Professor at the Department of Mathematics of the University of Aveiro.

o júri

presidente

Doutor Manuel João Senos Matias

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

vogais

Doutor Jorge Orestes Lasbarrères Cerdeira

Professor Catedrático da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Doutor Domingos Moreira Cardoso

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (orientador)

Doutora Ilda Perez Fernandes da Silva

Professora Auxiliar com Agregação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Doutora Olga Maria da Silva Azenhas

Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

Doutora Rute Correia Lemos

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Em especial, agradeço aos meus orientadores. Ao Professor Domingos por ter aceite orientar este trabalho, todo o incentivo, confiança e desafios lançados. À Paula Rama pela co-orientação, a total disponibilidade, o rigor e as muitas sugestões.

Aos colegas da primeira turma do Programa Doutoral pelo companheirismo e entreaajuda.

À minha escola, EsACT-Instituto Politécnico de Bragança, o tempo tão precioso proporcionado através de uma bolsa PROTEC, toda a compreensão, solidariedade e suporte.

Aos meus pais, irmão, cunhada e sobrinhos o constante apoio, carinho e paciência.

A todos os que, por fazerem parte da minha vida, estiveram sempre por perto.

Bem hajam!

palavras-chave

Teoria espectral dos grafos, grafo regular, grafo excepcional, combinatória.

resumo

Um grafo excepcional é um grafo conexo com menor valor próprio não inferior a -2 que não é grafo linha generalizado. Esta tese tem como objetivo apresentar uma nova técnica de construção de grafos regulares, com certas propriedades de natureza combinatória e espectral invariantes, e aplicá-la na construção de todos os grafos regulares excepcionais.

O trabalho encontra-se dividido em duas partes. Na primeira parte descreve-se a nova técnica de construção de grafos regulares pela introdução de conjuntos (κ, τ) -regulares, designada de (κ, τ) -extensão, e define-se uma relação de ordem parcial entre grafos regulares. Mostra-se que a (κ, τ) -extensão de um grafo se reduz à construção de matrizes de incidência de um 1-design combinatório, para a qual se definem propriedades que previnem a construção de grafos isomorfos. Além disso, esta técnica permite a construção de grafos regulares com partição equilibrada e apresentam-se algumas propriedades espectrais destes grafos. Na segunda parte é feita uma breve descrição das três técnicas conhecidas para a construção dos grafos regulares excepcionais. Posteriormente, aplicam-se as (κ, τ) -extensões na construção recursiva do conjunto dos grafos regulares excepcionais, que se divide em três camadas. No caso das 1ª e 2ª camadas, os grafos obtêm-se por $(0, 2)$ -extensões e, no caso da 3ª camada, por $(1, 3)$ -extensões. Consequentemente, conclui-se que, para os grafos das 1ª e 2ª camadas o número de independência atinge o majorante de Hoffman e que o conjunto dos grafos regulares excepcionais possui uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado, sendo apresentando o respetivo diagrama de Hasse.

keywords

Spectral graph theory, regular graphs, exceptional graphs, combinatorics.

abstract

An exceptional graph is a connected graph with least eigenvalue greater than or equal to -2 which is not a generalized line graph. The aim of this thesis is to present a new technique for the construction of regular graphs, with certain spectral and combinatorial invariant properties, and to apply it in the construction of all regular exceptional graphs.

The work is divided into two parts. The first part describes a new construction technique that introduces (κ, τ) -regular sets in regular graphs, called (κ, τ) -extension, and defines a partial order between regular graphs. It is shown that the process of extending a graph is reduced to the construction of the incidence matrix of a combinatorial 1-design, considering several rules to prevent the production of isomorphic graphs. Furthermore, this technique allows the construction of regular graphs with an equitable partition and some spectral properties of these graphs are presented. The second part starts with a brief description of the three techniques, previously known for the construction of regular exceptional graphs. Later, the (κ, τ) -extensions are applied to the recursive construction of the set of regular exceptional graphs, which are partitioned in three layers. In the case of the 1st and 2nd layers, graphs are obtained by $(0, 2)$ -extensions and in the case of 3rd layer, by $(1, 3)$ -extensions. Therefore, we conclude that, the independence number attains Hoffman's upper bound for the graphs of 1st and 2nd layers and the set of regular exceptional graphs has a partially ordered set structure whose Hasse diagram is presented.

Índice

Lista de Símbolos	iii
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	vii
1 Introdução	1
2 Definições e resultados preliminares	7
3 Construção de grafos regulares por (κ, τ)-extensões	13
3.1 Construção de grafos regulares com partições equilibradas	16
3.2 Extensão por um grafo 0-regular	19
3.3 Alguns vetores próprios associados ao valor próprio $\kappa - \tau$	21
4 Grafos com menor valor próprio não inferior a -2	27
4.1 Técnica que aplica os subgrafos proibidos	29
4.2 Técnica que aplica os sistemas de raízes	32
4.2.1 Os grafos regulares excepcionais	34
4.3 Técnica que aplica o complemento estrela	38
5 Construção recursiva dos grafos regulares excepcionais por (κ, τ)-extensões	43
5.1 Considerações gerais	44
5.2 Construção dos grafos regulares excepcionais da 1ª camada por $(0, 2)$ -extensões	47
5.2.1 Construção das matrizes de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$. .	49
5.2.2 Soluções do sistema que resultam em grafos $G' = H \oplus G$ isomorfos . .	53

5.2.3	Outros casos que resultam em grafos isomorfos	59
5.2.4	Algoritmo	69
5.3	Construção dos grafos regulares excepcionais da 2ª camada por (0, 2)-extensões	76
5.3.1	Construção das matrizes de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$. .	77
5.4	Construção dos grafos regulares excepcionais da 3ª camada por (1, 3)-extensões	83
5.5	Resultados Computacionais	85
6	Conclusões e trabalho futuro	91
A	Implementação e resultados computacionais	93
A.1	Análise do esforço computacional do Algoritmo 1	93
A.2	Resultados	101
A.2.1	Resultados obtidos para (\mathcal{L}_1, \preceq)	102
A.2.2	Resultados obtidos para (\mathcal{L}_2, \preceq)	111
A.2.3	Resultados obtidos para (\mathcal{L}_3, \preceq)	112
	Referências Bibliográficas	113
	Índice Remissivo	119

Lista de Símbolos

\cong	relação de isomorfismo entre dois grafos
\preceq	relação de ordem parcial entre grafos que se obtêm por (κ, τ) -extensões
$\alpha(G)$	número de independência de G
$\delta(G)$	menor dos grau dos vértices de G
π	partição equilibrada
$ S $	cardinalidade do conjunto S
A_G	matriz de adjacência do grafo G
$\sigma(A_G)$	espectro da matriz de adjacência A_G
$CP(n)$	grafo cocktail-party
\bar{d}_G	média dos graus dos vértices do grafo G
$E(G)$	conjunto das arestas do grafo G
E_8	sistema de raízes
\mathcal{G}_i	conjunto dos grafos regulares excepcionais da i -ésima camada ($i = 1, 2, 3$)
$\mathcal{E}(\mu)$	subespaço próprio associado ao valor próprio μ
$G[S]$	subgrafo induzido pelo subconjunto S dos vértices de G
\bar{G}	grafo complementar do grafo G
G/π	grafo quociente
$\mathcal{G}(-2)$	o conjunto dos grafos regulares conexos cuja matriz de adjacência tem menor valor próprio igual a -2 e que não são grafos linha nem grafos cocktail-party
$\mathcal{G}_i(-2)$	conjunto dos grafos regulares excepcionais da camada i ($i = 1, 2, 3$)
$H \oplus G$	grafo regular que se obtém da extensão do grafo regular G pelo grafo regular H

$H \dot{\cup} G$	união disjunta dos grafos H e G
I_n	matriz identidade de ordem n
\mathbf{j}_n	vetor com as n componentes iguais a um
K_n	grafo completo com n vértices
$K_{m,n}$	grafo bipartido completo
$L(H)$	grafo linha do grafo H
\mathcal{L}	conjunto dos grafos regulares com menor valor próprio maior ou igual a -2
\mathcal{L}_i	conjunto dos grafos regulares com menor valor próprio maior ou igual a -2 que verificam a condição da i -ésima camada ($i = 1, 2, 3$)
$N_G(v)$	conjunto dos vértices de G vizinhos (ou adjacentes) ao vértice v
$V(G)$	conjunto dos vértices do grafo G

Lista de Figuras

2.1	Grafo de Petersen com conjunto $(0, 2)$ -regular e independente máximo $\{2, 5, 8, 9\}$.	9
2.2	Grafo quociente G/π e respetiva matriz de adjacência $A_{G/\pi}$, relativa à bi-partição equilibrada π do grafo de Petersen.	11
3.1	Grafos isomorfos obtidos por uma $(0, 2)$ -extensão.	21
4.1	Subgrafos proibidos dos grafos linha [Cve02]	29
4.2	Subgrafos proibidos dos grafos linha generalizados [Cve02].	30
4.3	Subgrafo induzido de um grafo excepcional.	31
4.4	Construção do grafo de Petersen	36
4.5	Grafos 3-regulares conexos com oito vértices.	37
4.6	Construção do grafo de Clebsch	37
4.7	Grafo de Petersen e respetivos complementos estrela.	42
5.1	Grafos regulares excepcionais da 1ª camada de menor ordem.	48
5.2	Grafos isomorfos obtidos por matrizes de incidência distintas de um design $1 - (4, 2, 3)$	54
5.3	Matriz de adjacência e grafo G_2 isomorfo ao grafo 31 da Figura 5.8.	72
5.4	Grafos linha minimais L_1 e L_2	74
5.5	Grafos regulares excepcionais minimais da 2ª camada.	76
5.6	Grafos isomorfos obtidos por matrizes de incidência diferentes de um design $1 - (3, 2, 4)$	79
5.7	Grafo raiz do grafo linha G_6_3	86
5.8	Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 1ª camada (regularidade ímpar)	87

5.9	Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 1 ^a camada (regularidade par)	88
5.10	Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 2 ^a camada	89
5.11	Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 3 ^a camada	89
A.1	Número total de matrizes de incidência determinadas em função do número de blocos do 1-design.	97
A.2	Tempo de execução e número total de extensões em função do número de blocos do 1-design.	99

Lista de Tabelas

5.1	Número total de soluções em função do número n de blocos do design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$	59
5.2	Número total de matrizes de incidência produzidas para construir o grafo G_{m+1} em função do número de blocos do design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$	73
A.1	Tempo necessário para gerar o número total de extensões em função do número de blocos.	98

Capítulo 1

Introdução

A representação de um grafo por uma matriz, como seja a matriz de adjacência, a matriz Laplaciana ou Laplaciana sem sinal, permite o estudo das propriedades combinatórias do grafo a partir dos valores e dos vetores próprios da matriz que o representa. Reciprocamente, as propriedades combinatórias dos grafos implicam certas propriedades de natureza espectral. É nesta área de investigação, usualmente designada de teoria espectral dos grafos, que se insere esta tese.

A teoria espectral dos grafos tem aplicações em diversas áreas científicas como, por exemplo, a química, a física e as ciências da computação. Segundo [CDS95, Cve09] a motivação para o seu estudo tem origem na química, com a publicação do artigo [Hüc31] onde se apresenta a teoria dos orbitais moleculares de Hückel, no estudo de moléculas orgânicas insaturadas, e dela surge a noção de energia de um grafo. No entanto, só muito mais tarde é publicado o primeiro artigo de matemática sobre teoria espectral dos grafos, motivado pelo estudo da vibração de uma membrana [CS57], cujo movimento é descrito por equações diferenciais. Mais detalhes sobre estes dois problemas encontram-se em [CRS10, Capítulo 9].

Relativamente às ciências da computação em [Cve09, CS11] faz-se uma descrição pormenorizada de várias aplicações. Observe-se, por exemplo, que o vetor próprio associado ao maior valor próprio da matriz de adjacência do grafo, usualmente designado por vetor principal, é utilizado pelos motores de pesquisa da web [BP98, Kle99] e no reconhecimento de padrões

[LWH03]. Os valores e vetores próprios da matriz Laplaciana são também aplicados no reconhecimento de padrões [WHL05] e no estudo da topologia da Internet [CT04]. Em [CRS10, Capítulo 9] refere-se a construção do subespaço próprio associado ao valor próprio -2 , dos grafos linha generalizados, e como isso se relaciona com consultas seguras a bases de dados estatísticos.

Do estudo do espectro dos grafos linha [Hof60], cujo menor valor próprio é não inferior a -2 conclui-se a existência de grafos, também com menor valor próprio não inferior a -2 , que não são grafos linha e que se designam grafos excepcionais. Em [Bei70], os grafos linha são caracterizados pela identificação de nove subgrafos proibidos. Em [CGSS76] são introduzidos os sistemas de raízes, das álgebras de Lie, no estudo dos grafos com menor valor próprio não inferior a -2 , representando-se os vértices dos grafos por vetores do espaço euclidiano. Um estudo exaustivo com os resultados e conceitos relacionados com os grafos excepcionais encontra-se em [CRS04].

Os conjuntos (κ, τ) -regulares surgem, com uma designação distinta, em [Tho81, Neu82] relacionados com os grafos fortemente regulares. Em [Tho81] os subgrafos induzidos por conjuntos (κ, τ) -regulares são designados por *subgrafos próprios do tipo $\kappa - \tau$* . Em [Neu82] estes conjuntos são designados por *conjuntos regulares com valência κ e nexus τ* . O conceito de conjunto (κ, τ) -regular com esta designação foi introduzido em [CR04]. Estes conjuntos aplicam-se no estudo de grafos com restrições de dominância [HKT00, Tel93] e no reconhecimento de grafos hamiltonianos [CSZ08]. Destaca-se, ainda, o facto de um grafo regular com um conjunto (κ, τ) -regular ter $\kappa - \tau$ como valor próprio da matriz de adjacência e um vetor próprio definido a partir do vetor característico deste conjunto [Tho81].

As partições equilibradas foram introduzidas em [Sac66, Sac67], com uma terminologia diferente da atual, tendo em vista o estudo espectral de um grafo a partir do respetivo grafo quociente. Este conceito, com a designação de partição equilibrada, foi introduzido em [Sch74], tendo em vista a obtenção de informação sobre os valores próprios e os vetores próprios da matriz de adjacência de um grafo. De acordo com [God93], as partições equilibradas surgem relacionadas com os grupos de automorfismo de grafos [McK76] e as partições associadas a matrizes de passeios e coloração de grafos [PS82]. Em [Sch74, CDS80a, God93, CRS97] mostra-se que a partir das partições equilibradas de um grafo é possível obter informação acerca dos

valores e vetores próprios da respetiva matriz de adjacência. Em particular, mostra-se que o polinómio característico da matriz de adjacência do grafo quociente divide o polinómio característico da matriz de adjacência do grafo.

A motivação para o estudo dos grafos regulares excecionais, no contexto desta tese, decorre da observação em [CC06] de que estes grafos teriam uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado, onde a relação de ordem parcial se define através de (κ, τ) -extensões. Com base nesta observação desenvolve-se uma nova técnica de construção dos grafos regulares excecionais e prova-se a existência do conjunto parcialmente ordenado acima referido. Em [BCC⁺14] apresenta-se de forma sucinta uma descrição deste método construtivo.

O objetivo desta tese é desenvolver e descrever uma nova técnica de construção de grafos regulares e mostrar que todos os grafos regulares excecionais podem ser obtidos por esta técnica. A técnica permite a construção de grafos regulares pela introdução de conjuntos (κ, τ) -regulares em grafos regulares. Este procedimento estabelece uma relação de ordem parcial entre os grafos regulares. Da aplicação sucessiva desta técnica pode-se construir uma cadeia maximal de grafos onde os sucessivos conjuntos (κ, τ) -regulares permanecem (κ, τ) -regulares, resultando um grafo regular com uma partição equilibrada. No caso particular dos grafos regulares excecionais apresenta-se o diagrama de Hasse da relação de ordem parcial definida por (κ, τ) -extensões, com $\kappa - \tau = -2$.

Esta dissertação apresenta a estrutura que a seguir se descreve.

No Capítulo 2 introduzem-se algumas definições e notações da teoria dos grafos e descrevem-se algumas relações básicas entre as propriedades de natureza combinatória e espectral dos grafos. Introduce-se a noção de 1-design, partição equilibrada e algumas das suas propriedades no contexto da teoria dos grafos.

No Capítulo 3 descreve-se a técnica, desenvolvida nesta tese, para a construção de grafos regulares, onde um grafo regular é estendido por um conjunto (κ, τ) -regular. Mostra-se que este processo construtivo induz uma relação de ordem parcial \preceq e que pode ser aplicado recursivamente, tendo em vista a construção de cadeias de grafos regulares. Na Secção 3.1 esta técnica é restringida de modo a que cada conjunto (κ, τ) -regular introduzido é mantido ao longo do processo recursivo, obtendo-se grafos regulares com partições equilibradas com

mais de duas células. A construção de um grafo regular, por extensão de outro grafo regular, reduz-se à construção das matrizes de incidência de um 1-design. Na Secção 3.2 mostra-se que, no caso em que os grafos são estendidos por conjuntos $(0, \tau)$ -regulares, a sua construção é invariante em relação a permutações sobre as linhas da matriz de incidência de um dos respetivos 1-design. O capítulo termina com a Secção 3.3, onde se apresentam algumas propriedades espectrais de famílias de grafos obtidos por esta técnica.

No Capítulo 4 são abordadas as três principais técnicas anteriormente utilizadas na caracterização dos grafos com menor valor próprio não inferior a -2 . Note-se que esta propriedade é partilhada pelos grafos linha generalizados, que incluem os grafos linha, e pelos grafos excepcionais. Este capítulo inclui ainda uma secção descritiva da construção do conjunto dos grafos regulares excepcionais apresentada em [BCS76] com base nos resultados obtidos em [CGSS76], onde os vértices dos grafos com menor valor próprio não inferior a -2 são representados por vetores do espaço euclideano.

O Capítulo 5 contém os principais contributos desta tese. Com efeito, mostra-se que os grafos regulares excepcionais podem ser obtidos por (κ, τ) -extensões, onde $\kappa - \tau = -2$, e apresentam uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado. Na Secção 5.1 introduzem-se os resultados gerais. Na Secção 5.2 descreve-se a construção de um subconjunto de grafos regulares, \mathcal{L}_1 , que inclui os grafos regulares excepcionais da 1ª camada, e que são obtidos por $(0, 2)$ -extensões, com base na construção de matrizes de incidência de designs $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$. Esta secção inclui ainda um algoritmo que permite obter todos os grafos de (\mathcal{L}_1, \preceq) e que evita o aparecimento de grafos isomorfos. Na Secção 5.3, é construído um subconjunto de grafos regulares, \mathcal{L}_2 , que contém os grafos regulares excepcionais da 2ª camada, obtidos por $(0, 2)$ -extensões, com recurso a designs $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$. Tal como anteriormente, é apresentado um algoritmo para a construção dos grafos de \mathcal{L}_2 onde a produção de grafos isomorfos é evitada. Na Secção 5.4 obtém-se \mathcal{L}_3 , que contém os três grafos regulares excepcionais da 3ª e última camada, utilizando $(1, 3)$ -extensões com recurso a designs $1 - (4, 3, \frac{3n}{4})$. É também apresentado um algoritmo para a construção destes grafos. Na Secção 5.5, descrevem-se os resultados computacionais obtidos e apresenta-se o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado que contém os 187 grafos regulares excepcionais. Note-se que, além dos grafos regulares excepcionais, este conjunto parcialmente ordenado contém mais 42 grafos regulares, devidamente assinalados

no diagrama de Hasse.

No Capítulo 6 apresentam-se as principais conclusões do trabalho realizado e propõem-se algumas ideias para trabalho futuro.

O trabalho tem ainda um Apêndice sobre a implementação dos três algoritmos referidos e resultados computacionais, dividido em duas secções. A Secção A.1 refere-se à implementação do algoritmo apresentado para a construção dos grafos da 1^a camada, com uma breve análise do esforço computacional envolvido. A Secção A.2 contém as tabelas com todos os dados obtidos.

Capítulo 2

Definições e resultados preliminares

Neste capítulo apresentam-se algumas definições e notações da teoria dos grafos e estabelecem-se algumas relações entre as propriedades dos grafos e as propriedades das matrizes de adjacência. Introduce-se a noção de 1-design e de partição equilibrada e algumas das suas propriedades no contexto da teoria dos grafos.

Nesta tese adotam-se os conceitos e notações básicas da teoria dos grafos que são descritas em [CSR09].

Ao longo do texto consideram-se (maioritariamente) grafos não dirigidos simples $G = (V(G), E(G))$, onde $V(G)$ denota o conjunto não vazio dos vértices e $E(G)$ o conjunto das arestas, ou seja, grafos sem arestas múltiplas ou lacetes. Uma aresta de $E(G)$ que tem os vértices i e j como vértices extremos denota-se por ij e nesse caso diz-se que os *vértices* i e j são *adjacentes ou vizinhos*.

Dado um grafo G de ordem n , a matriz de *adjacência* de um (multi)(di)grafo G denota-se por $A_G = (a_{ij})_{n \times n}$, onde a entrada a_{ij} é igual ao número de arestas ou arcos com origem no vértice i e término no vértice j . A matriz de *incidência* aresta vértice de um grafo G , de ordem n e com m arestas, é uma matriz $n \times m$ $M = [m_{ij}]$ tal que $m_{ij} = 1$ se a aresta e_j é incidente no vértice v_i , ou seja, $e_j = v_i v_k$ para algum vértice $v_k \in V(G)$, e $m_{ij} = 0$, caso contrário.

O *espectro* de A_G é o multi-conjunto dos valores próprios $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ de A_G e denota-se por $\sigma(A_G)$. Os valores próprios λ_i da matriz A_G serão referidos como os *valores próprios do grafo G* e segundo a ordem $\lambda_{\max}(A_G) = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}(A_G)$. O *raio espectral* de uma matriz quadrada A_G é $\rho(A_G) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A_G)\}$. Como A_G é uma matriz simétrica, os seus n valores próprios são reais e as multiplicidades algébrica e geométrica de qualquer valor próprio $\lambda \in \sigma(A_G)$ coincidem, pelo que este valor será referido apenas como *multiplicidade do valor próprio λ* . Sabe-se que $\lambda_{\min}(A_G) = 0$ se e só se G não tem arestas, $\lambda_{\min}(A_G) = -1$ se e só se G tem pelo menos uma aresta e cada uma das suas componentes é um grafo completo e, caso contrário, $\lambda_{\min}(A_G) \leq -\sqrt{2}$ [Doo82]. Ao longo do texto \mathbf{j}_n denota o vetor com todas as n componentes iguais a um e I_n denota a matriz identidade de ordem n .

Seguem-se algumas propriedades dos valores e vetores próprios dos grafos regulares.

Proposição 2.1. [God93] *Um grafo G é regular se e só se \mathbf{j} é um vetor próprio da matriz de adjacência A_G . Se G é p -regular então $p \in \sigma(A_G)$ e \mathbf{j} é um vetor próprio associado a p .*

Proposição 2.2. [CS57] *Seja G um grafo de ordem n . Se λ_1 é o maior valor próprio de A_G e \bar{d}_G é a média dos graus dos vértices de G , então $\bar{d}_G \leq \lambda_1$, verificando-se a igualdade se e só se G é regular.*

Da Proposição 2.2 conclui-se que λ_1 , o raio espectral da matriz de adjacência de um grafo p -regular, coincide com o grau de regularidade p , utilizando-se indistintamente p para referir ambos. Os resultados seguintes estabelecem que a multiplicidade do raio espectral de A_G define o número de componentes conexas do grafo G .

Proposição 2.3. [CDS80a] *Um grafo G é conexo se e só se o raio espectral da matriz de adjacência A_G é um valor próprio simples e tem associado um vetor próprio com todas as componentes positivas.*

Proposição 2.4. [CDS80a] *Se a matriz de adjacência de um grafo G tem um vetor próprio positivo no subespaço próprio associado ao seu raio espectral ρ , então o número de componentes de G é igual à multiplicidade de ρ .*

Dado um grafo G , um subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$ diz-se um *conjunto (κ, τ) -regular* do grafo G se o subgrafo induzido $G[S]$ é κ -regular e todo o vértice $v \in V(G) \setminus S$ tem τ vizinhos em S .

Da definição de conjunto (κ, τ) -regular é imediato que, para todo o $\tau > 0$, um conjunto $(0, \tau)$ -regular S do grafo G é um independente maximal. Além disso [BC04], se $\tau = -\lambda_{\min}(A_G)$, então S é um independente máximo e todo o independente máximo é um conjunto $(0, \tau)$ -regular.

No grafo de Petersen da Figura 2.1 podem identificar-se o conjunto $(0, 2)$ -regular $\{2, 5, 8, 9\}$, o conjunto $(2, 1)$ -regular $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e o conjunto $(1, 3)$ -regular $\{1, 3, 4, 6, 7, 10\}$. O conjunto $\{2, 5, 8, 9\}$ é um independente máximo.

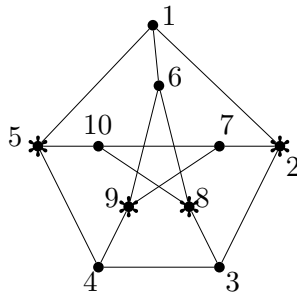


Figura 2.1: Grafo de Petersen com conjunto $(0, 2)$ -regular e independente máximo $\{2, 5, 8, 9\}$.

O par (X, \mathcal{B}) é um 1 -design com parâmetros (v, l, λ) ou um $design 1 - (v, l, \lambda)$, se X é um conjunto de cardinalidade v , \mathcal{B} é uma família de b subconjuntos de X com cardinalidade l , designados por *blocos*, e cada elemento $x \in X$ pertence a exatamente λ blocos. A *matriz de incidência* $B = (b_{ij})$ de um design $1 - (v, l, \lambda)$ é uma matriz $v \times b$ com entrada b_{ij} igual a 1 se $x_i \in B_j$ e 0 caso contrário. De forma alternativa, um 1 -design (X, \mathcal{B}) com parâmetros (v, l, λ) pode ser representado por um grafo bipartido semi-regular, designado por *grafo de incidência do design* (X, \mathcal{B}) .

O resultado seguinte estabelece uma condição necessária e suficiente para a existência de um 1 -design.

Teorema 2.5. [CSR09] *Existe um 1 -design com parâmetros (v, l, λ) se e só se $l|\lambda v$ e $b = \frac{\lambda v}{l} \leq \binom{v}{l}$, onde b é o número de blocos.*

Se $\pi = (V_1, V_2, \dots, V_r)$ é uma partição de $V(G)$ e, para $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$, existe $d_{ij} \in \mathbb{N}_0$ tal que para todo o $v \in V_i$ $d_{ij} = |N_G(v) \cap V_j|$, ou seja, o número de vizinhos que um vértice de V_i tem em V_j é independente da escolha do vértice em V_i , então diz-se que π é uma

partição *equilibrada* de G [Sch74]. Uma partição equilibrada com dois elementos designa-se por *bipartição equilibrada*. Se G admite uma partição equilibrada $\pi = (V_1, V_2, \dots, V_r)$, então o subgrafo induzido por cada célula V_i é regular e as arestas que unem duas células distintas formam um grafo bipartido semiregular.

Se G é um grafo regular e $S \subset V(G)$ é um conjunto (κ, τ) -regular de G , então $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ é uma bipartição equilibrada de G . Neste caso, a matriz de adjacência do grafo G escreve-se na forma

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{G[S]} & B \\ B^T & A_{G[\bar{S}]} \end{bmatrix}$$

onde $\bar{S} = V(G) \setminus S$, $A_{G[S]}$ e $A_{G[\bar{S}]}$ são as matrizes dos subgrafos regulares induzidos por S e \bar{S} , respetivamente, e $B \in \{0, 1\}^{|S| \times (n-|S|)}$ é a matriz que descreve as adjacências entre os vértices de S e os vértices de \bar{S} .

Se G é um grafo p -regular, então, das propriedades de um conjunto (κ, τ) -regular, obtêm-se as igualdades seguintes:

$$A_{G[S]}\mathbf{j} = \kappa\mathbf{j}, B\mathbf{j} = (p - \kappa)\mathbf{j}, A_{G[\bar{S}]}\mathbf{j} = (p - \tau)\mathbf{j} \text{ e } B^T\mathbf{j} = \tau\mathbf{j}.$$

Dada uma partição equilibrada $\pi = (V_1, \dots, V_r)$ do grafo G , designa-se por *grafo quociente* de G com respeito a π [God93] (ou divisor [CDS80a]), e denota-se por G/π , o multidigrafo cujos vértices são as células da partição π e que, para $i, j \in \{1, \dots, r\}$, tem d_{ij} arcos de V_i para V_j , onde $d_{ij} = |N_G(v) \cap V_j|$ para todo o $v \in V_i$.

A matriz de adjacência $A_{G/\pi}$, também designada por *matriz quociente*, é a matriz de ordem r com entradas d_{ij} . Se G é um grafo de ordem n e π é a partição equilibrada trivial com n subconjuntos, então $A_{G/\pi} = A_G$. Se G é um grafo p -regular e π é a partição equilibrada trivial com $V_1 = V(G)$, então $A_{G/\pi} = [p]$. Se G é um grafo p -regular e $S \subset V(G)$ é um conjunto (κ, τ) -regular, então $\pi = (S, V(G) \setminus S)$ é uma bipartição equilibrada com matriz de adjacência

$$A_{G/\pi} = \begin{bmatrix} \kappa & p - \kappa \\ \tau & p - \tau \end{bmatrix}.$$

Na Figura 2.2 encontra-se o grafo quociente G/π , e a respetiva matriz de adjacência $A_{G/\pi}$,

relativamente à bipartição equilibrada $\pi = (\{2, 5, 8, 9\}, \{1, 3, 4, 6, 7, 10\})$ do grafo de Petersen apresentado na Figura 2.1.

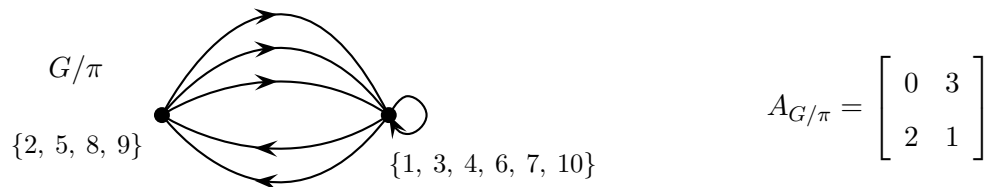


Figura 2.2: Grafo quociente G/π e respetiva matriz de adjacência $A_{G/\pi}$, relativa à bipartição equilibrada π do grafo de Petersen.

Proposição 2.6. [God93] *Se π é uma partição equilibrada do grafo G , então $\sigma(A_{G/\pi}) \subseteq \sigma(A_G)$.*

Capítulo 3

Construção de grafos regulares por (κ, τ) -extensões

Neste capítulo descreve-se uma nova técnica para a construção de grafos regulares, onde um grafo regular é estendido por um conjunto (κ, τ) -regular e, portanto, admite uma bipartição equilibrada. Este processo construtivo pode ser aplicado de forma recursiva, induzindo uma relação de ordem parcial. Na Secção 3.1 é descrito um caso particular desta técnica segundo a qual cada conjunto (κ, τ) -regular acrescentado é mantido enquanto tal ao longo de todo o processo recursivo. A construção de um grafo regular por extensão de outro grafo regular reduz-se à construção das matrizes de incidência de um 1-design. Na Secção 3.2 mostra-se que no caso em que os grafos são estendidos por conjuntos $(0, \tau)$ -regulares a construção é invariante em relação a permutações sobre as linhas da matriz de incidência do 1-design. O capítulo termina com a Secção 3.3 onde se apresentam algumas propriedades espectrais que se verificam em famílias de grafos gerados por esta técnica.

Seja G um grafo $(p - \tau)$ -regular de ordem n_1 (com $\tau > 0$) e H um grafo κ -regular (com $\kappa \leq p$) de ordem n_2 . Pretende-se obter um grafo p -regular $H \oplus G$, de ordem $n_2 + n_1$, tal que cada vértice de H tem exatamente $p - \kappa$ vizinhos em G e cada vértice de G tem τ vizinhos em H , ou seja, $V(H)$ é um conjunto (κ, τ) -regular de $H \oplus G$ e $\pi = (V(H), V(G))$ é uma bipartição equilibrada de $H \oplus G$. O procedimento de obtenção de um grafo $H \oplus G$ a partir de G designa-se por (κ, τ) -extensão, ou (κ, τ) -extensão de tamanho n_2 , do grafo G . Esta construção é possível

quando se pode definir um família \mathcal{S} de n_1 subconjuntos de $V(H)$, designados por *blocos*, cada um dos quais com cardinalidade τ , e tal que cada vértice $v \in V(H)$ pertence a exatamente $p - \kappa$ blocos de \mathcal{S} , ou seja, $\mathcal{D} = (V(H), \mathcal{S})$ define um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$. Recorde-se que do Teorema 2.5, existe um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$ se e só se $\frac{n_1}{n_2} = \frac{p - \kappa}{\tau}$. Desta forma, a matriz de adjacência de $H \oplus G$ pode escrever-se na forma

$$A_{H \oplus G} = \begin{bmatrix} A_H & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

onde A_H e A_G são as matrizes de adjacência dos grafos H e G , respetivamente, e B é uma matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$, isto é, cada coluna de B corresponde a um vetor característico de um bloco.

A técnica de construção de grafos regulares através de (κ, τ) -extensões de um grafo regular G pode ser aplicada de forma recursiva, gerando uma sequência de grafos regulares. Considerando o grafo $(p - \tau)$ -regular $G_0 = G$ e o grafo κ -regular H , atrás descritos, constrói-se o conjunto \mathcal{F} de grafos $((p - \tau) + m\tau)$ -regulares, G_m , de ordem $mn_2 + n_1$, onde cada G_m se obtém por uma (κ, τ) -extensão de G_{m-1} , para $m \geq 1$,

$$\begin{array}{c} H \oplus \cdots \oplus H \oplus \underbrace{H \oplus G}_{G_1} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{G_2} \\ \vdots \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{G_m} \end{array}$$

Considere-se a relação binária \preceq , definida em \mathcal{F} por: $G \preceq G'$ se e só se G' se pode obter de G por uma sequência de zero ou mais (κ, τ) -extensões através do grafo κ -regular H de ordem $n_2 = |V(H)|$.

Observe-se que \preceq é uma relação de ordem parcial em \mathcal{F} pois verifica as seguintes propriedades:

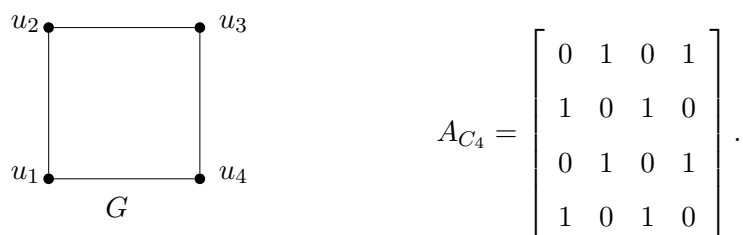
- Reflexividade: qualquer grafo $G \in \mathcal{F}$ se obtém de si próprio por uma sequência vazia de (κ, τ) -extensões;
- Antissimetria: dados dois grafos $G, G' \in \mathcal{F}$, onde G é um grafo r -regular de ordem n e G' um grafo r' -regular de ordem n' , se G' se obtém por uma sequência de m (κ, τ) -extensões de G e G se obtém por uma sequência de m' (κ, τ) -extensões de G' , então

$r' = r + m\tau$, e $r = r' + m'\tau$ e $n = m'n_2 + n'$. Destas igualdades obtém-se $0 = (m + m')\tau$ e, como $\tau > 0$ e $m, m' \geq 0$, vem que $m = m' = 0$, concluindo-se que $G \cong G'$.

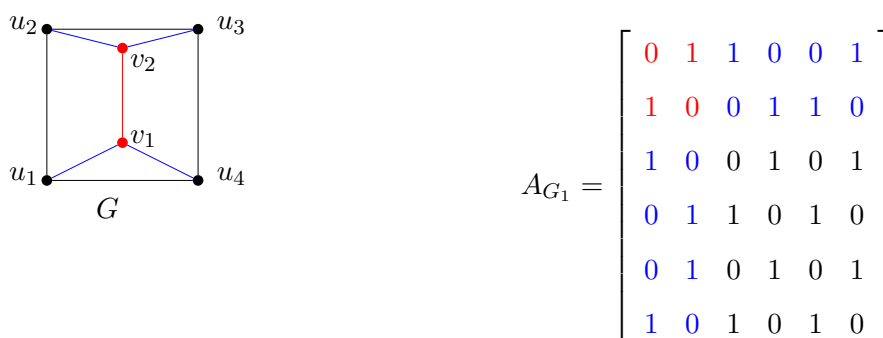
- Transitividade: dados três grafos G, G' e G'' de \mathcal{F} , se G' se obtém por uma sequência de m (κ, τ) -extensões de G e G'' se obtém por uma sequência de m' (κ, τ) -extensões de G' , então G'' obtém-se por uma sequência de $m + m'$ (κ, τ) -extensões formada pelas m (κ, τ) -extensões com as quais se obtém G' de G , seguidas das m' (κ, τ) -extensões que permitem obter G'' de G' .

Consequentemente, (\mathcal{F}, \preceq) é um conjunto parcialmente ordenado.

Exemplo 3.1. Considere-se o grafo 2-regular $G = C_4$, de ordem 4, e a respectiva matriz de adjacência A_{C_4} :



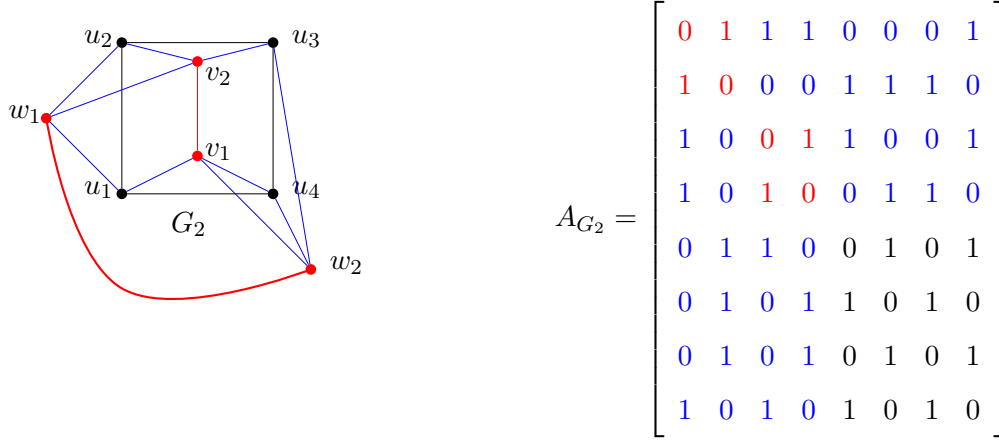
Através de uma $(1, 1)$ -extensão do grafo $G = C_4$ pelo grafo 1-regular $H = K_2$, obtém-se o grafo 3-regular $G_1 = K_2 \oplus C_4$ com matriz de adjacência A_{G_1} :



Note-se que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de incidência de um design $1 - (2, 1, 2)$.

Procedendo de forma análoga, obtém-se um grafo 4-regular $G_2 = K_2 \oplus G_1 = K_2 \oplus (K_2 \oplus C_4)$

com matriz de adjacência A_{G_2} :



onde $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de incidência de um design $1 - (2, 1, 3)$.

Aplicando o processo tantas vezes quantas se queira obtém-se uma cadeia de grafos regulares:
 $G = G_0 \preceq G_1 \preceq G_2 \preceq \dots$

3.1 Construção de grafos regulares com partições equilibradas

Considere-se o grafo p -regular $G_1 = H \oplus G_0$ obtido por uma (κ, τ) -extensão do grafo $(p - \tau)$ -regular G_0 , de ordem n_1 (com $\tau > 0$). Como foi referido no início deste capítulo, a construção do grafo G_1 é efetuada de forma a que o conjunto dos vértices do grafo κ -regular H seja um conjunto (κ, τ) -regular de G_1 , ou seja, a (κ, τ) -extensão de G_0 induz uma bipartição equilibrada $\pi = (V(H), V(G_0))$ no novo grafo $G_1 = H \oplus G_0$. Considere-se, agora, uma cadeia de grafos $G = G_0 \preceq G_1 \preceq G_2 \preceq \dots \preceq G_m \preceq G_{m+1}$ do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{F}, \preceq) onde, para $i = 0, 1, \dots, m$, G_{i+1} é um grafo $(p+i\tau)$ -regular, de ordem $(i+1)n_2+n_1$, obtido por uma (κ, τ) -extensão do grafo G_i através do grafo H , onde $V(H)$ é um conjunto (κ, τ) -regular de G_{i+1} . De forma análoga a (3.1), a matriz de adjacência de cada grafo $G_{i+1} = H \oplus G_i$, com

$i = 0, \dots, m$, escreve-se na forma

$$A_{G_{i+1}} = \begin{bmatrix} A_H & B_i \\ B_i^T & A_{G_i} \end{bmatrix}.$$

Seja $\pi_{m+1} = (W_{m+1}, W_m, \dots, W_0)$ uma partição de $V(G_{m+1})$, onde $W_0 = V(G_0)$ e $G_{m+1}[W_j] \cong H$. Se na construção recursiva dos grafos G_1, G_2, \dots, G_{m+1} cada grafo G_j ($j = 1, 2, \dots, m+1$) mantém como conjuntos (κ, τ) -regulares os subconjuntos de vértices W_1, \dots, W_{j-1} acrescentados nas $j-1$ (κ, τ) -extensões anteriores, então π_{m+1} é uma $(m+2)$ -partição equilibrada de $V(G_{m+1})$. Neste caso diz-se que o grafo G_{m+1} é obtido de G_m por uma (κ, τ) -extensão que induz uma $(m+2)$ -partição equilibrada. Mais formalmente, em cada (κ, τ) -extensão executam-se os seguintes passos:

- cada vértice $v \in W_{m+1}$ é adjacente a τ vértices de cada um dos m grafos H previamente introduzidos, ou seja, é adjacente a τ vértices de W_j ($j = 1, \dots, m$), e é adjacente a $p - \kappa$ vértices de $W_0 = V(G_0)$ e, no seu conjunto, $p - \kappa + m\tau$ vértices de G_m são adjacentes a v ,
- cada vértice em W_j tem τ vizinhos em W_{m+1} , $j = 1, \dots, m$,
- cada vértice em $W_0 = V(G_0)$ tem τ vizinhos em W_{m+1} .

Desta forma a partir de um grafo $(p - \tau + m\tau)$ -regular, G_m , obtém-se um grafo $(p + m\tau)$ -regular, G_{m+1} , com W_{m+1} como conjunto (κ, τ) -regular.

Proposição 3.2. *Sejam G um grafo $(p - \tau)$ -regular e H um grafo κ -regular de ordem n_2 . Se $G_{m+1} \in \mathcal{F}$ se obtém de $G_m \in \mathcal{F}$ por uma (κ, τ) -extensão que induz uma $(m+2)$ -partição equilibrada, então $A_{G_{m+1}} = \begin{bmatrix} A_H & B_m \\ B_m^T & A_{G_m} \end{bmatrix}$ onde B_m é a matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa + m\tau)$ que admite a seguinte partição em $m+1$ submatrizes $B_m^{(j)}$, com $j = 0, \dots, m$, tais que*

$$B_m = \begin{bmatrix} B_m^{(m)} & B_m^{(m-1)} & \dots & B_m^{(1)} & B_m^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

As matrizes $B_m^{(j)}$, com $j = 1, \dots, m$, são matrizes de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, \tau)$ e a matriz $B_m^{(0)}$ é a matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$. Nestas condições,

a matriz de adjacência de $A_{G_{m+1}}$ tem a forma

$$A_{G_{m+1}} = \begin{bmatrix} A_H & B_m^{(m)} & \cdots & B_m^{(1)} & B_m^{(0)} \\ B_m^{(m)T} & A_H & \cdots & B_{m-1}^{(1)} & B_{m-1}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_m^{(1)T} & B_{m-1}^{(1)T} & \cdots & A_H & B_0^{(0)} \\ B_m^{(0)T} & B_{m-1}^{(0)T} & \cdots & B_0^{(0)T} & A_{G_0} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

onde $B_i^{(j)}$, com $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, i$, é uma matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, \tau)$ e $B_i^{(0)}$ é uma matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$, com $i = 0, 1, \dots, m$.

Demonstração. Considere-se a construção atrás descrita para uma cadeia de grafos $G_0 = G \preceq G_1 \preceq \cdots \preceq G_{m+1}$, do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{F}, \preceq) . A submatriz B_m de $A_{G_{m+1}}$ escreve-se na forma $B_m = [B_m^{(m)} \ \cdots \ B_m^{(1)} \ B_m^{(0)}]$, onde

- $B_m^{(j)}$ é a submatriz de $A_{G_{m+1}}$ cujas linhas são indexadas pelos vértices de H e as colunas pelos vértices de W_j ; trata-se da matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, \tau)$, para $j = 1, \dots, m$.
- $B_m^{(0)}$ é a submatriz de $A_{G_{m+1}}$ cujas linhas são indexadas pelos vértices de H e as colunas pelos vértices de $W_0 = V(G)$; trata-se da matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$.

Os blocos destes designs $1 - (n_2, \tau, \tau)$ e $1 - (n_2, \tau, p - k)$ são os conjuntos de vizinhos de todos os $v \in W_j$ em $W_{m+1} = H$, $j = 0, 1, \dots, m$.

A segunda parte da proposição prova-se por indução sobre $m \geq 0$. Se $m = 0$, a matriz de adjacência do grafo G_1 que se obtém por uma (κ, τ) -extensão é $A_{G_1} = \begin{bmatrix} A_H & B_0 \\ B_0^T & A_{G_0} \end{bmatrix}$, onde $B_0 = B_0^{(0)}$ é a matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$. Para $m \geq 0$, a matriz de adjacência de $G_{m+1} \in \mathcal{F}$ pode escrever-se na forma

$$A_{G_{m+1}} = \begin{bmatrix} A_H & B_m \\ B_m^T & A_{G_m} \end{bmatrix}, \quad \text{com } m = 0, 1, \dots, \quad (3.4)$$

onde B_m é a matriz de incidência de um design $1-(n_2, \tau, p - \kappa + m\tau)$. Consequentemente, por indução,

$$A_{G_{m+1}} = \left[\begin{array}{c|cccc} A_H & & & & \\ \hline & A_H & \cdots & B_{m-1}^{(1)} & B_{m-1}^{(0)} \\ B_m^T & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & B_{m-1}^{(1)T} & \cdots & A_H & B_0^{(0)} \\ & B_{m-1}^{(0)T} & \cdots & B_0^{(0)T} & A_{G_0} \end{array} \right],$$

e (3.3) obtém-se de (3.2). \square

3.2 Extensão por um grafo 0-regular

No caso particular em que o grafo H é 0-regular (ou seja, $\kappa = 0$) a matriz de adjacência de $G' = H \oplus G$ é

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} 0_{n_2} & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix}$$

onde 0_{n_2} é a matriz de adjacência do grafo 0-regular H de ordem n_2 , A_G é a matriz de adjacência do grafo $(p - \tau)$ -regular G de ordem n_1 e B é a matriz de incidência de um design $1-(n_2, \tau, p)$. A proposição seguinte mostra que duas matrizes de incidência de designs $1-(n_2, \tau, p)$ que diferem apenas numa permutação de linhas produzem, através de uma $(0, \tau)$ -extensão, grafos $H \oplus G$ isomorfos.

Proposição 3.3. *Seja G um grafo $(p - \tau)$ -regular de ordem n_1 , com $\tau > 0$, e H um grafo 0-regular de ordem n_2 . Sejam B_1 e B_2 matrizes de incidência de 1-designs com parâmetros (n_2, τ, p) que diferem entre si apenas por uma permutação nas linhas. Então os grafos G_1 e G_2 com matrizes de adjacência*

$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0_{n_2} & B_1 \\ B_1^T & G \end{bmatrix} \text{ e } A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0_{n_2} & B_2 \\ B_2^T & G \end{bmatrix},$$

são isomorfos.

A permutação das linhas da matriz B_i , com $i = 1, 2$, corresponde a uma troca de linhas e correspondente troca de colunas na matriz de adjacência dos grafos obtidos por $(0, \tau)$ -extensões A_{G_1} e A_{G_2} .

Exemplo 3.4. Seja G um grafo de ordem 6 e regularidade 2, com matriz de adjacência

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

H um grafo 0-regular de ordem 3 e $G' = H \oplus G$ um grafo que se obtém por uma $(0, 2)$ -extensão de G pelo grafo H . Assim, a matriz de adjacência

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} 0_3 & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix},$$

onde B é uma matriz de incidência de um design $1 - (3, 2, 4)$.

Considerem-se duas matrizes de incidência do design $1 - (3, 2, 4)$ que diferem entre si apenas por uma permutação sobre as linhas,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, $B_2 = PB_1$ com matriz de permutação $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Os grafos $G_1 = H \oplus G$ e $G_2 = H' \oplus G$, representados na Figura 3.1, tais que $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $V(H) = \{1, 2, 3\}$ e $V(H') = \{1', 2', 3'\}$ com matrizes de adjacência $A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^T & A_G \end{bmatrix}$ e $A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & A_G \end{bmatrix}$ são isomorfos.

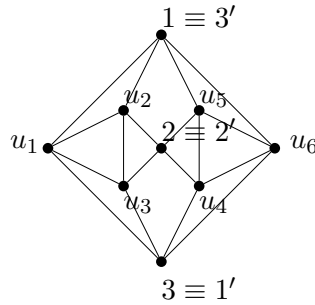


Figura 3.1: Grafos isomorfos obtidos por uma $(0, 2)$ -extensão.

3.3 Alguns vetores próprios associados ao valor próprio $\kappa - \tau$

Seja $G' = H \oplus G$ um grafo p -regular obtido pela (κ, τ) -extensão do grafo G de ordem n_1 . Da Proposição 2.2 sabe-se que, como o grafo G é $(p - \tau)$ -regular e o grafo H é κ -regular de ordem n_2 , $\lambda_1(G) = p - \tau \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_{n_1}(G)$ e $\lambda_1(H) = \kappa \geq \lambda_2(H) \geq \dots \geq \lambda_{n_2}(H)$.

Proposição 3.5. [Neu82] *Se G é um grafo p -regular de ordem n com um conjunto (κ, τ) -regular S , então $\kappa - \tau \in \sigma(A_G)$ e $v = \begin{bmatrix} (p - \kappa)\mathbf{j}_1 \\ -\tau\mathbf{j}_0 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio associado a $\kappa - \tau$, com \mathbf{j}_1 e \mathbf{j}_0 vetores com, respetivamente, $|S|$ e $n - |S|$ componentes iguais a um.*

A técnica de produzir grafos regulares por (κ, τ) -extensões introduz em cada grafo G_{m+1} ($m \in \mathbb{N}_0$) um conjunto (κ, τ) -regular, pelo que, da Proposição 3.5, $(\kappa - \tau)$ é valor próprio de cada grafo G_{m+1} do qual se conhece o vetor próprio associado.

Proposição 3.6. [CDS80a] *Seja G um grafo e H um subgrafo induzido de G tal que $A_G = \begin{bmatrix} X & B \\ B^T & A_H \end{bmatrix}$. Se $\lambda_{\min}(G) = \lambda_{\min}(H)$ e x é um vetor próprio de A_H associado a $\lambda_{\min}(H)$ então $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A_G .*

Como G_m é subgrafo induzido de G_{m+1} e $\lambda_{\min}(G_{m+1}) = \lambda_{\min}(G_m) = \kappa - \tau$, então para construir um vetor próprio associado ao valor próprio $\kappa - \tau$ do grafo G_{m+1} , basta acrescentar zeros ao vetor próprio do grafo G_m descrito na Proposição 3.5.

Considere-se a matriz de adjacência do grafo G_{m+1} que se obtém de G_m por uma (κ, τ) -extensão que induz uma $(m+2)$ -partição equilibrada descrita em (3.3). Desta forma, a matriz quociente é

$$A_{G_{m+1}/\pi} = \begin{bmatrix} \kappa & \tau & \cdots & \tau & \tau & p - \kappa \\ \tau & \kappa & \cdots & \tau & \tau & p - \kappa \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau & \tau & \cdots & \kappa & \tau & p - \kappa \\ \tau & \tau & \cdots & \tau & \kappa & p - \kappa \\ \tau & \tau & \cdots & \tau & \tau & p - \tau \end{bmatrix}.$$

Observe-se que, subtraindo a última linha a cada uma das restantes $m+1$ linhas da matriz $A_{G_{m+1}/\pi} - \lambda I$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \kappa - \tau - \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\kappa + \tau + \lambda \\ 0 & \kappa - \tau - \lambda & \cdots & 0 & 0 & -\kappa + \tau + \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa - \tau - \lambda & 0 & -\kappa + \tau + \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa - \tau - \lambda & -\kappa + \tau + \lambda \\ \tau & \tau & \cdots & \tau & \tau & p - \tau - \lambda \end{bmatrix}$$

e, adicionando à última coluna a soma das restantes $m+1$ colunas, vem que

$$\begin{bmatrix} \kappa - \tau & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa - \tau & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa - \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \kappa - \tau & 0 \\ \tau & \tau & \cdots & \tau & \tau & p - \tau + (m+1)\tau - \lambda \end{bmatrix}.$$

Como esta matriz é semelhante à matriz $A_{G_{m+1}/\pi} - \lambda I$, então têm o mesmo determinante, obtendo-se $\sigma(A_{G_{m+1}/\pi}) = \{(\kappa - \tau)^{[m+1]}, p + m\tau\}$. Além disso, pela Proposição 2.6,

$$\sigma(A_{G_{m+1}/\pi}) \subseteq \sigma(A_{G_{m+1}}).$$

Como consequência tem-se o seguinte corolário.

Corolário 3.7. *Se G_{m+1} , $m > 0$, é um grafo regular obtido por $m + 1$ (κ, τ) -extensões que induzem uma $(m + 2)$ -partição equilibrada a partir de G_0 , então $\kappa - \tau$ é valor próprio de G_{m+1} com multiplicidade não inferior a $m + 1$.*

Das Proposições 3.5 e 3.6 conclui-se que os $m + 1$ vetores

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (p + m\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ \vdots \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_1} \end{bmatrix}}_{u_{m+1,m}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0\mathbf{j}_{n_2} \\ (p + \tau(m-1) - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ \vdots \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_1} \end{bmatrix}}_{u_{m+1,m-1}}, \quad \dots, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0\mathbf{j}_{n_2} \\ 0\mathbf{j}_{n_2} \\ 0\mathbf{j}_{n_2} \\ \vdots \\ 0\mathbf{j}_{n_2} \\ (p - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_1} \end{bmatrix}}_{u_{m+1,0}}$$

são linearmente independentes e pertencem a $\mathcal{E}_{G_{m+1}}(\kappa - \tau)$.

A seguinte proposição estabelece que os grafos regulares G_{m+1} que se obtêm por uma sequência de $m + 1$ (κ, τ) -extensões e têm menor valor próprio igual $\kappa - \tau$, admitem uma $(m + 2)$ -partição equilibrada.

Proposição 3.8. *Seja G_{m+1} um grafo $(p + \tau m)$ -regular obtido a partir do grafo G_0 $(p - \tau)$ -regular de ordem n_1 por uma sequência de $m + 1$ (κ, τ) -extensões, com $m \geq 0$. Se $\lambda_{\min}(G_{m+1}) = \kappa - \tau$, então existe uma $(m + 2)$ -partição equilibrada $\pi = (W_{m+1}, W_m, \dots, W_0)$ de $V(G_{m+1})$, onde $W_{i+1} = V(G_{i+1}) \setminus V(G_i)$ para $0 \leq i \leq m$, $W_0 = V(G_0)$ e o subgrafo induzido $G_{m+1}[W_i]$, $i = 1, \dots, m + 1$, é isomorfo ao grafo κ -regular H , de ordem n_2 .*

Demonstração. Considerem-se os grafos G_0 , H e G_{m+1} , e os conjuntos W_i ($0 \leq i \leq m + 1$) que satisfazem as condições da proposição. Seja $\pi = (W_{m+1}, W_m, \dots, W_1, W_0)$ uma partição de $V(G_{m+1})$. Pretende-se provar que π é uma partição equilibrada de G_{m+1} .

Como G_0 é $(p - \tau)$ -regular e H é κ -regular então:

- (i) cada vértice de W_0 tem $p - \tau$ vizinhos em W_0 ;
- (ii) cada vértice de W_i tem κ vizinhos em W_i , $1 \leq i \leq m + 1$.

Por outro lado, do processo de construção de uma (κ, τ) -extensão, cada W_j é um conjunto (κ, τ) -regular de G_j ($1 \leq j \leq m + 1$) logo,

- (iii) cada vértice de W_i tem τ vizinhos em W_j , para $0 \leq i < j \leq m + 1$.

Para mostrar que π é uma partição equilibrada de G_{m+1} falta concluir que o número de vizinhos que um vértice de W_j tem em W_i é constante, com $0 \leq i < j \leq m + 1$.

De (3.4) concluiu-se que a matriz de adjacência $A_{G_{m+1}}$ pode ser escrita na forma

$$A_{G_{m+1}} = \begin{bmatrix} A_H & B_m \\ B_m^T & A_{G_m} \end{bmatrix}$$

onde B_m é a matriz de incidência de um design $1-(n_2, \tau, m\tau + p - \kappa)$. A matriz B_m admite a seguinte partição em blocos

$$B_m = [B_m^{(m)} \ B_m^{(m-1)} \ \dots \ B_m^{(m-q+1)} \ B_m^{(m-q)\downarrow}], \quad (3.5)$$

com $0 \leq q \leq m$, onde as matrizes $B_m^{(j)}$ ($m - q + 1 \leq j \leq m$) são matrizes de incidência de designs $1-(n_2, \tau, \tau)$ que descrevem as adjacências entre os vértices de W_{m+1} e os vértices de W_j e $B_m^{(m-q)\downarrow} = [B_m^{(m-q)} \ \dots \ B_m^{(0)}]$ é a matriz de incidência de um design $1-(n_2, \tau, (m-q)\tau + p - \kappa)$ que descreve as adjacências entre os vértices de W_{m+1} e os vértices de $\bigcup_{i=0}^{m-q} W_i$.

Prove-se, agora, que cada vértice de W_{m+1} tem τ vizinhos em W_j ($1 \leq j \leq m$) e $p - \kappa$ vizinhos em W_0 , ou seja, $B_m^{(j)} \mathbf{j}_{n_2} = \tau \mathbf{j}_{n_2}$ ($1 \leq j \leq m$) e $B_m^{(0)} \mathbf{j}_{n_2} = (p - \kappa) \mathbf{j}_{n_2}$, respectivamente.

Pela Proposição 3.5 sabe-se que $\kappa - \tau$ é valor próprio de G_i e $\begin{bmatrix} (p + (i - 1)\tau - \kappa) \mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau \mathbf{j}_{n_2(i-1)+n_1} \end{bmatrix}$ é um vetor próprio associado, para todo o $1 \leq i \leq m + 1$.

Se $\lambda_{\min}(G_{i+1}) = \kappa - \tau$, como G_i é um subgrafo induzido de G_{i+1} (com $1 \leq i \leq m$), pela

Proposição 3.6, o conjunto de vetores

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} (p + m\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ \vdots \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_1} \end{bmatrix}}_{u_{m+1,m}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0\mathbf{j}_{n_2} \\ (p + \tau(m-1) - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ \vdots \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_1} \end{bmatrix}}_{u_{m+1,m-1}}, \dots, \underbrace{\begin{bmatrix} 0\mathbf{j}_{n_2} \\ 0\mathbf{j}_{n_2} \\ 0\mathbf{j}_{n_2} \\ \vdots \\ 0\mathbf{j}_{n_2} \\ (p - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{n_1} \end{bmatrix}}_{u_{m+1,0}} \right\}$$

é um subconjunto de vetores próprios do subespaço próprio $\mathcal{E}_{G_{m+1}}(\kappa - \tau)$, para $m \geq 1$.

De $A_{G_{m+1}}u_{m+1,m-q} = -2u_{m+1,m-q}$, com $q = 1, \dots, m$, obtém-se

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A_H & B_m^{(m)} & \dots & B_m^{(m-q+1)} & B_m^q \\ \hline B_m^T & & & A_{G_m} & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0\mathbf{j}_{qn_2} \\ (p + (m-q)\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{(m-q)n_2+n_1} \end{bmatrix} = \kappa - \tau \begin{bmatrix} 0\mathbf{j}_{qn_2} \\ (p + (m-q)\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ -\tau\mathbf{j}_{(m-q)n_2+n_1} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Tendo em conta a primeira linha de blocos da matriz do sistema (3.6), desta igualdade deduz-se

$$(p + (m-q)\tau - \kappa)B_m^{(m-q+1)}\mathbf{j}_{n_2} - \tau B_m^{(m-q)\downarrow}\mathbf{j}_{(m-q)n_2+n_1} = 0\mathbf{j}_{qn_2}. \quad (3.7)$$

Como B_m é uma matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p + m\tau - \kappa)$, obtém-se

$$B_m\mathbf{j}_{mn_2+n_1} = (p + m\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2},$$

ou seja, de (3.5), para $q = 1, \dots, m$, vem

$$B_m^{(m)}\mathbf{j}_{n_2} + \dots + B_m^{(m-q+2)}\mathbf{j}_{n_2} + B_m^{(m-q+1)}\mathbf{j}_{n_2} + B_m^{(m-q)\downarrow}\mathbf{j}_{(m-q)n_2+n_1} = (p + m\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2}. \quad (3.8)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade (3.8) por τ e procedendo à substituição determinada pela igualdade (3.7), obtém-se

$$(p + (m-q)\tau - \kappa)B_m^{(m-q+1)}\mathbf{j}_{n_2} + \sum_{i=0}^{q-1} \tau B_m^{(m-i)}\mathbf{j}_{n_2} = \tau(p + m\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2}, \quad q = 1, 2, \dots, m. \quad (3.9)$$

Considerando $q = 1$ e tendo em conta (3.9), obtém-se

$$\begin{aligned} (p + (m-1)\tau - \kappa)B_m^{(m)}\mathbf{j}_{n_2} + \tau B_m^{(m)}\mathbf{j}_{n_2} &= \tau(p + m\tau - \kappa)\mathbf{j}_{n_2} \\ \Leftrightarrow B_m^{(m)}\mathbf{j}_{n_2} &= \tau\mathbf{j}_{n_2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Da última igualdade conclui-se que cada vértice de W_{m+1} tem τ vizinhos em W_m .

Considerando $q = 2$ e tendo em conta (3.9), obtém-se

$$(p + (m - 2)\tau - \kappa) B_m^{(m-1)} \mathbf{j}_{n_2} + (\tau B_m^{(m)} \mathbf{j}_{n_2} + \tau B_m^{(m-1)} \mathbf{j}_{n_2}) = \tau(p + m\tau - \kappa) \mathbf{j}_{n_2}.$$

Utilizando à igualdade (3.10), para $q = 1$ vem que $B_m^{(m-1)} \mathbf{j}_{n_2} = \tau \mathbf{j}_{n_2}$, concluindo-se que cada vértice de W_{m+1} tem τ vizinhos em W_{m-1} .

Procedendo de forma análoga para $q = 3, \dots, m$, conclui-se que

(iv) cada vértice de W_{m+1} tem τ vizinhos em W_j , $1 \leq j \leq m$.

Como G_{m+1} é $(p + m\tau)$ -regular, de (i) e (iv) vem que

(v) cada vértice de W_{m+1} tem $(p + m\tau) - \kappa - m\tau = p - \kappa$ vizinhos em W_0 .

Falta provar que, para $1 \leq i < j \leq m$, W_j tem τ vizinhos em W_i e $p - \kappa$ vizinhos em W_0 .

Note-se que G_1 é p -regular e como G_0 é $(p - \tau)$ -regular e W_1 é um conjunto (κ, τ) -regular de G_1 , então cada vértice de W_1 tem $p - \kappa$ vizinhos em $W_0 = V(G_0)$.

Para $m = 1$, sabendo que G_2 é $(p + \tau)$ -regular, $G_2[W_2] \cong H$ é κ -regular e, de (iv), cada vértice de W_2 tem τ vizinhos em W_1 , então W_2 tem $(p + \tau) - \kappa - \tau = p - \kappa$ vizinhos em W_0 .

No caso geral, para $0 \leq t \leq m + 1$, G_{t+1} é $(p + t\tau)$ -regular e $G[W_{t+1}]$ é κ -regular. De (iv) vem que

(iv') cada vértice de W_{t+1} tem τ vizinhos em W_j ($1 \leq j < t$)

e, de (v),

(v') cada vértice de W_{t+1} tem $(p + t\tau) - \kappa - t\tau = p - \kappa$ vizinhos em W_0 .

De (i), (ii), (iii), (iv'), (v') conclui-se que $\pi = (W_{m+1}, W_m, \dots, W_1, W_0)$ é uma $(m+2)$ -partição

equilibrada de G_{m+1} com matriz quociente $A_{G_{m+1}/\pi} = \begin{bmatrix} \kappa & \tau & \cdots & \tau & p - \kappa \\ \tau & \kappa & \cdots & \tau & p - \kappa \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau & \tau & \cdots & \kappa & p - \kappa \\ \tau & \tau & \cdots & \tau & p - \tau \end{bmatrix}$. □

Capítulo 4

Grafos com menor valor próprio não inferior a -2

O *grafo linha* $L(H)$ de um grafo H é o grafo cujos vértices são as arestas de H e dois vértices de $L(H)$ são adjacentes se as arestas que lhes correspondem em H têm exatamente um vértice em comum. O *grafo cocktail party* $CP(n)$ é o único grafo regular com $2n$ vértices e grau de regularidade $2n - 2$, que se obtém de K_{2n} eliminando n arestas mutuamente não adjacentes.

O interesse no estudo de grafos com menor valor próprio não inferior a -2 surge da observação da seguinte propriedade.

Proposição 4.1. [Big74] *Seja H um grafo. Se λ é um valor próprio do grafo linha $L(H)$, então $\lambda \geq -2$.*

Esta propriedade dos grafos linha, deve-se ao facto de se ter

$$A_{L(H)} + 2I = M_H^T M_H, \quad (4.1)$$

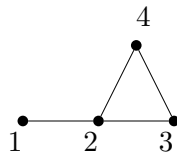
onde M_H é a matriz de incidência aresta vértice do grafo H e I é a matriz identidade de ordem igual à ordem de H . No entanto, esta propriedade não é suficiente para caracterizar os grafos linha, uma vez que é partilhada pelos grafos linha generalizados e por um conjunto finito de grafos, que se designam por grafos excepcionais.

Diz-se que uma *pétala* é adicionada a um grafo quando se acrescenta um vértice e duas arestas

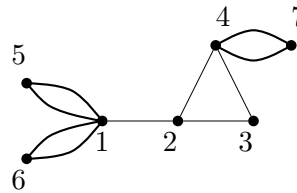
a unir este vértice a um vértice preexistente. Um *blossom* B_k , consiste em k ($k \geq 0$) pétalas adicionadas a um vértice e , desta forma, B_0 é o grafo trivial K_1 . Um grafo com *blossoms* em cada vértice, eventualmente vazios, diz-se um *B-grafo*. A cada par de arestas de uma pétala de um *B-grafo* \hat{H} , correspondem dois vértices não adjacentes do grafo linha $L(\hat{H})$, conseqüentemente $L(B_k) = CP(k)$. Se $G = L(\hat{H})$ então diz-se que o multigrafo \hat{H} é o *grafo raiz* de G .

Seja H um grafo com $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e sejam $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$. O *grafo linha generalizado* $G = L(H; a_1, a_2, \dots, a_n)$ definido por Hoffman [Hof70], é o grafo $L(\hat{H})$, onde \hat{H} é o *B-grafo* $H(a_1, \dots, a_n)$ que se obtém de H adicionando a_i pétalas ao vértice v_i ($i = 1, \dots, n$). Para mais detalhes ver [CRS04].

Exemplo 4.2. Consideremos os grafos H e \hat{H}

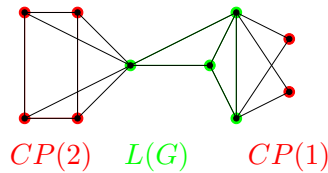


Grafo H



Grafo $\hat{H} = H(2, 0, 0, 1)$

Procedendo à construção anteriormente referida obtém-se o grafo linha generalizado $L(H; 2, 0, 0, 1)$



Um grafo conexo com menor valor próprio maior ou igual a -2 , que não é um grafo linha generalizado, diz-se um *grafo excepcional*.

Os grafos excepcionais surgem pela primeira vez nos anos 1960s quando Hoffman [Hof60] investiga a caracterização espectral de algumas classes de grafos linha.

Nas secções seguintes faz-se uma breve descrição das três técnicas anteriormente utilizadas na construção dos grafos com menor valor próprio não inferior a -2 . Estas baseiam-se nos subgrafos proibidos, sistemas de raízes e complementos estrela. Na secção relativa à técnica que aplica os sistemas de raízes introduz-se a descrição dos grafos regulares excepcionais [BCS76], como resposta à seguinte questão colocada por Hoffman em 1968: De entre os grafos regulares conexos, cuja matriz de adjacência tem menor valor próprio igual a -2 , quais é que não são grafos linha nem grafos cocktail-party?

4.1 Técnica que aplica os subgrafos proibidos

Observe-se que o grafo H é proibido para o grafo G se G não admite nenhum subgrafo induzido isomorfo a H . Em [Bei70] é apresentada uma caracterização dos grafos linha identificando nove subgrafos proibidos.

Teorema 4.3. [Bei70] *Um grafo é grafo linha se e só se não contém como subgrafo induzido nenhum dos nove grafos da Figura 4.1.*

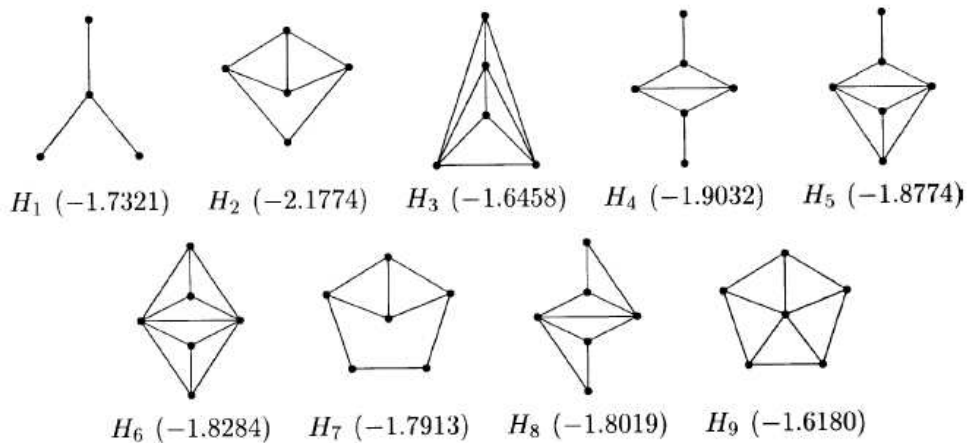


Figura 4.1: Subgrafos proibidos dos grafos linha [Cve02]

Cvetković et al. [CDS80b, CDS81] estudaram extensivamente os grafos linha generalizados, introduzidos por Hoffman [Hof70], caracterizando-os por uma coleção de 31 subgrafos proibidos. De forma independente, e também em 1980, Rao et al. [RSV81] chegam ao mesmo resultado.

Teorema 4.4. [CDS80b, CDS81, RSV81] Um grafo é grafo linha generalizado se e só se não contém como subgrafo induzido nenhum dos 31 grafos da Figura 4.2.

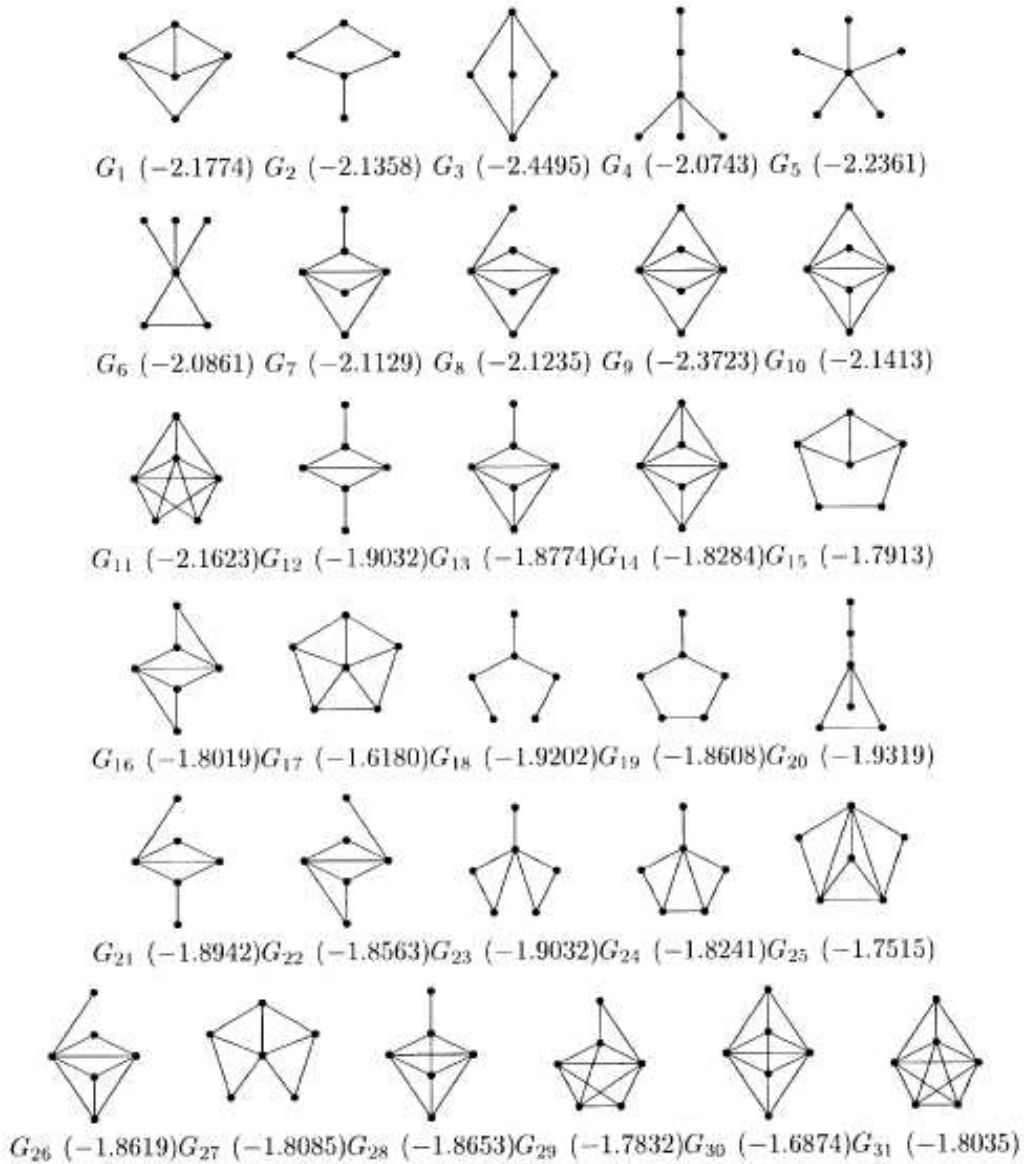


Figura 4.2: Subgrafos proibidos dos grafos linha generalizados [Cve02].

Nas Figuras 4.1 e 4.2 entre parêntesis encontra-se o menor valor próprio de cada grafo.

No exemplo seguinte descreve-se uma possível construção do grafo de Petersen usando a técnica de aplicação dos subgrafos proibidos.

Exemplo 4.5. [CRS04] Suponha que se pretende construir um grafo 3-regular excepcional, G . Como G é excepcional contém algum dos nove subgrafos proibidos da Figura 4.1. Como é um grafo 3-regular apenas podem ocorrer, como subgrafos induzidos, H_1 , H_2 , H_4 ou H_7 . Além disso, o menor valor próprio de G é não inferior a -2 , logo, do Teorema do Entrelaçamento (ver, por exemplo, [CDS95]) nenhum dos grafos H_2 , da Figura 4.1, e G_i , ($1 \leq i \leq 11$), da Figura 4.2, pode ser subgrafo induzido de G , pois o seu menor valor próprio é inferior a -2 . Considere-se que o grafo 3-regular excepcional G pretendido contém o subgrafo induzido H_1 da Figura 4.1. Como os grafos G_3 e G_2 (Figura 4.2) não são subgrafos induzidos de G , nenhum vértice de $V(G) \setminus V(H_1)$ pode ser adjacente aos três vértices ou a dois dos vértices de grau 1 de H_1 . Desta forma, o grafo da Figura 4.3 é um subgrafo do grafo 3-regular excepcional G pretendido, que se obtém acrescentando arestas entre os vértices de grau 1 (ver Secção 2.4 de [CRS04]).

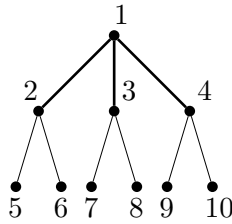
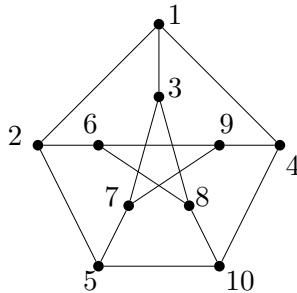


Figura 4.3: Subgrafo induzido de um grafo excepcional.

Por exemplo, ao acrescentar arestas a ligar os vértices 5 a 7, 5 a 10, 6 a 8, 6 a 9, 7 a 9 e 8 a 10, obtém-se o grafo de Petersen seguinte:



4.2 Técnica que aplica os sistemas de raízes

Nesta secção introduz-se a descrição da construção dos grafos regulares excepcionais [BCS76] com a qual se deu resposta à questão colocada por Hoffman em 1968 [Hof68] sobre a caracterização dos grafos com menor valor próprio não inferior a -2 que não são grafos linha generalizados.

Seja G um grafo de ordem n com matriz de adjacência A_G e tal que $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$. A matriz A_G é simétrica e, portanto, ortogonalmente diagonalizável. Logo, existe uma matriz ortogonal U ($U^T = U^{-1}$) tal que, sendo D a matriz diagonal dos valores próprios de A_G e as colunas de U os respectivos vetores próprios, então

$$\begin{aligned} U^T A_G U = D &\Leftrightarrow U^T A_G U + 2I_n = D + 2I_n \Leftrightarrow U^T A_G U + 2U^T U = D + 2I_n \\ &\Leftrightarrow U^T (A_G + 2I_n) U = D + 2I_n. \end{aligned}$$

Consequentemente, como $\lambda_{\min}(A_G) \geq -2$, a matriz $A_G + 2I_n$ é semidefinida positiva. Supondo que a multiplicidade do valor próprio -2 é $n - r$, então $A_G + 2I_n$ tem característica r . Desta forma, $A_G + 2I_n = Q^T Q$, onde Q é uma matriz de tipo $r \times n$, com entradas reais e característica r . Se $Q = (q_1 | \cdots | q_n)$, então cada coluna $q_i \in \mathbb{R}^r$ e a entrada (i, j) de $A_G + 2I_n$ é o produto interno $q_i^T q_j$. A matriz $Q^T Q = 2I_n + A_G$ diz-se *matriz de Gram* (matriz dos produtos internos) com n vetores q_1, \dots, q_n que geram o espaço Euclidiano \mathbb{R}^r . Note-se que $\|q_i\| = (q_i^T q_i)^{1/2} = \sqrt{2}$ e, para $i \neq j$, $q_i^T q_j = 1$, se os vértices i e j são adjacentes, e $q_i^T q_j = 0$, caso contrário.

Assim, se l_i é uma linha (subespaço vetorial de dimensão 1) em \mathbb{R}^r gerada pelo vetor diretor q_i , o ângulo formado entre as linhas l_i e l_j ($i \neq j$) é 60° , se os vértices i e j são adjacentes, e 90° , caso contrário.

Os conjuntos das linhas do espaço Euclidiano que passam na origem e formam ângulos de 60° e 90° entre si dizem-se *sistemas de linhas*. Para um dado r , qualquer sistema de linhas em \mathbb{R}^r é finito. Um sistema de linhas L é *decomponível* se pode ser partido em dois subconjuntos L_1 e L_2 tal que toda a linha em L_1 é ortogonal a toda a linha em L_2 . Caso contrário diz-se que L é *indecomponível*. Observe-se que, de acordo com a definição, o sistema $\{l_1, \dots, l_n\}$ é indecomponível se e só se o grafo G é conexo.

Uma *estrela* é um conjunto de três linhas contidas no mesmo plano que formam, duas a duas, um ângulo de 60° . Um sistema de linhas L diz-se *estrela-fechado* se para quaisquer duas linhas $l, l' \in L$, a terceira linha da estrela, determinada por l e l' , também pertencer a L .

Teorema 4.6. [CRS10] *Qualquer sistema de linhas em \mathbb{R}^r está contido num sistema de linhas estrela-fechado de \mathbb{R}^r .*

Para qualquer linha l no sistema de linhas L com n elementos, existem dois vetores colineares de norma $\sqrt{2}$ contidos em l . O conjunto com os $2n$ vetores contidos nas n linhas do sistema L diz-se um *sistema de raízes*. O termo sistema de raízes tem origem nas álgebras de Lie. O sistema de linhas determinado pelo sistema de raízes R escreve-se \bar{R} .

Cameron et al. [CGSS76] introduzem os sistemas de raízes no estudo dos grafos com menor valor próprio -2 , identificando os sistemas de linhas indecomponíveis e estrela-fechados seguintes.

Teorema 4.7. [CRS10] *A menos de uma transformação ortogonal, os únicos sistemas de linhas estrela-fechados indecomponíveis são $\bar{A}_n, \bar{D}_n, \bar{E}_6, \bar{E}_7$ e \bar{E}_8 , onde:*

- (i) $A_n = \{e_i - e_j : e_i, e_j \in \mathbb{R}^{n+1}, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n+1\}$ para $n = 2, 3, \dots$;
- (ii) $D_n = \{\pm e_i \pm e_j : e_i, e_j \in \mathbb{R}^n, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$ para $n = 2, 3, \dots$;
- (iii) $E_8 = D_8 \cup \{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \epsilon_i e_i : \epsilon_i = \pm 1, \prod_{i=1}^8 \epsilon_i = 1\}$;
- (iv) $E_7 = \{u \in E_8 : u \text{ é ortogonal a um vetor fixo de } E_8\}$;
- (v) $E_6 = \{u \in E_8 : u \text{ é ortogonal a uma estrela fixa de } E_8\}$.

Observe-se que $A_{n-1} \subseteq D_n$ ($n = 2, 3, \dots$) e $|A_n| = n(n+1)$, $|D_n| = 2n(n-1)$, $|E_8| = 240$, $|E_7| = 126$ e $|E_6| = 72$.

Diz-se que um grafo G é *representado* no sistema de raízes R se a matriz de adjacência A_G verifica $A_G + 2I_n = Q^T Q$ onde as colunas de Q são vetores de R .

Através dos sistemas de raízes Cameron et al. [CGSS76] caracterizaram os grafos linha generalizados e os grafos excepcionais.

Teorema 4.8. [CGSS76] *Um grafo conexo tem menor valor próprio -2 se e só se pode ser representado no sistema de raízes D_n , para algum n , ou no sistema de raízes excepcional E_8 .*

Teorema 4.9. [CGSS76] *Um grafo pode ser representado em A_{n-1} se e só se for o grafo linha de um grafo bipartido.*

Teorema 4.10. [CGSS76] *Um grafo pode ser representado em D_n se e só se é um grafo linha generalizado.*

Corolário 4.11. [CGSS76] *Um grafo é excepcional se e só se não é grafo linha generalizado e pode ser representado no sistema de raízes E_8 .*

4.2.1 Os grafos regulares excepcionais

Seja $\mathcal{G}(-2)$ o conjunto dos grafos regulares conexos cuja matriz de adjacência tem menor valor próprio igual a -2 e que não são grafos linha nem grafos cocktail-party. Em [Hof68] Hoffman coloca o problema de identificar os elementos de $\mathcal{G}(-2)$. Cameron et al. [CGSS76] mostram que qualquer grafo de $\mathcal{G}(-2)$ tem no máximo 28 vértices e no máximo grau 16. Os grafos regulares excepcionais, 187 no total, são identificados em [BCS76] numa conjugação de raciocínio matemático com pesquisa por computador tendo por base os resultados dos sistemas de raízes apresentados [CGSS76].

Teorema 4.12. [CGSS76] *Se G é um grafo regular conexo com menor valor próprio igual a -2 , então verifica-se uma das seguintes condições:*

- (i) G é grafo linha;
- (ii) G é grafo cocktail party; ou
- (iii) G é um grafo excepcional com representação no sistema de raízes E_8

A proposição seguinte restringe bastante as possibilidades para G .

Proposição 4.13. [BCS76] *Se $G \in \mathcal{G}(-2)$, então existem 6, 7 ou 8 valores próprios de G distintos de -2 .*

Em [BCS76] é apresentada uma tabela com os 187 grafos regulares excepcionais.

Proposição 4.14. [CRS04] Se G é um grafo regular excepcional então existe um grafo H , com oito vértices, tal que G se obtém por *switching* do grafo linha de H . Se G tem ordem par, então cada componente de H verifica uma das seguintes condições:

- (i) um grafo em que todos os vértices têm grau par,
- (ii) um grafo em que todos os vértices têm grau ímpar ou
- (iii) um grafo bipartido onde todas as arestas do grafo unem um vértice de grau ímpar a um vértice de grau par.

Seja G um grafo cujo conjunto dos vértices é $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ e o conjunto das arestas é $E(G)$. Se $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^n então o grafo linha de G , $L(G)$, é representado pelo conjunto $\{e_i + e_j : ij \in E(G)\}$. O exemplo seguinte, apresenta uma possível representação do grafo de Petersen no sistema de raízes E_8 .

Exemplo 4.15. [CGSS76] O grafo de Petersen, com menor valor próprio -2, tem uma representação no sistema de linhas $\overline{E_8}$ descrito no Teorema 4.7. Além disso, pela Proposição 4.14, este grafo pode obter-se pela união disjunta do grafo linha $L(K_{3,3})$ com um vértice isolado, representados na Figura 4.4. Desta forma, considerando a base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$ de \mathbb{R}^8 , o grafo de Petersen pode representar-se pelo conjunto $\{e_i + e_j : i = 1, 2, 3; j = 5, 6, 7\} \cup \{e_4 + e_8\}$ aplicando *switching* ao conjunto $\{e_i + e_{4+i} : i = 1, 2, 3\}$. Neste caso, a aplicação de *switching* a cada elemento $e_i + e_j$ do conjunto consiste em trocá-lo por $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 e_k - e_i - e_j$ (ver Capítulo 3 de [CRS04] ou [CGSS76]). Consequentemente, a matriz de adjacência do grafo de Petersen A_G obtém-se de

$$A_G + 2I_{10} = Q^T Q$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na Figura 4.4 apresenta-se o grafo H e a representação do grafo $L(H)$ usando 8 linhas, onde dois vértices são adjacentes se se encontram sobre a mesma linha [BCS76]. Assim, os vértices de $L(K_{3,3})$ são as intersecções das linhas horizontais com as linhas verticais. Os vértices a branco são os que pertencem ao conjunto relativamente ao qual se efetua o *switching* de forma a obter o grafo regular excecional de Petersen.

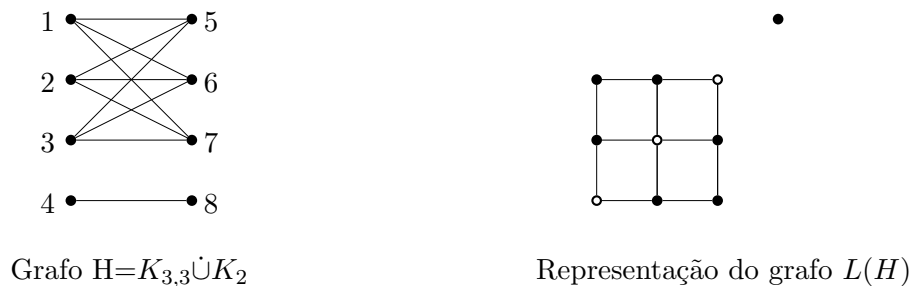


Figura 4.4: Construção do grafo de Petersen

A identificação de todos os grafos regulares excepcionais permitiu a caracterização de várias classes de grafos linha. Cvetković e Radosavljević [CR84] controem uma tabela com os 68 grafos referidos no Teorema 4.16 e provam, sem recurso ao computador, que são todos coespetrais com um grafo linha regular conexo.

Teorema 4.16. [BCS76] *Existem exatamente 68 grafos regulares, todos elementos de $\mathcal{G}(-2)$, que não são grafos linha mas são coespetrais com o grafo linha de um dos seguintes dezassete grafos: $K_{4,4}$, $K_{3,6}$, $CP(4)$, K_8 , $\overline{C_8}$, $\overline{C_3 \dot{\cup} C_5}$, $\overline{C_4 \dot{\cup} C_4}$, o grafo semi-regular de parâmetros $(6, 3, 2, 4)$, os quatro grafos 3-regulares S_1 , S_2 , S_3 e S_4 da Figura 4.5 e cinco grafos \overline{G} , onde G é um dos cinco grafos 3-regulares da Figura 4.5.*

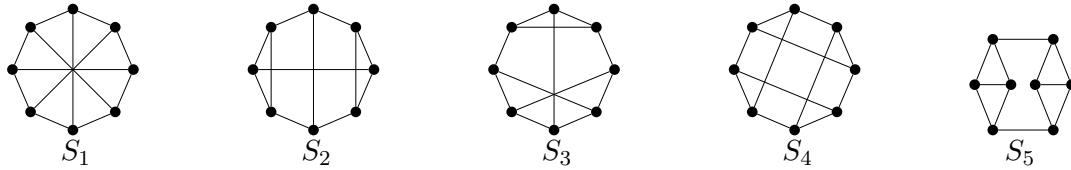


Figura 4.5: Grafos 3-regulares conexos com oito vértices.

Em [CGSS76, BCS76, CRS04] podem ver-se os exemplos de representação dos grafos excepcionais e fortemente regulares: grafos de Clebsch, grafos de Schläfli, grafo de Shrikhande e grafo de Chang, usando os sistemas de linhas e as representações adotadas no Exemplo 4.15.

Exemplo 4.17. [CRS04] Considere-se o grafo linha $L(K_{4,4})$. Aplicando *switching* relativamente ao subgrafo induzido $L(K_{4,2})$, obtém-se um grafo 10-regular de ordem 16 que se designa por grafo de Clebsch. Este grafo pode ser representado da seguinte forma: na Figura 4.6 os vértices de $L(K_{4,4})$ são as intersecção das linhas horizontais com as linhas verticais, que representam oito linhas do sistema de linhas \overline{E}_8 , e os vértices a branco são os que pertencem ao conjunto relativamente ao qual se efetua o *switching*.

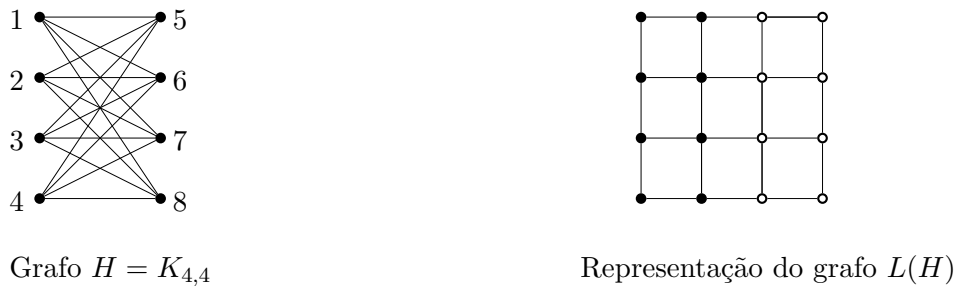


Figura 4.6: Construção do grafo de Clebsch

Exemplo 4.18. [CRS04] Sejam V_1, V_2 e V_3 subconjuntos de vértices de $L(K_8)$ que induzem subgrafos isomorfos a $4K_1, C_3 \dot{\cup} C_5$ e C_8 , respetivamente. Os grafos Ch_1, Ch_2 e Ch_3 obtêm-se de $L(K_8)$ efetuando *switching* relativamente a V_1, V_2 e V_3 , respetivamente, denominam-se grafos de Chang e são grafos 12-regulares de ordem 28.

Exemplo 4.19. [CRS04] Considere-se o grafo linha $L(K_8)$ e seja v um vértice do grafo. Aplicando *switching* relativamente ao conjunto dos vizinhos do vértice v obtém-se um grafo H no qual v é um vértice isolado. Eliminado o vértice isolado de H obtém-se um grafo

16-regular de ordem 27 designado grafo de Schläfli.

O teorema seguinte surge em [BCS76, BCS78], na sequência das pesquisas computacionais referidas, e a sua prova matemática (sem recurso ao computador) é apresentada por A. E Brouwer et al. em [BCN89, secção 3.9 e secção 3.10] usando argumentos da teoria dos reticulados inteiros.

Teorema 4.20. [CRS04, Teorema 4.1.5] *Se G é um grafo regular excepcional com n vértices e grau de regularidade r então uma e uma só das seguintes condições é satisfeita:*

- (a) $n = 2(r + 2) \leq 28$,
- (b) $n = \frac{3}{2}(r + 2) \leq 27$ e G é um subgrafo induzido do grafo de Schläfli,
- (c) $n = \frac{4}{3}(r + 2) \leq 16$ e G é um subgrafo induzido do grafo de Clebsch.

Os grafos excepcionais que verificam cada uma das condições (a), (b) e (c) dizem-se da 1^{a} camada, 2^{a} camada e 3^{a} camada, respetivamente.

Em 1979, Doob and Cvetković provam a proposição seguinte.

Proposição 4.21. [DC79] *Não existe nenhum grafo regular excepcional com menor valor próprio maior que -2 .*

Os 187 grafos regulares excepcionais encontram-se totalmente descritos na Tabela A3 de [CRS04] (secção A3.2, p. 218-227) e são denotados pelos números 1 a 187.

4.3 Técnica que aplica o complemento estrela

Nesta secção resume-se o apresentado em [CRS04] e [CRS10] na descrição da técnica do complemento estrela e sua aplicação aos grafos com menor valor próprio não inferior a -2 .

Seja G um grafo com conjunto de vértices $V(G) = \{1, \dots, n\}$ e matriz de adjacência A_G . Como se viu no início da Secção 4.2, sendo A_G uma matriz real simétrica, então A_G é ortogonalmente diagonalizável pela matriz ortogonal U ($U^T = U^{-1}$), cujas colunas são os vetores próprios de A_G , ou seja,

$$U^T A_G U = D,$$

onde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ é a matriz diagonal dos valores próprios de A_G e $U = (x_1, \dots, x_n)$, com $A_G x_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Sejam μ_1, \dots, μ_m os valores próprios de A_G distintos. Então $D = \mu_1 E_1 + \dots + \mu_m E_m$, onde E_i é uma matriz diagonal por blocos da forma $E_i = \text{diag}(0, \dots, 0, I_d, 0, \dots, 0)$, tal que o i -ésimo bloco é a matriz identidade I_d e d é a multiplicidade do valor próprio μ_i ($i = 1, \dots, m$). Assim,

$$A_G = UDU^T = \mu_1 U E_1 U^T + \dots + \mu_m U E_m U^T = \mu_1 P_1 + \dots + \mu_m P_m,$$

com $P_i = U E_i U^T$. Se $\mathcal{E}(\mu_i)$ tem base ortonormal $\{x_1, \dots, x_d\}$ então $P_i = x_1 x_1^T + \dots + x_d x_d^T$ é a projeção ortogonal de \mathbb{R}^n sobre $\mathcal{E}(\mu_i)$ com respeito à base canónica de \mathbb{R}^n . Portanto, se μ é um valor próprio de A_G e P é a projeção ortogonal de \mathbb{R}^n sobre $\mathcal{E}(\mu)$, existe $X \subseteq V(G)$ tal que os vetores $P e_j$ ($j \in X$) formam uma base para $\mathcal{E}(\mu)$. O subconjunto X designa-se por *conjunto estrela* para μ em G .

Proposição 4.22. [CRS10] *Seja G um grafo com valor próprio μ de multiplicidade $k > 0$. As seguintes condições relativas a um subconjunto X dos vértices de G são equivalentes:*

- (i) X é um conjunto estrela para μ ;
- (ii) $\mathbb{R}^n = \mathcal{E}(\mu) \oplus \mathcal{V}$, onde $\mathcal{V} = \langle e_i : i \notin X \rangle$;
- (iii) $|X| = k$ e μ não é um valor próprio de $G - X$.

O subgrafo do grafo G induzido pelo complementar de X , $G - X$, diz-se o *complemento estrela* para μ relativamente a X .

Proposição 4.23. [CRS10] *Seja X um conjunto estrela para μ em G e seja $\bar{X} = V(G) \setminus X$.*

- (i) *Se $\mu \neq 0$, então cada vértice de X tem pelo menos um vizinho em \bar{X} ;*
- (ii) *Se $\mu \neq -1$ ou $\mu \neq 0$, então as vizinhanças em \bar{X} , de vértices distintos de X , são diferentes e não vazias.*

De (i) da Proposição 4.23 conclui-se que se o grafo induzido por $\bar{X} = V(G) \setminus X$ é conexo então G também é conexo. De (ii) da Proposição 4.23 conclui-se que existe um número finito de grafos com um determinado complemento estrela para um valor próprio $\mu \neq -1$ e $\mu \neq 0$, pois se $|\bar{X}| = t$ então $|X| < 2^t$.

O resultado que se segue combina o designado, no contexto da teoria dos grafos, Teorema da Reconstrução, provado pela primeira vez em [CRS93], e o seu recíproco [Ell93].

Teorema 4.24. [CRS10] *Seja X um conjunto com k vértices do grafo G , e suponha que G tem matriz de adjacência $\begin{bmatrix} A_X & B^T \\ B & C \end{bmatrix}$, onde A_X é a matriz de adjacência do subgrafo induzido por X . Então X é um conjunto estrela para μ em G se e só se μ não é valor próprio de C e*

$$\mu I - A_X = B^T(\mu I - C)^{-1}B. \quad (4.2)$$

Desta forma, o espaço próprio associado a μ é gerado pelos vetores $\begin{bmatrix} x \\ (\mu I - C)^{-1}Bx \end{bmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}^k$.

Observe-se que, se X é um conjunto estrela para μ então o respetivo complemento estrela $H (= G - X)$ tem matriz de adjacência C e a equação (4.2) define que G é determinado por μ , H e as vizinhanças dos vértices em X no conjunto $\bar{X} = V(H)$. Por outro lado, para determinar todos os grafos G com um determinado complemento estrela H para μ , é necessário determinar todas as soluções A_X e B da equação (4.2). Assim, seja $|V(H)| = t$ e defina-se uma forma bilinear em \mathbb{R}^t por $\langle x, y \rangle = x^T(\mu I - C)^{-1}y$ ($x, y \in \mathbb{R}^t$).

Corolário 4.25. [Ell93] *Suponha que μ não é valor próprio do grafo H . Existe um grafo G com conjunto estrela X para μ tal que $G - X = H$ se e só se os vetores característicos b_u ($u \in X$) verificam:*

- (i) $\langle b_u, b_u \rangle = \mu$ para todo $u \in X$, e
- (ii) $\langle b_u, b_v \rangle \in \{-1, 0\}$ para todo par de vértices distintos $u, v \in X$.

Assim, u é adjacente a v , quando $\langle b_u, b_v \rangle = -1$ e u não é adjacente a v , quando $\langle b_u, b_v \rangle = 0$.

Se H é um complemento estrela de μ em G correspondente ao conjunto estrela X , então cada subgrafo induzido $G - Y$ ($Y \subseteq X$) também tem H como complemento estrela de μ . Além disso, qualquer grafo que tem H como complemento estrela de μ é um subgrafo induzido do grafo G para o qual X é maximal, pois as vizinhanças em H determinam as adjacências entre vértices de um conjunto estrela [CRS01]. Desta forma, para determinar todos os grafos que

têm H como complemento estrela de μ é suficiente determinar aqueles para os quais o conjunto estrela X é maximal. Designa-se cada um destes grafos de H -maximal e, da Proposição 4.23 (ii), eles existem se $\mu \neq -1, 0$ pois, nestes casos, vértices distintos de X têm vizinhanças distintas em H .

O conjunto de procedimentos para a construção dos grafos a partir dos seus complementos estrela designa-se por técnica dos *complementos estrela* e baseia-se em estudos efetuados por Rowlinson [Row93] e Ellingham [Ell93]. Em [CRS01] é introduzida esta técnica no estudo dos grafos com menor valor próprio -2 , para o qual o seguinte teorema serviu de ponto de partida.

Teorema 4.26. [DC79] *Se G é um grafo conexo com menor valor próprio maior que -2 , então verifica-se uma das condições seguintes:*

- (i) $G = L(T; 1, 0, \dots, 0)$ onde T é uma árvore;
- (ii) $G = L(H)$ onde H é uma árvore ou um grafo unicyclico ímpar;
- (iii) G é um dos 20 grafos de ordem seis representado no sistema de raízes E_6 ;
- (iv) G é um dos 110 grafos de ordem sete representado no sistema de raízes E_7 ;
- (v) G é um dos 443 grafos de ordem oito representado no sistema de raízes E_8 .

Se G é um grafo conexo com menor valor próprio -2 , então um complemento estrela conexo para -2 é necessariamente um dos grafos descritos no Teorema 4.26.

Seja X um conjunto estrela em G com complementar \bar{X} em $V(G)$ e seja $H = G - X$. Se $x \in X$ então o subgrafo de G induzido por $\bar{X} \cup \{x\}$ diz-se *extensão por um vértice* do grafo H .

Os grafos excepcionais com menor valor próprio maior que -2 são os descritos nos pontos (iii)-(v) do Teorema 4.26. Os grafos descritos em (v) obtêm-se pela extensão por um vértice dos grafos de (iv) e os de (iv) obtêm-se pela extensão por um vértice dos grafos descritos em (iii). Os 20 grafos com seis vértices do tipo (iii) são identificados em [CP84] e denotados por F_1, \dots, F_{20} . Estes grafos são os grafos com menor valor próprio não inferior a -2 da família dos 31 subgrafos proibidos (representados na Figura 4.2) que caracterizam os grafos linha generalizados. Os 443 grafos do tipo (v) encontram-se em [BN92]. Os 110 grafos do tipo (iv) são identificados em [CLRS98].

A caracterização dos grafos excepcionais está implicitamente contida no Teorema 4.4, mas na prática isso só é reconhecido pelo seguinte teorema.

Teorema 4.27. [CRS01] *Seja G um grafo com menor valor próprio -2 . Então G é excepcional se e só se contém um complemento estrela excepcional para -2 .*

Tendo por base esta propriedade os grafos excepcionais maximais, no total de 473, foram computacionalmente determinados em junho de 1999 [CLRS02] usando a técnica dos complementos estrela.

O exemplo seguinte apresenta vários conjuntos estrela e respectivos complementos estrela, considerando o grafo regular excepcional de Petersen e os seus valores próprios.

Exemplo 4.28. [CRS04] Na Figura 4.7 cada vértice do grafo de Petersen tem associado um valor próprio μ , por forma a que o conjunto formado por esses vértices seja um conjunto estrela para o respetivo μ .

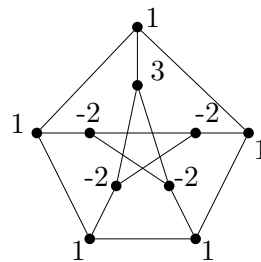
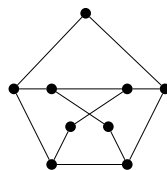


Figura 4.7: Grafo de Petersen e respetivos complementos estrela.

Verifica-se que o complemento estrela para o valor próprio -2 é um ciclo com cinco vértices, C_5 , com uma aresta pendente, que é um grafo excepcional uma vez que contém o subgrafo proibido H_1 da Figura 4.1, o complemento estrela do valor próprio 1 é o grafo linha C_5 , e o complemento estrela de 3 é o grafo (não regular) excepcional seguinte



Capítulo 5

Construção recursiva dos grafos regulares excepcionais por (κ, τ) -extensões

Neste capítulo apresentam-se os principais resultados obtidos nesta tese. Nomeadamente, mostra-se que todos os grafos regulares excepcionais se podem obter por (κ, τ) -extensões, com $\kappa - \tau = -2$, e que o conjunto dos grafos excepcionais apresenta uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado, considerando a relação de ordem parcial \preceq introduzida no Capítulo 3.

Na Secção 5.1 introduzem-se considerações gerais sobre os grafos regulares excepcionais, cuja construção por (κ, τ) -extensões se descreve dividida nas três secções que se seguem. Na Secção 5.2 é construído o subconjunto dos grafos regulares \mathcal{L}_1 que contém os grafos regulares excepcionais da 1^a camada, obtidos por $(0, 2)$ -extensões. Estas extensões reduzem-se à construção das matrizes de incidência de designs $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$. Consequentemente, é então descrito o processo de construção das matrizes de incidência dos 1-designs, relativamente às quais são estabelecidas restrições que reduzem a construção de grafos isomorfos, concluindo-se a secção com a descrição de um algoritmo que permite obter todos os grafos de (\mathcal{L}_1, \preceq) . Na Secção 5.3 é construído o subconjunto dos grafos regulares \mathcal{L}_2 que contém os grafos regulares excepcionais

da 2ª camada obtidos por $(0, 2)$ -extensões e designs $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$. Na Secção 5.4 é construído o subconjunto dos grafos regulares \mathcal{L}_3 que contém os grafos regulares excepcionais da 3ª camada, que se obtêm por $(1, 3)$ -extensões e designs $1 - (4, 3, \frac{3n}{4})$. Na Secção 5.5, a última deste capítulo, descrevem-se os resultados computacionais obtidos e apresenta-se o diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado que contém os 187 grafos regulares excepcionais.

5.1 Considerações gerais

Ao longo do texto \mathcal{L} denota o conjunto dos grafos regulares com menor valor próprio maior ou igual a -2 . Então, \mathcal{L} inclui todos os grafos regulares excepcionais que, pela Proposição 4.21, têm menor valor próprio igual a -2 . Considere-se ainda os subconjuntos \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 de \mathcal{L} para os quais a razão $\frac{n}{r+2}$ (sendo n o número de vértices e r o grau de regularidade) é igual à estabelecida pelo Teorema 4.20 para as 1ª, 2ª e 3ª camadas. Desta forma, o conjunto dos grafos regulares excepcionais de cada camada $\mathcal{G}_i(-2)$ é um subconjunto de \mathcal{L}_i ($i = 1, 2, 3$).

Seja G um grafo conexo, r -regular de ordem n , com valores próprios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ e $\alpha(G)$ o seu número de independência. Então

$$\alpha(G) \leq \frac{-n\lambda_n}{r - \lambda_n}. \quad (5.1)$$

Este majorante para $\alpha(G)$, conhecido por majorante de Hoffman, foi introduzido num manuscrito não publicado de A. J. Hoffman e é referido em [Lov79]. Posteriormente, este majorante foi generalizado a grafos arbitrários, não necessariamente regulares, em [Hae80], obtendo-se o majorante

$$\alpha(G) \leq \frac{-n\lambda_1\lambda_n}{\delta(G)^2 - \lambda_1\lambda_n},$$

onde $\delta(G)$ denota o menor grau dos vértices do grafo G . Se, além disso, S é um subconjunto de $V(G)$ e $\bar{d}_{G[S]}$ é a média dos graus dos vértices do subgrafo induzido por S , obtêm-se as desigualdades [BCS76]:

$$|S| \frac{r - \lambda_n}{n} + \lambda_n \leq \bar{d}_{G[S]} \leq |S| \frac{r - \lambda_2}{n} + \lambda_2,$$

que são equivalentes às desigualdades

$$n \frac{\bar{d}_{G[S]} - \lambda_2}{r - \lambda_2} \leq |S| \leq n \frac{\bar{d}_{G[S]} - \lambda_n}{r - \lambda_n}. \quad (5.2)$$

Em [CC06] observa-se que, se S induz um independente máximo, então $\bar{d}_{G[S]} = 0$ e a desigualdade de Hoffman (5.1) é obtida a partir de (5.2).

De facto, o majorante de Hoffman é atingido para um grafo regular G se e só se G tem um conjunto $(0, \tau)$ -regular tal que $\tau = -\lambda_n$. A condição necessária foi provada em [Hae95] (ver, também, [GR01, Lema 9.6.2]) e a condição suficiente foi provada em [CKL07].

Em [CC06] concluiu-se, por observação, que o majorante de Hoffman é atingido e igual a 4 e 3, no caso dos grafos regulares excepcionais das 1ª e 2ª camadas, e, adicionalmente, que este coincide com a cardinalidade de um independente máximo, que é um conjunto $(0, 2)$ -regular. Continua em aberto a obtenção de uma prova teórica de que, para os grafos regulares excepcionais das 1ª e 2ª camadas, o independente máximo tem cardinalidade 4 e 3, respetivamente. No entanto, podemos concluir que, se S é um independente máximo de um grafo r -regular de ordem n , G , então

$$n - \alpha(G) = \left| \bigcup_{i \in S} N_G(i) \right| \leq \sum_{i \in S} |N_G(i)| = \alpha(G)r \Rightarrow \alpha(G) \geq \frac{n}{r+1}.$$

Como consequência, considerando a relação entre a ordem n e a regularidade r dos grafos regulares excepcionais definida no Teorema 4.20, tem-se que se G pertence à

- 1ª camada, então $\alpha(G) \geq \frac{2(r+2)}{r+1} = \frac{2(r+1)}{r+1} + \frac{2}{r+1} = 2 + \frac{2}{r+1} \geq 3$;
- 2ª camada, então $\alpha(G) \geq \frac{3/2(r+2)}{r+1} = \frac{3(r+1)}{2(r+1)} + \frac{3}{2(r+1)} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2(r+1)} \geq 2$;
- 3ª camada, então $\alpha(G) \geq \frac{4/3(r+2)}{r+1} = \frac{4(r+1)}{3(r+1)} + \frac{4}{3(r+1)} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3(r+1)} \geq 2$.

Por outro lado, pela Proposição 4.21 os grafos regulares excepcionais têm menor valor próprio -2 , pelo que, para os grafos da:

- 1ª camada, $\alpha(G) \leq \frac{-2(r+2)(-2)}{r-(-2)} = \frac{4(r+2)}{r+2} = 4$;
- 2ª camada, $\alpha(G) \leq \frac{-3/2(r+2)(-2)}{r-(-2)} = \frac{3(r+2)2}{2(r+2)} = 3$;
- 3ª camada, $\alpha(G) \leq \frac{-4/3(r+2)(-2)}{r-(-2)} = \frac{4(r+2)2}{3(r+2)} = \frac{8}{3} \leq 2$.

Assim, deduz-se que o número de independência para os grafos regulares excepcionais da 1ª camada é 3 ou 4, da 2ª camada é 2 ou 3, e da 3ª camada é 2.

Nas secções que se seguem apresenta-se a construção recursiva de todos os grafos regulares excepcionais através de (κ, τ) -extensões, com $\kappa - \tau = -2$. No caso dos grafos das 1ª e 2ª

camadas a construção é feita por $(0, 2)$ -extensões de tamanho 4 e 3, respetivamente, e no caso dos grafos da 3ª camada são construídos por $(1, 3)$ -extensões de tamanho 4. Considerando a relação de ordem \preceq , definida no Capítulo 3, em $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ constroem-se os subconjuntos parcialmente ordenados $(\mathcal{G}_1(-2), \preceq)$, $(\mathcal{G}_2(-2), \preceq)$ e $(\mathcal{G}_3(-2), \preceq)$ dos grafos regulares excepcionais das 1ª, 2ª e 3ª camadas, respetivamente. Esta construção prova de forma inequívoca que o número de independência dos grafos regulares excepcionais é igual a 4, na 1ª camada, e é igual a 3, na 2ª camada .

Teorema 5.1. [CC06] *Os grafos regulares excepcionais não são elementos minimais dos conjuntos parcialmente ordenados (\mathcal{L}_1, \preceq) e (\mathcal{L}_2, \preceq) .*

Pelo Teorema 5.1 e pelo facto de o mesmo se verificar para o conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}_3, \preceq) (ver Secção 5.4), os grafos regulares excepcionais não são elementos minimais de (\mathcal{L}, \preceq) .

No Teorema 4.3 caracterizam-se os grafos linha através de um conjunto de subgrafos induzidos proibidos. Deste resultado conclui-se que a propriedade de ser grafo linha é hereditária, ou seja, qualquer subgrafo induzido de um grafo linha é um grafo linha, e estabelece-se o seguinte resultado:

Proposição 5.2. [BCC⁺14] *Seja G' um grafo regular com menor valor próprio -2 e G um subgrafo regular induzido de G' .*

- (i) *Se G' é um grafo linha então G também é um grafo linha.*
- (ii) *Se G é um grafo excepcional então G' também é um grafo excepcional.*

Com base nesta proposição, deve observar-se que se um grafo G é excepcional então contém um subgrafo proibido e este permanece ao longo de todas as (κ, τ) -extensões.

A técnica de produzir grafos regulares por (κ, τ) -extensões de G_i ($i = 0, \dots, m$) através de um grafo H de ordem n_2 introduz, em cada grafo $G_{i+1} = H \oplus G_i$, um conjunto (κ, τ) -regular ($|V(H)| = n_2$). Então, pela Proposição 3.5, $\kappa - \tau$ é um valor próprio do grafo construído. No caso dos grafos regulares excepcionais $\kappa - \tau = -2$ é o menor valor próprio de cada grafo. Seja $G_0 \preceq G_1 \preceq \dots \preceq G_{m+1}$ ($m \geq 0$) uma cadeia de grafos do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}, \preceq) , onde G_{m+1} é um grafo $(p + \tau m)$ -regular de ordem $n = n_2(m + 1) + n_1$ obtido por uma sequência de $(m + 1)$ (κ, τ) -extensões efetuadas a partir do grafo $(p - \tau)$ -regular G_0 de ordem

n_1 . Pela Proposição 4.21, o menor valor próprio -2 mantém-se ao longo de toda a cadeia de grafos regulares excepcionais e pela Proposição 4.13 a multiplicidade de -2 , $m(-2)$, aumenta verificando-se as desigualdades $n - 8 \leq m(-2) \leq n - 6$.

Como consequência da Proposição 3.8, podemos concluir que os grafos do conjunto \mathcal{L} , que inclui os 187 grafos regulares excepcionais, admitem uma partição equilibrada e, pela Proposição 3.2, a matriz de adjacência assume a forma que a seguir se descreve:

Corolário 5.3. *Seja $G_{m+1} \in \mathcal{L}$ um grafo regular obtido a partir do grafo regular G_0 por uma sequência de $m + 1$ (κ, τ) -extensões, com $m \geq 0$, e $\kappa - \tau = -2$. Então existe uma $(m + 2)$ -partição equilibrada $\pi = (W_{m+1}, W_m, \dots, W_0)$ de $V(G_{m+1})$, onde $W_{i+1} = V(G_{i+1}) \setminus V(G_i)$ para $0 \leq i \leq m$, $W_0 = V(G_0)$ e o subgrafo induzido $G_{m+1}[W_i]$, $i = 1, \dots, m+1$, é isomorfo ao grafo κ -regular H . Desta forma, $A_{G_{m+1}} = \begin{bmatrix} A_H & B_m \\ B_m^T & A_{G_m} \end{bmatrix}$ onde B_m é a matriz de incidência de um design $1-(n_2, \tau, m\tau + p - \kappa)$ que resulta da concatenação de $m + 1$ matrizes $B_m^{(j)}$, com $j = 0, \dots, m$, tais que*

$$B_m = \begin{bmatrix} B_m^{(m)} & B_m^{(m-1)} & \dots & B_m^{(1)} & B_m^{(0)} \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

As matrizes $B_m^{(j)}$, com $j = 1, \dots, m$, são matrizes de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, \tau)$ e a matriz $B_m^{(0)}$ é a matriz de incidência de um design $1 - (n_2, \tau, p - \kappa)$.

5.2 Construção dos grafos regulares excepcionais da 1ª camada por (0, 2)-extensões

Os grafos regulares excepcionais da 1ª camada de menor ordem são os cinco grafos Z_1 , Z_2 , Z_3 , Z_4 e Z_5 de ordem 10 e regularidade 3, representados na Figura 5.1 (retirada de [CRS04, Apêndice A.3]). Estes grafos não são grafos minimais de (\mathcal{L}_1, \preceq) (ver Teorema 5.1). Com efeito, obtêm-se por uma (0, 2)-extensão do grafo $3K_2$, de ordem 6 e regularidade 1, que é um grafo linha. Em cada grafo da Figura 5.1 os seis vértices representados por círculos mais pequenos induzem o grafo $3K_2$ e os restantes vértices referem-se à (0, 2)-extensão de tamanho 4 (grafo $4K_1$). Por sua vez, os grafos regulares excepcionais de ordem imediatamente a seguir têm ordem 12 e regularidade 4 e obtêm-se por uma (0, 2)-extensão de um grafo linha de ordem 8 e regularidade 2 de entre os grafos $2C_4$, $C_3 \dot{\cup} C_5$ (união disjunta dos grafos C_3 e C_5) ou C_8 .

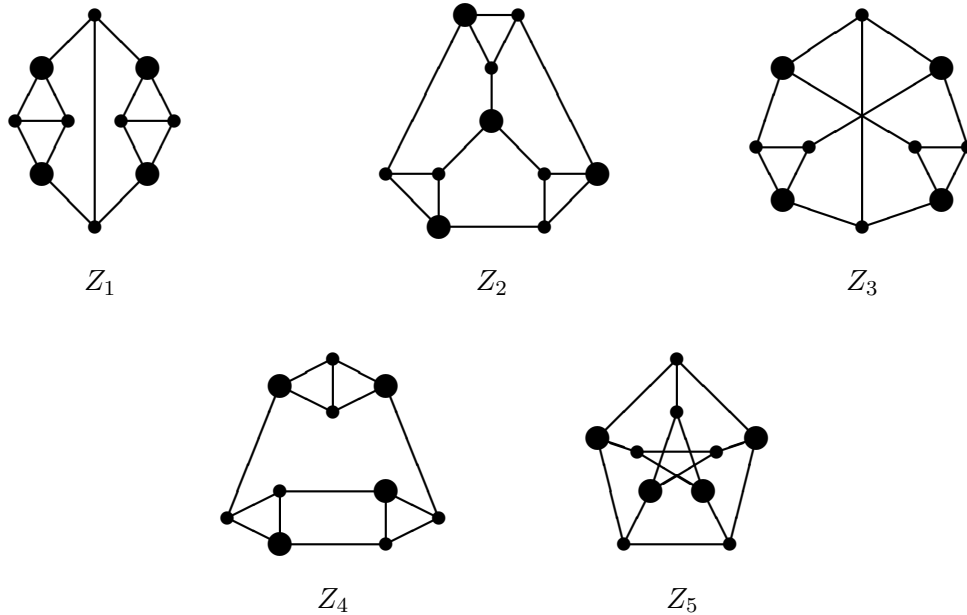


Figura 5.1: Grafos regulares excepcionais da 1ª camada de menor ordem.

Tendo em vista a construção do diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}_1, \preceq) , os grafos r -regulares de ordem n da primeira camada para os quais $r = \frac{n}{2} - 2$, com $n \leq 28$ (Teorema 4.20), são divididos em dois subconjuntos parcialmente ordenados: os grafos com regularidade ímpar que se obtêm por $(0, 2)$ -extensões de grafos de regularidade ímpar, com elemento minimal, $3K_2$, de ordem $n = 6$, e os grafos com regularidade par que se obtêm por $(0, 2)$ -extensões de grafos de regularidade par, em que os grafos minimais, $2C_4$, $C_3 \dot{\cup} C_5$ e C_8 , têm ordem $n = 8$.

Se G é um grafo da 1ª camada de ordem par n e regularidade $r = \frac{n}{2} - 2$, e H é o grafo 0-regular de ordem 4, a matriz de adjacência do grafo G' de ordem $4 + n$ e regularidade $r' = \frac{4+n}{2} - 2 = \frac{n}{2}$ que se obtêm por uma $(0, 2)$ -extensão do grafo G pode ser escrita na forma

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} O_4 & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

onde O_4 é a matriz de adjacência do grafo H (matriz nula de ordem 4), A_G é a matriz de adjacência de G e B é uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$.

5.2.1 Construção das matrizes de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$

Seja $H = 4K_1$ com $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $(V(H), \mathcal{S})$ um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$. Recorde-se que \mathcal{S} é uma família de subconjuntos de $V(H)$, cada um dos quais com $\tau = 2$ elementos. Logo, $\mathcal{S} \subseteq \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6\}$, onde $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ representam todos os subconjuntos de dois elementos de $V(H)$ e

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } s_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

são os respectivos vetores característicos.

Cada matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ tem como colunas estes vetores, por forma a que cada vértice de G seja adjacente a 2 vértices de $V(H)$ e cada vértice de $V(H)$ pertença a $\frac{n}{2}$ blocos. O número de colunas da matriz de incidência B igual a cada um dos vetores característicos acima indicados pode ser determinado pelas soluções inteiras não negativas do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

Como o número total de blocos é n , isto é, a ordem do grafo G , temos ainda que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = n$. Na verdade esta equação não é necessária, pois obtém-se das 4 igualdades do sistema (5.6).

Comece-se por determinar as soluções inteiras não negativas do sistema de 4 equações lineares

a 6 incógnitas

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2} \\ x_1 + x_4 + x_5 = \frac{n}{2} \\ x_2 + x_4 + x_6 = \frac{n}{2} \\ x_3 + x_5 + x_6 = \frac{n}{2} \end{cases}. \quad (5.7)$$

Subtraindo a última equação às restantes, obtém-se o sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_5 + x_6 = \frac{n}{2} \end{cases}.$$

Subtraindo agora à 1ª equação do sistema, o resultado da soma das 2ª e 3ª equações, obtém-se na 1ª equação $2x_3 - 2x_4 = 0$, ou seja, $x_3 = x_4$. Usando esta igualdade nas restantes equações do sistema obtém-se:

$$\begin{cases} x_3 = x_4 \\ x_1 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 = \frac{n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{n}{2} - x_1 - x_2 \\ x_6 = x_1 \\ x_5 = x_2 \\ x_4 = \frac{n}{2} - x_1 - x_2 \end{cases}$$

concluindo-se que as soluções inteiras não negativas do sistema (5.7) se escrevem na forma

$$\left(x_1, x_2, \frac{n}{2} - (x_1 + x_2), \frac{n}{2} - (x_1 + x_2), x_2, x_1 \right), x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_0^+, 0 \leq x_1 + x_2 \leq \frac{n}{2}. \quad (5.8)$$

O conjunto de soluções pode resumir-se esquematicamente da seguinte forma:

\oplus $x_1 \backslash x_2$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12			
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12				
5	5	6	7	8	9	10	11	12					
6	6	7	8	9	10	11	12						
7	7	8	9	10	11	12							
8	8	9	10	11	12								
9	9	10	11	12									
10	10	11	12										
11	11	12											
12	12												

onde, até se encontrar o tracejado relativo a $\frac{n}{2}$, sendo n o número de blocos pretendido, na linha x_1 e na coluna x_2 apresentam-se os valores possíveis para estas variáveis. As entradas da tabela são o resultado da soma $x_1 + x_2$ que permitem determinar o valor de $x_3 = \frac{n}{2} - (x_1 + x_2)$.

Conclui-se então que para n par o número de soluções (5.8) do sistema (5.7) é dado pelo número de entradas até à diagonal secundária (inclusivé) da tabela $(\frac{n}{2} + 1) \times (\frac{n}{2} + 1)$, ou seja, igual a

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}+1} j = \frac{(\frac{n}{2} + 1)(\frac{n}{2} + 2)}{2} = \frac{(n + 2)(n + 4)}{8}. \tag{5.9}$$

Exemplo 5.4. Para $n = 6$, o sistema (5.7) tem 10 soluções (5.8): $(0, 0, 3, 3, 0, 0)$; $(0, 1, 2, 2, 1, 0)$; $(1, 0, 2, 2, 0, 1)$; $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$; $(2, 0, 1, 1, 0, 2)$; $(0, 3, 0, 0, 3, 0)$; $(1, 2, 0, 0, 2, 1)$; $(2, 1, 0, 0, 1, 2)$; $(3, 0, 0, 0, 0, 3)$; $(0, 2, 1, 1, 2, 0)$. Conseqüentemente, existem dez formas diferentes de escolher os 6 blocos que constituem um design $1 - (4, 2, 3)$, ou seja, existem 10 possibilidades de escolha para o número de colunas s_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, que formam a matriz de incidência do 1-design pretendido.

A solução $(0, 0, 3, 3, 0, 0)$ está associada às matrizes de incidência que têm $x_3 = 3$ colunas iguais a s_3 e $x_4 = 3$ colunas iguais ao vetor s_4 . Desta forma obtêm-se, por exemplo, as matrizes de incidência

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que resultam de diferentes disposições dos vetores s_3 e s_4 nas colunas das matrizes.

No Exemplo 5.4 viu-se que, para cada solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ do sistema (5.7), se podem construir diferentes matrizes de incidência que diferem entre si pelo arranjo dos vetores s_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) nas suas colunas. O teorema seguinte (ver, por exemplo, [CSR09]) permite determinar quantas matrizes de incidência é possível obter para cada solução (5.8) do sistema de equações lineares (5.7).

Teorema 5.5 (Números multinomiais). *Dado um conjunto finito A de cardinalidade n existem $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$ possibilidades de partir A em r subconjuntos A_1, A_2, \dots, A_r com cardinalidade n_1, n_2, \dots, n_r , respetivamente.*

Do Teorema 5.5 vem que o número de matrizes de incidência associadas a uma solução $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ é dado por $\frac{n!}{x_1! x_2! x_3! x_4! x_5! x_6!}$.

5.2.2 Soluções do sistema que resultam em grafos $G' = H \oplus G$ isomorfos

Nesta subsecção e na seguinte são apresentados alguns casos de (0, 2)-extensões de tamanho 4 de grafos regulares que originam grafos isomorfos.

Considerando as matrizes de incidência, B , associadas às soluções (5.8) do sistema (5.7), verifica-se que muitas destas matrizes diferem entre si apenas por uma permutação de linhas e, pela Proposição 3.3, dão origem a grafos $G' = H \oplus G$ isomorfos.

Exemplo 5.6. Dado o grafo $G = 3K_2$ de ordem 6 e regularidade 1, com matriz de adjacência

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

considerem-se 3 matrizes de incidência de designs $1 - (4, 2, 3)$:

$$B_1 = \begin{matrix} & s_2 & s_3 & s_3 & s_5 & s_4 & s_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{e} & \begin{matrix} s_5 & s_4 & s_4 & s_2 & s_3 & s_3 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix}$$

associadas à solução (0, 1, 2, 2, 1, 0) do sistema (5.7), e

$$B_3 = \begin{matrix} & s_1 & s_3 & s_3 & s_6 & s_4 & s_4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

associada à solução (1, 0, 2, 2, 0, 1) do mesmo sistema.

Considerem-se os grafos $G_1 = H \oplus 3K_2$, $G_2 = H' \oplus 3K_2$ e $G_3 = H'' \oplus 3K_2$, tais que $V(3K_2) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $V(H) = \{1, 2, 3, 4\}$, $V(H') = \{1', 2', 3', 4'\}$ e $V(H'') = \{1'', 2'', 3'', 4''\}$, com matrizes de adjacência

$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^T & A_{3K_2} \end{bmatrix}, A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & A_{3K_2} \end{bmatrix} \text{ e } A_{G_3} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 \\ B_3^T & A_{3K_2} \end{bmatrix}.$$

Então $B_2 = PB_1$ e $B_3 = P'B_1$, onde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes de permutação. Logo B_1, B_2 e B_3 diferem entre si apenas por uma permutação das linhas da matriz de incidência do design e, pela Proposição 3.3, os grafos G_1, G_2 e G_3 são isomorfos.

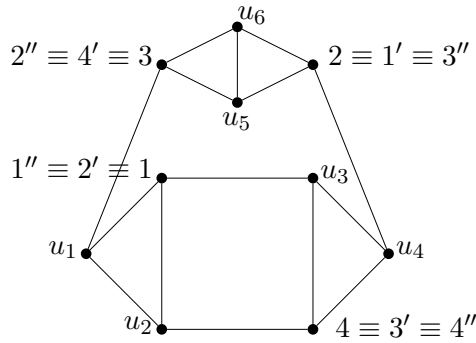


Figura 5.2: Grafos isomorfos obtidos por matrizes de incidência distintas de um design $1 - (4, 2, 3)$.

No Exemplo 5.6 observa-se que existem matrizes de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que diferem apenas por uma permutação de linhas e que, de acordo com a Proposição 3.3, originam grafos isomorfos obtidos através de $(0, 2)$ -extensões. Estas matrizes de incidência podem estar associadas a uma mesma solução (5.8) do sistema de equações lineares (5.7) ou a soluções distintas. O resultado a seguir identifica soluções do sistema (5.7) que originam matrizes de incidência de designs $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que diferem por uma permutação de linhas.

Proposição 5.7. *As matrizes de incidência dos designs $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que se obtêm da solução do sistema (5.7):*

- (i) $(x_1, x_3, x_2, x_2, x_3, x_1)$;

(ii) $(x_2, x_1, x_3, x_3, x_1, x_2)$;

(iii) $(x_2, x_3, x_1, x_1, x_3, x_2)$;

(iv) $(x_3, x_1, x_2, x_2, x_1, x_3)$;

(v) $(x_3, x_2, x_1, x_1, x_2, x_3)$;

diferem das matrizes de incidência associadas à solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ apenas por uma permutação de linhas.

Demonstração. Considere-se o conjunto C dos n índices das colunas da matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$, partido em subconjuntos C_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, cujos elementos são os índices das colunas da matriz B iguais a s_i , onde

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } s_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para a matriz de incidência B associada à solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$, seja C_i o subconjunto dos $x_i = x_{7-i}$ índices das colunas de B iguais a s_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

A partir da matriz de incidência B constrói-se uma matriz de incidência B' associada à solução $(x_1, x_3, x_2, x_2, x_3, x_1)$. Para tal, seja

C'_1 o subconjunto dos x_1 índices das colunas de B' iguais a s_1 ,

C'_2 o subconjunto dos x_3 índices das colunas de B' iguais a s_2 ,

C'_3 o subconjunto dos x_2 índices das colunas de B' iguais a s_3 ,

C'_4 o subconjunto dos x_2 índices das colunas de B' iguais a s_4 ,

C'_5 o subconjunto dos x_3 índices das colunas de B' iguais a s_5 ,

C'_6 o subconjunto dos x_1 índices das colunas de B' iguais a s_6 ,

e escolhem-se os índices das colunas de B que pertencem a cada subconjunto C'_i de forma a que $C'_1 = C_1$, $C'_2 = C_3$, $C'_3 = C_2$, $C'_4 = C_5$, $C'_5 = C_4$ e $C'_6 = C_6$, o que é possível porque os conjuntos envolvidos em cada igualdade têm a mesma cardinalidade.

Em síntese, para cada matriz de incidência B associada à solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ constroi-se a matriz de incidência B' associada à solução $(x_1, x_3, x_2, x_2, x_3, x_1)$, substituindo em B as colunas com vetores s_2 (s_3) por vetores s_3 (s_2) e as colunas com vetores

s_4 (s_5) por vetores s_5 (s_4). Note-se que s_2 (s_3) se obtém de s_3 (s_2) por uma troca entre a 3ª e 4ª linhas, s_4 (s_5) se obtém de s_5 (s_4) também por uma troca entre as 3ª e 4ª linhas e a troca entre estas linhas não altera s_1 nem s_6 . Assim, a cada matriz de incidência B associada à solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ corresponde a matriz de incidência $B' = PB$ associada

à solução $(x_1, x_3, x_2, x_2, x_3, x_1)$, onde $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz de permutação

aplicada às linhas de B . Procedendo de forma análoga, obtêm-se as matrizes de permutação P a partir das quais se determinam as matrizes de incidência $B' = PB$ associadas a cada uma das soluções:

- $(x_2, x_1, x_3, x_3, x_1, x_2)$, com $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- $(x_2, x_3, x_1, x_1, x_3, x_2)$, com $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;
- $(x_3, x_1, x_2, x_2, x_1, x_3)$, com $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- $(x_3, x_2, x_1, x_1, x_2, x_3)$, com $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

□

Exemplo 5.8. Seja $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto dos índices das colunas das matrizes de incidência de um 1-design com parâmetros $(4, 2, 3)$, partido nos seis subconjuntos C_i dos índices das colunas de B iguais a s_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). De acordo com a Proposição 5.7

as matrizes de incidência B associadas à solução $(0, 1, 2, 2, 1, 0)$ diferem das matrizes de incidência B' associadas à solução $(1, 2, 0, 0, 2, 1)$ por uma permutação de linhas.

Considere-se, por exemplo, para a matriz de incidência B resultante da partição de C em $C_1 = \emptyset$, $C_2 = \{1\}$, $C_3 = \{2, 3\}$, $C_4 = \{4, 5\}$, $C_5 = \{6\}$ e $C_6 = \emptyset$, isto é,

$$B = \begin{matrix} & s_2 & s_3 & s_3 & s_4 & s_4 & s_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Seja C'_j o subconjunto dos índices das colunas da matriz de incidência B' iguais a s_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$). Para construir uma matriz B' que difira de B por uma permutação de linhas basta escolher os índices por forma a que os subconjuntos C_i e C'_j , com a mesma cardinalidade, tenham os mesmos elementos. Considerando, por exemplo, $C'_1 = C_2$, $C'_2 = C_3$, $C'_3 = C_1$, $C'_4 = C_6$, $C'_5 = C_4$ e $C'_6 = C_5$, obtém-se

$$B' = \begin{matrix} & s_1 & s_2 & s_2 & s_5 & s_5 & s_6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} = PB.$$

onde $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de permutação.

Consequentemente, das soluções inteiras não negativas $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ (ver (5.8)) que se obtêm para o sistema de equações lineares (5.7) basta considerar as que satisfazem as condições

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}, \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \frac{n}{2}. \quad (5.10)$$

Estas soluções designam-se por *soluções tipo*.

Analisando a definição de solução tipo, ou seja, a igualdade $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$ com $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \frac{n}{2}$ ($x_3 \neq 0$), verifica-se que

- $0 \leq x_1 \leq \lfloor \frac{n}{6} \rfloor$, pois o maior valor de x_1 é atingido quando $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$, obtendo-se $3x_1 = \frac{n}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{n/2}{3} = \frac{n}{6}$;
- $0 \leq x_2 \leq \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, pois o maior valor de x_2 é atingido quando $x_1 = 0 < x_2 = x_3$, obtendo-se $x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$ e, no caso limite de $x_2 = x_3$, tem-se $2x_2 = \frac{n}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{n/2}{2} = \frac{n}{4}$;
- $\lceil \frac{n}{6} \rceil \leq x_3 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pois o maior valor de x_3 é atingido quando $x_1 = x_2 = 0$ obtendo-se $x_3 = \frac{n}{2}$ e o menor valor possível obtém-se quando $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$.

No início da Secção 5.2 refere-se que a construção do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}_1, \preceq) por $(0, 2)$ -extensões é iniciada com os grafos minimais, não excepcionais, de ordens 6 e 8. Pelo Teorema 4.20, os grafos regulares excepcionais da 1ª camada têm no máximo ordem 28. Considere-se, então, n par tal que $6 \leq n \leq 24$ e $x_3 = \frac{n}{2} - (x_1 + x_2) \in \mathbb{N}$, com $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \frac{n}{2}$. O número de soluções tipo é:

- se $n = 6$ então $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \leq x_3 \leq 3$, obtendo-se $x_1 = x_2 = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, e $x_1 = x_2 = 1$, o que totaliza 3 soluções tipo (note-se que x_3 se obtém substituindo os valores de n , x_1 e x_2);
- se $n = 8$ então $0 \leq x_1 \leq 1$ e $0 \leq x_2 \leq 2$ obtendo-se 3 soluções, como no caso anterior, e ainda a solução $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, o que prefaz 4 soluções tipo;
- se $n = 10$ então $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 2$, obtendo-se 4 soluções, como no caso anterior, e ainda a solução $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, o que resulta em 5 soluções tipo;
- Se $n = 12$ então $0 \leq x_1 \leq 2$, $0 \leq x_2 \leq 2$, obtendo-se 5 soluções, como no caso anterior, e podemos ainda considerar $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 2$, logo existem 7 soluções tipo.

O número total de soluções tipo a considerar em função do número n de blocos (ou, o número n de colunas de uma matriz de incidência que é igual à ordem do grafo a estender) de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ é calculado de forma análoga aos casos apresentados e resume-se na Tabela 5.1, juntamente com o número de soluções (5.8) determinado em (5.9):

n blocos	$\frac{(n+2)(n+4)}{8}$ soluções (5.8)	soluções tipo (5.10)
6	10	3
8	15	4
10	21	5
12	28	7
14	36	8
16	45	10
18	55	12
20	66	14
22	78	16
24	91	19

Tabela 5.1: Número total de soluções em função do número n de blocos do design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$.

5.2.3 Outros casos que resultam em grafos isomorfos

Considere-se apenas as soluções tipo (5.10) do sistema de equações lineares (5.7), ou seja, $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ tal que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$, $x_3 \in \mathbb{N}$ e $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Note-se que as soluções do sistema têm a primeira componente igual à última, a 2ª igual à penúltima e a 3ª igual à quarta, o que significa que uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ associada a uma qualquer solução tem tantas colunas iguais a s_1 como a s_6 , tantas colunas iguais a s_2 como a s_5 e tantas colunas iguais a s_3 como a s_4 . Observe-se, ainda, que todos os vetores s_i são constituídos por dois zeros e dois uns (ver (5.5)). Devido a estas características é possível transformar, através de uma permutação sobre linhas, o vetor s_1 (s_6) em s_6 (s_1), ou o vetor s_2 (s_5) em s_5 (s_2) ou o vetor s_3 (s_4) em s_4 (s_3). Mais geralmente, s_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) pode transformar-se em s_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) desde que s_i e s_j existam em igual número. Consequentemente, muitas das matrizes de incidência obtidas para o design pretendido resultam em grafos isomorfos obtidos por (0, 2)-extensões, já que essas matrizes diferem entre si apenas numa permutação de linhas (Proposição 3.3). O que se pretende é estabelecer condições que eliminem, ou pelo menos reduzam, a produção de grafos isomorfos.

A proposição seguinte mostra que qualquer matriz de incidência $B = [b_{ij}]$ ($1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq n$) associada a uma solução tipo, que tenha como primeiro elemento da última

coluna $b_{1n} = 0$, pode ser transformada, através de uma permutação sobre as suas linhas, numa matriz de incidência $B' = [b'_{ij}]$ associada à mesma solução, com $b'_{1n} = 1$, ou seja, com a última coluna igual a um dos vetores s_i , $i = 1, 2, 3$. Além disso, é possível estabelecer condições sobre a ordem pela qual aparecem os pares de vetores s_i e s_{7-i} , correspondentes a valores iguais das componentes x_i ($i = 1, 2, 3$) da solução tipo.

Proposição 5.9. *Se B é uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$, associada a uma solução tipo (5.10) do sistema (5.7), então B pode ser transformada, através de uma permutação sobre as suas linhas, numa matriz B' associada à mesma solução que satisfaz uma das seguintes três condições:*

$$n \in C'_1 \wedge [(\exists q' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q' > q) \vee (\exists q'' \in C'_3, \forall q \in C'_4, q'' > q)] \quad (5.11)$$

$$n \in C'_2 \wedge [(C'_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists q' \in C'_1, \forall q \in C'_6, q' > q) \vee (\exists q'' \in C'_3, \forall q \in C'_4, q'' > q)] \quad (5.12)$$

$$n \in C'_3 \wedge [(C'_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists q' \in C'_1, \forall q \in C'_6, q' > q) \vee (C'_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists q'' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q'' > q)] \quad (5.13)$$

onde C'_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, é o subconjunto dos índices das colunas de B' iguais a s_i .

Demonstração. Seja B uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que se obtém da solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ do sistema (5.7) tal que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \frac{n}{2}$ com $x_1, x_2 \in \mathbb{N}_0$ e $x_3 \in \mathbb{N}$. Então B tem x_i colunas iguais a s_i e x_i colunas iguais a s_{7-i} , $i = 1, 2, 3$.

Seja C_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, o subconjunto dos índices das n colunas da matriz de incidência B iguais a s_i . Se B não verifica nenhuma das condições (5.11), (5.12) ou (5.13), então a última coluna de B é diferente de s_1 , de s_2 e s_3 , ou seja, $n \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Em seguida mostra-se que a partir de B é possível construir uma matriz de incidência B' que verifica uma das condições (5.11), (5.12) e (5.13) e que difere de B por uma permutação de linhas.

Caso 1: Se $n \in C_4$, como $|C_4| = |C_3| = x_3$, então constroi-se a matriz de incidência B' por forma a que $C'_3 = C_4$ e $C'_4 = C_3$, obtendo-se assim $n \in C'_3$, ou seja,

$$B = \begin{array}{cc} & s_3 & s_4 \\ \begin{bmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} & & \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{cc} & s_4 & s_3 \\ \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & & \end{array}.$$

Conseqüentemente, $B' = P_i B$ com $i \in \{1, 2\}$, onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note-se que B' é uma matriz de incidência associada à mesma solução do sistema pois a aplicação destas matrizes de permutação a B traduzem-se por trocas entre colunas com vetores s_i e s_{7-i} ($i = 1, 2, 3$) que existem em igual número, x_i , nas matrizes B e B' :

- P_1 mantém inalteradas as colunas iguais a s_1 e s_6 ($C'_1 = C_1$ e $C'_6 = C_6$), troca as colunas s_2 com s_5 ($C'_5 = C_2$ e $C'_2 = C_5$) e, conforme o pretendido, troca as colunas s_3 com as s_4 ($C'_3 = C_4$ e $C'_4 = C_3$).
- P_2 mantém inalteradas as colunas iguais a s_2 e s_5 ($C'_5 = C_2$ e $C'_2 = C_5$), troca as colunas s_1 com s_6 ($C'_1 = C_6$ e $C'_6 = C_1$) e troca as colunas s_3 e s_4 ($C'_3 = C_4$ e $C'_4 = C_3$).

Falta mostrar que B' satisfaz a 2ª parte da condição (5.13) do enunciado, ou seja, que B' verifica, pelo menos, uma das condições:

- se a matriz de incidência tem uma coluna s_1 , então pelo menos uma delas está à direita de todas as colunas s_6 ,
- se a matriz de incidência tem uma coluna s_2 , pelo menos uma delas está à direita de todas as colunas s_5 .

Para garantir que a 2ª parte da condição (5.13) se verifica, tem que se voltar a analisar as matrizes de permutação P_1 e P_2 . Se B verifica a condição (i), ao escolher-se a matriz de

permutação P_1 obtém-se uma matriz B' que também satisfaz esta condição. Se B verifica a condição (ii), escolhendo a matriz de permutação P_2 obtém-se uma matriz B' que também satisfaz esta condição.

Se B tem uma coluna s_6 à direita de todas as colunas s_1 e uma coluna s_5 à direita de todas as colunas s_2 , escolhendo P_1 obtém-se uma matriz B' que verifica (ii) e escolhendo P_2 obtém-se uma matriz B' que verifica (i).

Observe-se que se $C_1 = \emptyset$ e $C_2 \neq \emptyset$, não existem em B colunas iguais a s_1 . Para obter uma matriz B' que satisfaça a 2ª parte da condição (5.13) aplica-se a B a matriz P_2 ou P_1 , consoante B satisfaça ou não a condição (ii), respetivamente.

Por último, se $C_1 = C_2 = \emptyset$, B tem apenas colunas s_3 e s_4 e, se $n \in C_4$, qualquer uma das matrizes P_1 ou P_2 transforma B numa matriz B' que verifica a condição (5.13).

Caso 2: Se $n \in C_5$, como $|C_5| = |C_2| = x_2$, constroi-se a matriz de incidência B' por forma a que $C'_2 = C_5$ e $C'_5 = C_2$, obtendo-se assim $n \in C'_2$, ou seja,

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s_2 & s_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{e} \quad B' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} s_5 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Consequentemente, $B' = P_i B$, com $i \in \{1, 2\}$, onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz de permutação P_1 mantém inalteradas as colunas iguais a s_1 e s_6 e as colunas s_3 trocam com as colunas s_4 , pelo que $C'_3 = C_4$ e $C'_4 = C_3$. Aplicando a matriz de permutação P_2 , as colunas iguais a s_3 ou s_4 permanecem inalteradas e as colunas s_1 trocam com as colunas s_6 , pelo que $C'_1 = C_6$ e $C'_6 = C_1$.

A 2ª parte da condição (5.12) do enunciado requer que B' satisfaça, pelo menos, uma das seguintes condições:

- (i) se a matriz de incidência tem uma coluna s_1 , então pelo menos uma está à direita de todas as colunas s_6 ,
- (ii) na matriz de incidência existe pelo menos uma coluna s_3 à direita de todas as colunas s_4 .

Se B verifica a condição (i) ou a condição (ii), ao escolher-se a matriz de permutação P_1 ou a matriz de permutação P_2 , respetivamente, obtém-se uma matriz B' que também satisfaz a mesma condição.

Se $C_1 \neq \emptyset$ mas B não satisfaz (i) nem (ii), escolhendo a matriz de permutação P_1 ou a matriz de permutação P_2 obtém-se uma matriz B' que verifica (ii) ou (i), respetivamente.

Observe-se que se $C_1 = \emptyset$ não existem em B colunas iguais a s_1 . Para obter uma matriz B' que satisfaça a 2ª parte da condição (5.12), ou seja, que verifique a condição (ii), aplica-se a B a matriz de permutação P_2 ou P_1 , consoante B satisfaça ou não a condição (ii), respetivamente.

Caso 3: Se $n \in C_6$, como $|C_6| = |C_1| = x_1$ constroi-se a matriz de incidência B' de forma a que $C'_1 = C_6$ e $C'_6 = C_1$, obtendo-se assim a última coluna da matriz B' igual a s_1 , isto é, $n \in C'_1$, ou seja,

$$B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_1 & s_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \text{e} & \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} s_6 & s_1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} \end{array}.$$

Consequentemente, $B' = P_i B$, com $i \in \{1, 2\}$, onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes de permutação.

Ao escolher P_1 , as colunas iguais a s_2 e s_5 permanecem inalteradas e as colunas iguais a s_3 trocam com as colunas iguais a s_4 , pelo que $C'_3 = C_4$ e $C'_4 = C_3$. Escolhendo P_2 , as colunas iguais a s_3 e s_4 permanecem inalteradas e as colunas iguais a s_2 trocam com as

colunas iguais a s_5 , pelo que $C'_2 = C_5$ e $C'_5 = C_2$. De forma análoga ao efetuado para os casos anteriores, verifica-se que se a matriz B não satisfaz a 2ª parte da condição (5.11) do enunciado, escolhendo adequadamente uma das matrizes de permutação, P_1 ou P_2 , e aplicando-a a B , obtém-se uma matriz B' que verifica a condição (5.11) e que difere de B apenas por uma permutação de linhas.

Caso 4: Se $n \in C_1$ ou $n \in C_2$ ou $n \in C_3$ e não se verifica a 2ª parte da respetiva condição (5.11), (5.12), (5.13), então, para cada um destes três casos, basta escolher, respetivamente, a matriz de permutação:

- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que mantém inalterado o vetor s_1 (s_6) mas transforma s_5 (s_2) em s_2 (s_5) e s_4 (s_3) em s_3 (s_4);
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ que mantém inalterado o vetor s_2 (s_5) mas transforma s_4 (s_3) em s_3 (s_4) e, caso existam, transforma os vetores s_6 (s_1) em s_1 (s_6);
- $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ que mantém inalterado o vetor s_3 (s_4) mas transforma, caso existam, os vetores s_6 (s_1) em s_1 (s_6) e s_5 (s_2) em s_2 (s_5).

□

No caso particular de a solução tipo (5.10) ter quatro componentes iguais, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_2 = x_3$, é possível transformar qualquer matriz de incidência B , que satisfaz as condições da Proposição 5.9, por aplicação de uma permutação sobre as suas linhas, numa matriz B' associada à mesma solução, cuja última coluna é igual ao vetor s_1 (caso $x_1 = x_2$) ou s_3 (caso $x_2 = x_3$). Além disso, se B tem alguma coluna s_2 , então B' tem uma coluna s_2 à

direita de todas as colunas iguais a s_5 . Se a solução tipo verificar ainda $x_1 = x_3$ (neste caso $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$), é possível transformar qualquer matriz de incidência B associada à solução, por aplicação de uma permutação sobre as suas linhas, numa matriz de incidência B' , associada à mesma solução, onde a última coluna é igual ao vetor s_3 , a penúltima coluna é igual a um dos vetores s_2 ou s_3 ou s_4 e, além disso, existe uma coluna igual a s_2 que está à direita de todas as colunas iguais a s_5 .

O corolário seguinte formaliza estas propriedades associadas às soluções tipo com quatro componentes iguais e com as seis componentes iguais.

Corolário 5.10. *Seja B uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ associada a uma solução tipo $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ do sistema (5.7). Se B verifica uma das condições (5.11), (5.12) ou (5.13) da Proposição 5.9 e*

(a) $x_1 = x_2 \leq x_3$ ou $x_1 \leq x_2 = x_3$, então existe uma matriz de permutação P tal que $B' = PB$ é uma matriz de incidência associada à mesma solução e

$$(n \in C'_1 \cup C'_3) \wedge (C'_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists q' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q' > q); \quad (5.14)$$

(b) $x_1 = x_2 = x_3 \neq 0$, então existe uma matriz de permutação P tal que $B' = PB$ é uma matriz de incidência associada à mesma solução e

$$(n \in C'_3) \wedge (n - 1 \in C'_2 \cup C'_3 \cup C'_4) \wedge (\exists q' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q' > q); \quad (5.15)$$

onde C'_i é o subconjunto dos índices das colunas de B' iguais a s_i , para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Demonstração. (a) Seja B uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que se obtém da solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ do sistema (5.7) e que verifica uma das condições (5.11), (5.12) ou (5.13) da Proposição 5.9. Então B tem x_i colunas iguais a s_i e x_i colunas iguais a s_{7-i} , $i = 1, 2, 3$.

Seja C_i , com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ o subconjunto dos índices das n colunas da matriz de incidência B iguais a s_i .

Caso 1: Se $n \in C_2$ (B verifica (5.12)) e $x_1 = x_2 \leq x_3$, a matriz de incidência B tem a última coluna igual ao vetor s_2 e o número das colunas iguais a s_2 é igual ao número das colunas s_1 . Então, a matriz $B' = P_i B$ ($i \in \{1, 2\}$), onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes de permutação que transformam B numa matriz de incidência B' com a última coluna igual a s_1 ($n \in C'_1$).

- P_1 troca os vetores s_2 com s_1 ($C'_1 = C_2$ e $C'_2 = C_1$) e os vetores s_6 com s_5 ($C'_5 = C_6$ e $C'_6 = C_5$), mantendo os vetores s_3 e s_4 ($C'_3 = C_3$ e $C'_4 = C_4$);
- P_2 transforma os vetores s_2 em s_1 ($C'_1 = C_2$), os vetores s_1 em s_5 ($C'_5 = C_1$), os vetores s_5 em s_6 ($C'_6 = C_5$), os vetores s_6 em s_2 ($C'_2 = C_6$) e troca os vetores s_3 com s_4 ($C'_3 = C_4$ e $C'_4 = C_3$).

Para verificar a 2ª parte da condição (5.14) analisemos de novo as matrizes de permutação P_1 e P_2 .

- Se existe em B uma coluna igual a s_1 à direita de todas as colunas iguais a s_6 , então $B' = P_1B$ verifica a condição (5.14);
- Caso contrário, existe uma coluna igual a s_6 à direita de todas as colunas iguais a s_1 , então $B' = P_2B$ verifica a condição (5.14).

Caso 2: Se $n \in C_2$ (B verifica (5.12)) e $x_1 \leq x_2 = x_3$, a matriz de incidência B tem a última coluna igual a s_2 e o número das colunas iguais a s_2 é igual ao número das colunas s_3 . Então, a matriz $B' = P_iB$ ($i \in \{1, 2\}$), onde

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são matrizes de permutação que transformam B numa matriz de incidência B' com a última coluna igual a s_3 ($n \in C'_3$).

- P_1 troca os vetores s_2 com s_3 ($C'_2 = C_3$ e $C'_3 = C_2$) e os vetores s_4 com s_5 ($C'_4 = C_5$ e $C'_5 = C_4$), mantendo os vetores s_1 e s_6 ($C'_1 = C_1$ e $C'_6 = C_6$);

- P_2 transforma os vetores s_2 em s_3 ($C'_3 = C_2$), os vetores s_3 em s_5 ($C'_5 = C_3$), os vetores s_5 em s_4 ($C'_4 = C_5$), os vetores s_4 em s_2 ($C'_2 = C_4$) e troca os vetores s_1 com s_6 ($C'_1 = C_6$ e $C'_6 = C_1$).

Para verificar a 2ª parte da condição (5.14) analisemos de novo as matrizes de permutação P_1 e P_2 .

- Se existe em B uma coluna igual a s_3 à direita de todas as colunas iguais a s_4 , então $B' = P_1B$ verifica a condição (5.14);
- Caso contrário, existe uma coluna igual a s_4 à direita de todas as colunas iguais a s_3 , então $B' = P_2B$ verifica a condição (5.14).

Caso 3: Se $n \in C_1$ (B verifica (5.11)) e não existe $q' \in C_2, \forall q \in C_5, q' > q$, então

$$B' = PB \text{ com matriz de permutação } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ verifica a condição (5.14),}$$

pois a matriz de permutação P mantém inalteradas as colunas iguais a s_1 e s_6 ($C'_1 = C_1$ e $C'_6 = C_6$), troca as colunas iguais a s_2 com s_5 ($C'_2 = C_5$ e $C'_5 = C_2$) e troca as colunas s_3 com s_4 ($C'_3 = C_4$, $C'_4 = C_3$).

Caso 4: Se $n \in C_3$ (B verifica (5.13)) e não existe $q' \in C_2, \forall q \in C_5, q' > q$, então $B' =$

$$PB, \text{ com } P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ verifica a condição (5.14), pois a matriz de permutação}$$

P mantém inalteradas as colunas iguais a s_3 e s_4 ($C'_3 = C_3$ e $C'_4 = C_4$), troca as colunas s_1 com s_6 ($C'_1 = C_6$ e $C'_6 = C_1$) e troca as colunas s_2 com s_5 ($C'_2 = C_5$, $C'_5 = C_2$).

Observe-se ainda que, se $x_1 = 0$ ($C_1 = \emptyset$) ou $x_1 = x_2 = 0$ ($C_1 = C_2 = \emptyset$), então $n \in C'_3 = C_3$ e, se $C'_2 \neq \emptyset$, existe $q' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q' > q$, como já foi verificado anteriormente.

Assim, se a solução é da forma $(x_1, x_1, x_3, x_3, x_1, x_1)$ ou $(x_1, x_3, x_3, x_3, x_3, x_1)$ é satisfeita a condição $n \in C'_1 \cup C'_3 \wedge (C'_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists q' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q' > q)$.

- (b) Seja B uma matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que se obtém da solução

$(x_1, x_1, x_1, x_1, x_1, x_1)$ do sistema (5.7). Note-se que, neste caso, $x_1 = x_2$ e $x_2 = x_3$. Consequentemente pode considerar-se que B verifica a condição (5.14), ou seja, $n \in C_1 \cup C_3$ e se $C_2 \neq \emptyset$, então $\exists q' \in C_2, \forall q \in C_5, q' > q$.

Se $n \notin C_3$, então $n \in C_1$, ou seja, a matriz de incidência B tem a última coluna igual a

s_1 . Fazendo $B'' = P_1 B$ com $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, as colunas iguais a s_1 trocam com as

colunas s_3 , as colunas s_6 trocam com s_4 , mantendo inalteradas as colunas s_2 e s_5 . Note-se que $x_1 = x_2 = x_3$ e portanto, $|C_1| = |C_2| = |C_3| = |C_4| = |C_5| = |C_6|$. Desta forma, B'' é uma matriz de incidência associada à mesma solução que B , com a última coluna igual a s_3 e onde a coluna mais à direita igual a s_2 tem índice superior a qualquer dos índices das colunas iguais a s_5 .

Analisemos então a penúltima coluna da matriz B'' :

- Se a matriz B'' tem a penúltima coluna igual a s_3, s_2 ou s_4 , então verifica (5.15) e $B' = B''$.
- Caso contrário, a penúltima coluna de B'' é igual a s_1 ou s_6 . Observe-se que não pode ser igual a s_5 porque B verifica a condição (5.14) e P mantém inalteradas as colunas iguais aos vetores s_2 e s_5 , logo a última coluna é igual a s_3 e todas as colunas iguais a s_5 estão à esquerda de uma coluna igual a s_2 .

– Se $n - 1 \in C_1$, ou seja, a penúltima coluna é igual a s_1 , então $B' = P_2 B''$ com

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ isto é, } B' = (P_2 P_1) B. \text{ Esta permutação não altera } s_3$$

(última coluna da matriz) e como a penúltima coluna fica igual a s_2 , todas as colunas s_5 aparecem à sua esquerda, logo B' verifica a condição (5.15).

– Se $n - 1 \in C_6$, ou seja, a penúltima coluna for igual a s_6 , então $B' = P_3 B''$

$$\text{com matriz de permutação } P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ isto é, } B' = (P_3 P_1) B. \text{ Esta}$$

permutação não altera a última coluna, igual a s_3 , e como a penúltima coluna fica igual a s_2 , todas as colunas s_5 aparecem à sua esquerda, logo B' verifica a condição (5.15).

Em qualquer dos casos descritos a matriz de incidência B' obtém-se por uma permutação sobre as linhas de B . □

5.2.4 Algoritmo

Nesta secção propõe-se um algoritmo para construir o conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}_1, \preceq) que contém os 163 grafos regulares excepcionais da 1ª camada.

A construção de um grafo regular excepcional G_{m+1} , de ordem n , por uma sequência de $(m+1)$ (0, 2)-extensões, a partir de um grafo minimal $G_0 \in \mathcal{L}_1$, reduz-se à construção de matrizes de incidência B_m de designs $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$. De acordo com o Corolário 5.3, G_{m+1} admite uma $(m+2)$ -partição equilibrada. Considerando n_1 como sendo a ordem do grafo minimal G_0 , a matriz de incidência B_m (ver (5.3)) é partida em $m = \frac{n-n_1}{4} - 1$ matrizes de incidência $B_m^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$, de designs $1 - (4, 2, 2)$ e uma matriz de incidência $B_m^{(0)}$ de um design $1 - (4, 2, p)$, onde $p = \frac{n_1}{2}$ (note-se que $2n_1 = 4p$).

Para construir a matriz B_m consideram-se as soluções tipo definidas em (5.10) e as condições estabelecidas na Proposição 5.9 e Corolário 5.10.

As soluções tipo $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ do sistema de equações lineares (5.7) associadas às matrizes de incidência $B_m = \begin{bmatrix} B_m^{(m)} & B_m^{(m-1)} & \dots & B_m^{(1)} & B_m^{(0)} \end{bmatrix}$ são determinadas pelas soluções

$$X_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, x_{3_0}, x_{2_0}, x_{1_0}), \text{ com } x_{1_0} + x_{2_0} + x_{3_0} = \frac{n_1}{2}, \quad (5.16)$$

associadas às submatrizes de incidência $B_m^{(0)}$ de designs $1 - (4, 2, \frac{n_1}{2})$, e pelas soluções

$$X_i = (x_{1_i}, x_{2_i}, x_{3_i}, x_{3_i}, x_{2_i}, x_{1_i}), \text{ com } x_{1_i} + x_{2_i} + x_{3_i} = 2, \quad (5.17)$$

associadas às submatrizes de incidência $B_m^{(i)}$ de designs $1 - (4, 2, 2)$ ($i = 1, \dots, m$), tais que

$$\sum_{i=1}^m X_i + X_0 = \sum_{i=0}^m (x_{1_i}, x_{2_i}, x_{3_i}, x_{3_i}, x_{2_i}, x_{1_i}) = (x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1), \quad (5.18)$$

com $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$ e $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Exemplo 5.11. Considere-se a construção de uma cadeia de grafos de \mathcal{L}_1 por $(0, 2)$ -extensões que induzem partições equilibradas, em que o grafo minimal é $G_0 = 3K_2$, pelo que

$$A_{3K_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $G_1 \in \mathcal{L}_1$ o grafo 3-regular de ordem 10 que se obtém de G_0 por uma $(0, 2)$ -extensão que induz uma partição equilibrada. Para determinar uma matriz de incidência B de um design $1 - (4, 2, 3)$, considera-se uma solução tipo (5.10) do sistema de equações lineares (5.7), isto é, uma solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ com $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ e $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 3$. Considere-se, por exemplo, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. A matriz de incidência B tem como colunas x_i vetores s_i e x_i vetores s_{7-i} , com $i = 1, 2, 3$, que são os vetores característicos dos blocos de um design $1 - (4, 2, 3)$ e estão descritos em (5.5). Uma matriz B associada à solução tipo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ tem uma coluna s_2 , uma coluna s_5 , duas colunas s_3 e duas colunas s_4 . Considere-se um 6-tuplo com os índices destes vetores, por exemplo 544332, e determine-se um arranjo destes índices nas condições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10. Para que o grafo G_1 resultante da $(0, 2)$ -extensão pertença a \mathcal{L}_1 , o arranjo das colunas de B tem que ser feito por forma a que o menor valor próprio da matriz de adjacência $A_{G_1} = \begin{bmatrix} O_4 & B \\ B^T & A_{3K_2} \end{bmatrix}$ seja igual a -2 .

Considerando o 6-tuplo 443352, resultante de um arranjo dos índices dos vetores s_i , associado à solução $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$, obtém-se a matriz de incidência

$$B = \begin{matrix} & s_4 & s_4 & s_3 & s_3 & s_5 & s_2 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & & & & & \end{matrix} \text{ que dá origem à matriz de adjacência}$$

$$A_{G_1} = \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

que corresponde ao grafo G_1 isomorfo ao grafo regular excecional Z_1 representado na Figura 5.1.

O grafo G_1 admite uma bipartição equilibrada $\pi = (V(H), V(G_0))$ com matriz quociente $A_{G_1/\pi} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Considere-se, agora, a construção de um grafo 5-regular $G_2 \in \mathcal{L}_1$, de ordem 14, através de uma (0, 2)-extensão que induz uma partição equilibrada do grafo G_1 . Pelo Teorema 2.5 um design $1 - (4, 2, 5)$ tem 10 blocos. Logo, a matriz de incidência B_1 tem dimensão 4×10 e admite a seguinte partição em blocos $B_1 = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} & B_1^{(0)} \end{bmatrix}$ onde $B_1^{(1)}$ é a matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, 3)$ e $B_1^{(0)}$ é a matriz de incidência de um design $1 - (4, 2, 3)$.

O conjunto das soluções X_1 associadas à construção da matriz de incidência $B_1^{(1)}$ é

$$\{(2, 0, 0, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 0, 2, 0), (0, 0, 2, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 1, 0)\},$$

enquanto o conjunto de soluções X_0 associadas à construção da matriz de incidência $B_1^{(0)}$ é

$$\{(0, 1, 2, 2, 1, 0), (0, 2, 1, 1, 2, 0), (1, 2, 0, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 0, 1, 2), (1, 0, 2, 2, 0, 1), (2, 0, 1, 1, 0, 2), \\ (1, 1, 1, 1, 1, 1), (0, 0, 3, 3, 0, 0), (0, 3, 0, 0, 3, 0), (3, 0, 0, 0, 0, 3)\}.$$

Assim, para obter, por exemplo, a solução tipo $(1, 1, 3, 3, 1, 1)$ associada à matriz de incidência B_1 , devem ser escolhidas soluções X_1 e X_0 que satisfaçam a igualdade (5.18), isto é,

$$\sum_{i=0}^1 X_i = \sum_{i=0}^1 (x_{1_i}, x_{2_i}, x_{3_i}, x_{3_i}, x_{2_i}, x_{1_i}) = (1, 1, 3, 3, 1, 1).$$

Existem 3 possibilidades para obter a solução tipo $(1, 1, 3, 3, 1, 1)$:

- $X_1 = (1, 1, 0, 0, 1, 1)$ e $X_0 = (0, 0, 3, 3, 0, 0)$;
- $X_1 = (0, 1, 1, 1, 1, 0)$ e $X_0 = (1, 0, 2, 2, 0, 1)$;
- $X_1 = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$ e $X_0 = (0, 1, 2, 2, 1, 0)$.

Note-se que as soluções X_0 e X_1 não têm que ser soluções tipo, mas a solução que resulta da soma destas, e que está associada à determinação da matriz de incidência B_1 de um design $1 - (4, 2, 5)$, tem de ser uma solução tipo.

Considere-se $(1, 1, 3, 3, 1, 1) = (0, 1, 1, 1, 1, 0) + (1, 0, 2, 2, 0, 1)$. Para determinar as matrizes de incidência $B_1^{(1)}$ e $B_1^{(0)}$ consideramos arranjos com repetição dos índices i das colunas s_i de acordo com as soluções X_1 e X_0 , por forma a que a sua concatenação verifique a condições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10. Por exemplo, a concatenação da sequência 5432, relativa à solução $(0, 1, 1, 1, 1, 0)$, com a sequência 644331, relativa à solução $(1, 0, 2, 2, 0, 1)$, resulta na sequência 5432644331, relativa à solução $(1, 1, 3, 3, 1, 1)$. Uma vez que esta solução tipo tem 4 componentes iguais ($x_1 = x_2 = 1$) verifica-se a condição $n \in C'_1 \cup C'_3 \wedge (C'_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists q' \in C'_2, \forall q \in C'_5, q' > q)$ do Corolário 5.10. Se o grafo resultante G_2 (ver Figura 5.3) tiver menor valor próprio -2 (como é o caso do grafo escolhido para este exemplo), então faz parte de \mathcal{L}_1 .

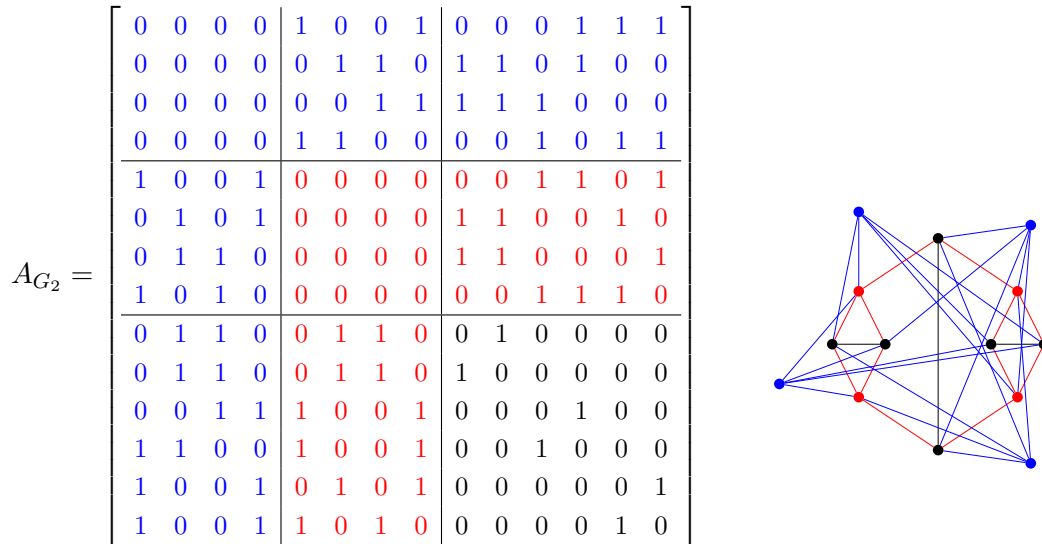


Figura 5.3: Matriz de adjacência e grafo G_2 isomorfo ao grafo 31 da Figura 5.8.

A Tabela 5.2 resume o número total de matrizes de incidência dos designs $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ que permitem obter grafos $G_{m+1} \in \mathcal{L}_1$, por uma $(0, 2)$ -extensão de G_m , em função do número de blocos, considerando os vários métodos para reduzir a construção de grafos isomorfos.

A primeira coluna da tabela refere-se ao número de blocos n (a ordem do grafo G_m a estender). Na 2ª coluna tem-se o número total de matrizes de incidência associadas a todas as soluções (5.8) do sistema de equações lineares (5.7). Na 3ª coluna consideram-se apenas as soluções tipo (5.10), ou seja, as soluções do sistema que verificam $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$, com $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. Na 4ª coluna considera-se o número de matrizes de incidência associadas a soluções tipo e que satisfazem as condições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10. Na 5ª e última coluna tem-se o número de matrizes obtido quando se acrescenta, ao caso descrito na 4ª coluna, o facto das matrizes de incidência resultarem da concatenação de várias submatrizes (ver (5.3)), relativas à partição equilibrada.

blocos n	sem restrição	solução tipo $x_1 \leq x_2 \leq x_3$	Prop. 5.9 e Cor. 5.10	$(m + 2)$ -partição equilibrada	
6	1860	920	91	91 ($m = -1$)	
8	44730	13790	2520	2520 ($m = -1$)	
10	1172556	359352	62181	8790 ($m = 0$)	62181 ($m = -1$)
12	32496156	12254 088	1508703	186375 ($m = 0$)	1508703 ($m = -1$)
14	936369720	268399560	48866532	762840 ($m = 1$)	5422788 ($m = 0$)
16	27.770e+009	7.8333e+009	1.4289e+009	18220230 ($m = 1$)	148642956 ($m = 0$)
18	84.209e+010	27.837e+010	3.8991e+010	62707176 ($m = 2$)	
20	25.989e+012	7.0310e+012	1.3138e+012	1606061520 ($m = 2$)	
22	81.369e+013	21.688e+013	4.0816e+013	5.9423e+009 ($m = 3$)	
24	25.780e+015	7.8512e+015	1.1907e+015	1.4884e+011 ($m = 3$)	

Tabela 5.2: Número total de matrizes de incidência produzidas para construir o grafo G_{m+1} em função do número de blocos do design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$.

Da aplicação do algoritmo que a seguir se descreve, verifica-se que existem dois grafos regulares excepcionais da 1ª camada que não resultam da extensão dos grafos minimais de ordem 6 ou 8, mas da extensão do grafo linha desconexo L_1 , de ordem 10, e do grafo linha L_2 , de ordem 12, representados na Figura 5.4.

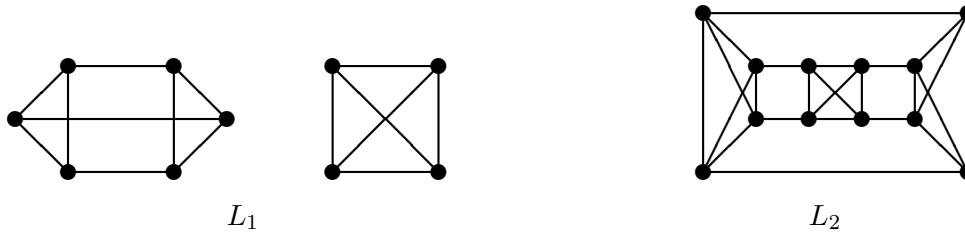


Figura 5.4: Grafos linha minimais L_1 e L_2 .

Da $(0, 2)$ -extensão dos grafos linha L_1 e L_2 resultam grafos regulares excepcionais de ordem 14 e 16, respetivamente, que por sua vez dão origem, por uma $(0, 2)$ -extensão, a grafos regulares excepcionais de ordem 18 e 20, respetivamente. Mas estes grafos de ordem 18 e 20 são isomorfos a grafos que se obtêm por uma sequência de $(0, 2)$ -extensões dos grafos linha minimais de ordem 6 e 8, respetivamente. Devido à existência do grafo minimal L_1 existem grafos de ordem 14 que se obtêm a partir do grafo minimal 6 ou por uma extensão de L_1 . E, devido à existência do grafo minimal L_2 , existem grafos de ordem 16 que se obtêm por uma sequência de duas extensões de um grafo minimal de ordem 8 ou por uma extensão do grafo L_2 . Estas construções dão origem à produção de um maior número de matrizes de incidência, números que são apresentados na última coluna da Tabela 5.2.

Os cálculos necessários à obtenção dos resultados apresentados na Tabela 5.2 bem como uma breve análise ao esforço computacional do algoritmo que a seguir se propõe encontram-se no Apêndice A.1.

O Algoritmo 1 descreve mais formalmente os procedimentos a seguir na construção dos grafos regulares de (\mathcal{L}_1, \preceq) . Seja \mathcal{G}_m o conjunto dos grafos regulares de ordem $4m + n_1$. O Algoritmo 1 determina o conjunto \mathcal{G}_{m+1} dos grafos G_{m+1} que se obtêm de $G \in \mathcal{G}_m$ por $(0, 2)$ -extensões que induzem $(m + 2)$ -partições equilibradas. Para cada $G \in \mathcal{G}_m$, $\text{succ}(G)$ denota o conjunto dos sucessores do grafo G .

Algoritmo 1 Construção dos grafos de (\mathcal{L}_1, \preceq) , de ordem $n + 4$, que se obtêm por (0, 2)-extensões que induzem $(m + 2)$ -partições equilibradas dos grafos de ordem n .

DADOS: O conjunto dos grafos \mathcal{G}_m , de ordem $n = 4m + n_1$.

RESULTADOS: O conjunto dos grafos \mathcal{G}_{m+1} e lista dos conjuntos dos sucessores de $\text{succ}(G)$.

- 1: Determina o conjunto \mathcal{S}_0 das soluções $X_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0}, x_{3_0}, x_{2_0}, x_{1_0})$ definidas por (5.16).
 - 2: Determina o conjunto \mathcal{S}_i das soluções $X_i = (x_{1_i}, x_{2_i}, x_{3_i}, x_{3_i}, x_{2_i}, x_{1_i})$ definidas por (5.17).
 - 3: Determina o conjunto \mathcal{S} de todos os arranjos das soluções tipo $X = [X_m \cdots X_1 X_0]$ que verificam (5.18).
 - 4: **Fazer** $\mathcal{G}_{m+1} := \emptyset$
 - 5: **Para Cada** $G \in \mathcal{G}_m$ **Fazer** $\text{succ}(G) := \emptyset$ **FimFazer**.
 - 6: **Para Cada** $X \in \mathcal{S}$ **Fazer**
 - 7: Seja $b = [b_m \cdots b_1 b_0]$ um $(4m + n_1)$ -uplo resultante da concatenação dos m 4-uplos b_i ($i = 1, \dots, m$) e um n_1 -uplo b_0 . Em cada 4-uplo b_i ($i = 1, \dots, m$) existem x_{j_i} entradas iguais a $j = 1, 2, 3$ e x_{j_i} entradas iguais a $7 - j$ e no n_1 -uplo b_0 existem x_{j_0} entradas iguais a $j = 1, 2, 3$ e x_{j_0} entradas iguais a $7 - j$.
 - 8: **Para Cada** $(m + 1)$ -uplo $\rho = [\rho_m \cdots \rho_1 \rho_0]$ que se obtêm de b onde ρ_i é uma permutação de b_i **Fazer**
 - 9: **Se** ρ verifica as condições da Proposição 5.9 e Corolário 5.10
 - 10: **Então** construir a matriz de incidência B com os vetores característicos s_j e s_{7-j} (5.5) definidos pelas entradas do $4m + n_1$ -uplo ρ .
 - 11: **Para** $G \in \mathcal{G}_m$ **Fazer** $A_{G'} := \begin{bmatrix} 0_4 & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix}$.
 - 12: **Se** $\lambda_{\min}(G') = -2$ **Então**
 - 13: **Se** G' não é isomorfo a algum grafo de \mathcal{G}_{m+1}
 - 14: **Então** $\mathcal{G}_{m+1} := \mathcal{G}_{m+1} \cup \{G'\}$ e
 $\text{succ}(G) := \text{succ}(G) \cup \{G'\}$.
 - 15: **Senão Se** $G' \cong G'' \in \mathcal{G}_{m+1}$ **Então** $\text{succ}(G) := \text{succ}(G) \cup \{G''\}$
 - 16: **FimSe**
 - 17: **FimSe**
 - 18: **FimFazer**
 - 19: **FimSe**
 - 20: **FimFazer**
 - 21: **FimFazer**
-

5.3 Construção dos grafos regulares excepcionais da 2ª camada por $(0, 2)$ -extensões

Utilizando a técnica de construção por (κ, τ) -extensões descrita no Capítulo 3, pretende-se agora construir o conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}_2, \preceq) dos grafos regulares G' com $\lambda_{\min}(G') \geq -2$ que se obtêm por uma $(0, 2)$ -extensão de G , fazendo $G' = H \oplus G$ tal que G é um grafo r -regular de ordem $n \leq 27$, com $r = \frac{2n}{3} - 2$ (ver Teorema 4.20), e H é um grafo nulo (0-regular) de ordem 3. Recorde-se que o conjunto \mathcal{L}_2 inclui os grafos excepcionais da 2ª camada. Desta forma $(V(H), \mathcal{S})$ define um design $1-(3, 2, \frac{2n}{3})$. Os grafos regulares excepcionais da 2ª camada de menor ordem são os grafos de ordem 9 e regularidade 4, da Figura 5.5. Estes grafos obtêm-se por uma $(0, 2)$ -extensão de tamanho 3 do grafo linha C_6 (subgrafo induzido pelos vértices representados pelos círculos pequenos no grafo da esquerda na Figura 5.5) e do grafo desconexo $2K_3$ (subgrafo induzido pelos vértices representados pelos círculos pequenos no grafo da direita na Figura 5.5). Para construir o diagrama de Hasse que representa o conjunto parcialmente ordenado \mathcal{L}_2 , considera-se os grafos r -regulares de ordem n , com $r = \frac{2n}{3} - 2$ e $6 \leq n \leq 27$.

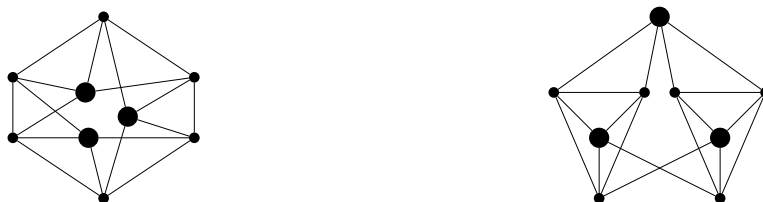


Figura 5.5: Grafos regulares excepcionais minimais da 2ª camada.

A matriz de adjacência dos grafos G' de ordem $|S| + |V(G)| = 3 + n$ e regularidade $r = \frac{2(3+n)}{3} - 2 = \frac{2n}{3}$ que se obtêm por uma $(0, 2)$ -extensão do grafo G de ordem n e regularidade $\frac{2n}{3} - 2$ é da forma

$$A_{G'} = \begin{bmatrix} A_H & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix},$$

onde A_H é a matriz de adjacência do grafo H , isto é, a matriz nula de ordem 3, A_G é a matriz de adjacência do grafo G de ordem n e B é uma matriz de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$.

De facto, para construir cada matriz de adjacência do grafo $G' = H \oplus G$ é preciso determinar uma matriz de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$, com 3 linhas e n colunas.

5.3.1 Construção das matrizes de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$

Seja $H = 3K_1$ com $V(H) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Recorde-se (ver Subsecção 5.2.1) que \mathcal{S} é uma família de subconjuntos de $V(H)$ cada um dos quais com $\tau = 2$ elementos, logo $\mathcal{S} \subseteq \{S_1, S_2, S_3\}$ onde S_1, S_2, S_3 representam todos os subconjuntos de 2 elementos de \mathcal{S} e

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.19)$$

são os respetivos vetores característicos.

Cada matriz de incidência dos designs $(V(H), \mathcal{S})$ tem como colunas os vetores de forma a que cada vértice de G seja adjacente a dois vértices de $V(H)$ e cada vértice de $V(H)$ apareça em $\frac{2n}{3}$ blocos. O número de colunas de B iguais a cada um dos vetores característicos acima indicados pode ser determinado pelas soluções inteiras não negativas do sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \end{bmatrix}.$$

Além disso, o número total de blocos é n , isto é, a ordem do grafo G , logo temos ainda que $x_1 + x_2 + x_3 = n$. No entanto, esta equação é desnecessária, pois resulta da soma das 3 equações do sistema. Note-se que o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2n}{3} \\ x_1 + x_3 = \frac{2n}{3} \\ x_2 + x_3 = \frac{2n}{3} \end{cases} \quad (5.20)$$

tem uma única solução $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3})$, com $6 \leq n \leq 27$. Para construir uma matriz de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$ consideram-se $\frac{n}{3}$ colunas da matriz iguais a s_i , $i = 1, 2, 3$.

Exemplo 5.12. A solução $(2, 2, 2)$ significa que existem matrizes de incidência de designs $1 - (3, 2, 4)$ com 6 blocos (ver Teorema 2.5), que têm 2 colunas iguais a s_i , $i = 1, 2, 3$, onde

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } s_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma obtém-se, por exemplo, a matriz de incidência $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ou a matriz

de incidência $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ que resulta de uma outra disposição dos vetores s_i nas colunas da matriz.

Note-se que a partir da solução do sistema (5.20), podem ser construídas diferentes matrizes de incidência que diferem entre si pela disposição das colunas s_i , $i = 1, 2, 3$, na matriz.

Sejam B_1 e B_2 duas matrizes de incidência associadas a uma solução do sistema (5.20), que diferem entre si por uma permutação de linhas. Da Proposição 3.3, os grafos G_1 e G_2 que se obtêm por uma $(0, 2)$ -extensão de G com matrizes de adjacência, respetivamente,

$$A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^T & G \end{bmatrix} \text{ e } A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & G \end{bmatrix},$$

são isomorfos.

Exemplo 5.13. Considere-se o grafo $G = 2K_3$ de ordem 6 e regularidade 2, com matriz de adjacência

$$A_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e duas matrizes de incidência do design $1 - (3, 2, 4)$:

$$B_1 = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 & s_3 & s_2 & s_3 & s_2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} s_1 & s_1 & s_2 & s_3 & s_2 & s_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz de incidência $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B_1$, conseqüentemente os grafos $G_1 = H \oplus 2K_3$ e $G_2 = H' \oplus 2K_3$, tais que $V(2K_3) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$, $V(H) = \{1, 2, 3\}$ e $V(H') = \{1', 2', 3'\}$ com matrizes de adjacência $A_{G_1} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_1^T & A_{2K_3} \end{bmatrix}$ e $A_{G_2} = \begin{bmatrix} 0 & B_2 \\ B_2^T & A_{2K_3} \end{bmatrix}$ são isomorfos.

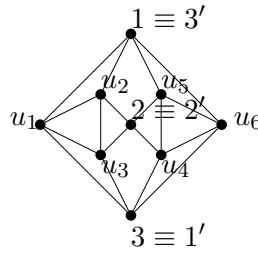


Figura 5.6: Grafos isomorfos obtidos por matrizes de incidência diferentes de um design $1 - (3, 2, 4)$

A proposição seguinte mostra que qualquer matriz de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$ associada à solução $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ pode ser transformada, através de uma permutação sobre as suas linhas, numa matriz de incidência $B' = [b'_{ij}]$, cuja última coluna é igual a s_1 e existe uma coluna igual a s_2 à direita de todas as colunas iguais a s_3 .

Proposição 5.14. *Qualquer matriz de incidência B de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$, associada a uma solução inteira não negativa $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ do sistema (5.20) pode ser transformada, através de uma permutação sobre as suas linhas, numa matriz B' associada à mesma solução que assume a seguinte forma:*

$$n \in C'_1 \wedge (\exists q \in C'_2, \forall q' \in C'_3, q > q'), \tag{5.21}$$

onde C'_i , com $i = 1, 2, 3$ é o subconjunto dos índices das n colunas de B' iguais a s_i de (5.19).

Demonstração. Seja B uma matriz de incidência de um design $1 - (3, 2, \frac{2n}{3})$ que se obtém da solução $(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3})$ do sistema (5.20). Então B tem $\frac{n}{3}$ colunas iguais a s_i , $i = 1, 2, 3$.

Seja C_i , com $i = 1, 2, 3$, o subconjunto dos índices das n colunas da matriz de incidência B iguais a s_i . Suponhamos que a última coluna de B é diferente de s_1 , ou seja, $n \in C_2 \cup C_3$.

Caso 1: Se $n \in C_2$, a matriz de incidência B tem a última coluna igual a s_2 . Então a

matriz $B' = P_i B$ ($i = 1, 2$), onde $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes de permutação que transformam B numa matriz B' com s_1 na última coluna ($n \in C'_1$).

Note-se que B' é uma matriz de incidência associada à mesma solução do sistema que a matriz B , pois estas permutações traduzem-se por trocas entre colunas com vetores s_i ($i = 1, 2, 3$) que existem em igual número em cada matriz:

- P_1 mantém inalteradas as colunas iguais a s_3 ($C'_3 = C_3$) e troca as colunas s_2 com s_1 ($C'_2 = C_1$ e $C'_1 = C_2$);
- P_2 transforma as colunas s_2 em s_1 ($C'_1 = C_2$), as colunas s_3 em s_2 ($C'_2 = C_3$) e transforma as colunas s_1 em s_3 ($C'_3 = C_1$).

Temos duas situações possíveis na matriz B :

- Se a última coluna é igual a s_2 e existe uma coluna s_1 à direita de todas as colunas iguais a s_3 , então fazendo $B' = P_1 B$, verifica (5.21), ou seja

$$B = \begin{bmatrix} & s_3 & & s_1 & & s_2 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} & s_3 & & s_2 & & s_1 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

- Se a última coluna é igual a s_2 e existe uma coluna s_3 à direita de todas as colunas iguais a s_2 , então fazendo $B' = P_2 B$, verifica-se (5.21), ou seja,

$$B = \begin{bmatrix} & s_1 & & s_3 & & s_2 \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' = \begin{bmatrix} & s_3 & & s_2 & & s_1 \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Caso 2: Se $n \in C_3$, a matriz de incidência B tem a última coluna igual a s_3 . Então a matriz

$$B' = P_i B \quad (i = 1, 2), \text{ onde } P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ são matrizes de permutação}$$

que transformam B num matriz de incidência B' com a última coluna igual a s_1 ($n \in C'_1$):

- P_1 transforma as colunas s_3 em s_1 ($C'_1 = C_3$), as colunas s_1 em s_2 ($C'_2 = C_1$) e transforma as colunas s_2 em s_3 ($C'_3 = C_2$);
- P_2 mantém inalteradas as colunas iguais a s_2 ($C'_2 = C_2$), troca as colunas s_3 com s_1 ($C'_1 = C_3$ e $C'_3 = C_1$).

Temos duas situações possíveis na matriz B :

- Se a última coluna da matriz de incidência B é igual a s_3 e existe uma coluna s_1 à direita de todas as colunas iguais a s_2 , então escolhe-se a matriz de permutação P_1 e obtém-se uma matriz B' que verifica (5.21).
- Se a última coluna da matriz de incidência B é igual a s_3 e existe uma coluna s_2 à direita de todas as colunas iguais a s_1 , então escolhe-se a matriz de permutação P_2 para obter a matriz B' pretendida.

Caso 3: Se $n \in C_1$, mas não se verifica a condição $\exists q \in C'_2, \forall q' \in C'_3, q > q'$, ou seja, a última coluna da matriz de incidência B é igual a s_1 mas não existe uma coluna igual a s_2 à direita

de todas as colunas iguais a s_3 , então $B' = PB$ onde $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de

permutação que mantém inalterado o vetor s_1 mas transforma s_2 (s_3) em s_3 (s_2) obtendo-se a matriz de incidência B' nas condições pretendidas. \square

Considere-se uma cadeia de grafos regulares da 2ª camada $G_0 \preceq G_1 \preceq \dots \preceq G_{m+1}$ ($m \geq 0$) onde G_{m+1} é obtido de G_0 por uma sequência de $m + 1$ (0, 2)-extensões. Pela Corolário 5.3, cada grafo G_j ($1 \leq j \leq m + 1$) admite uma $(j + 1)$ -partição equilibrada que mantém os conjuntos (0, 2)-regulares introduzidos em cada passo. Assim, tendo em vista a construção dos grafos da 2ª camada desenvolveu-se o Algoritmo 2, análogo ao Algoritmo 1 descrito no caso da construção dos grafos excepcionais regulares da 1ª camada.

Algoritmo 2 Construção dos grafos de (\mathcal{L}_2, \preceq) , de ordem $n + 3$, que se obtêm por $(0, 2)$ -extensões que induzem $(m + 2)$ -partições equilibradas dos grafos de ordem n .

DADOS: O conjunto dos grafos \mathcal{G}_m , de ordem $n = 3m + 6$.

RESULTADOS: O conjunto dos grafos \mathcal{G}_{m+1} e lista dos conjuntos dos sucessores de $\text{succ}(G)$.

- 1: Determina o conjunto \mathcal{S}_0 das soluções $X_0 = [2 \ 2 \ 2]$.
 - 2: Determina o conjunto \mathcal{S}_i das soluções $X_i = [1 \ 1 \ 1]$.
 - 3: Determina o conjunto \mathcal{S} de todos os arranjos das soluções tipo $X = [X_m \ \cdots \ X_1 \ X_0]$ tais que $\sum_{i=0}^m X_i$ é solução de (5.20).
 - 4: **Fazer** $\mathcal{G}_{m+1} := \emptyset$
 - 5: **Para Cada** $G \in \mathcal{G}_m$ **Fazer** $\text{succ}(G) := \emptyset$ **FimFazer**.
 - 6: **Para Cada** $X \in \mathcal{S}$ **Fazer**
 - 7: Seja $b = [b_m \ \cdots \ b_1 \ b_0]$ um $(3m + 6)$ -uplo resultante da concatenação dos m 3-uplos b_i ($i = 1, \dots, m$) e um 6-uplo b_0 . Em cada 3-uplo b_i ($i = 1, \dots, m$) existe um 1, um 2 e um 3 e no 6-uplo b_0 existem 2 uns, 2 dois e 2 três.
 - 8: **Para Cada** $(m + 1)$ -uplo $\rho = [\rho_m \ \cdots \ \rho_1 \ \rho_0]$ que se obtêm de b onde ρ_i é uma permutação de b_i **Fazer**
 - 9: **Se** ρ verifica as condições da Proposição 5.14
 - 10: **Então** construir a matriz de incidência B com os vetores característicos s_j (5.19) definidos pelas entradas do $3m + 6$ -uplo ρ .
 - 11: **Para** $G \in \mathcal{G}_m$ **Fazer** $A_{G'} := \begin{bmatrix} 0_3 & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix}$.
 - 12: **Se** $\lambda_{\min}(G') = -2$ **Então**
 - 13: **Se** G' não é isomorfo a algum grafo de \mathcal{G}_{m+1}
 - 14: **Então** $\mathcal{G}_{m+1} := \mathcal{G}_{m+1} \cup \{G'\}$ e
 $\text{succ}(G) := \text{succ}(G) \cup \{G'\}$.
 - 15: **Senão Se** $G' \cong G'' \in \mathcal{G}_{m+1}$ **Então** $\text{succ}(G) := \text{succ}(G) \cup \{G''\}$
 - 16: **FimSe**
 - 17: **FimSe**
 - 18: **FimFazer**
 - 19: **FimSe**
 - 20: **FimFazer**
 - 21: **FimFazer**
-

5.4 Construção dos grafos regulares excepcionais da 3ª camada por (1,3)-extensões

Os grafos regulares excepcionais da 3ª camada são apenas três e, pelo Teorema 4.20, têm ordem $n \in \{8, 12, 16\}$ e regularidade $r = \frac{3n}{4} - 2$. À semelhança dos grafos das 1ª e 2ª camadas, também é possível construir estes grafos usando a técnica das (κ, τ) -extensões descrita no Capítulo 3 mas, neste caso, recorrendo a (1,3)-extensões.

Em seguida, descreve-se a construção do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}_3, \preceq) , onde \mathcal{L}_3 é o conjunto dos grafos regulares G' , com $\lambda_{min} \geq -2$, que se obtêm por (1,3)-extensões do grafo minimal $G_0 = 2K_2$. Neste caso, $G' = H \oplus G$, onde G é um grafo r -regular de ordem $n \leq 16$ e regularidade $r = \frac{3n}{4} - 2$ (ver Teorema 4.20) e $H = 2K_2$. A construção de G' reduz-se à construção de matrizes de incidência de 1-designs $(V(H), \mathcal{S})$ com parâmetros $(4, 3, \frac{3n}{4})$, onde \mathcal{S} é uma família de subconjuntos de $V(H)$ cada um com $\tau = 3$ elementos. Consequentemente $\mathcal{S} \subseteq \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, onde S_1, S_2, S_3, S_4 representam os subconjuntos de $V(H)$ com três elementos e

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

são os vetores característicos respetivos. Cada matriz de incidência dos $(V(H), \mathcal{S})$ designs tem como colunas estes vetores, tais que cada vértice de G é adjacente a 3 vértices de $V(H)$ e cada vértice de $V(H)$ pertence a $\frac{3n}{4}$ blocos. O número de colunas da matriz de incidência igual a cada vetor característico s_i , $i = 1, 2, 3, 4$, pode ser determinado pelas soluções inteiras não negativas do sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3n}{4} \\ \frac{3n}{4} \\ \frac{3n}{4} \\ \frac{3n}{4} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

O sistema tem a solução $(\frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4}, \frac{n}{4})$, com $n \in \{4, 8, 16\}$. Para construir as matrizes de incidência dos designs $1-(4, 3, \frac{3n}{4})$ consideram-se $\frac{3n}{4}$ colunas da matriz iguais a s_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Pela Corolário 5.3, também neste caso se verifica que cada grafo G_j ($1 \leq j \leq m+1$) admite uma $(j+1)$ -partição equilibrada que mantém os conjuntos $(1, 3)$ -regulares ($1-3 = -2 = \lambda_{\min}$) introduzidos em cada passo. Com Algoritmo 3, análogo ao descrito para a 1ª camada, constroem-se os grafos da 3ª camada.

Algoritmo 3 Construção dos grafos de (\mathcal{L}_3, \preceq) , de ordem $n+4$, que se obtêm por $(1, 3)$ -extensões que induzem $(m+2)$ -partições equilibradas dos grafos de ordem n .

DADOS: O conjunto dos grafos \mathcal{G}_m , de ordem $n = 4m + 4$.

RESULTADOS: O conjunto dos grafos \mathcal{G}_{m+1} e lista dos conjuntos dos sucessores de $\text{succ}(G)$.

- 1: Determina o conjunto \mathcal{S}_i das soluções $X_i = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$.
 - 2: Determina o conjunto \mathcal{S} de todos os arranjos das soluções tipo $X = [X_m \ \cdots \ X_1 \ X_0]$ tais que $\sum_{i=0}^m X_i$ é solução de (5.23).
 - 3: **Fazer** $\mathcal{G}_{m+1} := \emptyset$
 - 4: **ParaCada** $G \in \mathcal{G}_m$ **Fazer** $\text{succ}(G) := \emptyset$ **FimFazer**.
 - 5: **ParaCada** $X \in \mathcal{S}$ **Fazer**
 - 6: Seja $b = [b_m \ \cdots \ b_1 \ b_0]$ um $(4m+4)$ -uplo resultante da concatenação dos $m+1$ 4-uplos b_i ($i = 0, \dots, m$), onde em cada 4-uplo b_i existem um 1, um 2, um 3 e um 4.
 - 7: **ParaCada** $(m+1)$ -uplo $\rho = [\rho_m \ \cdots \ \rho_1 \ \rho_0]$ que se obtém de b onde ρ_i é uma permutação de b_i
 - 8: **Fazer** construir a matriz de incidência B com os vetores característicos s_j (5.22) definidos pelas entradas do $(4m+4)$ -uplo ρ .
 - 9: **ParaCada** $G \in \mathcal{G}_m$ **Fazer** $A_{G'} := \begin{bmatrix} A_H & B \\ B^T & A_G \end{bmatrix}$.
 - 10: **Se** $\lambda_{\min}(G') = -2$ **Então**
 - 11: **Se** G' não é isomorfo a algum grafo de \mathcal{G}_{m+1}
 - 12: **Então** $\mathcal{G}_{m+1} := \mathcal{G}_{m+1} \cup \{G'\}$ e
 $\text{succ}(G) := \text{succ}(G) \cup \{G'\}$.
 - 13: **Senão Se** $G' \cong G'' \in \mathcal{G}_{m+1}$ **Então** $\text{succ}(G) := \text{succ}(G) \cup \{G''\}$
 - 14: **FimSe**
 - 15: **FimSe**
 - 16: **FimFazer**
 - 17: **FimFazer**
 - 18: **FimFazer**
-

5.5 Resultados Computacionais

Tendo como objetivo a construção do diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}, \preceq) , considere-se o conjunto \mathcal{L} partido nos três subconjuntos \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 dos grafos regulares que respeitam as relações entre a regularidade e a ordem estabelecidas pelo Teorema 4.20 e que definem as três camadas dos grafos regulares excepcionais. O Algoritmo 1, implementado em Matlab R2009b, constroi, para cada n , as matrizes de adjacência dos grafos regulares de ordem $n + 4$, $G' = G \oplus H$, de \mathcal{L}_1 ($G \preceq G'$), que incluem os grafos regulares excepcionais da 1ª camada. Algoritmos semelhantes foram implementados para construir os grafos dos subconjuntos \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 que incluem os grafos regulares da 2ª e 3ª camada, respetivamente.

Os resultados obtidos para cada camada encontram-se descritos no Apêndice A.2.

Os 187 grafos regulares excepcionais encontram-se totalmente descritos na Tabela A3 de [CRS04] (Secção A3.2, p.218-227), tendo por base a Proposição 4.14 e são identificados pelos números 1 a 187. Com recurso a estas tabelas foram contruídas as matrizes de adjacência dos 187 grafos regulares excepcionais, tendo em vista comparar com os resultados obtidos e usar, no conjunto parcialmente ordenado, a designação 1 a 187.

O diagrama de Hasse do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}, \preceq) tem quatro componentes: duas dessas componentes dizem respeito aos grafos de (\mathcal{L}_1, \preceq) que se dividem em grafos com regularidade par e grafos com regularidade ímpar; uma componente (\mathcal{L}_2, \preceq) e outra (\mathcal{L}_3, \preceq) .

Os diagramas de Hasse das duas componentes de (\mathcal{L}_1, \preceq) , que incluem os grafos regulares excepcionais da 1ª camada, são apresentados na Figura 5.8, caso em que os grafos têm regularidade ímpar e na Figura 5.9, caso em que os grafos têm regularidade par.

Note-se que existem três grafos regulares excepcionais da 1ª camada que não se obtêm por uma $(0, 2)$ -extensão dos grafos minimais $3K_2$, $2C_4$, $C_3 \dot{\cup} C_5$ e C_8 : o grafo excepcional 5-regular 17, que se obtém por uma $(0, 2)$ -extensão do grafo desconexo $G3_6$ (grafo linha L_1 da Figura 5.4), o grafo excepcional 6-regular 56, que se obtém por uma $(0, 2)$ -extensão do grafo linha 4-regular $G4_{15}$ (grafo linha L_2 da Figura 5.4) e o grafo excepcional 8-regular 134 que se obtém, por exemplo, do grafo linha $G6_3$ (ver grafo raiz de $G6_3$ na Figura 5.7).

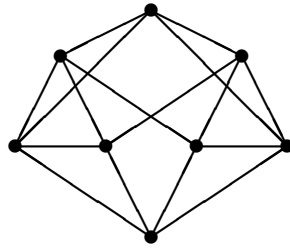


Figura 5.7: Grafo raiz do grafo linha $G6_3$.

Os elementos maximais da primeira camada são os oito grafos regulares excepcionais de ordem 20 (113-120), todos os grafos regulares excepcionais de ordem 22 (135-152), os três grafos de Chang (grafos excepcionais fortemente regulares de ordem 28), existindo ainda 3 grafos linha (um de ordem 20, $G8_{31}$, e dois de ordem 28, $G12_1$ e $G12_4$).

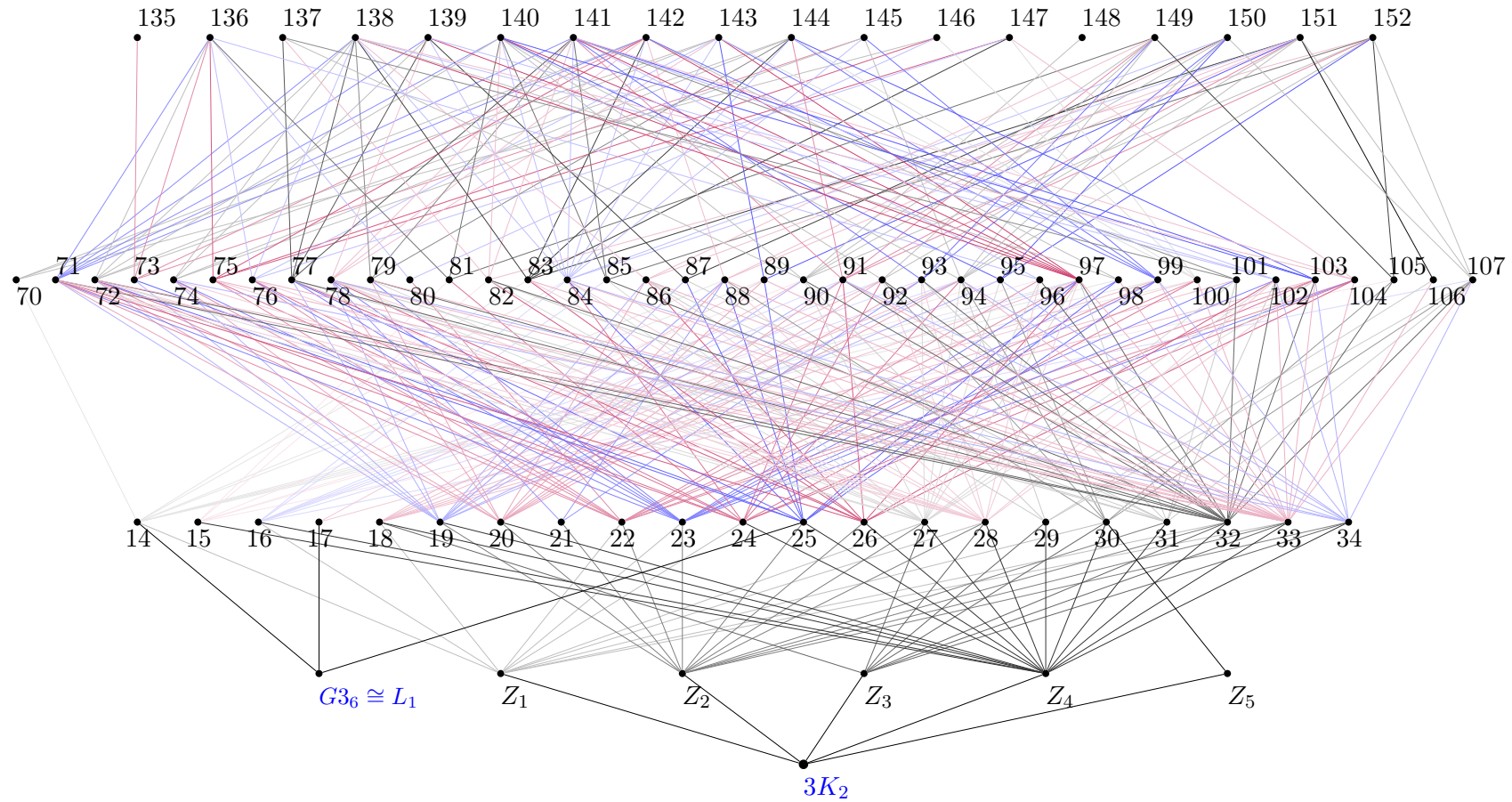


Figura 5.8: Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 1ª camada (regularidade ímpar)

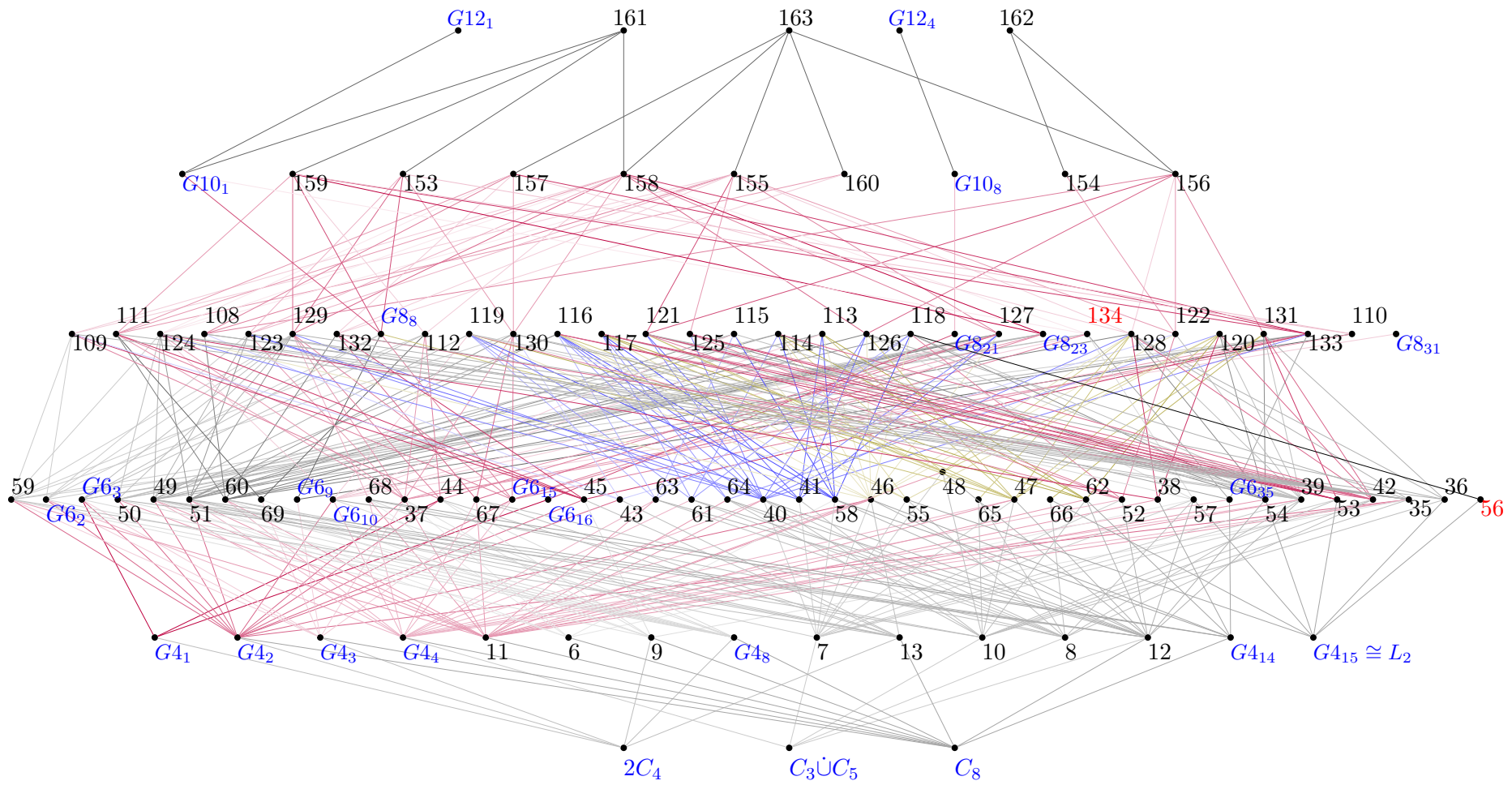


Figura 5.9: Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 1ª camada (regularidade par)

A terceira componente do diagrama de Hasse diz respeito a (\mathcal{L}_2, \preceq) que inclui os grafos regulares excepcionais da 2ª camada (ver Figura 5.10). Os elementos minimais são C_6 e $2K_3$ e os maximais são os grafos regulares excepcionais 181 e 184 (o grafo de Schläfli) e um grafo linha (Q_{87}).

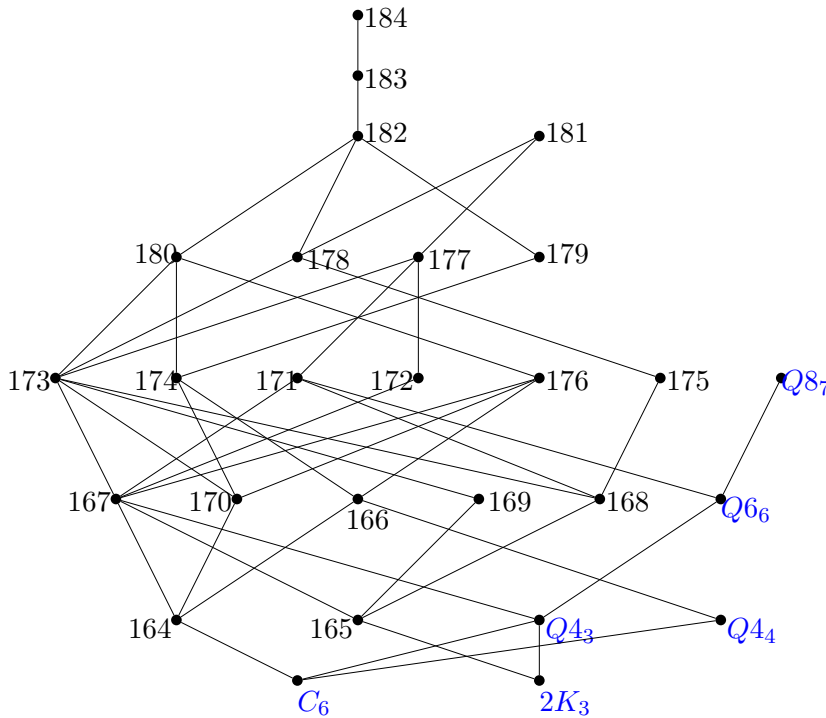


Figura 5.10: Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 2ª camada

A quarta componente diz respeito a (\mathcal{L}_3, \preceq) , que inclui os grafos regulares excepcionais da 3ª camada (ver Figura 5.11). O elemento minimal e mínimo é o grafo $2K_2$ e o elemento maximal e máximo é o grafo fortemente regular de Clebsh.

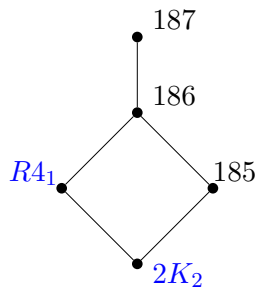


Figura 5.11: Diagrama de Hasse: grafos regulares excepcionais da 3ª camada

Capítulo 6

Conclusões e trabalho futuro

Com este trabalho prova-se que o conjunto dos grafos regulares excepcionais apresenta uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado, que cada grafo regular excepcional tem um conjunto (κ, τ) -regular, com $\kappa - \tau = -2$, e que no caso particular dos grafos das 1ª e 2ª camadas se obtém $\kappa = 0$ e $\tau = 2$ pelo que, conseqüentemente, o número de independência destes grafos atinge o majorante de Hoffman.

Os 187 grafos regulares excepcionais encontram-se totalmente descritos na Tabela A3 de [CRS04] e são identificados pelos números 1 a 187. O método de construção destes grafos, desenvolvido nesta tese e recentemente referido em [CRS], revelou-se bastante expedito. Com efeito, a partir de um conjunto muito reduzido de grafos regulares não excepcionais obtêm-se por (κ, τ) -extensões, com $\kappa - \tau = -2$, todos os grafos regulares excepcionais, com cadeias de comprimento máximo 5 na 1ª camada, 6 na 2ª camada e 2 na 3ª camada.

A relação de ordem parcial introduzida foi inicialmente identificada em [CC06] a partir da observação empírica de que todos os grafos regulares excepcionais das 1ª e 2ª camadas têm um número de independência que atinge o majorante de Hoffman para grafos regulares.

Em contraposição com a técnica de construção dos grafos regulares excepcionais introduzida, no Capítulo 4 faz-se uma síntese das principais técnicas até agora utilizadas na construção e identificação deste tipo de grafos (subgrafos proibidos, sistema de raízes e complemento estrela).

Com o novo processo construtivo dos grafos regulares excepcionais, apresentado no Capítulo 5 juntamente com outros resultados associados, ficou provado que o número de independência dos grafos das 1ª e 2ª camadas atinge o majorante de Hoffman. Adicionalmente, provou-se que os grafos regulares excepcionais têm uma estrutura de conjunto parcialmente ordenado cuja relação de ordem parcial é determinada por $(0, 2)$ -extensões nas 1ª e 2ª camadas e por $(1, 3)$ -extensões na 3ª camada. Nas Figuras 5.8 a 5.11 apresentam-se os respectivos diagramas de Hasse.

O processo construtivo apresentado, tal como foi referido, prova que todos os grafos regulares excepcionais das 1ª e 2ª camadas têm número de independência que atinge o majorante de Hoffman mas, apesar de várias tentativas (na Secção 5.1 apresentam-se as conclusões que se conseguiram obter), a demonstração teórica deste resultado continua em aberto.

Este último tópico continua a constituir um desafio para investigação futura, na qual se inclui o aprofundamento do estudo e identificação de grafos que se podem obter por (κ, τ) -extensões, procurando identificar outras propriedades combinatórias e espectrais.

Apêndice A

Implementação e resultados computacionais

Os resultados obtidos da implementação dos algoritmos e descritos neste apêndice podem ser consultados em <https://sites.google.com/site/grafosregularesexcepcionais/>.

A.1 Análise do esforço computacional do Algoritmo 1

O processo de extensão de um grafo por (κ, τ) -extensões reduz-se à construção das matrizes de incidência do 1-design. Nesta secção descreve-se como determinar o número total de matrizes de incidência e apresenta-se uma análise do tempo de execução do algoritmo implementado no caso do grafos regulares de \mathcal{L}_1 , ou seja, conjunto de grafos regulares com menor valor próprio não inferior a -2 que inclui os 183 grafos regulares excepcionais da 1^a camada.

Do Capítulo 5, sabe-se que os grafos p -regulares $G' \in \mathcal{L}_1$ se obtêm por $(0, 2)$ -extensões de um grafo $(p - 2)$ -regular de ordem n . Assim, para construir a matriz de adjacência do grafo G' , de ordem $n + 4$, é preciso determinar as matrizes de incidência de um design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ associadas a uma solução inteira positiva do sistema de equações lineares (5.7) $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$, tal que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$. Pelo Teorema 5.5 o número de matrizes de incidência do design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ é igual a $\frac{n!}{(x_1!x_2!x_3!)^2}$. Se o número de soluções a considerar

diminui quando se consideram apenas as soluções tipo (ver Tabela 5.1), ou seja, quando a solução é $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$, tal que $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$ e $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, então o número total de matrizes de incidência também se reduz significativamente (resultados apresentados nas 2ª e 3ª colunas da Tabela 5.2).

Considere-se ainda que as soluções verificam as condições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10. O número de matrizes de incidência a gerar, para cada design $1 - (4, 2, \frac{n}{2})$, e a considerar na construção dos grafos que se obtêm por $(0, 2)$ -extensões de \mathcal{L}_1 , determina-se usando o Teorema 5.5 e pode separar-se nos três casos que a seguir se descrevem.

1. Se $0 \leq x_1 < x_2 < x_3$, tem-se três condições disjuntas:

(a) a última coluna da matriz de incidência é igual a s_1 , ficando uma das n colunas ocupada, e as restantes $n - 1$ colunas vão ser iguais a $x_1 - 1$ vetores s_1 , x_2 vetores s_2 , x_3 vetores s_3 , x_3 vetores s_4 , x_2 vetores s_5 e x_1 vetores s_6 ; além disso, existe uma coluna igual a s_2 com índice superior ao índice de qualquer coluna igual a s_5 ou existe uma coluna s_3 com índice superior ao índice de qualquer coluna igual a s_4 , ou seja, um par de vetores $s_2(s_3) \cdots s_5(s_4)$ não pode ser trocado de ordem e o número de matrizes de incidência é

$$\frac{1}{2} \binom{n-1}{x_1-1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-1)!}{2(x_1-1)!x_1!(x_2!)^2(x_3!)^2},$$

(b) a última coluna da matriz de incidência é igual a s_2 , ficando uma das n colunas ocupada, e as restantes $n - 1$ colunas vão ser iguais a $x_2 - 1$ vetores s_2 , x_1 vetores s_1 , x_3 vetores s_3 , x_3 vetores s_4 , x_2 vetores s_5 e x_1 vetores s_6 ; além disso, existe uma coluna igual a s_1 com índice superior ao índice de qualquer coluna igual a s_6 ou existe uma coluna s_3 com índice superior ao índice de qualquer coluna igual a s_4 , ou seja, um par de vetores $s_1(s_3) \cdots s_6(s_4)$ não pode ser trocado de ordem e o número de matrizes de incidência é

$$\frac{1}{2} \binom{n-1}{x_1, x_2-1, x_3, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-1)!}{2(x_1!)^2(x_2-1)!x_2!(x_3!)^2},$$

(c) a última coluna da matriz de incidência é igual a s_3 , ficando uma das n colunas ocupada, e as restantes $n - 1$ colunas vão ser iguais a $x_3 - 1$ vetores s_3 , x_1 vetores

s_1, x_2 vetores s_2, x_3 vetores s_4, x_2 vetores s_5 e x_1 vetores s_6 ; além disso, existe uma coluna igual a s_1 com índice superior ao índice de qualquer coluna igual a s_6 ou existe uma coluna s_2 com índice superior ao índice de qualquer coluna igual a s_5 , ou seja, um par de vetores $s_1(s_2) \cdots s_1(s_5)$ não pode ser trocado de ordem e tem-se

$$\frac{1}{2} \binom{n-1}{x_1, x_2, x_3-1, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-1)!}{2(x_1!)^2(x_2!)^2(x_3-1)!x_3!}.$$

Somando os resultados das três situações possíveis obtém-se

$$\frac{(n-1)!}{2(x_1-1)!x_1!(x_2!)^2(x_3!)^2} + \frac{(n-1)!}{2(x_1!)^2(x_2-1)!x_2!(x_3!)^2} + \frac{(n-1)!}{2(x_1!)^2(x_2!)^2(x_3-1)!x_3!} = \frac{(n-1)!(x_1+x_2+x_3)}{2(x_1!)^2(x_2!)^2(x_3!)^2} = \frac{n!}{4(x_1!x_2!x_3!)^2}, \text{ pois } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}.$$

2. Se $0 \leq x_1 = x_2 < x_3$ ou $0 \leq x_1 < x_2 = x_3$, a última coluna da matriz de incidência do 1-design é igual a s_3 ou s_1 e qualquer coluna na matriz igual a s_5 tem índice superior ao maior índice de uma coluna igual a s_2 . Têm-se dois casos:

- se $x_1 = x_2 = 0$, a matriz tem a última coluna igual a s_3 , pelo que restam $n - 1$ posições para ocupar e $x_3 - 1$ vetores s_3 para distribuir pelas colunas; assim obtém-se

$$\binom{n-1}{x_3-1, x_3} = \frac{(n-1)!}{x_3!(x_3-1)!};$$

- caso contrário,

- a última coluna da matriz é igual a s_1 , pelo que restam $n - 1$ colunas da matriz para ocupar com $x_1 - 1$ vetores s_1, x_2 vetores s_2, x_3 vetores s_4, x_2 vetores s_5 e x_1 vetores s_6 ; além disso, existe uma coluna na matriz igual a s_2 que aparece à direita de todas as colunas iguais a s_5 , pelo que $\frac{1}{2} \binom{n-1}{x_1-1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-1)!}{2(x_1-1)!x_1!(x_2!)^2(x_3!)^2}$;

- a última coluna da matriz é igual a s_3 e um vetor s_2 tem que aparecer numa coluna da matriz à direita de todas as colunas iguais a s_5 , pelo que, de forma análoga, se obtém $\frac{1}{2} \binom{n-1}{x_1, x_2, x_3-1, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-1)!}{2(x_1!)^2(x_2!)^2(x_3-1)!x_3!}$;

Efetuando a soma obtém-se que, neste caso, o número de matrizes de incidência é

$$\frac{(n-1)!}{2(x_1-1)!x_1!(x_2!)^2(x_3!)^2} + \frac{(n-1)!}{2(x_1!)^2(x_2!)^2(x_3-1)!x_3!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(x_1+x_3)}{2(x_1!x_2!x_3!)^2};$$

No caso em que $x_1 = 0$ não existem na matriz colunas iguais a s_1 e o contributo da 1ª parcela para a soma é nulo, o que se reflete na fórmula fazendo $x_1 = 0$.

3. Se $0 \neq x_1 = x_2 = x_3$, a última coluna da matriz de incidência do design pretendido é igual a s_3 e

- a penúltima coluna é igual a s_3 e conseqüentemente restam $n-2$ colunas para serem ocupadas por x_3-2 vetores s_3 , x_1 vetores s_1 , x_2 vetores s_2 , x_3 vetores s_4 , x_2 vetores s_5 e x_1 vetores s_6 , logo

$$\binom{n-2}{x_1, x_2, x_3-2, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-2)!}{(x_1!)^2(x_2!)^2(x_3-2)!x_3!}$$

- a penúltima coluna é igual a s_2 e conseqüentemente restam $n-2$ colunas para serem ocupadas por x_3-1 vetores s_3 , x_2-1 vetores s_2 , x_1 vetores s_1 , x_3 vetores s_4 , x_2 vetores s_5 e x_1 vetores s_6 , logo

$$\binom{n-2}{x_1, x_2-1, x_3-1, x_3, x_2, x_1} = \frac{(n-2)!}{(x_1!)^2(x_2-1)!x_2!(x_3-1)!x_3!}$$

- a penúltima coluna é igual a s_4 , e de forma análoga se obtém

$$\binom{n-2}{x_1, x_2, x_3-1, x_3-1, x_2, x_1} = \frac{(n-2)!}{(x_1!)^2(x_2!)^2((x_3-1)!)^2}$$

e, além disso, existe na matriz uma coluna igual a s_5 se existir uma igual a s_2 , pelo que se divide por 2 os 1º e o 3º dos casos descritos. Efetuando a soma, e reduzindo ao denominador comum tem-se $\frac{(n-2)!(2x_3+2x_2-1)}{2(x_1!x_2!)^2(x_3-1)!x_3!}$. Como $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{n}{2}$, então $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{n}{6}$, donde resulta que o número de matrizes de incidência neste caso é

$$\frac{(n-2)!(2n-3)}{6(x_3!)^5(x_3-1)!}.$$

O número total de matrizes de incidência determinado encontra-se na 4ª coluna da Tabela 5.2.

No caso em que os grafos regulares G_{m+1} , com $m \geq 0$, se obtêm por $(0,2)$ -extensões que induzem $(m+2)$ -partições equilibradas no grafo G_{m+1} , as matrizes de incidência do design

$1 - (4, 2, \frac{n}{2})$ resultam da concatenação de $m + 1$ submatrizes, que são matrizes de incidência de 1-designs combinatórios. Desta forma, o número total de matrizes reduz significativamente, como se pode verificar na última coluna da Tabela 5.2.

O exemplo seguinte mostra um caso em que, mesmo não considerando as restrições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10, o número de matrizes de incidência associadas a uma solução reduz significativamente quando usadas as extensões que induzem partições equilibradas.

Exemplo A.1. Pelo Teorema 5.5, número total de matrizes de incidência do design $1 - (4, 2, 5)$ associadas à solução tipo $(0,1,4,4,1,0)$ é $\frac{10!}{(1!4!)^2} = 6300$. Ao considerar a bipartição equilibrada, as matrizes de incidência do 1-design resultam da concatenação de duas submatrizes: uma matriz de incidência do design $1 - (4, 2, 2)$ e outra matriz de incidência do design $1 - (4, 2, 3)$ associadas, respetivamente, à solução $(0,0,2,2,0,0)$ e à solução $(0,1,2,2,1,0)$. Portanto, o número total de matrizes é $\frac{4!}{(2!)^2} + \frac{6!}{(1!2!)^2} = 6 + 180 = 186$.

Na Figura A.1 apresenta-se o gráfico que relaciona o número de total de matrizes de incidência determinadas com a implementação do Algoritmo 1, numa escala logarítmica de base 10, em função do número de blocos do 1-design.

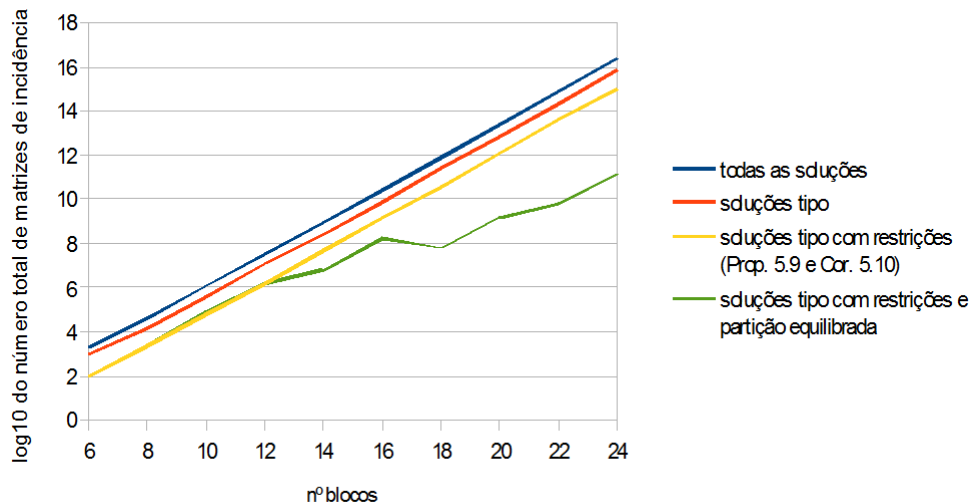


Figura A.1: Número total de matrizes de incidência determinadas em função do número de blocos do 1-design.

O algoritmo em Matlab foi executado num computador de modelo DELL POWEREDGE 2900III com dois processadores Xeon Quad Core X5450 a 3.0Ghz e memória 32GB a 667Mhz.

A Tabela A.1 indica o tempo de execução necessário para gerar as matrizes de incidência do 1-design associadas à solução tipo, sujeitas às restrições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10 e que induzem partições equilibradas, aqui designadas por extensões.

blocos	tempo(s)	extensões
6	0,19	91
8	1,59	2520
10	$7,921+9,342=17,263$	$8790+62181=70971$
12	$169,983+238,346=408,329$	$186375+1508703=1695078$
14	$694,92+1226,284=1921,204$	$762840+5422788=6185628$
16	$29440,74+57417,75$	$18220230+148642956=166863186$
18	152626,6	62707176
20	3560251	1606061520
22	8846538	5942341000
24	63031392	148837500000

Tabela A.1: Tempo necessário para gerar o número total de extensões em função do número de blocos.

O dados da Tabela A.1 podem representar-se pelo gráfico da Figura A.2, onde se apresenta o número total de extensões e o respetivo tempo de execução, numa escala logarítmica de base 10, em função do número de blocos do 1-design. Os gráficos obtidos são próximos de linhas retas o que nos permite concluir que o algoritmo tem estimativa de tempo de execução de ordem exponencial. Se se comparar a hipótese onde não se consideram as condições da Proposição 5.9 e do Corolário 5.10 nem as partições equilibradas, que seria um algoritmo com estimativa de tempo de execução de ordem superexponencial, há uma clara otimização.

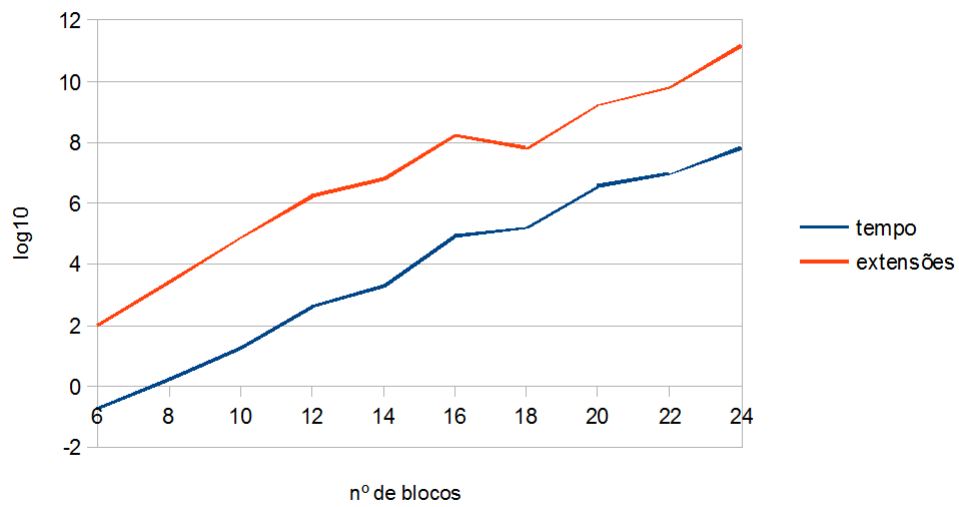


Figura A.2: Tempo de execução e número total de extensões em função do número de blocos do 1-design.

A.2 Resultados

Nesta secção apresentam-se os resultados computacionais obtidos, organizados em três subsecções correspondentes aos três subconjuntos do conjunto parcialmente ordenado (\mathcal{L}, \preceq) : (\mathcal{L}_1, \preceq) que inclui os grafos regulares excepcionais da 1ª camada; (\mathcal{L}_2, \preceq) que inclui os grafos regulares excepcionais da 2ª camada; (\mathcal{L}_3, \preceq) que inclui os grafos regulares excepcionais da 3ª camada.

Os resultados estão organizados em tabelas onde na 1ª coluna se indentifica a regularidade do grafo, evidenciando a sua relação com a respetiva ordem do grafo. Na 2ª coluna identifica-se a solução do sistema de equações lineares associada à matriz de incidência do respetivo 1-design. No caso dos grafos de \mathcal{L}_1 abrevia-se a solução $(x_1, x_2, x_3, x_3, x_2, x_1)$ por (x_1, x_2, x_3) , visto a 1ª componente ser igual à última componente, a 2ª componente ser igual à penúltima e a 3ª ser igual à 4ª. Existem várias soluções tipo associadas às matrizes de incidência do 1-design com as quais se obtêm grafos isomorfos, pelo que a solução apresentada foi a primeira a dar origem a um grafo que foi selecionado como representante da classe de isomorfismo. Na 3ª coluna é adotada a designação Gr_i indicando que é o grafo r -regular com número i (na realidade é a classe de isomorfismo dos grafos r -regulares com número i), do conjunto \mathcal{L}_1 , que se obteve por uma $(0, 2)$ -extensão; Qr_i indica que é o grafo r -regular com número i , do conjunto \mathcal{L}_2 , que se obteve por uma $(0, 2)$ -extensão e Rr_i é o grafo r -regular com número i do conjunto \mathcal{L}_3 que se obteve por uma $(1, 3)$ -extensão. Na 4ª coluna identifica-se o grafo regular excepcional com um número de 1 a 187, designação atribuída na Tabela 3 em [CRS04] e utilizado nos diagramas de Hasse apresentados no Capítulo 5 e em [BCC⁺14]. Na 5ª coluna calcula-se o espectro e, nas duas últimas colunas identificam-se os grafos obtidos por (κ, τ) -extensões, usando a designação adotada no Algoritmo desenvolvido e a designação atribuída na Tabela 3 em [CRS04], aparecendo um traço caso o grafo não seja excepcional, mas um grafo linha.

A.2.1 Resultados obtidos para (\mathcal{L}_1, \preceq)

REGULARIDADE ÍMPAR

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$1 = \frac{6}{2} - 2$		$3K_2$	grafo linha (desconexo)	$(-1)^2, (1)^2$	$G_{31}, G_{32}, G_{33}, G_{34}, G_{35}$.	4, 1, 2, 3 5
$3 = \frac{10}{2} - 2$	(0, 1, 2)	G_{31}	Z_4	$(-2)^2, -1.73, -1, -0.41, (0)^2, 1.73, 2.41, 3$	$G_{51}, G_{52}, G_{53}, G_{54}, G_{55}, G_{56}, G_{57}, G_{58}, G_{59}, G_{510}, G_{511}, G_{512}, G_{513}, G_{514}, G_{517}, G_{518}$.	32, 31, 16, 15, 18, 30, 27, 29, 26, 34, 20, 33, 19, 24, 25, 28.
	(0, 1, 2)	G_{32}	Z_1	$(-2)^2, -1.56, (-1)^2, 0, (1)^2, 2.56, 3$	$G_{51}, G_{53}, G_{55}, G_{56}, G_{57}, G_{512}, G_{514}, G_{515}, G_{516}, G_{518}, G_{519}$.	32, 16, 18, 30, 27, 33, 24, 22, 23, 28, 14.
	(1, 1, 1)	G_{33}	Z_2	$(-2)^2, (-1.53)^2, (-0.35)^2, 1, (1.88)^2, 3$	$G_{51}, G_{52}, G_{57}, G_{59}, G_{510}, G_{511}, G_{512}, G_{513}, G_{515}, G_{516}, G_{517}, G_{518}, G_{520}$.	32, 31, 27, 26, 34, 20, 33, 19, 22, 23, 25, 28, 21.
	(1, 1, 1)	G_{34}	Z_3	$(-2)^3, (-1)^2, (1)^3, 2, 3$	$G_{51}, G_{55}, G_{56}, G_{57}, G_{58}, G_{510}, G_{512}, G_{518}$.	32, 18, 30, 27, 29, 34, 33, 28.
	(1, 1, 1)	G_{35}	Z_5	$(-2)^4, (1)^5, 3$	G_{56} .	30.
			G_{36}	não tem desconexo	$(-2)^2, (-1)^3, (0)^2, 1, (3^2)$	$G_{517}, G_{519}, G_{521}$.
$5 = \frac{14}{2} - 2$	(1, 2, 2)	G_{51}	F_{1419} n.32	$(-2)^6, -1.34, -0.41, 0.53, 1, 2, 2.41, 2.81, 5$	$G_{71}, G_{72}, G_{73}, G_{74}, G_{75}, G_{76}, G_{77}, G_{78}, G_{79}, G_{710}, G_{715}, G_{716}, G_{717}, G_{719}, G_{720}, G_{721}, G_{723}$.	103, 93, 101, 90, 107, 102, 105, 92, 96, 97, 71, 85, 82, 77, 79, 72, 91.
	(1, 2, 2)	G_{52}	F_{1418} n.31	$(-2)^6, -1.34, -0.41, 0.53, 1, 2, 2.41, 2.81, 5$	$G_{72}, G_{73}, G_{75}, G_{76}, G_{710}, G_{713}, G_{717}, G_{719}, G_{726}, G_{736}$.	93, 101, 107, 102, 97, 78, 82, 77, 86, 87.
	(1, 2, 2)	G_{53}	F_{143} n.16	$(-2)^6, (-1)^2, (1)^2, (2)^2, 3, 5$	$G_{72}, G_{75}, G_{78}, G_{710}, G_{712}, G_{714}, G_{716}, G_{723}$.	93, 107, 92, 97, 94, 84, 85, 91.
	(1, 2, 2)	G_{54}	F_{142} n.15	$(-2)^6, (-1)^2, (1)^2, (2)^2, 3, 5$	$G_{74}, G_{77}, G_{79}, G_{717}, G_{722}, G_{724}$.	90, 105, 96, 82, 95, 81.
	(0, 2, 3)	G_{55}	F_{145} n.18	$(-2)^6, -1, (0)^2, (1)^2, (3)^2, 5$	$G_{71}, G_{73}, G_{74}, G_{78}, G_{710}, G_{712}, G_{718}$.	103, 101, 90, 92, 97, 94, 99.
	(0, 2, 3)	G_{56}	F_{1417} n.30	$(-2)^6, -1.56, 0, (1)^3, 2.56, 3, 5$	$G_{75}, G_{77}, G_{78}, G_{711}, G_{712}, G_{722}$.	107, 105, 92, 88, 94, 95.
	(0, 2, 3)	G_{57}	F_{1414} n.27	$(-2)^6, -0.81, -0.41, 0, 1, 1.47, 2.41, 3.34, 5$	$G_{71}, G_{72}, G_{73}, G_{74}, G_{712}, G_{76}, G_{79}, G_{710}, G_{713}, G_{714}, G_{715}, G_{716}, G_{717}, G_{719}, G_{720}, G_{721}, G_{722}$.	103, 93, 101, 90, 102, 96, 97, 94, 78, 84, 71, 85, 82, 77, 79, 72, 95.
	(1, 1, 3)	G_{58}	F_{1416} n.29	$(-2)^6, -1.56, 0, (1)^3, 2.56, 3, 5$	$G_{74}, G_{75}, G_{712}, G_{726}, G_{734}$.	90, 107, 94, 86, 106.

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por $(0, 2)$ -extensão que induz partição equilibrada	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$5 = \frac{14}{2} - 2$	(1, 1, 3)	G_{59}	F_{1413} n.26	$(-2)^6, -0.81,$ $-0.41, 0, 1,$ $1.47, 2.41,$ $3.34, 5$	$G_{76}, G_{710}, G_{713},$ $G_{715}, G_{717}, G_{719},$ $G_{723}, G_{725}, G_{726},$ $G_{737}.$	102, 97, 78, 71, 82, 77, 91, 104, 86, 83.
	(1, 2, 2)	G_{510}	F_{1421} n.34	$(-2)^6, -1.34,$ $-0.41, 0.53,$ $1, 2, 2.41,$ $2.81, 5$	$G_{71}, G_{75}, G_{76},$ $G_{712}, G_{713}, G_{714},$ $G_{718}, G_{722}, G_{723},$ $G_{729}.$	103, 107, 102, 94, 78, 84, 99, 95, 91, 74.
	(1, 2, 2)	G_{511}	F_{147} n.20	$(-2)^6, -1,$ $(-0.25)^2, (1.45)^2,$ $(2.80)^2,$ 5	$G_{72}, G_{78}, G_{711},$ $G_{712}, G_{713}, G_{715},$ $G_{720}, G_{721}, G_{723},$ $G_{726}, G_{727}, G_{729}.$	93, 92, 88, 94, 78, 71, 79, 72, 91, 86, 89, 74.
	(1, 2, 2)	G_{512}	F_{1420} n.33	$(-2)^6,$ $-1.34, -0.41,$ $0.53, 1,$ $2, 2.41,$ $2.81, 5$	$G_{71}, G_{75}, G_{76},$ $G_{710}, G_{711}, G_{712},$ $G_{713}, G_{714}, G_{715},$ $G_{718}, G_{720}, G_{721},$ $G_{723}, G_{725}, G_{726},$ $G_{727}, G_{730}, G_{731},$ $G_{732}, G_{733}, G_{734},$ $G_{737}.$	103, 107, 102, 97, 88, 94, 78, 84, 71, 99, 79, 72, 91, 104, 86, 89, 75, 76, 100, 98, 106 83.
	(1, 2, 2)	G_{513}	F_{146} n.19	$(-2)^6, -1,$ $(-0.25)^2,$ $(1.45)^2,$ $(2.80)^2, 5$	$G_{74}, G_{711}, G_{712},$ $G_{713}, G_{715}, G_{719},$ $G_{721}, G_{722}, G_{723},$ $G_{726}, G_{728}, G_{729},$ $G_{736}.$	90, 88, 94, 78, 71, 77, 72, 95, 91, 86, 73, 74, 87.
	(1, 2, 2)	G_{514}	F_{1411} n.24	$(-2)^6, -0.81,$ $-0.41, 0, 1,$ $1.47, 2.41,$ $3.34, 5$	$G_{71}, G_{78}, G_{712},$ $G_{714}, G_{715}, G_{721},$ $G_{723}, G_{724}, G_{725},$ $G_{730}, G_{731}, G_{732}.$	103, 92, 94, 84, 71, 72, 91, 81, 104, 75, 76, 100.
	(1, 2, 2)	G_{515}	F_{149} n.22	$(-2)^6,$ $(-0.80)^2,$ $(0.56)^2, (2.25)^2,$ 3, 5	$G_{71}, G_{79}, G_{710},$ $G_{715}, G_{718}, G_{721},$ $G_{725}, G_{729}, G_{730},$ $G_{731}, G_{732}, G_{735}.$	103, 96, 97, 71, 99, 72, 104, 74, 75, 76, 100, 80.
	(1, 2, 2)	G_{516}	F_{1410} n.23	$(-2)^6,$ $(-0.80)^2,$ $(0.56)^2, (2.25)^2,$ 3, 5	$G_{73}, G_{76}, G_{710},$ $G_{713}, G_{715}, G_{718},$ $G_{719}, G_{720}, G_{725},$ $G_{729}, G_{731}, G_{733}.$	101, 102, 97, 78, 71, 99, 77, 79, 104, 74, 76, 98.
	(1, 1, 3)	G_{517}	F_{1412} n.25	$(-2)^6, -0.81,$ $-0.41, 0, 1,$ $1.47, 2.41,$ $3.34, 5$	$G_{710}, G_{711}, G_{714},$ $G_{718}, G_{719}, G_{721},$ $G_{727}, G_{728},$ $G_{733}, G_{736}.$	97, 88, 84, 99, 77, 72, 89, 73, 98, 87.
	(1, 1, 3)	G_{518}	F_{1415} n.28	$(-2)^6, -0.81,$ $-0.41, 0,$ 1, 1.47, 2.41, 3.34, 5	$G_{71}, G_{72}, G_{76},$ $G_{78}, G_{79}, G_{710},$ $G_{711}, G_{713}, G_{714},$ $G_{715}, G_{720}, G_{721},$ $G_{726}, G_{729}, G_{730},$ $G_{731}, G_{737}.$	103, 93, 102, 92, 96, 97, 88, 78, 84, 71, 79, 72, 86, 74, 75, 76, 83.
	(1, 1, 3)	G_{519}	F_{141} n.14	$(-2)^6, -1,$ $-0.56, (1)^3,$ 2, 3.56, 5	$G_{710}, G_{711}, G_{714},$ $G_{718}, G_{727}, G_{732},$ $G_{733}, G_{737}, G_{738}.$	97, 88, 84, 99, 89, 100, 98, 83, 70.
	(1, 2, 2)	G_{520}	F_{148} n.21	$(-2)^6, -1,$ $(-0.25)^2, (1.45)^2,$ $(2.80)^2, 5$	$G_{72}, G_{711}, G_{713}.$	93, 88, 78.
(1, 1, 3)	G_{521}^1	F_{144} n.17	$(-2)^6, -1, (0)^2,$ $(1)^2, (3)^2, 5$	$G_{727}, G_{732}.$	89, 100.	

¹Grafo construído a partir do grafo linha G_{36} e não do grafo $3K_2$.

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por $(0, 2)$ -extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$7 = \frac{18}{2} - 2$	(2, 2, 3)	$G7_1$	$F183_4$ n.103	$(-2)^{10}, -0.41,$ $0.27, (2)^2, 2.41,$ $3, 3.73, 7$	$G9_8, G9_{10}, G9_{13}$	141, 140, 144.
	(2, 2, 3)	$G7_2$	$F182_4$ n.93	$(-2)^{10}, -0.56,$ $(1)^2, 2,$ $(3)^2, 3.56, 7$	$G9_3, G9_4, G9_8$	150, 149, 141.
	(2, 2, 3)	$G7_3$	$F183_2$ n.101	$(-2)^{10}, -0.41,$ $0.27, (2)^2, 2.41,$ $3, 3.73, 7$	$G9_8, G9_{11}$	141, 137.
	(2, 2, 3)	$G7_4$	$F182_1$ n.90	$(-2)^{10}, -0.56,$ $(1)^2, 2, (3)^2,$ $3.56, 7$	$G9_3, G9_4,$ $G9_{10}, G9_{11},$ $G9_{12}, G9_{18}$	150, 149, 140, 137, 152, 148.
	(2, 2, 3)	$G7_5$	$F183_8$ n.107	$(-2)^{10}, -1, 1$ $(2)^2, (3)^3, 7$	$G9_1, G9_3, G9_{12}$	151, 150, 152.
	(2, 2, 3)	$G7_6$	$F183_3$ n.102	$(-2)^{10}, -0.41,$ $0.27, (2)^2, 2.41,$ $3, 3.73, 7$	$G9_6, G9_7, G9_8$	139, 138, 141.
	(2, 2, 3)	$G7_7$	$F183_6$ n.105	$(-2)^{10}, -1, 1$ $(2)^2, (3)^3, 7$	$G9_4, G9_{12}$	149, 152.
	(2, 2, 3)	$G7_8$	$F182_3$ n.92	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	$G9_1, G9_4,$ $G9_{10}$	151, 149, 140.
	(2, 2, 3)	$G7_9$	$F182_7$ n.96	$(-2)^{10}, -0.41,$ $0.27, (2)^2, 2.41,$ $3, 3.73, 7$	$G9_8, G9_9$	141, 136.
	(2, 2, 3)	$G7_{10}$	$F182_8$ n.97	$(-2)^{10}, -0.41,$ $0.27, (2)^2, 2.41,$ $3, 3.73, 7$	$G9_2, G9_5,$ $G9_6, G9_7,$ $G9_8, G9_{10}$	142, 143, 139, 138, 141, 140.
	(1, 3, 3)	$G7_{11}$	$F181_9$ n.88	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	$G9_1, G9_2,$ $G9_3$	151, 142, 150.
	(1, 3, 3)	$G7_{12}$	$F182_5$ n.94	$(-2)^{10}, -0.56,$ $(1)^2, 2, (3)^2,$ $3.56, 7$	$G9_1, G9_3,$ $G9_4, G9_{10},$ $G9_{12}, G9_{14}$	151, 150, 149, 140, 152, 145.
	(1, 3, 3)	$G7_{13}$	$F18_9$ n.78	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1,$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G9_2, G9_5,$ $G9_6, G9_8$	142, 143, 139, 141.
	(1, 3, 3)	$G7_{14}$	$F181_5$ n.84	$(-2)^{10}, 0, (1)^3,$ $(3)^2, 4, 7$	$G9_1, G9_2, G9_3,$ $G9_5, G9_6, G9_7,$ $G9_8, G9_{10}, G9_{13},$ $G9_{14}$	151, 142, 150, 143, 139, 138, 141, 140, 144, 145.
	(1, 3, 3)	$G7_{15}$	$F18_2$ n.71	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G9_2, G9_6, G9_7,$ $G9_8, G9_9, G9_{10}$	142, 139, 138, 141, 136, 140.
	(1, 2, 4)	$G7_{16}$	$F181_6$ n.85	$(-2)^{10}, 0, (1)^3,$ $(3)^2, 4, 7$	$G9_8, G9_{10}, G9_{12}$	141, 140, 152.
	(1, 2, 4)	$G7_{17}$	$F181_3$ n.82	$(-2)^{10}, 0, (1)^3,$ $(3)^2, 4, 7$	$G9_8, G9_{10}, G9_{11},$ $G9_{12}$	141, 140, 137, 152.
	(2, 2, 3)	$G7_{18}$	$F183_0$ n.99	$(-2)^{10}, -0.41, 0.27,$ $(2)^2, 2.41, 3, 3.73, 7$	$G9_2, G9_5, G9_{13},$ $G9_{14}$	142, 143, 144, 145.
	(2, 2, 3)	$G7_{19}$	$F18_8$ n.77	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G9_6, G9_7, G9_8,$ $G9_{11}$	139, 138, 141, 137.
	(2, 2, 3)	$G7_{20}$	$F181_0$ n.79	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G9_7, G9_8, G9_{13}$	138, 141, 144.
	(2, 2, 3)	$G7_{21}$	$F18_3$ n.72	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G9_5, G9_7, G9_9,$ $G9_{10}, G9_{13}$	143, 138, 136, 140, 144.
	(2, 2, 3)	$G7_{22}$	$F182_6$ n.95	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	$G9_3, G9_{10}, G9_{12}$	150, 140, 152.
	(2, 2, 3)	$G7_{23}$	$F182_2$ n.91	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	$G9_1, G9_4, G9_8,$ $G9_{12}, G9_{13}$	151, 149, 141, 152, 144.
	(2, 2, 3)	$G7_{24}$	$F181_2$ n.81	$(-2)^{10}, 0, (1)^3,$ $(3)^2, 4, 7$	$G9_4, G9_9, G9_{10}$	149, 136, 140.
	(2, 2, 3)	$G7_{25}$	$F183_5$ n.104	$(-2)^{10}, -0.41, 0.27,$ $(2)^2, 2.41, 3, 3.73, 7$	$G9_7, G9_8, G9_{15}$	138, 141, 147.
	(2, 2, 3)	$G7_{26}$	$F181_7$ n.86	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	$G9_1, G9_4, G9_7$	151, 149, 138.

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$7 = \frac{18}{2} - 2$	(2, 2, 3)	G_{727}	F_{1820} n.89	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	G_{91}, G_{95}	151, 143.
	(2, 2, 3)	G_{728}	F_{184} n.73	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G_{92}, G_{99},$ G_{914}, G_{917}	142, 136, 145, 135.
	(2, 2, 3)	G_{729}	F_{185} n.74	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G_{96}, G_{97},$ G_{913}, G_{914}	139, 138, 144, 145.
	(2, 2, 3)	G_{730}	F_{186} n.75	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G_{92}, G_{99},$ G_{915}, G_{916}	142, 136, 147, 146.
	(2, 2, 3)	G_{731}	F_{187} n.76	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	$G_{95}, G_{97},$ G_{99}, G_{915}	143, 138, 136, 147.
	(2, 2, 3)	G_{732}	F_{1831} n.100	$(-2)^{10}, -0.41, 0.27,$ $(2)^2, 2.41, 3, 3.73, 7$	$G_{95}, G_{913},$ G_{915}, G_{916}	143, 144, 147, 146.
	(2, 2, 3)	G_{733}	F_{1829} n.98	$(-2)^{10}, -0.41, 0.27,$ $(2)^2, 2.41, 3, 3.73, 7$	G_{92}, G_{97}	142, 138.
	(2, 2, 3)	G_{734}	F_{1837} n.106	$(-2)^{10}, -1, 1$ $(2)^2, (3)^3, 7$	G_{91}	151.
	(2, 2, 3)	G_{735}	F_{1811} n.80	$(-2)^{10}, (0.12)^2, 1$ $(2.35)^2, (3.53)^2, 7$	G_{99}, G_{916}	136, 146.
	(2, 2, 3)	G_{736}	F_{1818} n.87	$(-2)^{10}, -0.56, (1)^2,$ $2, (3)^2, 3.56, 7$	G_{93}, G_{96}	150, 139
	(1, 2, 4)	G_{737}	F_{1814} n.83	$(-2)^{10}, 0, (1)^3,$ $(3)^2, 4, 7$	$G_{91}, G_{92}, G_{97},$ G_{913}, G_{915}	151, 142, 138, 144, 147.
	(1, 2, 4)	G_{738}	F_{181} n.70	$(-2)^{10}, (1)^5,$ $(4)^2, 7$	$G_{92}, G_{95},$ G_{916}	142, 143, 146.
$9 = \frac{22}{2} - 2$	(2, 3, 4)	G_{91}	F_{2217} n.151	$(-2)^{14}, 0, (3)^5$ 4, 9	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{92}	F_{228} n.142	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{93}	F_{2216} n.150	$(-2)^{14}, 0, (3)^5$ 4, 9	não tem	—
	(3, 3, 3)	G_{94}	F_{2215} n.149	$(-2)^{14}, 0, (3)^5$ 4, 9	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{95}	F_{229} n.143	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{96}	F_{225} n.139	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{97}	F_{224} n.138	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{98}	F_{227} n.141	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{99}	F_{222} n.136	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{910}	F_{226} n.140	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{911}	F_{223} n.137	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{912}	F_{2218} n.152	$(-2)^{14}, 0, (3)^5$ 4, 9	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{913}	F_{2210} n.144	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(3, 3, 3)	G_{914}	F_{2211} n.145	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(2, 3, 4)	G_{915}	F_{2213} n.147	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(3, 3, 3)	G_{916}	F_{2212} n.146	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(3, 3, 3)	G_{917}	F_{221} n.135	$(-2)^{14}, (1)^2, (3)^3$ $(4)^2, 9$	não tem	—
	(3, 3, 3)	G_{918}	F_{2214} n.148	$(-2)^{14}, 0, (3)^5$ 4, 9	não tem	—

REGULARIDADE PAR

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$2 = \frac{6}{2} - 2$		$2C_4$	Grafo desconexo	$(-2)^2, (0)^4, (2)^2$	$G_{41}, G_{42}, G_{43}, G_{47}, G_{48}, G_{410}$.	-, -, -, 9, -, 13.
		$C_3 \cup C_5$	Grafo desconexo	$(-1.62)^2, (-1)^2, (0.62)^2, (2)^2$	$G_{44}, G_{49}, G_{411}, G_{412}, G_{413}$.	-, 7, 10, 8, 12.
		C_8	Grafo linha	$(-2), (-1.41)^2, (0)^2, (1.41)^2, 2$	$G_{42}, G_{43}, G_{44}, G_{45}, G_{46}, G_{47}, G_{48}, G_{410}, G_{413}, G_{414}$.	-, -, -, 11, 6, 9, -, 13, 12, -.
$4 = \frac{12}{2} - 2$	(0, 0, 4)	G_{41}	Grafo linha	$(-2)^4, (0)^6, (4)^2$	G_{63}, G_{613}, G_{616} .	-, 44, -.
	(0, 1, 3)	G_{42}	Grafo linha	$(-2)^4, -1.24, (0)^4, 2, 3.24, 4$	$G_{61}, G_{62}, G_{63}, G_{64}, G_{65}, G_{66}, G_{610}, G_{612}, G_{613}, G_{615}, G_{617}, G_{618}, G_{625}, G_{640}$.	59, -, -, 50, 49, 51, -, 37, 44, -, 45, 43, 46, 35.
	(0, 2, 2)	G_{43}	Grafo linha	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, 4$	$G_{61}, G_{62}, G_{63}, G_{68}, G_{69}, G_{612}, G_{615}$.	59, -, -, 69, -, 37, -.
	(0, 2, 2)	G_{44}	Grafo linha	$(-2)^4, -1.41, -0.73, (0)^2, 1.41, 2, 2.73, 4$	$G_{62}, G_{65}, G_{66}, G_{67}, G_{610}, G_{611}, G_{614}, G_{615}, G_{619}, G_{620}, G_{622}, G_{625}, G_{629}, G_{632}, G_{635}, G_{637}, G_{640}$.	-, 49, 51, 60, -, 68, 67, -, 63, 61, 40, 46, 47, 52, -, 39, 35.
	(0, 2, 2)	G_{45}	F_{126} n.11	$(-2)^4, -1.41, -0.73, (0)^2, 1.41, 2, 2.73, 4$	$G_{61}, G_{64}, G_{65}, G_{66}, G_{67}, G_{611}, G_{612}, G_{614}, G_{619}, G_{621}, G_{622}, G_{625}, G_{627}, G_{629}, G_{631}, G_{633}, G_{636}, G_{637}, G_{640}$.	59, 50, 49, 51, 60, 68, 37, 67, 63, 64, 40, 46, 48, 67, 62, 38, 54, 39, 35.
	(0, 2, 2)	G_{46}	F_{121} n.6	$(-2)^4, (-0.73)^2, (0)^3, (2.73)^2, 4$	$G_{65}, G_{66}, G_{611}, G_{612}, G_{624}, G_{634}$.	49, 51, 68, 37, 58, 57
	(0, 2, 2)	G_{47}	F_{124} n.9	$(-2)^5, (0)^3, (2)^3, 4$	$G_{61}, G_{67}, G_{68}, G_{612}, G_{613}, G_{617}, G_{640}$.	59, 60, 69, 37, 44, 45, 35.
	(0, 2, 2)	G_{48}	Grafo linha	$(-2)^4, (-1.41)^2, 0, (1.41)^2, (2)^2, 4$	$G_{61}, G_{62}, G_{63}, G_{64}, G_{65}, G_{66}, G_{610}, G_{611}, G_{613}$.	59, -, -, 50, 49, 51, -, 68, 44.
	(1, 1, 2)	G_{49}	F_{122} n.7	$(-2)^4, -1, (-0.62)^2, 0, 1.62, 3, 4$	$G_{66}, G_{622}, G_{623}, G_{624}, G_{625}, G_{626}, G_{627}, G_{629}, G_{632}, G_{634}, G_{637}, G_{638}, G_{639}$.	51, 40, 41, 58, 46, 55, 48, 47, 52, 57, 39, 53, 42.
	(1, 1, 2)	G_{410}	F_{128} n.13	$(-2)^4, (-1.41)^2, 0, (2)^2, 4$	$G_{61}, G_{65}, G_{66}, G_{67}, G_{613}, G_{614}, G_{617}, G_{618}, G_{625}$.	59, 49, 51, 60, 44, 67, 45, 43, 46.
	(1, 1, 2)	G_{411}	F_{125} n.10	$(-2)^4, -1.41, -0.73, (0)^2, 1.41, 2, 2.73, 4$	$G_{65}, G_{67}, G_{621}, G_{622}, G_{623}, G_{627}, G_{628}, G_{629}, G_{631}, G_{638}, G_{639}, G_{640}, G_{641}$.	49, 60, 64, 40, 41, 48, 65, 47, 62, 53, 42, 35, 36.

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$4 = \frac{12}{2} - 2$	(1, 1, 2)	G_{412}	F_{123} n.8	$(-2)^4, (-1.30)^2,$ $0, (1)^2,$ $(2.30)^2, 4$	$G_{611}, G_{614}, G_{619},$ $G_{620}, G_{621}, G_{622},$ $G_{626}, G_{628}, G_{630},$ $G_{634}, G_{637}, G_{639}.$	68, 67, 63, 61, 64, 40, 55, 65, 66, 57, 39, 42.
	(1, 1, 2)	G_{413}	F_{127} n.12	$(-2)^4, -1.56,$ $(-0.62)^2, 1,$ $(1.62)^2, 2.56,$ 4	$G_{64}, G_{65}, G_{66},$ $G_{619}, G_{620}, G_{621},$ $G_{622}, G_{624}, G_{625},$ $G_{627}, G_{629}, G_{631},$ $G_{632}, G_{634}, G_{636},$ $G_{637}.$	50, 49, 51, 63, 61, 64, 40, 58, 46, 48, 47, 62, 52, 57, 54, 39.
	(1, 1, 2)	G_{414}	Grafo linha	$(-2)^4, -1.56,$ 1, $(-0.62)^2,$ $(1.62)^2, 2.56, 4$	$G_{610}, G_{611}, G_{624},$ $G_{625}, G_{631}, G_{633},$ $G_{635}.$	-, 63, 58, 46, 62, 38, -
			G_{415}	Grafo linha	$(-2)^4, (-0.73)^2,$ $(0)^3, (2.73)^2,$ 4	$G_{626}, G_{630}, G_{634},$ $G_{636}, G_{638}, G_{641},$ $G_{642}.$
$6 = \frac{16}{2} - 2$	(2, 2, 2)	G_{61}	F_{1625} n.59	$(-2)^8, -1.24,$ $0, (2)^4,$ 3.24, 6	$G_{81}, G_{83}, G_{86},$ $G_{89}, G_{811}, G_{823},$ $G_{829}.$	109, 124, 129, 112, 130, -, 133.
	(2, 2, 2)	G_{62}	Grafo linha	$(-2)^8, -1.24, 0,$ $(2)^4, 3.24, 6$	$G_{81}, G_{85}, G_{86},$ $G_{88}, G_{824}.$	109, 123, 129, -, 134.
	(2, 2, 2)	G_{63}	Grafo linha	$(-2)^8, (0)^3,$ $(2)^3, 4, 6$	$G_{86}, G_{88}, G_{89},$ $G_{823}, G_{824}.$	129, -, 112, -, 134.
	(2, 2, 2)	G_{64}	F_{1616} n.50	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59, (2)^2,$ 2.73, 3.41, 6	$G_{83}, G_{86}, G_{817},$ $G_{818}, G_{822},$ $G_{823}.$	124, 129, 114, 113, 127, -
	(2, 2, 2)	G_{65}	F_{1615} n.49	$(-2)^8, -0.73, 0,$ $0.59, (2)^2, 2.73,$ 3.41, 6	$G_{83}, G_{85}, G_{86},$ $G_{810}, G_{812}, G_{818},$ $G_{822}, G_{823}, G_{829}.$	124, 123, 129, 119, 116, 113, 127, -, 133.
	(2, 2, 2)	G_{66}	F_{1617} n.51	$(-2)^8, -0.73, 0,$ $0.56, (2)^2, 2.73,$ 3.41, 6	$G_{83}, G_{85}, G_{86},$ $G_{811}, G_{812}, G_{816},$ $G_{817}, G_{820}, G_{822}.$	124, 123, 129, 130, 116, 115, 114, 118, 127.
	(2, 2, 2)	G_{67}	F_{1626} n.60	$(-2)^8, -1.24,$ $0, (2)^4,$ 3.24 6	$G_{82}, G_{84}, G_{87},$ $G_{819}, G_{822},$ $G_{825}, G_{829}.$	111, 108, 132, 126, 127, 128, 133.
	(2, 2, 2)	G_{68}	F_{1635} n.69	$(-2)^9, (2)^6, 6$	$G_{82}, G_{89}.$	111, 112
	(2, 2, 2)	G_{69}	Grafo linha	$(-2)^9, (2)^6, 6$	$G_{88}, G_{830}.$	-, 110.
	(2, 2, 2)	G_{610}	Grafo linha	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59, (2)^2,$ 2.73, 3.41, 6	$G_{83}, G_{810}, G_{816},$ $G_{818}, G_{822},$ $G_{824}, G_{831}.$	124, 119, 115, 113, 127, 134, -.
	(2, 2, 2)	G_{611}	F_{1634} n.68	$(-2)^8, (0.73)^2,$ $(2)^3, (2.73)^2, 6$	$G_{86}.$	129
	(2, 2, 2)	G_{612}	F_{163} n.37	$(-2)^8, (0)^2,$ $(0.59)^2, 2,$ $(3, 41)^2, 6$	$G_{82}, G_{83}, G_{85},$ $G_{86}, G_{89}, G_{811},$ $G_{823}, G_{829}, G_{830}.$	111, 124, 123, 129, 112, 130, -, 133, 110
	(2, 2, 2)	G_{613}	F_{1610} n.44	$(-2)^8, (0)^3,$ $(2)^3, 4, 6$	$G_{81}, G_{86}, G_{89},$ $G_{822}.$	109, 129, 112, 127.
	(2, 2, 2)	G_{614}	F_{1633} n.67	$(-2)^8, (0.73)^2,$ $(2)^3, (2.73)^2, 6$	$G_{87}, G_{811}, G_{822}.$	132, 130, 127.
	(1, 2, 3)	G_{615}	Grafo linha	$(-2)^8, (0)^2,$ $(0.59)^2, 2,$ $(3, 41)^2, 6$	$G_{82}, G_{86}, G_{88},$ $G_{811}, G_{823},$ $G_{824}, G_{829}.$	111, 129, -, 130, -, 134, 133.
	(0, 0, 6)	G_{616}	Grafo desconexo	$(-2)^6, (0)^8, (6)^2$	$G_{821}.$	-.
	(0, 2, 4)	G_{617}	F_{1611} n.45	$(-2)^8, (0)^3,$ $(2)^3, 4, 6$	$G_{81}, G_{82}, G_{83},$ $G_{87}, G_{829}.$	109, 111, 124, 132, 133.
	(1, 1, 4)	G_{618}	F_{169} n.43	$(-2)^8, (0)^3,$ $(2)^3, 4, 6$	$G_{81}, G_{84}, G_{811},$ $G_{826}.$	109, 108, 130, 122.

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por $(0, 2)$ -extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$6 = \frac{16}{2} - 2$	(1, 2, 3)	G_{619}	F_{1629} n.63	$(-2)^8, -1, (0.38)^2,$ $2, (2.62)^2, 3, 6$	$G_{810}, G_{812}, G_{816},$ G_{820}	119, 116, 115, 118.
	(1, 2, 3)	G_{620}	F_{1627} n.61	$(-2)^8, -1, (0.38)^2,$ $2, (2.62)^2, 3, 6$	$G_{810}, G_{813}, G_{817},$ G_{820}	119, 117, 114, 118.
	(1, 2, 3)	G_{621}	F_{1630} n.64	$(-2)^8, -1, (0.38)^2,$ $2, (2.62)^2, 3, 6$	$G_{812}, G_{813}, G_{827}$	116, 117, 120.
	(1, 2, 3)	G_{622}	F_{166} n.40	$(-2)^8, -0.56,$ $(0.38)^2, 1,$ $(2.62)^2,$ $3.56, 6$	$G_{83}, G_{85}, G_{86},$ $G_{810}, G_{812}, G_{813},$ $G_{814}, G_{815}, G_{819},$ $G_{822}, G_{825}, G_{829}$	124, 123, 129, 119, 116, 117, 121, 125, 126, 127, 128, 133.
	(1, 2, 3)	G_{623}	F_{167} n.41	$(-2)^8, -0.56,$ $(0.38)^2, 1, (2.62)^2,$ $3.56, 6$	$G_{85}, G_{812},$ $G_{814}, G_{818},$ G_{819}, G_{822}	123, 116, 121, 113, 126, 127.
	(1, 2, 3)	G_{624}	F_{1624} n.58	$(-2)^8, -0.30,$ $(1)^2, 2,$ $(3.30)^2, 6$	$G_{810}, G_{812}, G_{813},$ $G_{816}, G_{817}, G_{818},$ G_{820}	119, 116, 117, 115, 114, 113, 118.
	(1, 2, 3)	G_{625}	F_{1612} n.46	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59,$ $(2)^2, 2.73,$ $3.41, 6$	$G_{83}, G_{810}, G_{812},$ $G_{816}, G_{817}, G_{818},$ $G_{819}, G_{820}, G_{822},$ G_{825}, G_{826}	124, 119, 116, 115, 114, 113, 126, 118, 127, 128, 122.
	(2, 2, 2)	G_{626}	F_{1621} n.55	$(-2)^8, (-0.30)^2,$ $(1)^2, 2,$ $(3.30)^2, 6$	$G_{812}, G_{813},$ G_{817}, G_{827}	116, 117, 114, 120.
	(2, 2, 2)	G_{627}	F_{1614} n.48	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59, (2)^2,$ $2.73, 3.41, 6$	$G_{813}, G_{814}, G_{817},$ G_{825}, G_{827}	117, 121, 114, 128, 120.
	(2, 2, 2)	G_{628}	F_{1631} n.65	$(-2)^8, (-0.73)^2,$ $(2)^3, (2.73)^2, 6$	G_{825}	128
	(2, 2, 2)	G_{629}	F_{1613} n.47	$(-2)^8, -0.73, 0,$ $0.59, (2)^2, 2.73,$ $3.41, 6$	$G_{83}, G_{812}, G_{813},$ $G_{814}, G_{818}, G_{819},$ $G_{825}, G_{827}, G_{828}$	124, 116, 117, 121, 113, 126, 128, 120, 131.
	(2, 2, 2)	G_{630}	F_{1632} n.66	$(-2)^8, (-0.73)^2,$ $(2)^3, (2.73)^2, 6$	G_{828}	131.
	(2, 2, 2)	G_{631}	F_{1628} n.62	$(-2)^8, -1,$ $(0.38)^2, 2,$ $(2.62)^2, 3, 6$	$G_{810}, G_{813}, G_{817},$ G_{818}, G_{827}	119, 117, 114, 113, 120.
	(2, 2, 2)	G_{632}	F_{1618} n.52	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59, (2)^2,$ $2.73, 3.41, 6$	$G_{810}, G_{814}, G_{815},$ G_{820}, G_{826}	119, 121, 125, 118, 122.
	(2, 2, 2)	G_{633}	F_{164} n.38	$(-2)^8, -0.56,$ $(0.38)^2, 1,$ $(2.62)^2, 3.56, 6$	G_{83}, G_{825}, G_{827}	124, 128, 120.
	(2, 2, 2)	G_{634}	F_{1623} n.57	$(-2)^8, -0.30, (1)^2,$ $2, (3.30)^2, 6$	$G_{812}, G_{813}, G_{820}$	116, 117, 118.
	(2, 2, 2)	G_{635}	Grafo linha	$(-2)^8, -0.56,$ $(0.38)^2, 1,$ $(2.62)^2, 3.56, 6$	$G_{810}, G_{819}, G_{824}$	119, 126, 134
	(2, 2, 2)	G_{636}	F_{1620} n.54	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59, (2)^2,$ $2.73, 3.41, 6$	$G_{815}, G_{817}, G_{820},$ $G_{825}, G_{827}, G_{828}$	125, 114, 115, 128, 120, 131.
(2, 2, 2)	G_{637}	F_{165} n.39	$(-2)^8, -0.56,$ $(0.38)^2, 1,$ $(2.62)^2, 3.56, 6$	$G_{83}, G_{85}, G_{810},$ $G_{811}, G_{813}, G_{814},$ $G_{816}, G_{819}, G_{820},$ $G_{825}, G_{826},$ G_{827}, G_{828}	124, 123, 119, 130, 117, 121, 115, 126, 118, 128, 122, 120, 131.	
(2, 2, 2)	G_{638}	F_{1619} n.53	$(-2)^8, -0.73,$ $0, 0.59, (2)^2,$ $2.73, 3.41, 6$	$G_{812}, G_{813}, G_{814},$ G_{815}, G_{828}	116, 117, 121, 125, 131.	

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$6 = \frac{16}{2} - 2$	(2, 2, 2)	G_{639}	F_{168} n.42	$(-2)^8, -0.56,$ $(0.38)^2, 1,$ $(2.62)^2, 3.56, 6$	$G_{87}, G_{812}, G_{813},$ $G_{814}, G_{815}, G_{817},$ $G_{825}, G_{827}, G_{828}.$	132, 116, 117, 121, 125, 114, 128, 120, 131.
	(0, 3, 3)	G_{640}	F_{161} n.35	$(-2)^8, (0)^2,$ $(0.59)^2, 2,$ $(3, 41)^2, 6$	$G_{81}, G_{82}, G_{83},$ $G_{84}, G_{85}, G_{86},$ $G_{87}, G_{819}, G_{825}.$	109, 111, 124, 108, 123, 129, 132, 126, 128.
	(1, 2, 3)	G_{641}	F_{162} n.36	$(-2)^8, (0)^2,$ $(0.59)^2, 2,$ $(3.41)^2, 6$	$G_{84}, G_{814}, G_{825},$ $G_{828}.$	108, 121, 128, 131.
	(2,2,2)	G_{642}^2	F_{1622} n.56	$(-2)^8, (-0.30)^2,$ $(1)^2, 2,$ $(3.30)^2, 6$	$G_{820}.$	118.
$10 = \frac{20}{2} - 2$	(2, 2, 4)	G_{81}	F_{202} n.109	$(-2)^{12}, 0, (2)^4,$ $(4)^2, 8$	$G_{105}, G_{106}.$	158, 155.
	(2, 2, 4)	G_{82}	F_{204} n.111	$(-2)^{12}, 0, (2)^4,$ $(4)^2, 8$	$G_{102}, G_{104},$ $G_{105}, G_{107}.$	159, 157, 158, 160.
	(2, 2, 4)	G_{83}	F_{2017} n.124	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{104}, G_{105},$ $G_{106}.$	157, 158, 155.
	(2, 3, 3)	G_{84}	F_{201} n.108	$(-2)^{12}, 0, (2)^4,$ $(4)^2, 8$	$G_{104}, G_{106},$ $G_{1010}.$	157, 155, 156.
	(2, 3, 3)	G_{85}	F_{2016} n.123	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{103}, G_{105},$ $G_{106}.$	153, 158, 155.
	(2, 3, 3)	G_{86}	F_{2022} n.129	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{102}, G_{103},$ $G_{105}.$	159, 153, 158.
	(2, 3, 3)	G_{87}	F_{2025} n.132	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{104}, G_{106},$ $G_{107}.$	157, 155, 160.
	(0, 4, 4)	G_{88}	Grafo linha	$(-2)^{12}, 0,$ $(2)^4, (4)^2, 8$	$G_{101}, G_{102},$ $G_{103}.$	-, 159, 153.
	(0, 4, 4)	G_{89}	F_{205} n.112	$(-2)^{12}, 0,$ $(2)^4, (4)^2, 8$	$G_{102}, G_{105}.$	159, 158.
	(2, 3, 3)	G_{810}	F_{2012} n.119	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(2, 3, 3)	G_{811}	F_{2023} n.130	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{103}, G_{104},$ $G_{105}.$	153, 157, 158.
	(2, 3, 3)	G_{812}	F_{209} n.116	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(2, 3, 3)	G_{813}	F_{2010} n.117	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(2, 3, 3)	G_{814}	F_{2014} n.121	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{106}, G_{1010}.$	155, 156.
	(2, 3, 3)	G_{815}	F_{2018} n.125	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2,$ 4, 8	$G_{106}.$	155.
	(2, 3, 3)	G_{816}	F_{208} n.115	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(2, 3, 3)	G_{817}	F_{207} n.114	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(2, 3, 3)	G_{818}	F_{206} n.113	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
(2, 3, 3)	G_{819}	F_{2019} n.126	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	$G_{105}, G_{1010}.$	158, 156.	

²Construído pela extensão de G_{415} e não a partir de $2C_4, C_3 \dot{\cup} C_5$ ou C_8 .

Regularidade $(r = \frac{n}{2} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$6 = \frac{16}{2} - 2$	(2, 3, 3)	G_{820}	F_{2011} n.118	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(0, 0, 8)	G_{821}	Grafo desconexo	$(-2)^8, (0)^1 0, (8)^2$	G_{108}	-.
	(1, 3, 4)	G_{822}	F_{2020} n.127	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	G_{105}, G_{106}	158, 155.
	(2, 2, 4)	G_{823}	Grafo linha	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	G_{102}, G_{105}	159, 158.
	(2, 3, 3)	G_{824} ³	F_{2027} n.134	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	G_{101}, G_{105}	-, 158.
	(2, 2, 4)	G_{825}	F_{2021} n.128	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	$G_{104}, G_{106},$ G_{1010}	157, 155, 156.
	(2, 3, 3)	G_{826}	F_{2015} n.122	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	$G_{106}, G_{109},$ G_{1010}	155, 154, 156.
	(2, 3, 3)	G_{827}	F_{2013} n.120	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-
	(2, 3, 3)	G_{828}	F_{2024} n.131	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	G_{1010}	156.
	(1, 3, 4)	G_{829}	F_{2026} n.133	$(-2)^{12}, (0.59)^2,$ $(2)^2, (3.41)^2, 4, 8$	$G_{102}, G_{104},$ G_{105}	159, 157, 158.
	(0, 4, 4)	G_{830}	F_{203} n.110	$(-2)^{12}, 0, (2)^4,$ $(4)^2, 8$	G_{102}, G_{103}	159, 153.
(2, 3, 3)	G_{831}	Grafo linha	$(-2)^{12}, 0, (1.38)^2,$ $(3)^2, (3.62)^2, 8$	não tem	-	
$10 = \frac{24}{2} - 2$	(2, 4, 4)	G_{101}	Grafo linha	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{121}, G_{122}	161.
	(2, 4, 4)	G_{102}	F_{247} n.159	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{122}	161.
	(2, 4, 4)	G_{103}	F_{241} n.153	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{122}	161.
	(3, 3, 4)	G_{104}	F_{245} n.157	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{123}	163.
	(2, 4, 4)	G_{105}	F_{246} n.158	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{122}, G_{123}	161, 163.
	(3, 3, 4)	G_{106}	F_{243} n.155	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{123}	163.
	(2, 4, 4)	G_{107}	F_{248} n.160	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{123}	163.
	(0, 0, 10)	G_{108}	Grafo desconexo	$(-2)^{10}, 0^{10}, (10)^2$	G_{124}	-.
	(3, 3, 4)	G_{109}	F_{242} n.154	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{125}	162.
	(3, 3, 4)	G_{1010}	F_{244} n.156	$(-2)^{16}, 2^3, (4)^4, 10$	G_{123}, G_{125}	162, 163.
$12 = \frac{28}{2} - 2$	(4, 4, 4)	G_{121}	Grafo linha	$(-2)^{20}, (4)^7, 12$		
	(4, 4, 4)	G_{122}	F_{281} ⁴ n.161	$(-2)^{20}, (4)^7, 12$	não tem	-
	(4, 4, 4)	G_{123}	F_{283} ⁴ n.163	$(-2)^{20}, (4)^7, 12$	não tem	-
	(0, 0, 12)	G_{124}	Grafo desconexo	$(-2)^{12}, (0)^{14}, 12^2$	não tem	-
	(4, 4, 4)	G_{125}	F_{282} ⁴ n.162	$(-2)^{20}, (4)^7, 12$	não tem	-

³Grafo que se obtém por extensão de grafos linha.⁴Grafos Chang

A.2.2 Resultados obtidos para $(\mathcal{L}_2, \underline{\mathcal{N}})$

Regularidade $(r = \frac{2 \times n}{3} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0,2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$2 = \frac{2 \times 6}{3} - 2$		C_6	Grafo linha	$-2, (-1)^2,$ $(1)^2, 2$	$Q_{41}, Q_{43},$ Q_{44}	164, -, -
		$2K_3$	Grafo desconexo	$(-1)^4, (2)^2$	Q_{42}, Q_{43}	165, -.
$4 = \frac{2 \times 9}{3} - 2$	(2, 2, 2)	Q_{41}	S_{91} n.164	$(-2)^2, (-1.53)^2,$ $(-0.35)^2, (1.88)^2,$ 4	$Q_{61}, Q_{62},$ Q_{63}	167, 170, 166.
	(2, 2, 2)	Q_{42}	S_{92} n.165	$(-2)^2, -1.56,$ $(-1)^2, 0,$ 1, 2.56, 4	$Q_{61}, Q_{64},$ Q_{65}	167, 169, 168.
	(2, 2, 2)	Q_{43}	Grafo linha	$(-2)^3, (-1)^2,$ $(1)^2, 2, 4$	Q_{61}, Q_{66}	167, -.
	(2, 2, 2)	Q_{44}	Grafo linha	$(-2)^4, (1)^4, 4$	Q_{63}	166.
$6 = \frac{2 \times 12}{3} - 2$	(3, 3, 3)	Q_{61}	S_{122} n.167	$(-2)^5, -1.41,$ $-0.73, 1.41,$ 2, 2.73, 6	$Q_{81}, Q_{83},$ Q_{84}, Q_{85}	173, 171, 172, 176.
	(3, 3, 3)	Q_{62}	S_{125} n.170	$(-2)^5, (-0.73)^2,$ $(0)^2, (2.73)^2, 6$	$Q_{81}, Q_{82},$ Q_{85}	173, 174, 176.
	(3, 3, 3)	Q_{63}	S_{121} n.166	$(-2)^5,$ $(-1.30)^2, (1)^2,$ $(2.30)^2, 6$	Q_{82}, Q_{85}	174, 176.
	(3, 3, 3)	Q_{64}	S_{124} n.169	$(-2)^5, -1,$ $(-0.62)^2, (1.62)^2,$ 3, 6	Q_{81}	173.
	(3, 3, 3)	Q_{65}	S_{123} n.168	$(-2)^5, -1.24,$ $(0)^3, 2, 3.24, 6$	$Q_{81}, Q_{83},$ Q_{86}	173, 171, 175.
	(3, 3, 3)	Q_{66}	Grafo linha	$(-2)^6, (0)^2,$ $(2)^3, 6$	Q_{83}, Q_{87}	171, -.
$8 = \frac{2 \times 15}{3} - 2$	(4, 4, 4)	Q_{81}	S_{153} n.173	$(-2)^8, -0.73,$ 0, 0.59, 2, 2.73, 3.41	$Q_{101}, Q_{102},$ Q_{103}	180, 178, 177.
	(4, 4, 4)	Q_{82}	S_{154} n.174	$(-2)^8, (-0.30)^2,$ $(1)^2, (3.30), 8$	Q_{101}, Q_{104}	180, 179.
	(4, 4, 4)	Q_{83}	S_{151} n.171	$(-2)^8, -1.24, 0,$ $(2)^3, 3.24, 8$	Q_{103}	177.
	(4, 4, 4)	Q_{84}	S_{152} n.172	$(-2)^8, -1, (0.38)^2,$ $(2.61)^2, 3, 8$	Q_{103}	177.
	(4, 4, 4)	Q_{85}	S_{156} n.176	$(-2)^8, (0.73)^2,$ $(2)^3, (2.73), 8$	Q_{101}	180.
	(4, 4, 4)	Q_{86}	S_{155} n.175	$(-2)^8, (0)^3,$ $(2)^2, 4, 8$	Q_{102}	178.
	(4, 4, 4)	Q_{87}	Grafo linha	$(-2)^9, (2)^5, 8$	não tem	-
$10 = \frac{2 \times 18}{3} - 2$	(5, 5, 5)	Q_{101}	S_{184} n.180	$(-2)^{11},$ $(0.12)^2, (2.35)^2,$ $(3.53)^2, 10$	Q_{122}	182.
	(5, 5, 5)	Q_{102}	S_{182} n.178	$(-2)^{11}, 0, (1)^2,$ $(3)^2, 4, 10$	Q_{121}, Q_{122}	181, 182.
	(5, 5, 5)	Q_{103}	S_{181} n.177	$(-2)^{11}, -0.56,$ 1, 2, $(3)^2,$ 3.56, 10	Q_{121}	181.
	(5, 5, 5)	Q_{104}	S_{183} n.179	$(-2)^{11}, (1)^4,$ $(4)^2, 10$	Q_{122}	182.

Regularidade $(r = \frac{2 \times n}{3} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (0, 2)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$12 = \frac{2 \times 21}{3} - 2$	(6, 6, 6)	Q12 ₁	S21 ₁ n.181	$(-2)^{14}, 0,$ $(3)^4, 4, 12$	não tem	–
	(6, 6, 6)	Q12 ₂	S21 ₂ n.182	$(-2)^{14}, (1)^2,$ $(3)^2, (4)^2, 12$	Q14 ₁	183
$14 = \frac{2 \times 24}{3} - 2$	(7, 7, 7)	Q14 ₁	S24 ₁ n.183	$(-2)^{17}, (2)^2,$ $(4)^4, 14$	Q16 ₁	184
$16 = \frac{2 \times 27}{3} - 2$	(8, 8, 8)	Q16 ₁	S27 ₁ ⁵ n.184	$(-2)^{20}, (4)^6, 16$	não tem	–

A.2.3 Resultados obtidos para $(\mathcal{L}_{3, \preceq})$

Regularidade $(r = \frac{3 \times n}{4} - 2)$	Solução tipo (x_1, x_2, x_3, x_4)	Grafo a estender: designação		Espectro	Grafos obtidos por (1, 3)-extensão que induz partição equilibrada: designação	
		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]		Algoritmo	Tabela A3[CRS04]
$2 = \frac{3 \times 6}{4} - 2$		2K ₂	Grafo desconexo	$(-1)^2, (1)^2$	R4 ₁ , R4 ₂	-, 185.
$4 = \frac{3 \times 8}{4} - 2$	(2, 2, 2, 2)	R4 ₁	Grafo linha	$(-2)^2, (0)^3,$ 2, 4	R7 ₁	186.
	(2, 2, 2, 2)	R4 ₂	T8 ₁ n.185	$(-2)^2,$ $(-1.41)^2, 0,$ $(-1.41)^2, 4$	R7 ₁	186.
$7 = \frac{3 \times 12}{4} - 2$	(3, 3, 3, 3)	R7 ₁	T12 ₁ n.186	$(-2)^6,$ $-1, (1)^2,$ $(2)^2, 7$	R10 ₁	187.
$10 = \frac{3 \times 16}{4} - 2$	(4, 4, 4, 4)	R10 ₁	T16 ₁ ⁶ n.187	$(-2)^{10},$ $(2)^5, 10$	não tem	–

⁵Grafo Schläfli

⁶Grafos Clebsh

Referências Bibliográficas

- [BC04] R. Barbosa and D. M. Cardoso. On regular-stable graphs. *Ars Combinatória*, 70:149–155, 2004.
- [BCC⁺14] I. Barbedo, D. M. Cardoso, D. Cvetković, P. Rama, and S. Simić. A recursive construction of the regular exceptional graphs with least eigenvalue -2 . *Portugaliae Mathematica*, 71(2):79–96, 2014.
- [BCN89] A. E. Brouwer, A. M. Cohen, and A. Neumaier. *Distance-Regular Graphs*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [BCS76] F. C. Bussemaker, D. Cvetković, and J. Seidel. Graphs related to exceptional root systems. Technical Report 76-WSK-05, Technische Hogeschool, Technological University Eindhoven, 1976.
- [BCS78] F. C. Bussemaker, D. Cvetković, and J. J. Seidel. Graphs related to exceptional root systems, combinatorics i, ii. In V.T. Sos A. Hajnal, editor, *Proceedings of V Hungarian Colloquium on Combinatorics, Keszthely 1976*, pages 185–191. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [Bei70] L. W. Beineke. Characterizations of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 9(2):129 – 135, 1970.
- [Big74] N. Biggs. *Algebraic Graphs theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st edition, 1974.
- [BN92] F. C. Bussemaker and A. Neumaier. Exceptional graphs with smallest eigenvalue -2 and related problems. *Mathematics of Computation*, 59(200):583–608, 1992.

- [BP98] S. Brin and L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and {ISDN} Systems*, 30(1–7):107 – 117, 1998. Proceedings of the Seventh International World Wide Web Conference.
- [CC06] D. M. Cardoso and D. Cvetković. Graphs with least eigenvalue -2 attaining a convex quadratic upper bound for stability number. *Bulletin de l' Académie Serbe des sciences et des arts - Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, sciences mathématiques*, CXXXIII(31):41–55, 2006.
- [CDS80a] D. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of Graphs*. Academic Press, New York, 1980.
- [CDS80b] D. Cvetković, M. Doob, and S. Simić. Some results on generalized line graphs. *Comptes Rendus Math*, 2(3):147–150, 1980.
- [CDS81] D. Cvetković, M. Doob, and S. Simić. Generalized line graphs. *J. Graph Theory*, 5(4):385–399, 1981.
- [CDS95] D. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs. *Spectra of Graphs: Theory and Applications*. Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg-Leipzig, 3rd edition, 1995.
- [CGSS76] P. J. Cameron, J. M. Goethals, J. J. Seidel, and E. E. Shult. Line graphs, root systems, and elliptic geometry. *Journal of Algebra*, 43(1):305 – 327, 1976.
- [CKL07] D. M. Cardoso, M. Kaminski, and V. Lozin. Maximum k -regular induced subgraphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, 14(4):455–463, 2007.
- [CLRS98] D. Cvetković, M. Lepović, P. Rowlinson, and S. Simić. A database of star complements of graphs. *Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak., Ser. Mat.*, 9:103–112, 1998.
- [CLRS02] D. Cvetković, M. Lepović, P. Rowlinson, and S. Simić. The maximal exceptional graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 86(2):347 – 363, 2002.
- [CP84] D. Cvetković and M. Petrić. A table of connected graphs on six vertices. *Discrete Mathematics*, 50(0):37 – 49, 1984.

- [CR84] D. Cvetković and Z. Radosavljević. A construction of the 68 connected regular graphs, non-isomorphic but cospectral to line graphs. In D. Cvetković, I. Gutman, T. Pisanski, and R. Tošić, editors, *Proceedings of Fourth Yugoslav Seminar on Graph Theory, Novi Sad*, Graph Theory, pages 101–123, Univ. Novi Sad Inst. Math., Novi Sad, April 15–16, 1983 1984.
- [CR04] D. M. Cardoso and P. Rama. Equitable bipartitions of graphs and related results. *Journal of Mathematical Sciences*, 120(1):869–880, 2004.
- [CRS] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Graphs with least eigenvalue -2 : ten years on. To appear.
- [CRS93] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. A study of eigenspaces of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 182(0):45 – 66, 1993.
- [CRS97] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. *Eigenspace of Graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [CRS01] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. Graphs with least eigenvalue -2 : The star complement technique. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 14(1):5–16, 2001.
- [CRS04] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. *Spectral Generalizations of Line Graphs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [CRS10] D. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić. *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [CS57] L. Collatz and U. Sinogowitz. Spektren endlicher grafen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 21:63–77, 1957.
- [CS11] D. Cvetković and S. Simić. Graph spectra in computer science. *Linear Algebra and its Applications*, 434(6):1545 – 1562, 2011.
- [CSR09] D. M. Cardoso, J. Szymanski, and M. Rostami. *Matemática Discreta: Combinatória, Teoria dos Grafos, Algoritmos*. Escolar Editora, 2009.
- [CSZ08] D. M. Cardoso, I. Sciriha, and C. Zerafa. Main eigenvalues, (κ, τ) -regular sets and hamiltonian graphs. *Cadernos de Matemática da Universidade de Aveiro*, 2008.

- [CT04] J. Chen and L. Trajkovic. Analysis of internet topology data. In *Circuits and Systems, 2004. ISCAS '04. Proceedings of the 2004 International Symposium on*, volume 4, pages IV–629–32 Vol.4, May 2004.
- [Cve02] D. Cvetković. Graphs with least eigenvalue -2 : a historical survey and recent developments in maximal exceptional graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 356(1–3):189 – 210, 2002.
- [Cve09] D. Cvetković. Applications of graph spectra: an introduction to the literature. *Zbornik Radova*, (21):7–32, 2009.
- [DC79] M. Doob and D. Cvetković. On spectral characterizations and embeddings of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 27(0):17 – 26, 1979.
- [Doo82] M. Doob. A surprising property of the least eigenvalue of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 46:1–7, 1982.
- [Ell93] M. N. Ellingham. Basic subgraphs and graph spectra. *Australasian J. Combin*, 8:247–265, 1993.
- [God93] C. D. Godsil. *Algebraic combinatorics*. Chapman & Hall, New York, 1993.
- [GR01] C. D. Godsil and G. Royle. *Algebraic graph theory*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001.
- [Hae80] W. Haemers. *Eigenvalue techniques in design and graph theory*. PhD thesis, Technical University Eindhoven, 1980.
- [Hae95] W. H. Haemers. Interlacing eigenvalues and graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 226–228(0):593 – 616, 1995. Honoring J.J.Seidel.
- [Hüc31] E. Hückel. Quantentheoretische beiträge zum benzolproblem. *Zeitschrift für Physik*, 70(3-4):204–286, 1931.
- [HKT00] M. M. Halldórsson, J. Kratochvíl, and J. A. Telle. Independent sets with domination constraints. *Discrete Applied Mathematics*, 99(1–3):39 – 54, 2000.
- [Hof60] A. J. Hoffman. On the uniqueness of the triangular association scheme. *The Annals of Mathematical Statistics*, 31(2):492–497, 06 1960.

- [Hof68] A. J. Hoffman. Some recent results on spectral properties of graphs. *Beiträge zur Graphentheorie*, pages 75–80, Leipzig, 1968.
- [Hof70] A. J. Hoffman. $-1 - \sqrt{2}$. *Combinatorial Structures and Their Applications*, pages 173–176, New York, 1970.
- [Kle99] J. M. Kleinberg. Authoritative sources in a hyperlinked environment. *J. ACM*, 46(5):604–632, September 1999.
- [Lov79] L. Lovász. On the shannon capacity of a graph. *IEEE Transaction information theory*, 25(1):1–7, 1979.
- [LWH03] B. Luo, R. C. Wilson, and E. R. Hancock. Spectral embedding of graphs. *Pattern Recognition*, 36(10):2213 – 2230, 2003.
- [McK76] G. J. McKay. Backtrack programming and the graph isomorphism problem. Master’s thesis, University of Melbourne, 1976.
- [Neu82] A. Neumaier. Regular sets and quasi-symmetric 2-designs. In Dieter Jungnickel and Klaus Vedder, editors, *Combinatorial Theory*, volume 969 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 258–275. Springer Berlin Heidelberg, 1982.
- [PS82] D. L. Powers and M. M. Sulaiman. The walk partition and colorations of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 48(0):145 – 159, 1982.
- [Row93] P. Rowlinson. Eutactic stars and graph spectra. In R. A. Brueledi, S. Friedland, and V. Klee, editors, *Combinatorial and Graph-Theoretic Problems in Linear Algebra*, pages 153–164. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [RSV81] S. B. Rao, N. M. Singhi, and K.S. Vijayan. The minimal forbidden subgraphs for generalized line graphs. In S.B. Rao, editor, *Combinatorics and Graph Theory*, volume 885 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 459–472. Springer-Verlag, 1981.
- [Sac66] H. Sachs. Über teiler, faktoren und charakteristische polynome von graphen. teil i. *Wiss. Z. TH Ilmenau*, 12:7–12, 1966.

- [Sac67] H. Sachs. Über teiler, faktoren und charakteristische polynome von graphen. teil ii. *Wiss. Z. TH Ilmenau*, 13:405–412, 1967.
- [Sch74] A. J. Schwenk. Computing the characteristic polynomial of a graph. In Ruth A. Bari and Frank Harary, editors, *Graphs and Combinatorics*, volume 406 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 153–172. Springer Berlin Heidelberg, 1974.
- [Tel93] J. A. Telle. Characterization of domination-type parameters in graphs. *Congressus Numer.s.*, (94):9–16, 1993.
- [Tho81] D. M. Thompson. Eigengraphs: constructing strongly regular graphs with block designs. *Utilitas Math.*, (20):83–115, 1981.
- [WHL05] R. C. Wilson, E. R. Hancock, and B. Luo. Pattern vectors from algebraic graph theory. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 27(7):1112–1124, July 2005.

Índice Remissivo

- (κ, τ) -extensão, 13
- (κ, τ) -extensão de tamanho n_2 , 13
- (κ, τ) -extensão que induz uma partição equi-
 - librada, 17
- complemento estrela, 39
- conjunto
 - (κ, τ) -regular, 8
- conjunto estrela, 39
- design
 - 1-design, 9
 - blocos do, 9
 - grafo de incidência, 9
 - matriz de incidência, 9
- espetro, 8
- estrela, 33
- estrela fechado, 33
- grafo
 - cocktail party, 27
 - excecional, 28
 - linha, 27
 - linha generalizado, 28
 - matriz de adjacência, 7
 - quociente, 10
 - raiz, 28
 - representado no sistema de raízes, 33
 - simples, 7
 - grafo excecional
 - 1ª camada, 38
 - 2ª camada, 38
 - 3ª camada, 38
 - grafo excecional, 28
 - matriz
 - adjacência, 7
 - Gram, 32
 - incidência de um grafo, 7
 - quociente, 10
 - multiplicidade do valor próprio, 8
 - partição
 - bipartição equilibrada, 10
 - equilibrada, 10
 - raio espectral, 8
 - sistema de linhas
 - decomponível, 32
 - indecomponível, 32
 - sistema de raízes, 33
 - sistemas de linhas, 32
 - soluções tipo, 57
 - subgrafo proibido, 29

vértices

adjacentes ou vizinhos, 7